Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātikas nodaļa
Matemātiskās analīzes katedra

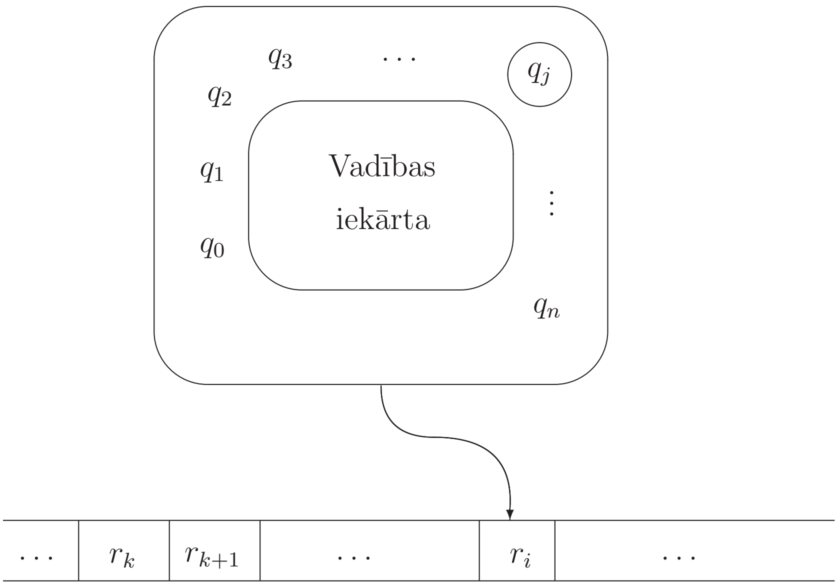
Jānis Buls

UNIVERSĀLĀ TJŪRINGA MAŠĪNA

2014

1. nodaļa

1.1. Tjūringa mašīnas modelis



1.1. zīm.: Tjūringa mašīnas principiālā darbības shēma.

Tjūringa mašīnas būtiska sastāvdaļa ir bezgalīga atmiņas iekārta, kas sadalīta šūnās:

$$\ldots, R_{-1}, R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$$

Šo atmiņas iekārtu sauc par *lentu.* Tā ir abpusēji bezgalīga. Katrā šūnā R_i ierakstīts patvaļīgs kādas fiksētas galīgas kopas

$$A = \{t, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

elements. Kopu A sauc par Tjūringa mašīnas *ārējo alfabētu*, kopas A elementus — par *burtiem.*

Otra Tjūringa mašīnas būtiska sastāvdaļa ir tās *iekšējais alfabēts* jeb *stāvokļu kopa* Q. Tāpat kā ārējais alfabēts arī iekšējais alfabēts ir galīgs, proti, kopa Q ir galīga. Tjūringa mašīna vienmēr atrodas kādā no kopas Q stāvokļiem. Citiem vārdiem sakot katrā laika momentā ir aktivizēts kāds no stāvokļiem $q_j \in Q$.

Visbeidzot trešā sastādaļa ir vadības iekārta, kas funkcionē saskaņā ar ievietoto programmu. Programma — tā ir galīga komandu kopa

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}.$$

Katra komanda K_ν ir simbolu virkne izskatā

$$q_j r_i \mapsto a\bigstar q$$

Te

- q_j un q ir stāvokļu kopas Q elementi;
- r_i un a ir alfabēta A burti;
- $\bigstar$ ir viens no kopas $\{\Lsh, \top, \Rsh\}$ elementiem.

Shematiski tas viss attēlots 1.1. zīmējumā. Attēlā Tjūringa mašīnai aktivizēts iekšējais stāvoklis q_j (tā atrodas stāvoklī q_j). Tai pašā laikā vadības iekārtas galviņa aplūko i–to šūnu, kurā ierakstīts alfabēta A burts r_i.

Tagad aprakstīsim Tjūringa mašīnas vadības iekārtas darbību. Tjūringa mašīna darbojas diskrētos laika momentos

$$0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots$$

Pieņemsim, ka laika momentā τ Tjūringa mašīnas galviņa aplūko šūnu ar ierakstu r_i un tā atrodas stāvoklī q_j (ilustrāciju skatīt 1.1. zīmējumā). Tas nozīmē, ka laika momentā τ Tjūringa mašīna izpilda komandu

$$q_j r_i \mapsto a\bigstar q\,,$$

proti,

- Tjūringa mašīna šai laika momentā τ aizstāj ierakstu r_i ar ierakstu a un aktivizē stāvokli q;

- izlemj, kuru šūnu galviņa aplūkos nākošajā laika momentā $\tau + 1$:

a) ja $\bigstar = \Lsh$, tad nākošajā laika momentā galviņa aplūkos $i - 1$–mo šūnu, t.i., galviņa pārvietojas vienu šūnu pa kreisi;

b) ja $\bigstar = \top$, tad nākošajā laika momentā galviņa aplūkos to pašu i–to šūnu, t.i., galviņa nepārvietojas;

c) ja $\bigstar = \Rsh$, tad nākošajā laika momentā galviņa aplūkos $i + 1$–mo šūnu, t.i., galviņa pārvietojas vienu šūnu pa labi.

Mēs tomēr ne katru galīgu komandu kopu atzīsim par Tjūringa mašīnas programmu. Pieņemsim, ka

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\} \qquad \text{un} \qquad Q_0 \leftharpoondown Q \setminus \{q_0\},$$

tad

- $q_j \neq q_0$, proti, stāvokli q_0 uzskatīsim par beigu stāvokli, t.i., ja Tjūringa mašīna aktivizē stāvokli q_0, tad tas nozīmē, ka tā darbu ir beigusi (apstājusies);

- $q_0 \neq q_1$. Stāvokli q_1 mēs izmantosim kā Tjūringa mašīnas sākuma stāvokli, proti, Tjūringa mašīna vienmēr darbu uzsāk atrodoties stāvoklī q_1. Tātad $|Q| \geq 2$.

- Mēs prasam, lai katram pārim $(q_j, r_i) \in Q_0 \times A$ atbilstu tieši viena programmas komanda
$$q_j r_i \mapsto a \bigstar q\,.$$
Tā rezultātā katra Tjūringa mašīnas programma P sastāv no $m(n+1)$ komandas, t.i., $|P| = m(n+1)$.

Tagad mēs varam atbildēt uz jautājumu:
— Kā lietojama Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$?

Lietotājs, teiksim Alise, vispirms uzraksta Tjūringa mašīnas programmu

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}.$$

Šo programmu ievieto mašīnā. Konkrētas Tjūringa mašīnas realizācijas gadījumā konstruktoram saprotams jāparedz, kā šī programma tiks ievadīta mašīnā, taču mūs neinteresē konkrēta Tjūringa mašīnas realizācija, tāpēc mēs uzskatīsim, ka Alises vienīgais pienākums ir korekti uzrakstīt Tjūringa mašīnas programmu, piemēram, uz papīra.

Nākošais solis: Alise ievada Tjūringa mašīnas atmiņas visās šūnās R_i sākuma datus, t.i., burtus $r_i \in A$. Taču te ir viens būtisks ierobežojums, proti, tikai galīgā skaitā šūnu drīkst ierakstīt burtus, kas atšķiras no burta t. Vēl vairāk, mēs prasam, lai tiktu ievērots šāds nosacījums:

$$\text{ja} \qquad r_\varkappa \neq t \neq r_{\varkappa+i}, \qquad \text{tad} \qquad \forall j \in \overline{0,i}\ (r_{\varkappa+j} \neq t).$$

Visbeidzot konstruktori ir paredzējuši, ka nospiežot starta pogu Tjūringa mašīna aktivizē stāvokli q_1, t.i., Tjūringa mašīna sāk darbu; sākas diskrētu laika momentu

$$0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots$$

atskaite. Laika momentā $\tau = 0$ Tjūringa mašīnas galviņa aplūko šūnu, kurā ierakstīts burts

$$r_\varkappa \neq t, \qquad \text{piedevām}, \qquad \forall j < \varkappa\ (r_j = t).$$

Šai situācijā mēs teiksim, ka galviņa atrodas uz ieraksta sākuma. Jāatzīmē viens izņēmums, proti, ja visās šūnās ierakstīts burts t, tad Tjūringa mašīnas galviņa aplūko šūnu R_0. Tālāko Tjūringa mašīnas darbību mēs jau esam aprakstījuši iepriekš (skatīt tekstu sākot ar teikumu "Pieņemsim, ka laika momentā τ Tjūringa mašīnas galviņa aplūko šūnu ar ierakstu r_i un tā atrodas stāvoklī q_j").

Ja kādā laika momentā Tjūringa mašīna beidz darbu un tās galviņa atrodas uz ieraksta sākuma, tad vārdu (t.i, burtu virkni)

$$\varrho_k, \varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_{k+\iota}$$

uzskatīsim par Tjūringa mašīnas darba rezultātu. Te

$$\varrho_k \neq t \neq \varrho_{k+\iota}, \qquad \forall j < k\ (\varrho_j = t) \qquad \text{un} \qquad \forall j > k + \iota\ (\varrho_j = t).$$

Atkal jāatzīmē viens izņēmums, proti, ja visās šūnās ierakstīts burts t, tad tukšo vārdu uzskatīsim par Tjūringa mašīnas darba rezultātu.

Skaidrojums. Parasti vārda definīciju vēl papildina ar norunu, ka drīkst lietot arī tā saukto *tukšo vārdu*, kas nesatur nevienu burtu. Šis vārds ir, varētu sacīt, vienkārši tukša vieta. Vienosimies tukšo vietu apzīmēt ar grieķu burtu "lambda": λ.

Ja

$$\forall j < \varkappa\,(r_j = t), \qquad \forall j \in \overline{0,i}\,(r_{\varkappa+j} \neq t) \qquad \text{un} \qquad \forall j > \varkappa + i\,(r_j = t),$$

tad teiksim, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ vārdu

$$r_\varkappa, r_{\varkappa+1}, \ldots, r_{\varkappa+i}$$

pārstrādā par vārdu

$$\varrho_k, \varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_{k+\iota}$$

Ja $\forall j\ (r_j = t)$, tad teiksim, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ tukšo vārdu pārstrādā par vārdu

$$\varrho_k, \varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_{k+\iota}$$

Ja $\forall j\ (\varrho_j = t)$, tad teiksim, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ vārdu

$$r_\varkappa, r_{\varkappa+1}, \ldots, r_{\varkappa+i}$$

pārstrādā par tukšo vārdu λ. Ja gan $\forall j\ (r_j = t)$, gan $\forall j\ (\varrho_j = t)$, tad teiksim, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ tukšo vārdu λ pārstrādā par par tukšo vārdu λ. Visos šais gadījumos teiksim, ka rēķināšana ar Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}$ *konverğē*. Pārejos gadījumos teiksim, ka rēķināšana ar Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}$ *diverğē*.

Turpmāk mēs Tjūringa mašīnu identificēsim ar tās vienu būtisku sastāvdaļu, proti, programmu. Tā, piemēram, tai vietā, lai teiktu, ka mūsu rīcībā ir Tjūringa mašīna, kuras programma ir

$$\begin{array}{rcl} q_1\,t & \mapsto & t\top q_0 \\ q_1\,0 & \mapsto & 0\top q_0 \\ q_1\,1 & \mapsto & 1\top q_0 \end{array}$$

mēs teiksim:

— Pieņemsim, ka dota Tjūringa mašīna

$$\begin{array}{rcl} q_1\,t & \mapsto & t\top q_0 \\ q_1\,0 & \mapsto & 0\top q_0 \\ q_1\,1 & \mapsto & 1\top q_0 \end{array}$$

Šādi mēs reprezentējam Tjūringa mašīnu ar programmu $\{K_1, K_2, K_3\}$, kur

$$K_1 = q_1\ t \mapsto t \top q_0, \quad K_2 = q_1\ 0 \mapsto 0 \top q_0, \quad K_3 = q_1\ 1 \mapsto 1 \top q_0\,.$$

Dažkārt ērtības labad to visu mēs noformēsim kā tabulu:

	t	0	1
q_1	$t \top q_0$	$0 \top q_0$	$1 \top q_0$

1.2. Vārdi

Mēs jau iepriekšējā paragrāfā redzējām, ka Tjūringa mašīna pārveido vārdus par vārdiem. Tagad mēs noprecizēsim, ko īsti mēs saprotam ar terminu "vārds".

Pieņemsim, ka A — galīga kopa, ko turpmāk sauksim par *alfabētu.* Parasti alfabēta elementi ir *konstruktīvas* dabas objekti. Grāmatu lapās iespiestie burti ir tipisks konstruktīvu objektu piemērs. No kopu teorijas viedokļa var uzskatīt, ka alfabēts un kopa ir sinonīmi (vismaz klasiskās matemātikas ietvaros). Alfabēta elementus, t.i., elementāros simbolus, sauc arī par *burtiem.*

Katru kopas

$$A^+ \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

elementu $u \in A^+$ sauc par alfabēta A *netukšu vārdu.* Pieņemsim, ka

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_k), \qquad v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

ir alfabēta A netukši vārdi, tad

$$u\#v \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} (u_1, u_1, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Šo kopā A^+ definēto operāciju sauc par *konkatenāciju.*

Parasti vārda definīciju vēl papildina ar norunu, ka drīkst lietot arī tā saukto *tukšo vārdu*, kas nesatur nevienu burtu. Šis vārds ir, varētu sacīt, vienkārši tukša vieta. Vienosimies tukšo vietu apzīmēt ar grieķu burtu "lambda": λ.

Saskaņā ar norunu

$$\lambda\#\lambda \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} \lambda, \qquad \forall u \in A^+ \;\; \lambda\#u \mathrel{\overline{\leftharpoondown}} u \mathrel{\overline{\rightharpoondown}} u\#\lambda\,.$$

Kopu

$$A^* \rightleftharpoons A^+ \cup \{\lambda\}$$

sauc par *alfabēta A vārdu kopu.* Kopas A^* elementus sauc par *vārdiem.* Kā tas tradicionāli pieņemts, ja nerodas pārpratumi, tad konkatenācijas operāciju izlaiž un lieto pierakstu

$$uv \rightleftharpoons u\#v,$$

bez tam

$$u_1u_2\dots u_k \rightleftharpoons (u_1, u_2, \dots, u_k).$$

Ja $a = u_1 = u_2 = \dots = u_n$, tad lieto arī pierakstu $a^n \rightleftharpoons u_1u_2\dots u_n$. Savukārt $a^0 \rightleftharpoons \lambda$.

Pieņemsim, ka $u \in A^n$, tad skaitli n sauc par vārda u garumu, ko turpmāk apzīmēsim ar $|u|$. Saskaņā ar definīciju pieņemsim, ka $|\lambda| \rightleftharpoons 0$.

Trijnieku (u, v, u') sauc par vārda v *ieeju* vārdā w, ja $w = uvu'$. Ja $a \in A$ un $w \in A^*$, tad ar $|w|_a$ apzīmēsim burta a dažādo ieeju skaitu vārdā v.

Piemērs 1.2.1. Trijnieks $(p, asaka, \lambda)$ ir vārda *asaka* ieeja vārdā *pasaka.* Atzīmēsim, ka $|pasaka|_a = 3$, t.i., burts a vārdā *pasaka* ieiet 3 reizes.

Definīcija 1.2.2. *Vārdu $v \in A^*$ sauc par vārda $w \in A^*$ dalītāju jeb apašvārdu, ja eksistē tādi $u \in A^*$ un $u' \in A^*$, ka $w = uvu'$. Šai situācijā vārdu u sauc par priedēkli, bet u' — par piedēkli. Ja $\lambda \neq u \neq w$, tad u sauc par īstu priedēkli; līdzīgi, ja $\lambda \neq u' \neq w$, tad u' sauc par īstu piedēkli.*

Pieņemsim, ka $A = \{t, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, tad

$$A_t \rightleftharpoons A \setminus \{t\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\,.$$

Mēs lietosim pierakstu

$$\mathfrak{T}(u) = w\,,$$

ja Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ vārdu $u \in A_t^*$ pārstrādā par $w \in A^*$. Tātad tā vietā, lai teiktu (skatīt iepriekšējo paragrāfu), ka Tjūringa mašīna vārdu

$$r_\varkappa, r_{\varkappa+1}, \dots, r_{\varkappa+i}$$

pārstrādā par vārdu

$$\varrho_k, \varrho_{k+1}, \dots, \varrho_{k+\iota}\,,$$

mēs lietosim pierakstu

$$\mathfrak{T}(r_{\varkappa} r_{\varkappa+1} \dots r_{\varkappa+i}) = \varrho_k \varrho_{k+1} \dots \varrho_{k+\iota}$$

un teiksim, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ vārdu

$$r_{\varkappa} r_{\varkappa+1} \dots r_{\varkappa+i}$$

pārstrādā par vārdu

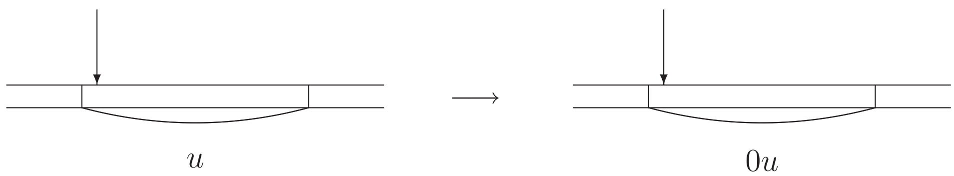
$$\varrho_k \varrho_{k+1} \cdots \varrho_{k+\iota} \,.$$

Piemēri 1.2.3. *Dotajos piemēros uzskatīsim, ka* $A = \{t, 0, 1\}$.

(i) Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_1$

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & 0 \top q_0 \\ q_1\, 0 & \mapsto & 0 \Lsh q_1 \\ q_1\, 1 & \mapsto & 1 \Lsh q_1 \end{array}$$

vārdam $u \in A_t^*$ priekšā pieraksta 0, proti, $\mathfrak{T}_1(u) = 0u$. Shematiski tas attēlots 1.2. zīmējumā.

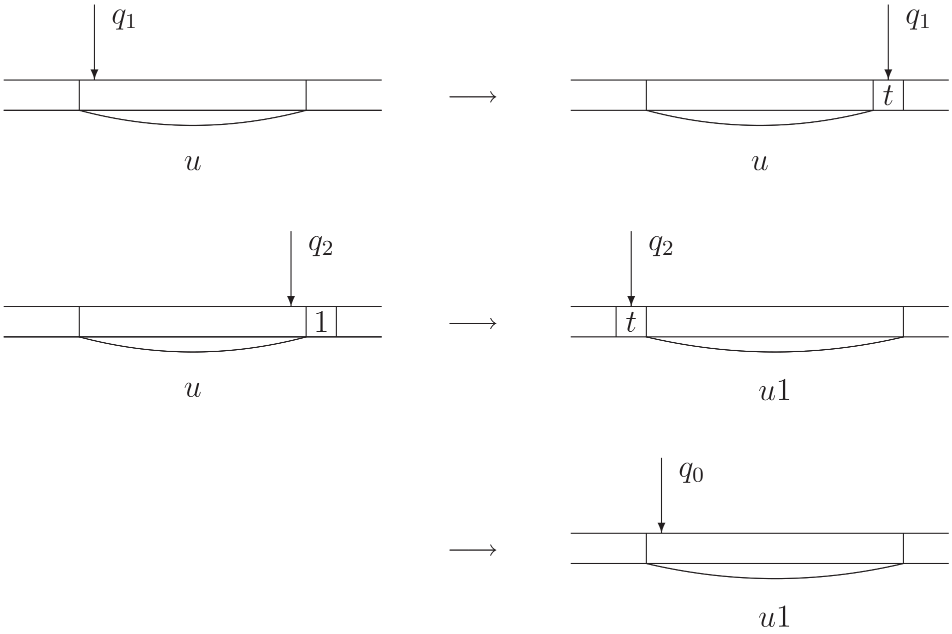


1.2. zīm.: $\mathfrak{T}_1(u) = 0u$.

(ii) Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_2$

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & 1 \Lsh q_2 \\ q_1\, 0 & \mapsto & 0 \Rsh q_1 \\ q_1\, 1 & \mapsto & 1 \Rsh q_1 \\ q_2\, t & \mapsto & t \Rsh q_0 \\ q_2\, 0 & \mapsto & 0 \Lsh q_2 \\ q_2\, 1 & \mapsto & 1 \Lsh q_2 \end{array}$$

aiz vārda $u \in A_t^*$ pieraksta 1, proti, $\mathfrak{T}_2(u) = u1$. Tjūringa mašīnas galviņa vispirms dodas uz vārda beigām (stāvoklis q_1), ieraksta 1 (stāvoklis q_1) un aktivizē stāvokli q_2, tad dodas uz vārda sākumu (stāvoklis q_2) un apstājas uz vārda sākuma (stāvoklis q_0). Līdz ar to pēc darba beigšanas galviņa atrodas uz ieraksta sākuma. Shematiski tas attēlots 1.3. zīmējumā.



1.3. zīm.: $\mathfrak{T}_2(u) = u1$.

(iii) Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_3$ kopē vārdu, proti, $\mathfrak{T}_3(u) = utu$. $\mathfrak{T}_3$ vispirms konstatē, kurš burts jākopē (stāvoklis q_1):

- ja galviņa aplūko burtu t, tad kopēšanas darbi ir beigušies, un atliek galviņu novietot uz ieraksta sākumu (stāvoklis q_{10});

- ja galviņa aplūko burtu 0, tad ar stāvokļu q_2, q_4 palīdzību galviņa nonāk līdz ieraksta beigām, ieraksta 0 (stāvoklis q_4), un atgriežas (stāvokļi q_6, q_8), lai nolasītu nākošo burtu;

- ja galviņa aplūko burtu 1, tad ar stāvokļu q_3, q_5 palīdzību galviņa nonāk līdz ieraksta beigām, ieraksta 1 (stāvoklis q_5), un atgriežas (stāvokļi q_7, q_9), lai nolasītu nākošo burtu.

	t	0	1
q_1	$t \Lsh q_{10}$	$t \Rsh q_2$	$t \Rsh q_3$
q_2	$t \Rsh q_4$	$0 \Rsh q_2$	$1 \Rsh q_2$
q_3	$t \Rsh q_5$	$0 \Rsh q_3$	$1 \Rsh q_3$
q_4	$0 \Lsh q_6$	$0 \Rsh q_4$	$1 \Rsh q_4$
q_5	$1 \Lsh q_7$	$0 \Rsh q_5$	$1 \Rsh q_5$
q_6	$t \Lsh q_8$	$0 \Lsh q_6$	$1 \Lsh q_6$
q_7	$t \Lsh q_9$	$0 \Lsh q_7$	$1 \Lsh q_7$
q_8	$0 \Rsh q_1$	$0 \Lsh q_8$	$1 \Lsh q_8$
q_9	$1 \Rsh q_1$	$0 \Lsh q_9$	$1 \Lsh q_9$
q_{10}	$t \Rsh q_0$	$0 \Lsh q_{10}$	$1 \Lsh q_{10}$

(iv) Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_4$ kopē vārdu pilnīgi blakus, proti, $\mathfrak{T}_4(u) = u^2$. $\mathfrak{T}_4$ vispirms strādā kā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_3$ (stāvokļi q_1 līdz q_{10}), tad pirmo vārdu nobīda par vienu vietu pa labi, proti,

- ieraksta t un atceras, kādu burtu ir nodzēsusi (stāvoklis q_{11});
- ja nodzēsta 0, tad pāriet stāvoklī q_{12};
- ja nodzēsts 1, tad pāriet stāvoklī q_{13};
- stāvoklis q_{12} nodrošina 0 ierakstīšanu un atcerēšanos, kāds burts ir nodzēsts;
- stāvoklis q_{13} nodrošina 1 ierakstīšanu un atcerēšanos, kāds burts ir nodzēsts;
- ja parādās burts t, tad darbs ir padarīts; ar stāvokļa q_{14} palīdzību galviņa atgriežas uz vārda sākumu.

	t	0	1
q_1	$t \Lsh q_{10}$	$t \Rsh q_2$	$t \Rsh q_3$
q_2	$t \Rsh q_4$	$0 \Rsh q_2$	$1 \Rsh q_2$
q_3	$t \Rsh q_5$	$0 \Rsh q_3$	$1 \Rsh q_3$
q_4	$0 \Lsh q_6$	$0 \Rsh q_4$	$1 \Rsh q_4$
q_5	$1 \Lsh q_7$	$0 \Rsh q_5$	$1 \Rsh q_5$
q_6	$t \Lsh q_8$	$0 \Lsh q_6$	$1 \Lsh q_6$
q_7	$t \Lsh q_9$	$0 \Lsh q_7$	$1 \Lsh q_7$
q_8	$0 \Rsh q_1$	$0 \Lsh q_8$	$1 \Lsh q_8$
q_9	$1 \Rsh q_1$	$0 \Lsh q_9$	$1 \Lsh q_9$
q_{10}	$t \Rsh q_{11}$	$0 \Lsh q_{10}$	$1 \Lsh q_{10}$
q_{11}	$t \top q_0$	$t \Rsh q_{12}$	$t \Rsh q_{13}$
q_{12}	$0 \Lsh q_{14}$	$0 \Rsh q_{12}$	$0 \Rsh q_{13}$
q_{13}	$1 \Lsh q_{14}$	$1 \Rsh q_{12}$	$1 \Rsh q_{13}$
q_{14}	$t \Rsh q_0$	$0 \Lsh q_{14}$	$1 \Lsh q_{14}$

(v) Par vārda w *apgriezto vārdu* w^{-1} sauc vārdu, kurā burti pierakstīti apgrieztā secībā. Apgrieztā vārda formālā definīcija ir šāda:

$$w^{-1} \leftharpoondown \begin{cases} w, & \text{ja} \quad w \in A, \\ u^{-1}a, & \text{ja} \quad w = au, \text{ kur } a \in A \text{ un } u \in A^+. \end{cases}$$

Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_5$ vārdam w priekšā konstruē apgriezto vārdu, proti, $\mathfrak{T}_5(w) = w^{-1}tw$.

	t	0	1
q_1	$t \Lsh q_{10}$	$t \Lsh q_2$	$t \Lsh q_3$
q_2	$t \Lsh q_4$	$0 \Lsh q_2$	$1 \Lsh q_2$
q_3	$t \Lsh q_5$	$0 \Lsh q_3$	$1 \Lsh q_3$
q_4	$0 \Rsh q_6$	$0 \Lsh q_4$	$1 \Lsh q_4$
q_5	$1 \Rsh q_7$	$0 \Lsh q_5$	$1 \Lsh q_5$
q_6	$t \Rsh q_8$	$0 \Rsh q_6$	$1 \Rsh q_6$
q_7	$t \Rsh q_9$	$0 \Rsh q_7$	$1 \Rsh q_7$
q_8	$0 \Rsh q_1$	$0 \Rsh q_8$	$1 \Rsh q_8$
q_9	$1 \Rsh q_1$	$0 \Rsh q_9$	$1 \Rsh q_9$
q_{10}	$t \Lsh q_{11}$	$0 \Lsh q_{10}$	$1 \Lsh q_{10}$
q_{11}	$t \Rsh q_0$	$0 \Lsh q_{11}$	$1 \Lsh q_{11}$

Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_5$ darbība līdzīga $\mathfrak{T}_3$ darbībai. $\mathfrak{T}_5$ vispirms konstatē, kurš burts jākopē (stāvoklis q_1):

- ja galviņa aplūko burtu t, tad kopēšanas darbi ir beigušies, un atliek galviņu novietot uz ieraksta sākumu (stāvokļi q_{10}, q_{11});
- ja galviņa aplūko burtu 0, tad ar stāvokļu q_2, q_4 palīdzību galviņa nonāk līdz ieraksta sākumam, ieraksta 0 (stāvoklis q_4), un atgriežas (stāvokļi q_6, q_8), lai nolasītu nākošo burtu;
- ja galviņa aplūko burtu 1, tad ar stāvokļu q_3, q_5 palīdzību galviņa nonāk līdz ieraksta sākumam, ieraksta 1 (stāvoklis q_5), un atgriežas (stāvokļi q_7, q_9), lai nolasītu nākošo burtu.

(vi) Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_6$ konstruē vārda w apgriezto vārdu w^{-1}, proti, $\mathfrak{T}_5(w) = w^{-1}$.

	t	0	1
q_1	$t \Lsh q_{10}$	$t \Lsh q_2$	$t \Lsh q_3$
q_2	$t \Lsh q_4$	$0 \Lsh q_2$	$1 \Lsh q_2$
q_3	$t \Lsh q_5$	$0 \Lsh q_3$	$1 \Lsh q_3$
q_4	$0 \Rsh q_6$	$0 \Lsh q_4$	$1 \Lsh q_4$
q_5	$1 \Rsh q_7$	$0 \Lsh q_5$	$1 \Lsh q_5$
q_6	$t \Rsh q_8$	$0 \Rsh q_6$	$1 \Rsh q_6$
q_7	$t \Rsh q_9$	$0 \Rsh q_7$	$1 \Rsh q_7$
q_8	$0 \Rsh q_1$	$0 \Rsh q_8$	$1 \Rsh q_8$
q_9	$1 \Rsh q_1$	$0 \Rsh q_9$	$1 \Rsh q_9$
q_{10}	$t \Lsh q_{11}$	$t \Lsh q_{10}$	$t \Lsh q_{10}$
q_{11}	$t \Rsh q_0$	$0 \Lsh q_{11}$	$1 \Lsh q_{11}$

Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_6$ darbība līdzīga $\mathfrak{T}_5$ darbībai. Vienīgā atšķirība ir komandas ar stāvokli q_{10}. Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_6$ nodzēš sākotnējo vārdu w.

(vii) Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_7$ vārdam w tieši priekšā konstruē apgriezto vārdu, proti, $\mathfrak{T}_7(w) = w^{-1}w$. $\mathfrak{T}_7$ vispirms strādā kā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_5$ (stāvokļi q_1 līdz q_9), tad vārdu w nobīda par vienu vietu pa kreisi, proti,

- ieraksta t un atceras, kādu burtu ir nodzēsusi (stāvoklis q_{10});
- ja nodzēsta 0, tad pāriet stāvoklī q_{12};

- ja nodzēsts 1, tad pāriet stāvoklī q_{11};
- stāvoklis q_{12} nodrošina 0 ierakstīšanu un atcerēšanos, kāds burts ir nodzēsts;
- stāvoklis q_{11} nodrošina 1 ierakstīšanu un atcerēšanos, kāds burts ir nodzēsts;
- ja parādās burts t, tad darbs ir padarīts; ar stāvokļa q_{13} palīdzību galviņa dodas uz vārda sākumu.

	t	0	1
q_1	$t \Lsh q_{10}$	$t \Lsh q_2$	$t \Lsh q_3$
q_2	$t \Lsh q_4$	$0 \Lsh q_2$	$1 \Lsh q_2$
q_3	$t \Lsh q_5$	$0 \Lsh q_3$	$1 \Lsh q_3$
q_4	$0 \Rsh q_6$	$0 \Lsh q_4$	$1 \Lsh q_4$
q_5	$1 \Rsh q_7$	$0 \Lsh q_5$	$1 \Lsh q_5$
q_6	$t \Rsh q_8$	$0 \Rsh q_6$	$1 \Rsh q_6$
q_7	$t \Rsh q_9$	$0 \Rsh q_7$	$1 \Rsh q_7$
q_8	$0 \Rsh q_1$	$0 \Rsh q_8$	$1 \Rsh q_8$
q_9	$1 \Rsh q_1$	$0 \Rsh q_9$	$1 \Rsh q_9$
q_{10}	$t \top q_0$	$t \Lsh q_{12}$	$t \Lsh q_{11}$
q_{11}	$1 \Lsh q_{13}$	$1 \Lsh q_{12}$	$1 \Lsh q_{11}$
q_{12}	$0 \Lsh q_{13}$	$0 \Lsh q_{12}$	$0 \Lsh q_{11}$
q_{13}	$t \Rsh q_0$	$0 \Lsh q_{13}$	$1 \Lsh q_{13}$

Vingrinājumi 1.2.4. *Uzrakstīt Tjūringa mašīnu programmas!*

(i) $\mathfrak{T}_8(w) = wtw^{-1}$;

(ii) $\mathfrak{T}_9(w) = ww^{-1}$.

1.3. Tjūringa mašīnas definīcija

Definīcija 1.3.1. *Algebru*

$$\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T \rangle$$

sauc par Tjūringa mašīnu, ja:

(i) $Q_0 = Q \setminus \{q_0\}$*;*

(ii) Q, A *— galīgas kopas;*

(iii) $Q \cap A = \emptyset$*;*

(iv) $q_0, q_1 \in Q \wedge q_0 \neq q_1$*;*

(v) $t \in A$*;*

(vi) $S = \{\Lsh, \top, \Rsh\}$*;*

(vii) $T : Q_0 \times A \to A \times S \times Q$*.*

Intuitīvā nozīmē tas viss mums jau ir pazīstams.

Definīcija 1.3.2. *Vārdu* $w \in (Q \cup A)^+$ *sauc par mašīnas vārdu, ja*

$$w = uqav,$$

kur $u, v \in A^*,\ q \in Q,\ a \in A$*.*

$$M(T) \rightleftharpoons \{w \mid w \text{ ir mašīnas vārds}\}.$$

Mēs lietojam apzīmējumu $M(T)$, lai uzsvērtu, ka atšķirīgām Tjūringa mašīnām var būt dažādi mašīnu vārdi. Viss atkarīgs no alfabētiem Q un A.

Tagad definēsim attēlojumu $M(T) \xrightarrow{\vdash} M(T)$. Tai vietā, lai rakstītu $\vdash(w) = w'$, turpmāk mēs lietosim pierakstu $w \vdash w'$, un teiksim, ka T tieši pārstrādā vārdu w par w'. Pieņemsim, ka

$$w = uqav, \quad \text{kur} \quad u, v \in A^*,\ q \in Q,\ a \in A.$$

(i) Ja $\quad T : qa \mapsto b \Lsh q' \quad$ un $\quad u = \lambda, \quad$ tad $\quad w \vdash q'tbv.$

(ii) Ja $\quad T : qa \mapsto b \Lsh q' \quad$ un $\quad u = u'c, \quad$ kur $c \in A, \quad$ tad $\quad w \vdash u'q'cbv.$

(iii) Ja $\quad T : qa \mapsto b\top q'$, $\quad$ tad $\quad w \vdash uq'bv$.

(iv) Ja $\quad T : qa \mapsto b \Rsh q'$ $\quad$ un $\quad v \neq \lambda$, $\quad$ tad $\quad w \vdash ubq'v$.

(v) Ja $\quad T : qa \mapsto b \Rsh q'$ $\quad$ un $\quad v = \lambda$, $\quad$ tad $\quad w \vdash ubq't$.

Saka, ka T mašīnas vārdu w pārstrādā par mašīnas vārdu w', ja eksistē tāda mašīnas vārdu virkne

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \qquad \text{ka}$$

(i) $w = w_1$;

(ii) $\forall i \in \overline{2, n} \quad w_{i-1} \vdash w_i$;

(iii) $w_n = w'$.

Šai gadījumā lietosim pierakstu $w \Vdash w'$.

Pieņemsim, ka $A_t \leftleftharpoons A \setminus \{t\}$. Definēsim divus attēlojumus

$$\varphi : A_t^* \to M(T) \qquad \text{un} \qquad \psi : M(T) \multimap A^*.$$

(i) $\varphi : \lambda \mapsto q_1 t$;
$\varphi : u \mapsto q_1 u$, ja $u \in A_t^+$.

(ii) $\psi : t^k q_0 t^m \mapsto \lambda$;
$\psi : t^k q_0 a t^m \mapsto a$, ja $a \in A_t^+$;
$\psi : t^k q_0 aubt^m \mapsto aub$, ja $a, b \in A_t^*$ un $u \in A^*$;
pārejos gadījumos attēlojums ψ nav definēts.

Definīcija 1.3.3. *Saka, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ vārdu $w \in A_t^*$ pārstrādā par vārdu $w' \in A^*$, ja eksistē tāda vārdu virkne*

$$w, w_0, w_1, w', \qquad \text{ka}$$

(i) $\varphi(w) = w_0$;

(ii) $w_0 \Vdash w_1$;

(iii) $\psi(w_1) = w'$.

Šai gadījumā lietosim pierakstu $\mathfrak{T}(w) = w'$. Saka, ka rēķināšana vārdam w konverģē, un lieto apzīmējumu $\mathfrak{T}(w)\downarrow$, ja eksistē tāds vārds w', ka $\mathfrak{T}(w) = w'$. Pretējā gadījumā saka, ka rēķināšana vārdam w diverģē, un lieto pierakstu $\mathfrak{T}(w)\uparrow$.

Ja $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ ir skaitļa $x \in \mathbb{N}$ pieraksts 2-nieku sistēmā, tad

$$x = 2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \dots + 2a_1 + a_0,$$

kur $a_n = 1$ un visi $a_i \in \{0, 1\}$. Šai situācijā turpmāk lietosim apzīmējumu

$$(x)_2 \leftharpoondown a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0.$$

Tā, piemēram, $(2)_2 = 10$, $(5)_2 = 101$, $(9)_2 = 1001$ un $(14)_2 = 1110$.

Definīcija 1.3.4. *Saka, ka Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$ *rēķina funkciju* $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$*, ja:*

(i) $\{0, 1\} \subset A$*;*

(ii) $x \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow \mathfrak{T}((x)_2)\downarrow$*;*

(iii) $f(x) = y \Leftrightarrow \mathfrak{T}((x)_2) = (y)_2$.

Definīcija 1.3.5. *Funkciju* $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ *sauc par izrēķināmu pēc Tjūringa, ja eksistē tāda Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T}$*, kas to rēķina.*

Piemēri 1.3.6. *Sekojošās funkcijas ir izrēķināmas pēc Tjūringa.*

(i) $y = 0$.

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & 0 \top q_0 \\ q_1\, 0 & \mapsto & t \Rsh q_1 \\ q_1\, 1 & \mapsto & t \Rsh q_1 \end{array}$$

Tjūringa mašīna nodzēš ierakstu $(x)_2$ un ieraksta ciparu 0.

(ii) $y = 2x$.

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & 0 \Lsh q_2 \\ q_1\, 0 & \mapsto & 0 \Rsh q_1 \\ q_1\, 1 & \mapsto & 1 \Rsh q_1 \\ q_2\, t & \mapsto & t \Rsh q_0 \\ q_2\, 0 & \mapsto & 0 \Lsh q_2 \\ q_2\, 1 & \mapsto & 1 \Lsh q_2 \end{array}$$

Mēs ņēmām vērā 2–ku sistēmas specifiku, proti, ja

$$(x)_2 = a_n \ldots a_1 a_0\,,$$

tad

$$(2x)_2 = a_n \ldots a_1 a_0 0\,.$$

Tā, piemēram,

$$\begin{array}{rcl} (3)_2 & = & 11\,, \\ (2 \cdot 3)_2 = (6)_2 & = & 110\,. \end{array}$$

Līdz ar to $\mathfrak{T}((x)_2) = (x)_2 0$, t.i., Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ vārdam $(x)_2$ pieraksta 0 galā (stāvoklis q_1) un atgriež galviņu uz ieraksta sākumu (stāvoklis q_2).

(iii) $\quad y = x + 1$.

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & t\ \Lsh\ q_2 \\ q_1\, 0 & \mapsto & 0\ \Rsh\ q_1 \\ q_1\, 1 & \mapsto & 1\ \Rsh\ q_1 \\ q_2\, t & \mapsto & 1\ \top\ q_0 \\ q_2\, 0 & \mapsto & 1\ \Lsh\ q_3 \\ q_2\, 1 & \mapsto & 0\ \Lsh\ q_2 \\ q_3\, t & \mapsto & t\ \Rsh\ q_0 \\ q_3\, 0 & \mapsto & 0\ \Lsh\ q_3 \\ q_3\, 1 & \mapsto & 1\ \Lsh\ q_3 \end{array}$$

Vispirms galviņa dodas uz vārda $(x)_2$ beigām (stāvoklis q_1), tad veic pieskaitīšanu (stāvoklis q_2). Piemēram,

$$\begin{array}{rll} (4)_2 = 100. & \text{No šejienes} & 100 + 1 = 101 \text{ (komanda : } \ q_2\, 0 \mapsto 1\ \Lsh\ q_3) \\ (19)_2 = 10011. & \text{No šejienes} & 10011 + 1 = 10100 \\ & \text{(komandas :} & q_2\, 1 \mapsto 0\ \Lsh\ q_2 \quad \text{un} \quad q_2\, 0 \mapsto 1\ \Lsh\ q_3) \\ (7)_3 = 111. & \text{No šejienes} & 111 + 1 = 1000 \\ & \text{(komandas :} & q_2\, 1 \mapsto 0\ \Lsh\ q_2 \quad \text{un} \quad q_2\, t \mapsto 1\ \top\ q_0) \end{array}$$

Visbeidzot galviņa dodas uz ieraksta sākumu (stāvoklis q_3).

Vingrinājumi 1.3.7. *Pierādīt, ka sekojošās funkcijas ir izrēķināmas pēc Tjūringa!*

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & y = 1; \\
\text{(ii)} & y = 4x; \\
\text{(iii)} & y = x + 2; \\
\text{(iv)} & y = x \dot{-} 1\,.
\end{array}$$

Pieņemsim, ka $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, tad

$$(\bar{x})_2 \leftharpoondown (x_1)_2 * (x_2)_2 * \ldots * (x_n)_2.$$

Definīcija 1.3.8. *Saka, ka Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$ *rēķina funkciju* $f : \mathbb{N}^n -\!\!\circ\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$, *ja:*

(i) $\{*, 0, 1\} \subset A$;

(ii) $\bar{x} \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow \mathfrak{T}((\bar{x})_2)\downarrow$;

(iii) $f(\bar{x}) = y \Leftrightarrow \mathfrak{T}((\bar{x})_2) = (y)_2$.

Definīcija 1.3.9. *Funkciju* $f : \mathbb{N}^n -\!\!\circ\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$ *sauc par izrēķināmu pēc Tjūringa, ja eksistē tāda Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T}$, *kas to rēķina.*

Piemēri 1.3.10. *Sekojošās funkcijas ir izrēķināmas pēc Tjūringa.*

(i) $u_3^7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_3$.

	t	$*$	0	1
q_1	$t \top q_0$	$t \Rsh q_2$	$t \Rsh q_1$	$t \Rsh q_1$
q_2	$t \top q_0$	$t \Rsh q_3$	$t \Rsh q_2$	$t \Rsh q_2$
q_3	$t \top q_0$	$t \Rsh q_4$	$0 \Rsh q_3$	$1 \Rsh q_3$
q_4	$t \Lsh q_5$	$t \Rsh q_4$	$t \Rsh q_4$	$t \Rsh q_4$
q_5	$t \Lsh q_5$	$* \Lsh q_6$	$0 \Lsh q_6$	$1 \Lsh q_6$
q_6	$t \Rsh q_0$	$* \Lsh q_6$	$0 \Lsh q_6$	$1 \Lsh q_6$

Ņemam vērā, ka sākuma ieraksts ir

$$(x_1)_2 * (x_2)_2 * (x_3)_2 * (x_4)_2 * (x_5)_2 * (x_6)_2 * (x_7)_2\,,$$

tāpēc jānodzēš vārds

$$(x_1)_2 * (x_2)_2 * \quad \text{—} \quad \text{stāvokļi} \quad q_1, q_2,$$

tad jāsaglabā vārds

$$(x_3)_2 \quad \text{—} \quad \text{stāvokis} \quad q_3,$$

un jānodzēš vārds

$$*(x_4)_2 * (x_5)_2 * (x_6)_2 * (x_7)_2 \quad \text{—} \quad \text{stāvokļi} \quad q_3, q_4.$$

Visbeidzot galviņa atgriežas uz ieraksta sākumu (stāvokļi — q_5, q_6).

(ii) $z = x + y$.

	t	$*$	0	1
q_1		$* \Rsh q_2$	$0 \Rsh q_1$	$1 \Rsh q_1$
q_2			$* \Rsh q_4$	$* \Rsh q_3$
q_3	$1 \top q_5$		$1 \Rsh q_4$	$1 \Rsh q_3$
q_4	$0 \top q_5$		$0 \Rsh q_4$	$0 \Rsh q_3$
q_5		$t \Lsh q_{15}$	$t \Lsh q_6$	$t \Lsh q_7$
q_6		$* \Lsh q_8$	$0 \Lsh q_6$	$1 \Lsh q_6$
q_7		$* \Lsh q_9$	$0 \Lsh q_7$	$1 \Lsh q_7$
q_8		$* \Lsh q_{10}$	$0 \Lsh q_8$	$1 \Lsh q_8$
q_9		$* \Lsh q_{11}$	$0 \Lsh q_9$	$1 \Lsh q_9$
q_{10}	$* \Rsh q_{12}$		$* \Rsh q_{12}$	$* \Rsh q_{14}$
q_{11}	$1 \Rsh q_{13}$		$1 \Rsh q_{13}$	$0 \Lsh q_{11}$
q_{12}		$0 \Rsh q_{16}$		
q_{13}		$* \Lsh q_{10}$	$0 \Rsh q_{13}$	$1 \Rsh q_{13}$
q_{14}		$1 \Rsh q_{16}$		
q_{15}			$t \Lsh q_{18}$	$t \Lsh q_{17}$
q_{16}	$t \Lsh q_5$	$* \Rsh q_{16}$	$0 \Rsh q_{16}$	$1 \Rsh q_{16}$
q_{17}		$1 \Lsh q_{19}$	$1 \Lsh q_{18}$	$1 \Lsh q_{17}$
q_{18}		$0 \Lsh q_{19}$	$0 \Lsh q_{18}$	$0 \Lsh q_{17}$
q_{19}	$t \Rsh q_0$		$0 \Lsh q_{19}$	$1 \Lsh q_{19}$

Lielākas uzskatāmības labad mēs tabulā neierakstījām $t \top q_0$, jo šais vietās varēja rakstīt arī ko citu, piemēram, $* \Rsh q_7$. Šie ieraksti neietekmē saskaitīšanas $x + y$ rēķināšanu. Kā mašīnas vārds kortežs $(1, 3)$ izskatās šādi:

$$q_1 1 * 11\,.$$

Tagad nodemonstrēsim, kā notiek rēķināšana (mēs praktiski visur atmetīsim burtus t vārda sākumā un beigās). Papildus mēs atzīmēsim svarīgākos rēķināšanas etapus.

(a)	$q_1 1 * 11$	$\vdash 1 q_1 * 11$	$\vdash 1 * q_2 11$	$\vdash 1 * * q_3 1$	$\vdash 1 * * 1 q_3 t$
		$\vdash 1 * * 1 q_5 1$			
(b)	$\vdash 1 * * q_7 1$	$\vdash 1 * q_7 * 1$	$\vdash 1 q_9 * * 1$	$\vdash q_{11} 1 * * 1$	$\vdash q_{11} t 0 * * 1$
		$\vdash 1 q_{13} 0 * * 1$	$\vdash 10 q_{13} * * 1$	$\vdash 1 q_{10} 0 * * 1$	$\vdash 1 * q_{12} * * 1$
		$\vdash 1 * 0 q_{16} * 1$	$\vdash 1 * 0 * q_{16} 1$	$\vdash 1 * 0 * 1 q_{16} t$	$\vdash 1 * 0 * q_5 1$
(c)	$\vdash 1 * 0 q_7 *$	$\vdash 1 * q_9 0 *$	$\vdash 1 q_9 * 0 *$	$\vdash q_{11} 1 * 0 *$	$\vdash q_{11} t 0 * 0 *$
		$\vdash 1 q_{13} 0 * 0 *$	$\vdash 10 q_{13} * 0 *$	$\vdash 1 q_{10} 0 * 0 *$	$\vdash 1 * q_{12} * 0 *$
		$\vdash 1 * 0 q_{16} 0 *$	$\vdash 1 * 00 q_{16}$	$\vdash 1 * 00 * q_{16} t$	$\vdash 1 * 00 q_5 *$
(d)	$\vdash 1 * 0 q_{15} 0$	$\vdash 1 * q_{18} 0$	$\vdash 1 q_{18} * 0$	$\vdash q_{19} 100$	$\vdash q_{19} t 100$
		$\vdash q_0 100$			

(a) Tjūringa mašīna ieraksta vēl vienu zvaigznīti, un galviņa pārvietojas uz vārda beigām (stāvoklis q_5):

$$1 * 11 \;\mapsto\; 1 * * 11\,.$$

(b) Tjūringa mašīna pieskaita 1, atzīmē nākošo poziciju un galviņa atgriežas uz vārda beigām (stāvoklis q_5):

$$1 * * 11 \;\mapsto\; 1 * 0 * 1\,.$$

(c) Tjūringa mašīna pieskaita 2, atzīmē nākošo poziciju un galviņa atgriežas uz vārda beigām (stāvoklis q_5):

$$1 * 0 * 1 \;\mapsto\; 1 * 00 *\,.$$

(d) Tjūringa mašīna nodzēš visas zvaigznītes un beidz darbu (stāvoklis q_0):

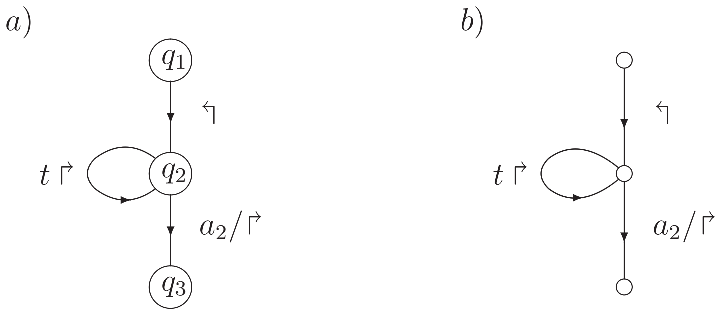
$$1 * 00 * \;\mapsto\; 100\,.$$

Vingrinājums 1.3.11. *Uzrakstīt Tjūringa mašīnas programmu, kas rēķina funkciju*

$$s(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_3 + x_5\,.$$

Lielākas uzskatāmības labad dažus Tjūringa mašīnas programmas fragmentus mēs bieži reprezentēsim ar iezīmētiem pseidografiem.

Tā, piemēram, pieņemsim, ka $A = \{t, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un



1.4. zīm.: Tjūringa mašīnas programmas fragments.

	t	a_1	a_2		a_n
q_1	$t \Lsh q_2$	$a_1 \Lsh q_2$	$a_2 \Lsh q_2$	$\ldots$	$a_n \Lsh q_2$
q_2	$t \Rsh q_2$	$t \Rsh q_2$	$a_2 \Rsh q_3$	$\ldots$	$t \Rsh q_2$

ir Tjūringa mašīnas programmas fragments. Te atrasdamās stāvoklī q_1 mašīna galviņu pārvieto vienu šūnu pa kreisi un pāriet stāvoklī q_2. Ja mašīna atrodas stāvoklī q_2, tad tās darbība ir nedaudz sarežģītāka.

- Ja galviņa aplūko ierakstu, kas atšķiras no a_2, tad ieraksts tiek aizstāts ar ierakstu t; mašīna galviņu pārvieto vienu šūnu pa labi un paliek tai pašā stāvoklī q_2.
- Ja turpretī mašīnas galviņa aplūko šūnu, kurā ierakstīts burts a_2, tad mašīna ierakstu nemaina, galviņu pārvieto vienu šūnu pa labi un pāriet stāvoklī q_3.

Šis programmas fragments attēlots ar iezīmētu pseidografu zīmējumā 1.4.a. Formāli lokam (q_1, q_2) būtu jāpiekārto $n+1$ iezīmi, proti, iezīmes

$$t/t \Lsh,\ a_1/a_1 \Lsh,\ a_2/a_2 \Lsh, \ldots, a_n/a_n \Lsh,$$

taču šāda iezīmju piekārtošana padara diagrammu nepārskatāmu. Mēs dotajā gadījumā lokam (q_1, q_2) piekārtojam iezīmi $\Lsh$.

Ja konkrētie burti ar kādiem apzīmēti stāvokļi nav būtiski, tad pseidografā mēs virsotnēm vispār nepiekārtojam burtus (skatīt zīmējumu 1.4.b). Šai gadījumā mēs uzskatam, ka zīmējumi 1.4.a un 1.4.b attaino vienu un to pašu programmas fragmentu.

Vingrinājums 1.3.12. *Parādīt, ka eksistē tāda Tjūringa mašīna* $\mathfrak{H}$*, ka*

$$\forall u \in \{0,1\}^* \ \mathfrak{H}(u) = u * u$$

Definīcija 1.3.13. *Tjūringa mašīnu* $\mathfrak{F} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, F\rangle$ *sauc par Tjūringa mašīnu*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \langle Q_0^1, Q^1, A_1, S, q_0, q_1, t, F_1\rangle, \\ \mathfrak{F}_2 &= \langle Q_0^2, Q^2, A_2, S, q_0, q_1, t, F_2\rangle \end{aligned}$$

virknes slēgumu, ja:

(i) izvēlēta tāda kopa Q^3, ka

$$|Q^3| = |Q^2| \qquad \text{un} \qquad Q^3 \cap Q^1 = \emptyset;$$

(ii) $Q = Q^1 \cup Q^3$;

(iii) izvēlēta bijekcija $\sigma : Q_0^2 \to Q_0^3$;

(iv) $A = A_1 \cup A_2$;

(v) ja $qa \mapsto b{\star}q'$ ir programmas F_1 komanda un $a' \in A_2 \backslash A_1$, tad $qa' \mapsto a' \top q$ ir programmas F komanda;

(vi) ja $qa \mapsto b \star q'$ ir programmas F_1 komanda un $q' \neq q_0$, tad $qa \mapsto b \star q'$ ir programmas F komanda;

(vii) ja $qa \mapsto b \star q_0$ ir programmas F_1 komanda, tad $qa \mapsto b \star \sigma(q_1)$ ir programmas F komanda;

(viii) ja $qa \mapsto b \star q'$ ir programmas F_2 komanda un $a' \in A_1 \setminus A_2$, tad $\sigma(q)a' \mapsto a' \top \sigma(q)$ ir programmas F komanda;

(ix) ja $qa \mapsto b \star q'$ ir programmas F_2 komanda un $q' \neq q_0$, tad $\sigma(q)a \mapsto b \star \sigma(q')$ ir programmas F komanda;

(x) ja $qa \mapsto b \star q_0$ ir programmas F_2 komanda, tad $\sigma(q)a \mapsto b \star q_0$ ir programmas F komanda;

Pieņemsim, ka $u \in A_1^*$, $\mathfrak{F}_1(u) = v$ un $\mathfrak{F}_2(v) = w$, tad saskaņā ar $\mathfrak{F}$ konstrukciju $\mathfrak{F}(u) = w$, turklāt $\mathfrak{F}(u) \downarrow \Leftrightarrow \ \mathfrak{F}_1(u) \downarrow \wedge \ \mathfrak{F}_2(v) \downarrow$. Tā rezultātā $\mathfrak{F}(u) = \mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}_1(u))$.

Piezīme. Gadījumā ja $u \in A^*$, tad šādam vārdam $\mathfrak{F}(u)$ var arī konverģēt kaut arī $\mathfrak{F}_1(u)$ nav definēts.

2. nodaļa

2.1. Universālā Tjūringa mašīna

Definīcija 2.1.1. *Pieņemsim, ka* $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$ *ir Tjūringa mašīna un* $\varphi(w) = w_0$*, kur* $w \in A_t^*$*. Vārdu* w_0 *sauc par mašīnas* $\mathfrak{T}$ *sākuma konfigurāciju, kas atbilst vārdam* w*.*

Ja neradīsies pārpratumi, tad lietosim īsāku izteiksmes formu, proti, vārdu w_0 sauksim par sākuma konfigurāciju.

Pieņemsim, ka $w_0 \Vdash w_1$ un $w_1 = t^k uq_0vt^m$, turklāt

- ja $u \neq \lambda$, tad $\exists a \in A\ u = au'$;
- ja $v \neq \lambda$, tad $\exists b \in A\ v = v'b$.

Šai gadījumā vārdu uq_0v sauc par mašīnas $\mathfrak{T}$ *beigu konfigurāciju*, kas atbilst vārdam w.

Mēs lietosim pierakstu

$$\mathfrak{T} : w \vDash w',$$

ja w' ir mašīnas $\mathfrak{T}$ beigu konfigurācija, kas atbilst vārdam w. Ja neradīsies pārpratumi vai arī mums nebūs svarīgi, kuram vārdam w atbilst beigu konfigurācija w', tad lietosim īsāku izteiksmes formu, proti, vārdu w' sauksim par beigu konfigurāciju.

Apskatīsim tikai tās Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$, kurām $A = \{t, 0, 1\}$ un eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Ar $\mathfrak{M}_2$ apzīmēsim visu šāda tipa Tjūringa mašīnu veidoto kopu.

Definīcija 2.1.2. *Pieņemsim, ka $A \cup \{*\} \subseteq A'$. Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}' = \langle Q_0', Q', A', S, q_0, q_1, t, T' \rangle$ sauc par kopas $\mathfrak{M}_2$ universālo Tjūringa mašīnu, ja eksistē tāds attēlojums*

$$\mathfrak{c} : \mathfrak{M}_2 \to A_t^*,$$

ka

$$\forall \mathfrak{T} \in \mathfrak{M}_2 \; \forall w \in A_t^* \;\; (\; \mathfrak{T} : w \models w' \Leftrightarrow \mathfrak{T}' : \mathfrak{c}(\mathfrak{T}) * w \models w' \;)$$

Šai gadījumā vārdu $\mathfrak{c}(\mathfrak{T})$ sauc par mašīnas $\mathfrak{T}$ kodu.

Mūsu mērķis — parādīt, ka kopai $\mathfrak{M}_2$ eksistē universālā Tjūringa mašīna.

2.2. Programmu kodēšana

Mēs kodēsim tikai kopas $\mathfrak{M}_2$ Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T \rangle$, turklāt mēs pieņemsim, ka komandas $K_1, K_2, \ldots K_n$ programmā P ir sakārtotas šādi:

$$\begin{array}{lcl} K_1 & = & q_1 t \mapsto \ldots \\ K_2 & = & q_1 0 \mapsto \ldots \\ K_3 & = & q_1 1 \mapsto \ldots \\ K_4 & = & q_2 t \mapsto \ldots \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Vispirms definējam kodus kopu S un A elementiem:

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\Lsh} \;\overline{\leftharpoondown}\; 10 & \qquad & \tilde{t} \;\overline{\leftharpoondown}\; 11 \\ \tilde{\top} \;\overline{\leftharpoondown}\; 11 & & \tilde{0} \;\overline{\leftharpoondown}\; 01 \\ \tilde{\Rsh} \;\overline{\leftharpoondown}\; 01 & & \tilde{1} \;\overline{\leftharpoondown}\; 10 \end{array}$$

Ja $u \in \{0,1\}^*$, tad šī vārda kodu definējam induktīvi, proti, ja $u = va$, kur $a \in \{0,1\}$, tad $\tilde{u} \;\overline{\leftharpoondown}\; \tilde{v}\tilde{a}$.

Pieņemsim, ka $(k)_2$ ir naturāla skaitļa $k \in \mathbb{N}$ pieraksts 2–ku sistēmā, tad skaitļa k kods ir $\tilde{k} \;\overline{\leftharpoondown}\; \widetilde{(k)}_2$ Tā, piemēram, ja $k = 5$, tad

$$(5)_2 = 101 \qquad \text{un} \qquad \tilde{5} = \widetilde{101} = 100110.$$

- Stāvokļa q_k kods $\tilde{q}_k \;\overline{\leftharpoondown}\; \tilde{k}$.
- Komandas $K = q_i a_j \mapsto asq$ kods $\tilde{K} \;\overline{\leftharpoondown}\; \tilde{q}_i 00 \tilde{a}_j 00 \tilde{a} 00 \tilde{s} 00 \tilde{q}$.

- Programmas $P = K_1K_2 \dots K_n$ kods $\tilde{P} \leftharpoondown \tilde{K}_1 0000 \tilde{K}_2 0000 \dots \tilde{K}_n 0000$.

Līdz ar to programmas P kods $\tilde{P}$ ir naturāls skaitlis, kas pierakstīts 2–ku sistēmā. Tā kā katrai Tjūringa mašīnai $\mathfrak{T}$ atbilst viena vienīga programma $P_{\mathfrak{T}}$, tad attēlojums

$$\mathfrak{c} : \mathfrak{M}_2 \to A_t^* : \mathfrak{T} \mapsto \tilde{P}_{\mathfrak{T}}$$

Definīcijas 2.1.2 nozīmē definē mašīnas $\mathfrak{T}$ kodu $\mathfrak{c}(\mathfrak{T})$.

2.3. Universālās mašīnas konstrukcija

Lai vizuāli atslogotu jēdzienu par mašīnas vārdu, mēs operēsim ar priekšstatu par bezgalīgu abpusēju lentu, kas sadalīta šūnās

$$\dots, R_{-1}, R_0, R_1, \dots, R_i, \dots$$

Katrā šūnā R_i ierakstīts patvaļīgs kāda fiksēta alfabēta

$$A = \{t, a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

burts.

Tagad paskaidrosim, ko šādā situācijā nozīmē apgalvojums: Tjūringa mašīna $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$ vārdu w pārstrādā par vārdu w'. Tas jāsaprot sekojoši:

- sākumā vārds w uzrakstīts uz lentas sākot ar šūnu R_0 katrā šūnā ierakstot tieši vienu vārda w burtu, t.i., ja $w = w_0w_1 \dots w_n$, kur visi w_i ir alfabēta A_t burti, tad šūnā R_0 ierakstīts burts w_0, šūnā R_1 ierakstīts burts w_1, utt., šūnā R_n ierakstīts burts w_n. Pārejās šūnās ierakstīts burts t.

- Sākumā mašīna atrodas stāvoklī q_1 un aplūko burtu w_0, t.i., "mašīnas vārds" ir
  $$\dots ttq_1wtt \dots .$$
  Tagad varam secināt: $\mathfrak{T}(w) = w'$ tad un tikai tad, ja bezgalīgas lentas gadījumā mašīna $\mathfrak{T}$ vārdu
  $$\dots ttq_1wtt \dots$$
  "pārstrādā" par "mašīnas vārdu" $\dots ttq_0w'tt \dots$. Atzīmēsim, ka visas komandas izpildāmas arī bezgalīgiem vārdiem, jo svarīga ir tikai informācija, ko "aplūko dotajā laika momentā mašīnas galviņa".

Teorēma 2.3.1. *Kopai $\mathfrak{M}_2$ eksistē universālā Tjūringa mašīna.*

$\square$ Kopas $\mathfrak{M}_2$ universālo Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}' = \langle Q_0', Q', A', S, q_0, q_1, t, T' \rangle$ mēs definēsim pakāpeniski. Vispirms aprakstīsim, ko darīs mašīna $\mathfrak{T}'$.

(i) Sākumā uz lentas ir uzrakstīts vārds $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}) * w$, kur mašīnas koda $\mathfrak{c}(\mathfrak{T})$ definīcija aprakstīta 2.2. nodaļā. Konkrētības labad pieņemsim, ka

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{T}) = \tilde{K}_1 0000 \tilde{K}_2 0000 \tilde{K}_3 0000 \ldots \tilde{K}_n 0000.$$

(ii) Darba sākumā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ atrodas stāvoklī q_1, taču universālā mašīna nezin, kuru no komandām K_1, K_2, vai K_3 izpildīs mašīna $\mathfrak{T}$, tāpēc tā dodas uz ieraksta w sākumu, kur noskaidro, kāds ir vārda w pirmais burts; to iezīmē. (Ītenībā būtu jāsaka, ka mašīnas galviņa dodas uz vārda w sākumu, taču mēs turpmāk lietosim arī šādu izteiksmes formu ar to saprotot, ka kustība attiecas nevis uz pašu mašīnu, bet gan tikai uz tās galviņu)

(iii) Tagad universālā mašīna zin, kāds ir vārda w pirmais burts, tāpēc tā atgriežas pie konkrētās komandas K_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, koda un noskaidro, kas jādara.

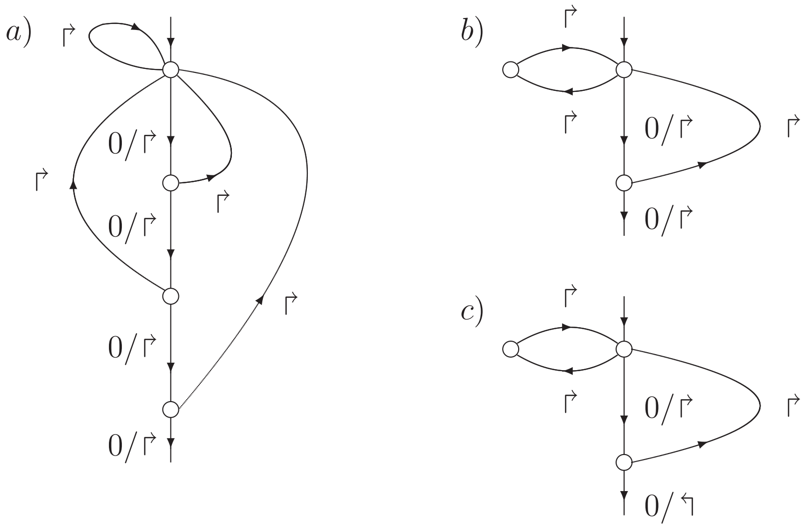
(iv) Universālā mašīna dodas izpildīt komandas darbību, taču var rasties viena nepatīkama situācija, proti, K_i liek galviņai virzīties pa kreisi, kaut arī iezīmēts ir vārda w pirmais burts. Šai gadījumā universālā mašīna pabīda vārda w katru burtu vienu šūnu pa labi, un tikai pārbīdītajam vārdam izpilda komandu: pavirzīties vienu šūnu pa kreisi.

(v) Universālai mašīnai jānoskaidro, kāda ir nākamā izpildāmā komanda. Šo darbu mašīna veic vairākos posmos.

- Ja nākamā izpildāmā komanda ir q_0, tad universālā mašīna nodzēš visu, kas atrodas no $*$ pa kreisi, tad nodzēš $*$ un liekos burtus atlikušajā vārdā, visbeidzot novieto galviņu tieši tajā pozicijā, kurā to novieto modelējamā mašīna.
- Ja nākamā izpildāmā komanda $q_i \neq q_0$, tad universālā mašīna meklē programmas kodā to vietu, kur atrodas komandas $q_i t \mapsto \ldots$ kods.
- Universālā mašīnas dodas uz ierakstu pa labi no $*$ un noskaidro, kuru tieši no komandām $q_i t \mapsto \ldots$, $q_i 0 \mapsto \ldots$, $q_i 1 \mapsto \ldots$ jāizpilda.

- Tagad universālā mašīna zin, kādu burtu a aplūko modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa, tāpēc tā atgriežas pie konkrētās komandas $q_i a \mapsto \ldots$ koda.
- Tālākā universālās mašīnas darbība jau aprakstīta punktā (iv). Cikls noslēdzies.

Tā rezultātā universālā mašīna modelē mašīnas $\mathfrak{T}$ darbu. Tālākais pierādījums ir tikai demonstrācija, ka tiešām šādu universālo mašīnu var uzkonstruēt.



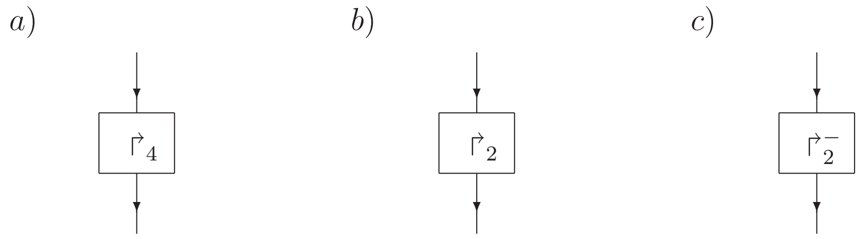
2.1. zīm.: a) 0000 b) 00 c) 00

1) Definējam $A' \rightleftharpoons \{t, 0, 1, \dot{t}, \dot{0}, \dot{1}, t', 0', 1', *\}$. Labajā pusē no $*$ burti $\dot{t}, \dot{0}, \dot{1}$ kalpos, lai fiksētu modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņas atrašanās vietu. Burts t' dublēs burtu t. Tas ļaus noteikt, cik tālu pa labi no $*$ universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa ir bijusi.

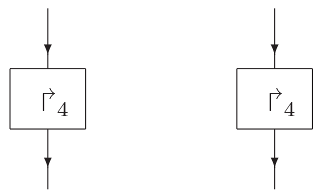
2) Turpmāk dažu programmas fragmentu apzīmēšanai lietosim saīsinātas shematiskas ilustrācijas. Tā, piemēram, programmas fragmenta 2.1.a zīm. apzīmēšanai lietosim shēmu, kas attēlota zīmējumā 2.2.a.

Katrā konkrētā programmas daļā šāds fragments reprezentē kādu programmas daļu ar atšķirīgiem stāvokļiem, t.i., diviem fragmentiem (skatīt 2.3. zīm.) stāvokļu kopas ir disjunktas.

Līdzīgi programmas fragmentu 2.1.b,c zīm. apzīmēšanai lietosim shēmas, kas attēlotas zīmējumos 2.2.b,c.



2.2. zīm.: a) 0000 b) 00 c) 00



2.3. zīm.: Fragmenti ar disjunktām stāvokļu kopām.

Zīmējuma 2.1.a fragments realizē mašīnas galviņas pārbīdi pa labi līdz vārdā sastopams apakšvārds 0000. Galviņa nolasa šo vārdu 0000, un tad beidz darbu.

Zīmējuma 2.1.b fragments realizē mašīnas galviņas pārbīdi pa labi līdz vārdā sastopams apakšvārds 00. Taču ne pēc katra apakšvārda 00 fragments beidz darbu. Ja šis fragments uzsāk darbu teiksim stāvoklī q, atbilstoši mašīnas vārds ir $uqa_1a_2\dots a_n$, $a_i \in A'$, tad mašīnas galviņa meklē pirmo apakšvārdu $a_{2k-1}a_{2k} = 00$. Piemēram, ja mašīnas vārds ir $q1001001$, tad pēc fragmenta darba mašīnas vārds būs izskatā $100100q'1$, kur q' ir jaunais stāvoklis pēc iziešanas no fragmenta 2.1.b.

Līdzīgi zīmējuma 2.1.c fragments realizē mašīnas galviņas pārbīdi pa labi līdz vārdā sastopams apakšvārds 00. Taču, piemēram, ja mašīnas vārds ir $q100100$, tad pēc fragmenta darba mašīnas vārds būs izskatā $1001q'00$, kur q' ir jaunais stāvoklis pēc iziešanas no fragmenta 2.1.c.

3) Sākam definēt universālās Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}'$ programmu. Pieņemsim, ka

$$K_1 = q_1t \mapsto a_1s_1q_1', \quad K_2 = q_10 \mapsto a_2s_2q_2', \quad K_3 = q_11 \mapsto a_3s_3q_3'.$$

Vispirms komandas K_1 kodam

$$\tilde{q}_100\tilde{t}00\tilde{a}_100\tilde{s}_100\tilde{q}_1' \tag{2.1}$$

universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nofiksē koda $\tilde{a}_1$ sākumu (2.4. zīm.). Pēc tam mašīna dodas uz vārda w sākumu un nofiksē šī vārda pirmo burtu attiecīgi pārejot stāvoklī $\dot{t}, \dot{0}$, vai $\dot{1}$.

Stāvoklis $\dot{t}$ norāda, ka jāizpilda komanda K_1, tāpēc mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa dodas uz koda $\tilde{a}_1$ sākumu. Atbilstoši stāvoklis $\dot{0}$ norāda, ka jāizpilda komanda K_2, tāpēc mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa dodas uz koda $\tilde{a}_2$ sākumu. Stāvoklis $\dot{1}$ norāda, ka jāizpilda komanda K_3, tāpēc mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa dodas uz koda $\tilde{a}_3$ sākumu.

Tagad viss ir sagatavots, lai izpildītu tieši vajadzīgo komandu, tādēļ mašīna pāriet stāvoklī q_2 (skatīt 2.4. zīmējumu).

4) Pieņemsim, ka jāizpilda komanda $K = q_1 b \mapsto a s q_i$, tad šīs komandas kods ir

$$\tilde{q}_1 00 \tilde{b} 00 \tilde{a} 00 \tilde{s} 00 \tilde{q}_i$$

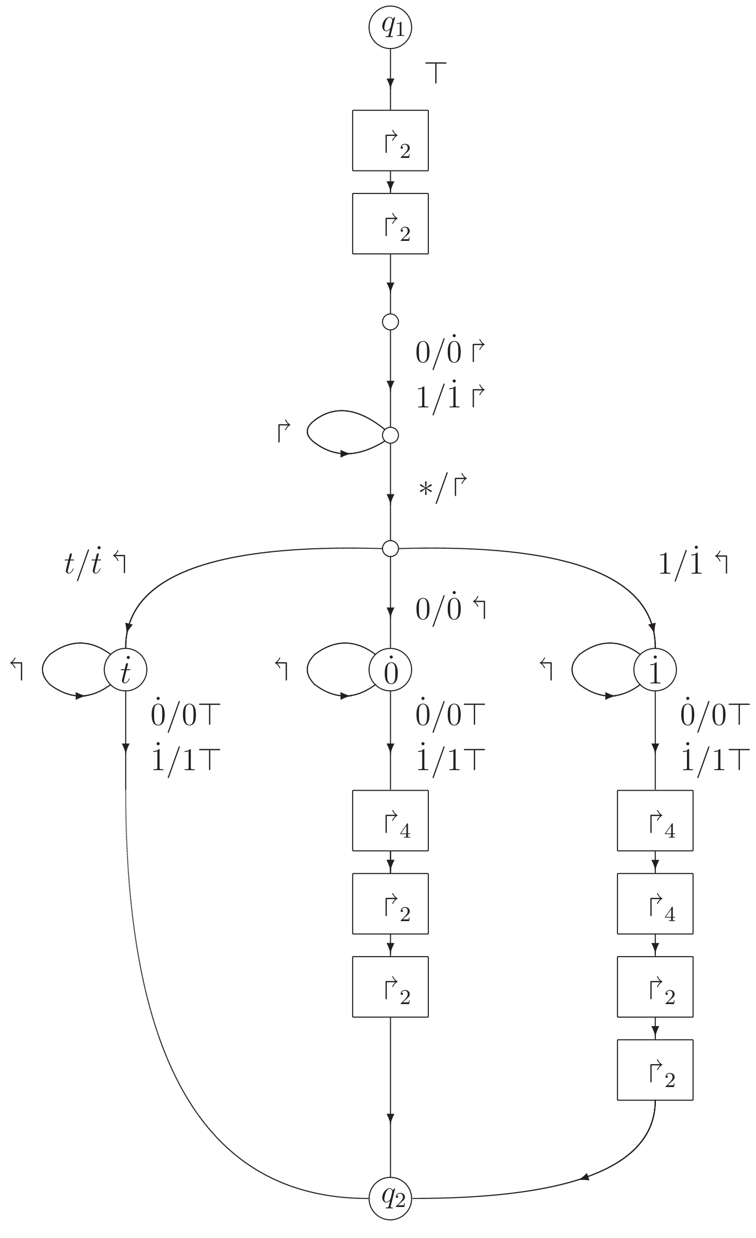
Pieņemsim, ka mašīna $\mathfrak{T}'$ atrodas stāvoklī q_2, un tās galviņa aplūko koda $\tilde{a}$ pirmo burtu. Tā ir situācija, ko mēs aprakstījām iepriekšējā punktā.

Mašīnai $\mathfrak{T}'$ jārealizē pārveidojums as, t.i., jāieraksta burts a un jāveic kustība s. Mūsu rīcībā ir 9 varianti.

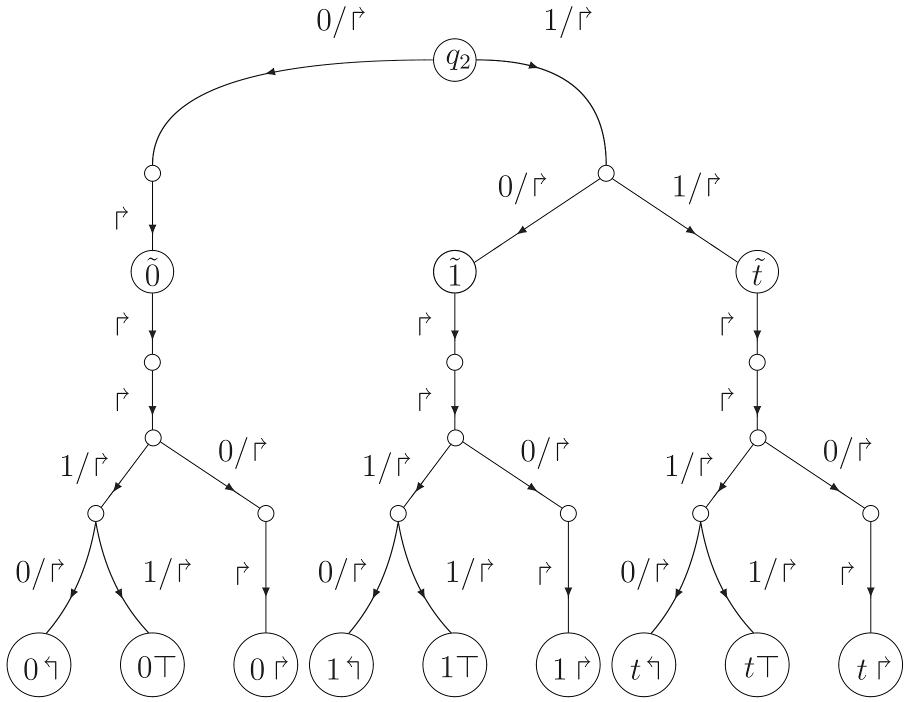
$$\begin{array}{ccc} t\Lsh, & t\top, & t\Rsh \\ 0\Lsh, & 0\top, & 0\Rsh \\ 1\Lsh, & 1\top, & 1\Rsh \end{array}$$

Atbilstoši mašīnai $\mathfrak{T}'$ būs nepieciešami 9 stāvokļi (skatīt 2.5. zīmējumu). Mēs multigrafā nezīmējam lokus, kas būtiski neietekmē mašīnas darbu, tā, piemēram, 2.5. zīmējumā nav attēlots loks, kas raksturo komandu $q_2 t \mapsto \ldots$ Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nekad neizpildīs šo komandu, jo atrodoties stāvoklī q_2 tās galviņa aplūkos vai nu 0, vai 1; citus burtus šai stāvoklī tā nekad neaplūkos.

5) **Programmas fragments**, kas nodrošina vārda pārbīdīšanu vienu šūnu pa labi. Kā jau (iv) punktā minējām universālai mašīnai šāda darbība var izrādīties nepieciešama. Mēs rūpēsimies tikai par alfabēta $\{t', 0, 1\}$ netukša vārda pārbīdi, jo tieši šāds gadījums ir nepieciešams universālās Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}'$ darbības aprakstam. Mēs neuzrādīsim visas programmas fragmenta komandas, proti, mēs neuzrādīsim tās komandas, kas neietekmē universālās mašīnas darbu.



2.4. zīm.: Vārda w pirmā burta iezīmēšana.



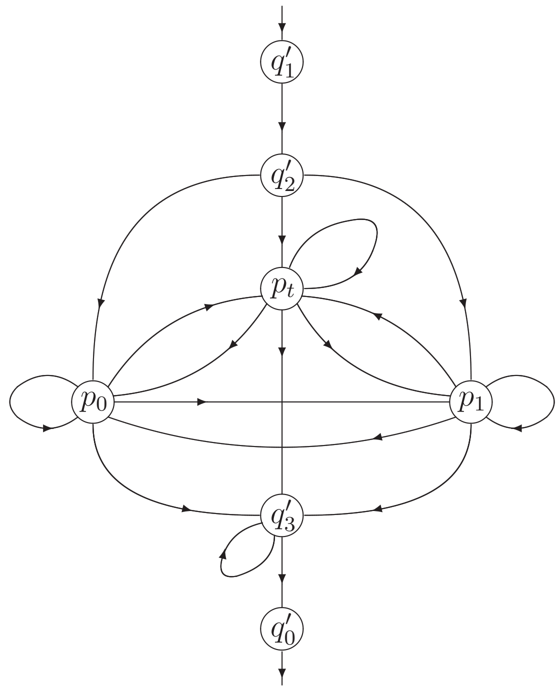
2.5. zīm.: Izpildāmās darbības noskaidrošana.

	$*$	$\dot{t}$	t	t'	0	1
q_1'	$* \ \Rsh \ q_2'$					
q_2'				$\dot{t} \ \Rsh \ p_t$	$\dot{t} \ \Rsh \ p_0$	$\dot{t} \ \Rsh \ p_1$
p_t			$t' \ \Lsh \ q_3'$	$t' \ \Rsh \ p_t$	$t' \ \Rsh \ p_0$	$t' \ \Rsh \ p_1$
p_0			$0 \ \Lsh \ q_3'$	$0 \ \Rsh \ p_t$	$0 \ \Rsh \ p_0$	$0 \ \Rsh \ p_1$
p_1			$1 \ \Lsh \ q_3'$	$1 \ \Rsh \ p_t$	$1 \ \Rsh \ p_0$	$1 \ \Rsh \ p_1$
q_3'		$\dot{t} \ \Lsh \ q_0'$		$t' \ \Lsh \ q_3'$	$0 \ \Lsh \ q_3'$	$1 \ \Lsh \ q_3'$

Shematiski šī programmas fragmenta pseidografs pat bez nosvarojumiem izskatās samudžināts (skatīt 2.6. zīmējumu).

Pēc būtīnas te nav nekā sarežģīta:

- ja mašīna atrodas stāvoklī p_t, tad uz lentas ieraksta t';
- ja mašīna atrodas stāvoklī p_0, tad uz lentas ieraksta 0;
- ja mašīna atrodas stāvoklī p_t, tad uz lentas ieraksta t';

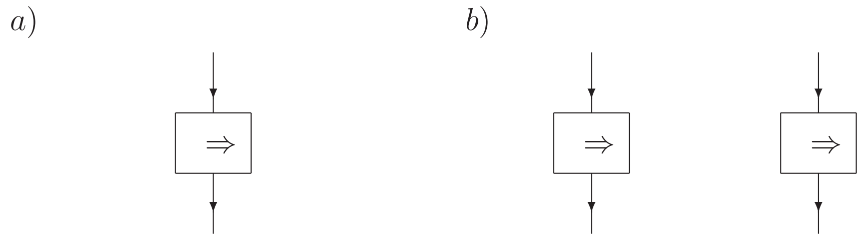


2.6. zīm.: Vārda nobīdīšana pa labi.

- ja mašīnas galviņa nolasa burtu t', tad mašīna nākamajā laika momentā pāriet stāvoklī p_t;
- ja mašīnas galviņa nolasa burtu 0, tad mašīna nākamajā laika momentā pāriet stāvoklī p_0;
- ja mašīnas galviņa nolasa burtu 1, tad mašīna nākamajā laika momentā pāriet stāvoklī p_1.

Šīs programmas fragmenta apzīmēšanai lietosim shēmu, kas attēlota zīmējumā 2.7.a. Šai gadījumā uzskatīsim, ka dotais programmas fragments darbu vienmēr sāk stāvoklī q'_1 un beidz vienmēr stāvoklī q'_0. Taču katrā konkrētā universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ programmas daļā šāds fragments reprezentē kādu programmas daļu ar atšķirīgiem stāvokļiem, t.i., diviem dažādiem fragmentiem (piemēram, 2.7.b zīm.) stāvokļu kopas ir disjunktas.

6) **Pārveidojuma** *as* realizācija (skatīt zīmējumus 2.8., 2.9.). Es sīkāk komentēšu shēmu 2.8. zīm. Pieņemsim, ka jāizpilda komanda $K = q_1 b \mapsto$



2.7. zīm.: Vārda nobīdīšana pa labi.

asq_i, tad šīs komandas kods ir

$$\tilde{q}_1 00\tilde{b}00\tilde{a}00\tilde{s}00\tilde{q}_i$$

Vispirms nofiksē poziciju komandas kodā $\tilde{K}$ pirms koda $\tilde{q}_i$, t.i., veic pārveidojumu

$$\tilde{q}_1 00\tilde{b}00\tilde{a}00\tilde{s}00\tilde{q}_i \mapsto \tilde{q}_1 00\tilde{b}00\tilde{a}00\tilde{s}0\dot{t}\tilde{q}_i$$

Pēc tam universālās mašīnas galviņa dodas uz modelējamās mašīnas galviņas atrašanās vietu, t.i., pa labi no $*$ meklē burtu $\dot{t}$, $\dot{0}$, vai $\dot{1}$.

Ja jāveic pārveidojums $0 \Lsh$, tad burtu $\dot{t}$ (attiecīgi $\dot{0}$, vai $\dot{1}$) aizstāj ar 0, un fiksē jauno modelējamās mašīnas galviņas atrašanās vietu, t.i., vienu vietu pa kreisi. Taču, ja universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa pavirzoties vienu poziciju pa kreisi nolasa $*$, tad modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņai būtu jānolasa burts t. Šī iemesla dēļ universālā mašīna nobīda vārdu, kas atrodas aiz $*$ pa labi, vienu poziciju pa labi, un tieši pēc $*$ ieraksta $\dot{t}$, t.i., nofiksē modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņas atrašanās vietu.

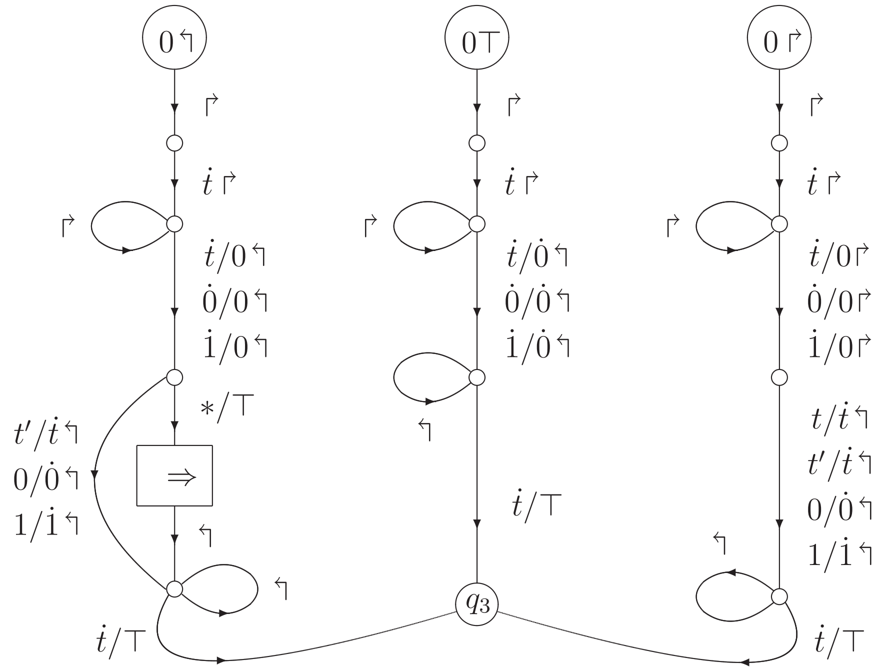
Visbeidzot universālās mašīnas galviņa dodas pa kreisi no $*$ un fiksē burtu $\dot{t}$. Tagad $\mathfrak{T}'$ nonāk stāvoklī q_3.

Līdzīgi universālā mašīna darbojas, sākot ar stāvokli $0\top$, vai stāvokli $0 \Rsh$, tikai šais gadījumos nekad nav nepieciešama vārda, kas atrodas aiz $*$ pa labi, nobīdīšana.

Atzīmēsim, ka shēmas zīmējumā 2.9. faktiski kopē zīmējuma 2.8. shēmu, tikai vienā gadījumā jāieraksta burts t, otrā — burts 1.

7) **Nākošās izpildāmās komandas meklēšana.** Pieņemsim, ka jāizpilda komanda $K = q_1 b \mapsto asq_i$ un universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ atrodas stāvoklī q_3, tad universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa aplūko burtu $\dot{t}$ apakšvārdā

$$\tilde{q}_1 00\tilde{b}00\tilde{a}00\tilde{s}0\dot{t}\tilde{q}_i 0000$$



2.8. zīm.: Pārveidojumu 0↰, 0⊤, 0↱ realizācija.

Ja $q_i \neq q_0$, t.i., ja vārda $\tilde{q}_i$ pirmais burts nav 0, tad universālā mašīna sāk meklēt nākošo izpildāmo komandu, proti, koda

$$\tilde{q}_i 00 \tilde{t} 00 \tilde{a}_{it} 00 \tilde{s}_{it} 00 \tilde{q}_{it}$$

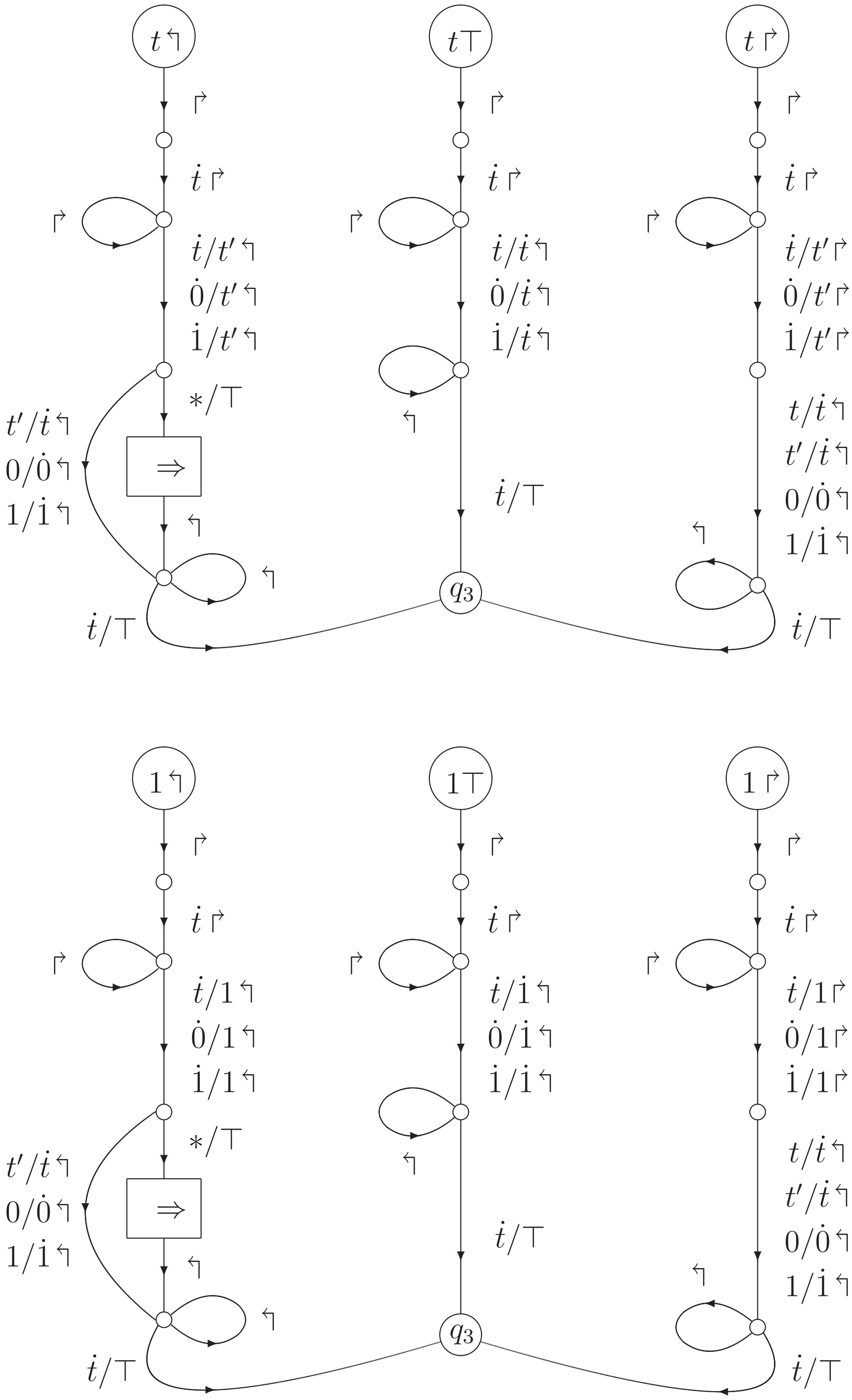
atrašanās vietu, kur $q_i t \mapsto a_{it} s_{it} q_{it}$ ir modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ nākošā izpildāmā komanda. Šai nolūkā mašīna dodas uz vārda sākumu, kur ieraksta burtus $0'$ un t', lai sāktu noskaidrot, vai te ir potenciālais stāvokļa q_i kods $\tilde{q}_i$. Pēc šī darba veikšanas universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nonāk stāvoklī q_5 (skatīt 2.10. zīm.). Ja turpretī $q_i = q_0$, tad universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nonāk stāvoklī q_8 (skatīt 2.10. zīm.).

Tagad nedaudz detalizētāk. Mūs interesē vārda

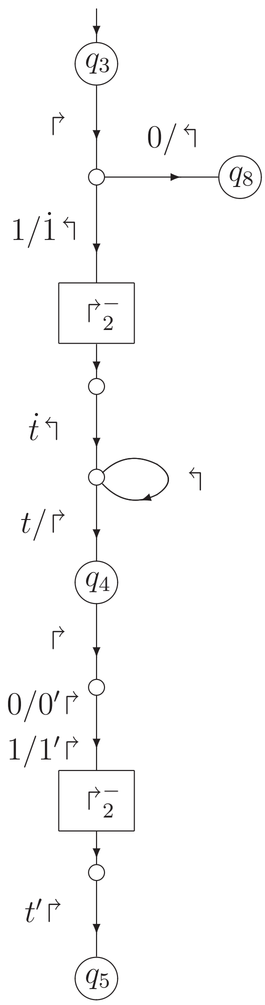
$$\tilde{q}_1 00 \tilde{b} 00 \tilde{a} 00 \tilde{s} 0 \dot{t} \tilde{q}_i 0000 \qquad \text{apakšvārds} \qquad 0 \dot{t} \tilde{q}_i 00$$

Pieņemsim, ka $0\dot{t}\tilde{q}_i 00 = 0\dot{t}1u00$, tad universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ vārdu $0\dot{t}1u00$ pārstrādā par vārdu $0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0$, t.i., veic pārveidojumu

$$0\dot{t}1u00 \mapsto 0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0 \tag{2.2}$$



2.9. zīm.: Pārveidojumu $t\Lsh$, $t\top$, $t\Rsh$, $1\Lsh$, $1\top$, $1\Rsh$ realizācija.



2.10. zīm.: Nākošās komandas meklēšanas uzsākšana.

Pēc šī pārveidojuma veikšanas universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas uz visa ieraksta sākumu un nonāk stāvoklī q_4 (skatīt 2.10. zīm.). Tagad universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa atrodas koda $\tilde{K}_1 = \tilde{q}_1 00\tilde{t}00\tilde{a}_1 00\tilde{s}_1 00\tilde{q}'_1$ sākumā (skatīt formulu (2.1)).

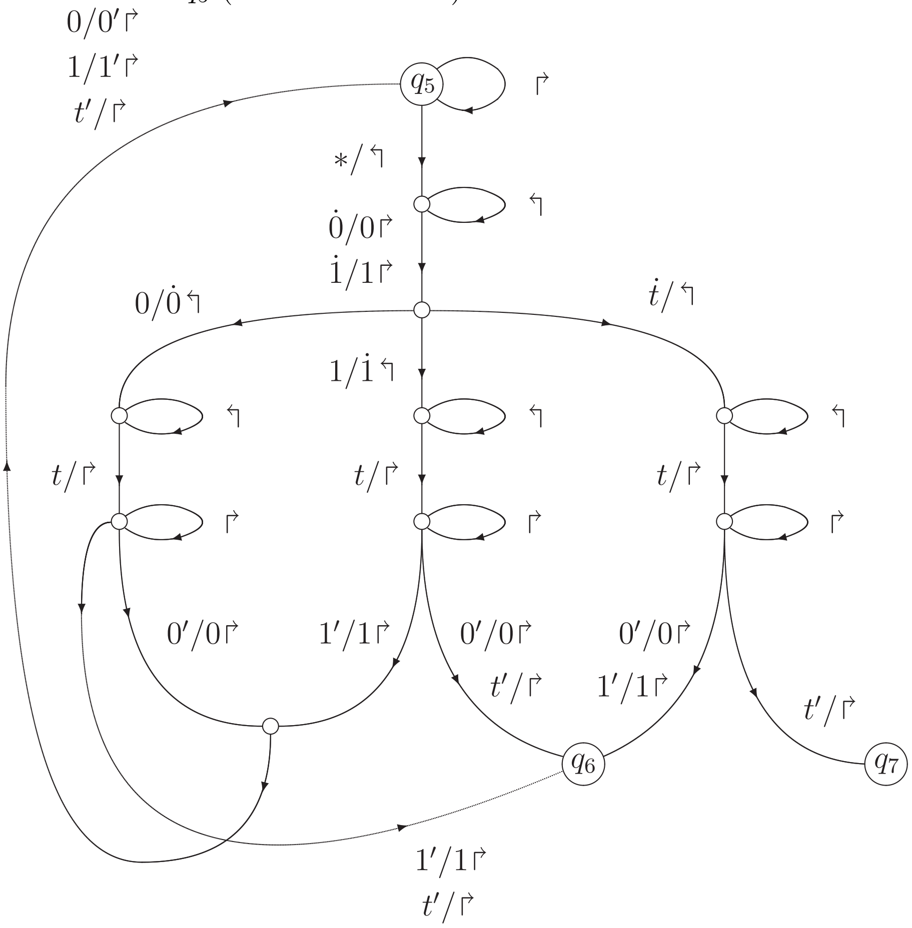
Mūs interesē vārda

$$\tilde{q}_1 00\tilde{t}00\tilde{a}_1 00\tilde{s}_1 00\tilde{q}'_1 \qquad \text{apakšvārds} \qquad \tilde{q}_1 00$$

Pieņemsim, ka $\tilde{q}_1 00 = 10v00$. Dotajā situācijā $v = \lambda$, t.i., v ir tukšais vārds. Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ vārdu $10v00$ pārstrādā par vārdu $10'vt'0$, t.i., veic pārveidojumu

$$10v00 \mapsto 10'vt'0 \tag{2.3}$$

un nonāk stāvoklī q_5 (skatīt 2.10. zīm.).



2.11. zīm.: Vārdu salīdzināšana.

Vārdu salīdzināšana. Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ salīdzina (skatīt 2.11. zīm.) vārdu

$$0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0 \quad \text{(skatīt (2.2))} \quad \text{ar vārdu} \quad 10'vt'0 \quad \text{(skatīt (2.3))}$$

Ja $u = 0v$, tad meklētais stāvoklis $\tilde{q}_i$ ir atrasts.

Tagad nedaudz detalizētāk. Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ atrodas stāvoklī q_5, tāpēc tā dodas pa labi līdz burtam $*$. Pēc tam tā dodas pa kreisi līdz sasniedz vārdu $0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0$ un atpazīst burtu $\dot{1}$, ko nomaina ar 1. Tad universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nofiksē vārda u pirmo burtu. Tas ir 0 (pieņemsim, ka $u = 0\breve{u}$). Fiksēšana notiek burtu 0 aizstājot ar $\dot{0}$.

Šai vietā pseidografs sazarojas (skatīt 2.11. zīm.), un šobrīd skaitļošana aiziet pa kreiso zaru. Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas pa kreisi uz ieraksta sākumu. Pēc tam tā dodas pa labi līdz sasniedz vārdu $10'vt'0$. $\mathfrak{T}'$ burtu $0'$ aizstāj ar 0 un nofiksē vārda v pirmo burtu (pieņemsim, ka tas ir burts e, attiecīgi $v = e\breve{v}$), vai arī konstatē, ka vārds $v = \lambda$ ($\mathfrak{T}'$ nolasa burtu t' un pāriet stāvoklī q_5).

Burta e fiksēšana notiek šādi. Ja $e = 0$, tad $\mathfrak{T}'$ burtu e aizstāj ar $0'$; ja $e = 1$, tad $\mathfrak{T}'$ burtu e aizstāj ar $1'$. Abos gadījumos $\mathfrak{T}'$ pāriet stāvoklī q_5.

Tālākie spriedumi induktīvi pieņemot, ka mašīna atrodas stāvoklī q_5 un mūsu rīcībā ir vārdi

$$\dot{t}w\dot{c}\breve{u}\dot{t} \quad \text{un} \quad e'\breve{v}t' \quad \text{vai} \quad t'$$

Te $\dot{c} \in \{\dot{0}, \dot{1}\}$ un $e' \in \{0', 1'\}$. Mašīnai $\mathfrak{T}'$ jānoskaidro, vai $\breve{u} = e\breve{v}$, kur

$$e \rightleftharpoons \begin{cases} 0, & \text{ja } e' = 0', \\ 1, & \text{ja } e' = 1' \end{cases}$$

Sākums mums jau pazīstams. Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ atrodas stāvoklī q_5, tāpēc tā dodas pa labi līdz burtam $*$. Pēc tam tā dodas pa kreisi līdz sasniedz vārdu $\dot{c}\breve{u}\dot{t}$ un atpazīst burtu $\dot{c}$, ko nomaina ar c. Tas notiek šādi. Ja $\dot{c} = \dot{0}$, tad $\mathfrak{T}'$ burtu $\dot{c}$ aizstāj ar 0; ja $\dot{c} = \dot{1}$, tad $\mathfrak{T}'$ burtu $\dot{c}$ aizstāj ar 1.

Esam nonākuši pseidografa sazarojumā (skatīt 2.11. zīm.).

- Ja $\breve{u} \neq \lambda$ un $\breve{u}$ ir izskatā $0u_1$, tad skaitļošana aiziet pa kreiso zaru. Mašīna $\mathfrak{T}'$ vārdu $0u_1$ aizstāj ar vārdu $\dot{0}u_1$ un dodas uz ieraksta sākumu pa kreisi. Pēc tam tā dodas pa labi līdz sasniedz vārdu $e'\breve{v}t'$ vai t'.

  Ja $e' = 0'$, tad salīdzināšana ir bijusi sekmīga, un mašīna turpina salīdzināt nākošos burtus (pāriet stāvoklī q_5). Pretējā gadījumā ($e' = 1'$ vai mašīna sasniegusi burtu t') modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ stāvokļa q_i koda $\tilde{q}_i$ atrašanās vieta vēl nav atrasta, un tāpēc universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ pāriet stāvoklī q_6.

- Ja $\breve{u} \neq \lambda$ un $\breve{u}$ ir izskatā $1u_1$, tad skaitļošana aiziet pa centrālo zaru. Mašīna $\mathfrak{T}'$ vārdu $1u_1$ aizstāj ar vārdu $\dot{1}u_1$ un dodas uz ieraksta sākumu pa kreisi. Pēc tam tā dodas pa labi līdz sasniedz vārdu $e'\breve{v}t'$ vai t'.

Ja $e' = 1'$, tad salīdzināšana ir bijusi sekmīga, un mašīna turpina salīdzināt nākošos burtus (pāriet stāvoklī q_5). Pretējā gadījumā ($e' = 0'$ vai arī mašīna sasniegusi burtu t') modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ stāvokļa q_i koda $\tilde{q}_i$ atrašanās vieta vēl nav atrasta, un tāpēc universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ pāriet stāvoklī q_6.

- Ja vārds $\breve{u} = \lambda$, tad skaitļošana aiziet pa labo zaru. Tāpat kā iepriekšējos gadījumos mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas uz ieraksta sākumu pa kreisi. Pēc tam tā dodas pa labi līdz sasniedz vārdu $e'\breve{v}t'$ vai t'.

  Ja sasniegts vārds $e'\breve{v}t'$, tad modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ stāvokļa q_i koda $\tilde{q}_i$ atrašanās vieta vēl nav atrasta, un tāpēc universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ pāriet stāvoklī q_6. Ja sasniegts vārds t', tad modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ stāvokļa q_i koda $\tilde{q}_i$ atrašanās vieta ir atrasta, un tāpēc universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ pāriet stāvoklī q_7.

Koda $\tilde{q}_{j+1}$ fiksēšana. Mēs pieņēmām, ka tiek meklēta koda

$$\tilde{q}_i 00\tilde{t}00\tilde{a}_{it}00\tilde{s}_{it}00\tilde{q}_{it}$$

atrašanās vieta. Pieņemsim, ka iepriekšējā darba ciklā (skatīt 2.11. zīm.) mašīna $\mathfrak{T}'$ pārliecinājās, ka kods $\tilde{q}_j \neq \tilde{q}_i$, tādēļ mašīna $\mathfrak{T}'$ ir nonākusi stāvoklī q_6.

Vispirms mēs atjaunojam vārdu $0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0$ (skatīt (2.2)). Šai nolūkā (skatīt 2.12. zīm) mašīna dodas pa labi līdz burtam $*$. Pēc tam tā dodas pa kreisi līdz sasniedz burtu $\dot{t}$. Tad starp abām burta $\dot{t}$ ieejām $\dot{0}$ vietā ieraksta 0, vai $\dot{1}$ vietā ieraksta 1, vai arī konstatē, ka šajā starpā nav nedz $\dot{0}$, nedz $\dot{1}$.

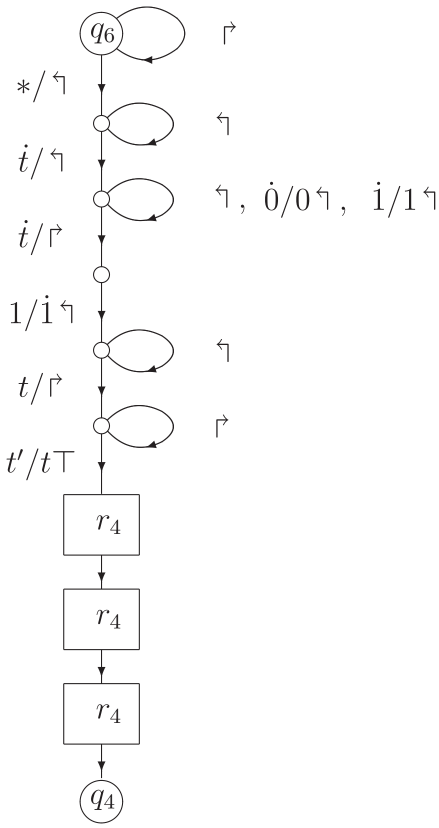
Visbeidzot mašīna $\mathfrak{T}'$ sasniedz burtu $\dot{t}$, iet vienu soli pa labi un 1 aizstāj ar $\dot{1}$. Esam atjaunojuši vārdu $0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0$.

Tagad mašīna $\mathfrak{T}'$ fiksē koda $\tilde{q}_{j+1}$ atrašanās vietu (turpinam analizēt pseidografu 2.12. zīm.). Šai nolūkā tā dodas pa kreisi līdz vārda sākumam. Pēc tam sameklē koda $\tilde{q}_j$ atrašanās vietu (burts t'), burtu t' aizstāj ar t un pārvieto galviņu 3 komandu kodus pa labi. Esam sasnieguši koda $\tilde{q}_{j+1}$ ieraksta vietu. Mašīna $\mathfrak{T}'$ pāriet stāvoklī q_4, un var atkārtoti sākt salīdzināšanu (skatīt 2.10. un 2.11. zīm.).

Nākošās komandas izpildīšana. Mēs pieņēmām, ka tiek meklēta koda

$$\tilde{q}_i 00\tilde{t}00\tilde{a}_{it}00\tilde{s}_{it}00\tilde{q}_{it} \tag{2.4}$$

atrašanās vieta. Pieņemsim, ka iepriekšējā darba ciklā (skatīt 2.11. zīm.) mašīna $\mathfrak{T}'$ pārliecinājās, ka kods $\tilde{q}_j = \tilde{q}_i$, tādēļ mašīna $\mathfrak{T}'$ ir nonākusi stāvoklī



2.12. zīm.: Vārda $\dot{t}\dot{1}u\dot{t}$ sagatavošana.

q_7. Mūs interesē šī vārda (2.4) apakšvārds

$$\tilde{q}_i 00\tilde{t}00\tilde{a}_{it}$$

kas šobrīd ir izskatā

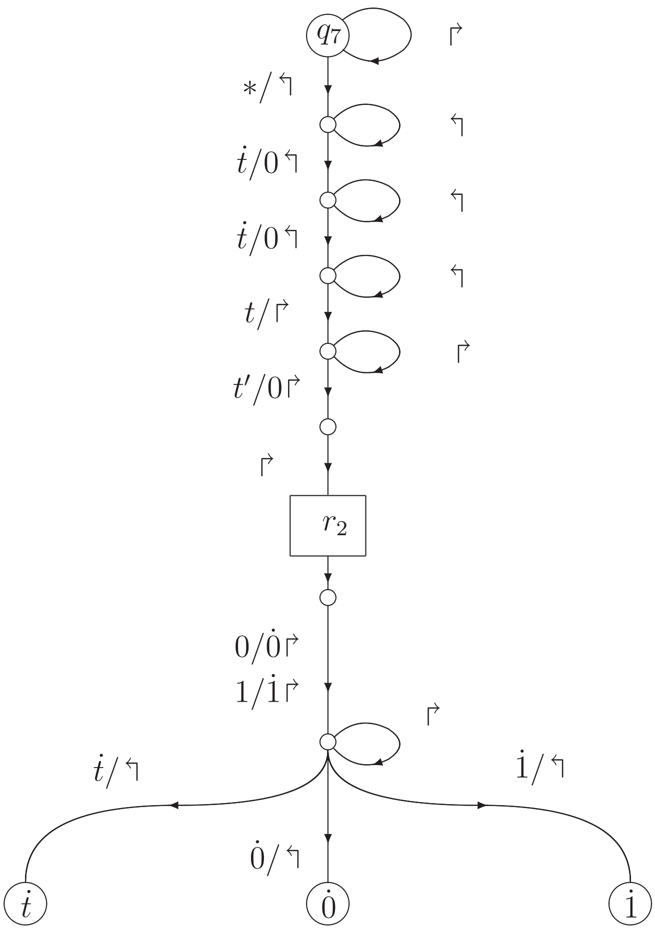
$$\tilde{q}_i t'0\tilde{t}00\tilde{a}_{it}$$

Ja reiz universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ ir nonākusi stāvoklī q_7, tad vārdu $0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0$, $10'vt'0$ salīdzināšana ir bijusi sekmīga, tāpēc apakšvārda $0\dot{t}\dot{1}u\dot{t}0$ vietā šobrīd ir vārds $0\dot{t}1u\dot{t}0$.

Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ vispirms veic pārveidojumu (skatīt 2.13. zīm.)

$$0\dot{t}1u\dot{t}0 \mapsto 001u00,$$

tad atgriežas pie t', to aizstāj ar 0 un vārda $\tilde{a}_{it}$ pirmajam burtam uzliek punktiņu. Kad tas ir padarīts mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas pa labi noskaidrot, kādu burtu

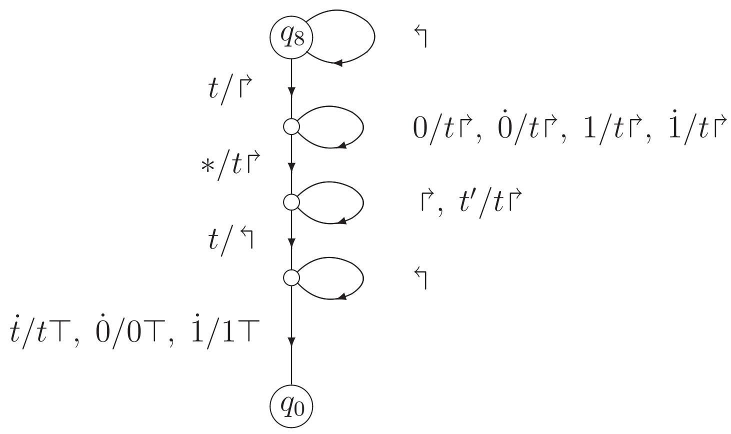


2.13. zīm.: Nākošās komandas izpildīšana.

šobrīd aplūko modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa. Atkarībā no tā universālā mašīna pāriet vienā no stāvokļiem $\dot{t}, \dot{0}$, vai $\dot{1}$ (skatīt 2.4. zīm.). Cikls ir noslēdzies, un universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ sāk izpildīt modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ nākošo komandu.

8) **Darba noslēgums.** Ja modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ nākošā izpildāmā komanda ir q_0, tad universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nonāk stāvoklī q_8 (skatīt 2.10. zīm.). Tas nozīmē, ka mašīnas $\mathfrak{T}$ darba modelēšana ir veikta. Atliek tikai nodrošināt, lai ieraksts uz lentas sakristu ar mašīnas $\mathfrak{T}$ darba rezultātu.

Vispirms universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas uz vārda sākumu (skatīt 2.14. zīm.),



2.14. zīm.: Darba noslēgums.

tad dodas pa labi, visus burtus aizstājot ar burtu t, līdz sasniedz burtu $*$, ko arī aizstāj ar burtu t. Tagad universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas pa labi visur burtu t' aizstājot ar burtu t līdz sasniedz vārda beigas, t.i., burtu t. Visbeidzot universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ dodas atpakaļ, proti, pa kreisi līdz sasniedz to burtu vārdā, ko aplūko modelējamās mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa. Atliek tikai burtu $\dot{t}$ ($\dot{0}$, vai $\dot{1}$) aizstāt ar burtu t (atbilstoši ar 0, vai 1), lai mašīnas $\mathfrak{T}$ modelēlēšanas process būtu noslēdzies. Universālā mašīna $\mathfrak{T}'$ nonāk stāvoklī q_0. ■

Vienošanās. Kā jebkura Tjūringa mašīna, arī universālā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}'$ rēķina kādu divargumentu funkciju. Turpmāk šīs funkcijas apzīmēšanai lietosim pierakstu $\mathfrak{U}(x, y)$.

3. nodaļa

3.1. Funkciju kompozīcija

Vienošanās. Turpmāk, ja netiks speciāli atrunāts, funkcijas, izrēķināmas pēc Tjūringa, sauksim par izrēķināmām funkcijām, t.i., paskaidrojošo vārdu "Tjūrings" nelietosim.

Teorēma 3.1.1. *Katrai izrēķināmai funkcijai* $f : \mathbb{N}^k \multimap \mathbb{N}$ *eksistē Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T}$*, kas to rēķina, piedevām, ja* $\bar{x} \notin \mathrm{Dom}(f)$*, tad mašīna neapstājas.*

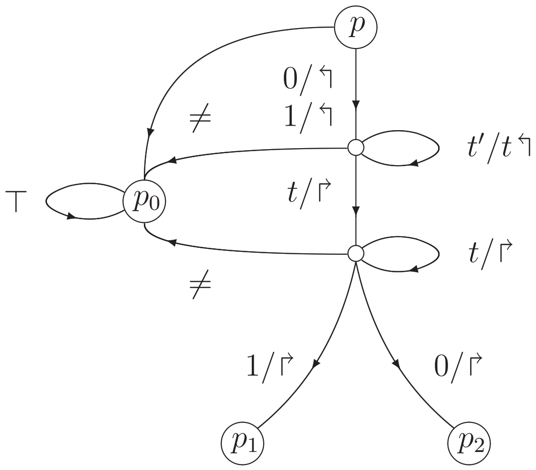
□ Pieņemsim, ka $\mathfrak{T}_0 = \langle Q_0, Q, A_0, S, q_0, q_1, t, T_0 \rangle$ ir Tjūringa mašīna, kas rēķina funkciju $f : \mathbb{N}^k \multimap \mathbb{N}$. Definējam jaunu Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}$. Pieņemsim, ka $t' \notin A_0$, tad mašīnas $\mathfrak{T}$ ārējo alfabētu A izvēlamies vienādu ar $A_0 \cup \{t'\}$.

Mašīnas $\mathfrak{T}$ programmu T definējam balstoties uz mašīnas $\mathfrak{T}_0$ programmu T_0. Pieņemsim, ka $p \notin Q$ un $qa \mapsto \dot{a}\bigstar\dot{q}$ ir programmas T_0 komanda, tad

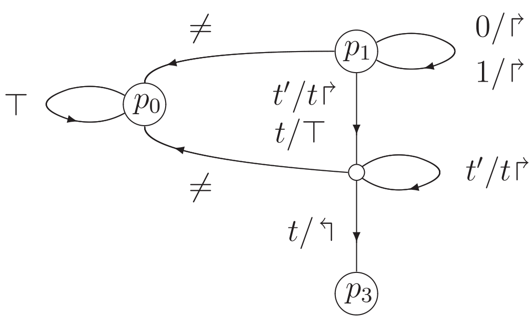
$$qa \mapsto \begin{cases} \dot{a}\bigstar\dot{q}, & \text{ja } \dot{a} \neq t \ \wedge \ \dot{q} \neq q_0, \\ t'\bigstar\dot{q}, & \text{ja } \dot{a} = t \ \wedge \ \dot{q} \neq q_0, \\ \dot{a}\bigstar p, & \text{ja } \dot{a} \neq t \ \wedge \ \dot{q} = q_0, \\ t'\bigstar p, & \text{ja } \dot{a} = t \ \wedge \ \dot{q} = q_0. \end{cases}$$

ir programmas T komanda. Tā rezultātā mēs esam nodefinējuši arī programmas T komandu $qt \mapsto a'\bigstar q'$. Saskaņā ar šo komandu definējam komandu $qt' \mapsto a'\bigstar q'$.

Ievērojam, ja mēs aprobežotos ar šādi definēto programmu T, tad $\mathfrak{T}$ veiktu tās pašas darbības, ko veic $\mathfrak{T}_0$ tikai burta t vietā tā rakstītu burtu t'. Turklāt, ja $\mathfrak{T}_0$ sākuma ierakstam u neapstājas, tad arī $\mathfrak{T}$ šim pašam sākuma



3.1. zīm.: Došanās pa kreisi.

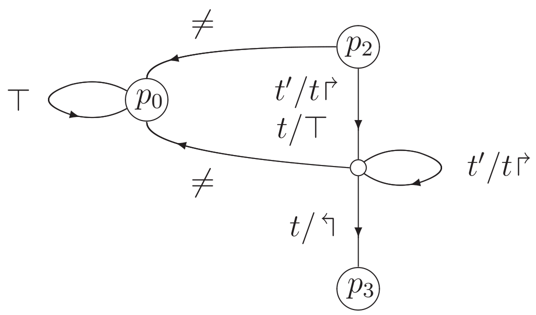


3.2. zīm.: Došanās pa labi, ja $y > 0$.

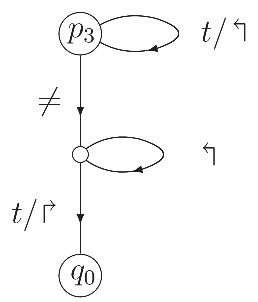
ierakstam u neapstājas. Taču, ja $\mathfrak{T}_0$ apstājas, tad mašīna $\mathfrak{T}$ nonāk stāvoklī p. Tā kā visās šūnās, kuras darba laikā apmeklēja $\mathfrak{T}$, ir ierakstīti burti, kas atšķiras no burta t, tad mums ir iespējams pārbaudīt vai darba rezultāts atbilst norunai $\mathfrak{T}_0(u) = v$, kur v ir kāda naturāla skaitļa pieraksts 2–ku sistēmā. Tas nozīmē, ka mums ir jāpārliecinās, vai ieraksts ir izskatā

$$(t')^m(y)_2(t')^n,$$

kur y ir kāds naturāls skaitlis. Turklāt mums jāpārliecinās, ka mašīnas galviņa atrodas uz ieraksta $(y)_2$ sākuma. Vispirms pārliecinamies, vai ieraksts pa kreisi satur tikai burtus t un t' (skatīt 3.1. zīm.). Šai zīmējumā lokam piekārtotā pazīme $\neq$ norāda, ka atbilstošā pāreja veicama, ja citas pārejas neapmierina prasītos nosacījumus. Tā, piemēram, augšējam lokam (p, p_0) piekārtota pazīme $\neq$. Dotajā situācijā tas nozīmē, ka Tjūringa mašīna pāriet stāvoklī p_0, ja galviņa aplūko burtu, kas nav nedz 0, nedz 1, galviņa netiek pārvietota nedz pa kreisi, nedz pa labi, ieraksts šūnā netiek mainīts.



3.3. zīm.: Došanās pa labi, ja $y = 0$.



3.4. zīm.: Došanās uz ieraksta sākumu.

Pēc tam pārliecinamies, vai ieraksts pa labi reprezentē skaitli. Šai sakarā mums jāpārbauda 2 atšķirīgas situācijas: ieraksts atbilst pozitīvam naturālam skaitlim, vai ieraksts atbilst skaitlim 0. Pirmajā gadījumā jābūt vārdam izskatā $1w(t')^n$ (skatīt 3.2. zīm.), kur $w \in \{0,1\}^*$, otrajā gadījumā — vārdam izskatā $0(t')^n$ (skatīt 3.3. zīm.).

Mašīna $\mathfrak{T}$ nonāks stāvoklī p_3 tikai tad, ja $x \in \mathrm{Dom}(f)$, pretējā gadījumā tā nekad neapstāsies. Tagad atliet atgriezties uz ieraksta sākumu un apstāties (skatīt 3.4. zīm.). ■

Definīcija 3.1.2. *Pieņemsim, ka mašīna* $\mathfrak{T}$ *rēķina funkciju* $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$. *Mēs teiksim, ka Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T}$ *regulāri rēķina funkciju* $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$, *ja mašīna neapstājas visiem* $\bar{x} \notin \mathrm{Dom}(f)$.

Mēs teiksim, ka $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ ir *regulāri izrēķināma*, ja eksitē Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$, kas šo funkciju rēķina regulāri.

Sekas 3.1.3. *Katra izrēķināma funkcija ir regulāri izrēķināma.*

Definīcija 3.1.4. *Tjūringa mašīnu* $\mathfrak{T}$ *sauc par vienpusēju Tjūringa mašīnu, ja tās galviņa darba gaitā nekad neaplūkos šūnas, kas atrodas pa kreisi no sākuma pozīcijas.*

Piemēram, ja vienpusējās Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa sākumā aplūko šūnu R_0, tad darba gaitā tās galviņa nekad nenonāks uz šūnas R_{-1}.

Vienošanās. Dažnedažādus programmu fragmentus, ko lietosim, lai sastādītu programmu $P(Q_0)$, sauksim par apakšprogrammām. Apakšprogrammu mērķis — to vairākkārtēja lietošana rakstot programmu $P(Q_0)$.

Apakšprogramma $F(Q)$ ir atkarīga no stāvokļu kopas Q. Katrā konkrētā lietojumā (rakstot programmu $P(Q_0)$) mēs izmantojam kādu apakšprogrammas $F(Q)$ modifikāciju $F(Q_1)$, kas var atšķirties no $F(Q)$ tikai ar to, ka daži (vai pat visi) kopas Q elementi ir pārsaukti. Šādas pārsaukšanas rezultātā mēs panākam, ka $Q_1 \subseteq Q_0$, turklāt rakstot programmu $P(Q_0)$ mēs varam lietot (ja tas ir nepieciešams) vairākas apakšparogrammas $F(Q)$ modifikācijas, piemēram, $F(Q_1)$ un $F(Q_2)$. Mums tikai jāņem vērā, ka dažādām modifikācijām (ja tas netiek speciāli atrunāts) ir disjunktas stāvokļu kopas, t.i., $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Saprotams rakstot apakšprogrammu $F(Q)$ mēs rūpējamies tikai par to, lai kopas Q elementi būtu nofiksēti un apzīmējumi nebūtu pār mēru smagnēji.

Vārda nobīdīšana. Pieņemsim, ka $A = \{t, a_1, a_2, \ldots, a_n, \dot{t}\}$ un $* \notin A$. Mūsu mērķis konstruēt tādu vienpusēju apakšprogrammu $\mathfrak{L}(s)$, ka

$$\forall w \in A_t^* \; q_s' * w = *q_s'\dot{t}w$$

Apakšprogrammas $\mathfrak{L}(s)$ ārējais alfabēts $A' \supseteq A \cup \{*\}$, tās stāvokļu kopa $Q \leftharpoondown \{q_s, p_0^s, p_1^s, \ldots, p_{n+2}^s\}$.

$$\begin{array}{lll}
q_s'* \mapsto * \Rsh p_0^s & p_i^s a_j \mapsto a_i \Rsh p_j^s & p_{n+2}^s a \mapsto a \Lsh p_{n+2}^s \\
p_0^s a_i \mapsto \dot{t} \Rsh p_i^s & p_{n+1}^s a_j \mapsto \dot{t} \Rsh p_j^s & p_{n+2}^s * \mapsto * \Rsh q_s' \\
p_0^s \dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p_{n+1}^s & p_i^s \dot{t} \mapsto a_i \Rsh p_{n+1}^s & \\
p_0^s t \mapsto \dot{t} \top q_s' & p_{n+1}^s \dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p_{n+1}^s & \\
 & p_i^s t \mapsto a_i \Lsh p_{n+2}^s & \\
 & p_{n+1}^s t \mapsto \dot{t} \Lsh p_{n+2}^s &
\end{array}$$

Te indeksi i, j mainās robežās no 1 līdz n, burts a reprezentē katru alfabēta A burtu. Pārējās komandas ir izskatā $qb \mapsto b \top q$.

Speciālā gadījumā, ja $n = 2$, mēs jau esam pazīstami ar šo konstrukciju (skatīt 2.6. zīm.).

Teorēma 3.1.5. *Katrai Tjūringa mašīnai* $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T \rangle$ *eksistē tāda vienpusēja Tjūringa mašīna* $\mathfrak{T}'$, *ka*

$$\forall w \in A_t^* \; \mathfrak{T} : w \models w' \Leftrightarrow \mathfrak{T}' : w \models w'$$

$\Box$ Pieņemsim, ka $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T \rangle$ ir Tjūringa mašīna. Definējam jaunu Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}' = \langle Q_0', Q', A', S, q_0, q_1, t, T' \rangle$. Pieņemsim, ka $A = \{t, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un $A_0 \leftharpoondown \{*, \dot{t}, t', a_1', a_2', \ldots, a_n'\}$, kur $A \cap A_0 = \emptyset$. Izvēlamies $A' \leftharpoondown A \cup A_0$.

Mašīnas $\mathfrak{T}'$ programmu T' definēsim pakāpeniski. Programmas T' aprakstā mēs neiekļausim komandas izskatā $qa \mapsto a \top q$.

Vispirms pēc analoģijas ar apakšprogramm $\mathfrak{L}(s)$ ierakstam $*$ un nobīdam sākotnējo vārdu $w \in A_t^*$ vienu vietu pa labi.

$$\begin{array}{rcl}
q_1 a_i & \mapsto & * \Rsh p_i \\
q_1 t & \mapsto & * \Rsh q_1' \\
p_i a_j & \mapsto & a_i \Rsh p_j \\
p_i t & \mapsto & a_i \Lsh p_{n+1} \\
p_{n+1} a & \mapsto & a \Lsh p_{n+1} \\
p_{n+1} * & \mapsto & * \Rsh q_1'
\end{array}$$

Tālāk mēs darbojamies līdzīgi kā iepriekšējās teorēmas pierādījumā. Pieņemsim, ka $p \notin Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ un $q_i a \mapsto \acute{a} \bigstar q_j$ ir programmas T

komanda, tad

$$q_i'a \mapsto \begin{cases} \acute{a}\bigstar q_j', & \text{ja } \acute{a} \neq t \ \wedge \ q_j \neq q_0, \\ \dot{t}\bigstar q_j', & \text{ja } \acute{a} = t \ \wedge \ q_j \neq q_0, \\ \acute{a}\bigstar p, & \text{ja } \acute{a} \neq t \ \wedge \ q_j = q_0, \\ \dot{t}\bigstar p, & \text{ja } \acute{a} = t \ \wedge \ q_j = q_0. \end{cases}$$

ir programmas T' komanda. Tā rezultātā mēs esam nodefinējuši arī programmas T' komandu $q_i't \mapsto \acute{a}\bigstar q'$. Saskaņā ar šo komandu definējam komandu $q_i'\dot{t} \mapsto \acute{a}\bigstar q'$.

Pievienojam visas apakšprogrammas $\mathfrak{L}(s)$, kur $s \in \overline{1,m}$. Esam panākuši, ka $\mathfrak{T}'$ veic tās pašas darbības, ko $\mathfrak{T}$, tikai nekad nenonāk pa kreisi no $*$.

Ja mašīnas $\mathfrak{T}$ beigu konfigurācija, kas atbilst vārdam w, ir uq_0v, tad šobrīd mašīnas $\mathfrak{T}'$ vārds ir $*\bar{u}p\bar{v}$, kur $\bar{u}$ ir izskatā $\dot{t}^k u'$ un $\bar{v}$ ir izskatā $v'\dot{t}^\varkappa$, vai $\bar{v} = t = v$, turklāt u' no u atšķiras tikai ar to, ka visas burta t ieejas aizstātas ar burta $\dot{t}$ ieejām. Līdzīgi, vārds v' no v atšķiras tikai ar to, ka visas burta t ieejas aizstātas ar burta $\dot{t}$ ieejām. Mums atliek tikai nodzēst $*$, burtus $\dot{t}$ aizstāt ar t un atgriezties tai pašā vietā, kur šobrīd atrodas mašīnas $\mathfrak{T}'$ galviņa. Tas izdarāms šādi:

$$\begin{array}{lll} p* \mapsto t' \Rsh p_2' & p_0'a_i \mapsto a_i \Lsh p_0' & p_2'a_i \mapsto a_i \Rsh p_2' \\ pa_i \mapsto a_i' \Lsh p_0' & p_0'\dot{t} \mapsto t \Lsh p_0' & p_2'\dot{t} \mapsto t \Rsh p_2' \\ p\dot{t} \mapsto t' \Lsh p_0' & p_0'* \mapsto t \Rsh p_1' & p_2't \mapsto t \Lsh p_3' \\ pt \mapsto t' \Lsh p_0' & & \\ & p_1'a_i \mapsto a_i \Rsh p_1' & p_3'a_i \mapsto a_i \Lsh p_3' \\ & p_1't \mapsto t \Rsh p_1' & p_3't \mapsto t \Lsh p_3' \\ & p_1'a_i' \mapsto a_i' \Rsh p_2' & p_3'a_i \mapsto a_i \top q_0 \\ & & p_3't' \mapsto t \top q_0 \end{array}$$

Te $i \in \overline{1,n}$. Esam panākuši, ka $\mathfrak{T} : w \vDash w' \Leftrightarrow \mathfrak{T}' : w \vDash w'$. ■

Definīcija 3.1.6. *Funkciju $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\to \mathbb{N}$ sauc par vienpusēji izrēķināmu, ja eksistē vienpusēja Tjūringa mašīna, kas to rēķina.*

Sekas 3.1.7. *Katra izrēķināma funkcija ir vienpusēji regulāri izrēķināma.*

Teorēma 3.1.8. *Ja $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ un $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ ir izrēķināmas funkcijas, tad šo funkciju kompozīcija $g(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$ ir izrēķināma funkcija.*

□ Ņemot vērā tikko formulētās Sekas 3.1.7 varam pieņemt, ka visas funkcijas ir vienpusēji regulāri izrēķināmas. Tas nozīmē, ka eksistē vienpusējas Tjūringa mašīnas $\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_m$, kas regulāri rēķina funkcijas

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m), f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}).$$

1. solis. Kopējam vārdu $(\bar{x})_2$, iegūstam vārdu $(\bar{x})_2 t(\bar{x})_2$.

Novietojam mašīnas galviņu uz otrā vārda $(\bar{x})_2$ sākuma un palaižam mašīnu $\mathfrak{F}_m$. Iegūstam rezultātu $(\bar{x})_2 t(f_m(\bar{x}))_2$, to pārvietojam. Iegūstam vārdu $(f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2$.

2. solis. Kopējam vārdu $(\bar{x})_2$, iegūstam vārdu $(f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2 t(\bar{x})_2$.

Novietojam mašīnas galviņu uz otrā vārda $(\bar{x})_2$ sākuma un palaižam mašīnu $\mathfrak{F}_{m-1}$. Iegūstam rezultātu $(f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2 t(f_{m-1}(\bar{x}))_2$, to pārvietojam. Iegūstam vārdu $(f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2$.

Solis *m*-1. Kopējam vārdu $(\bar{x})_2$, iegūstam vārdu

$$(f_3(\bar{x}))_2 * \cdots * (f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2 t(\bar{x})_2.$$

Novietojam mašīnas galviņu uz otrā vārda $(\bar{x})_2$ sākuma un palaižam mašīnu $\mathfrak{F}_2$. Iegūstam rezultātu

$$(f_3(\bar{x}))_2 * \cdots * (f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2 t(f_2(\bar{x}))_2,$$

to pārvietojam. Iegūstam vārdu

$$(f_2(\bar{x}))_2 * (f_3(\bar{x}))_2 * \cdots * (f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2 t(\bar{x})_2.$$

Solis *m*. Novietojam mašīnas galviņu uz vārda $(\bar{x})_2$ sākuma un palaižam mašīnu $\mathfrak{F}_1$. Iegūstam rezultātu

$$(f_2(\bar{x}))_2 * \cdots * (f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2 t(f_1(\bar{x}))_2,$$

to pārvietojam. Iegūstam vārdu

$$(f_1(\bar{x}))_2 * (f_2(\bar{x}))_2 * \cdots * (f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2.$$

Solis *m*+1. Novietojam mašīnas galviņu uz vārda

$$(f_1(\bar{x}))_2 * (f_2(\bar{x}))_2 * \cdots * (f_{m-1}(\bar{x}))_2 * (f_m(\bar{x}))_2$$

sākuma un palaižam mašīnu $\mathfrak{G}$. Iegūstam rezultātu

$$(g(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))_2. \qquad \blacksquare$$

3.2. Neizrēķināmas funkcijas

Apakšprogrammas

$$
\begin{array}{llll}
\triangledown_0 & & & \\
p_{10}t & \mapsto & 0 \Rsh p_{20} \\
p_{20}t & \mapsto & 1 \Rsh p_{30} \\
p_{30}t & \mapsto & 0 \Rsh p_{40} \\
p_{40}t & \mapsto & 0 \Rsh p_{50} \\
. \; . & . & . \; . \\
p_{n0}t & \mapsto & 0 \top p_{n0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\triangledown_1 & & & \\
p_{11}t & \mapsto & 0 \Rsh p_{21} \\
p_{21}t & \mapsto & 0 \Rsh p_{31} \\
p_{31}t & \mapsto & 1 \Rsh p_{41} \\
p_{41}t & \mapsto & 0 \Rsh p_{51} \\
. \; . & . & . \; . \\
p_{n1}t & \mapsto & 0 \top p_{n1}
\end{array}
$$

Apakšprogramma $\triangledown_0$ darbu sāk stāvoklī p_{10} un darbu beidz stāvoklī p_{n0}. Apakšprogramma $\triangledown_1$ darbu sāk stāvoklī p_{11} un darbu beidz stāvoklī p_{n1}. Apakšprogramma $\triangledown_0$ vārdu t^n pārstrādā par vārdu 010^{n-2}, savukārt apakšprogramma $\triangledown_1$ vārdu t^n pārstrādā par vārdu $0^2 10^{n-3}$.

Teorēma 3.2.1. *Katrai izrēķināmai funkcijai* $f : \mathbb{N} \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ *eksistē Tjūringa mašīna ar ārējo alfabētu* $\{t, 0, 1\}$*, kas to rēķina.*

□ Pieņemsim, ka Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_0 = \langle Q_0, Q, A_0, S, q_0, q_1, t, T_0 \rangle$ rēķina funkciju $f : \mathbb{N} \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ un $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, kur $a_1 = t, a_2 = 0, a_3 = 1$. Ņemot vērā Sekas 3.1.7 mēs varam izvēlēties $\mathfrak{T}_0$ tā, lai katram $x \notin \mathrm{Dom}(f)$ mašīna neapstātos. Ievērojam sākumā uz lentas ir vārds $(x)_2 \in \{0, 1\}^+$; ja mašīna $\mathfrak{T}_0$ beidz darbu, tad uz lentas ir vārds $(y)_2 \in \{0, 1\}^+$. Tā rezultātā gan darba sākumā, gan pēc darba beigām uz lentas ir vārds alfabētā $\{0, 1\}^+$. Tātad, lai pierakstītu šo informāciju, t.i., vārdus $(x)_2$ un $(y)_2$ mums pietiek ar alfabētu $\{t, 0, 1\}$.

Mēs definēsim Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}$ ar ārējo alfabētu $\{t, 0, 1\}$. Mašīna $\mathfrak{T}$ imitēs mašīnas $\mathfrak{T}_0$ darbu. Katram burtam $a_i \in A_0$ piekārtosim vārdu

$u_i \leftrightharpoons u_{i1}u_{i2}\dots u_{in}$ garumā n, kur

$$u_{ij} \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{ja } i \neq j; \\ 1, & \text{ja } i = j. \end{cases}$$

Nosauksim šo vārdu u_i par burta a_i kodu. Mūsu mērķis katru mašīnas $\mathfrak{T}_0$ komandu $q_i a_j \mapsto a_\sigma \bigstar q_s$ aizstāt ar apakšprogrammu $A(i,j)$, kas strādās ar burtu a_j un a_σ kodiem, proti, apakšprogramma $A(i)$ vispirms noskaidros, kāda burta a_j kods ir jāapstrādā, tad darbu sāks apakšprogramma $A(i,j)$, kas burta a_j kodu aizstās ar burta a_σ kodu. Pēc tam $A(i,j)$ saskaņā ar $\bigstar$ nodrošinās pāreju uz nākošo burtu. Visbeidzot $A(i,j)$ nodos vadību apakšprogrammai $A(s)$. Tālākais pierādījums ir tikai demonstrācija, ka tiešām šādu mašīnu $\mathfrak{T}$ var uzkonstruēt.

Sākuma ieraksta kodēšana. Vispirms Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ sākuma ierakstu $(x)_2$ aizstāj ar šī vārda kodu, proti, ja

$$(x)_2 = x_1 x_2 \dots x_k, \quad \text{kur} \quad \forall i\ x_i \in \{0,1\},$$

tad vārda $(x)_2$ kodu mēs definējam kā vārdu

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k},$$

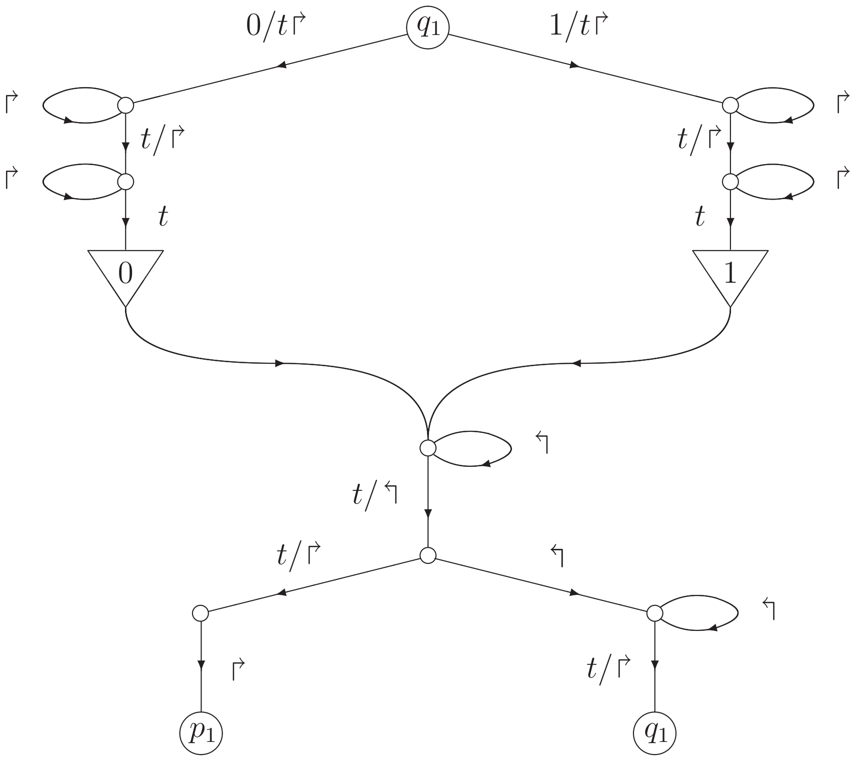
kur katrs u_{i_v} ir burta x_v kods.

Mašīna $\mathfrak{T}$ darbu sāk stāvoklī q_1, nolasa burtu x_1, to nodzēš, iet uz vārda beigām. Te pēc atstarpes ieraksta burta x_1 kodu u_{i_1}, tad dodas uz vārda $x_2 x_3 \dots x_k$ sākumu, pāriet stāvoklī q_1. Cikls noslēdzies. Tālākais jau ir indukcija. Detaļas skatīt 3.5. zīmējumā.

Apakšprogramma $A(i)$. Mēs pieņemam, ka mašīnai $\mathfrak{T}_0$ šobrīd jāizpilda komanda $q_i a_j \mapsto a_\sigma \bigstar q_s$, tāpēc mašīna $\mathfrak{T}$ atrodas stāvoklī p_i un tās galviņa aplūko a_j koda u_j pirmo burtu, proti, burtu u_{j1}.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
p_i 0 & \mapsto & 0 \Rsh p_{i2} & p_i 1 & \mapsto & 1 \top q_{i1} \\
p_{i2} 0 & \mapsto & 0 \Rsh p_{i3} & p_{i2} 1 & \mapsto & 1 \top q_{i2} \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots} & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots} \\
p_{in-2} 0 & \mapsto & 0 \Rsh p_{in-1} & p_{in-2} 1 & \mapsto & 1 \top q_{in-2} \\
p_{in-1} 0 & \mapsto & 0 \Rsh q_{in} & p_{in-1} 1 & \mapsto & 1 \top q_{in-1}
\end{array}$$

Apakšprogramma $A(i)$ darbu beidz stāvoklī q_{ij}, kas ir apakšprogrammas $A(i,j)$ sākuma stāvoklis. Šai situācijā mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa aplūko koda u_j burtu $u_{jj} = 1$, t.i., mašīna $\mathfrak{T}$ ir atpazinusi burta a_j kodu.



3.5. zīm.: Sākuma ieraksta kodēšana alfabētā $\{0, 1\}$.

Apakšprogramma $A(i, j)$ imitē programmas $\mathfrak{T}_0$ darbu, proti, tā imitē komandu $q_i a_j \mapsto a_\sigma \bigstar q_s$. Apakšprogramma $A(i, j)$ sastāv no diviem blokiem:

- koda u_j aizstāšana ar kodu u_s — bloks $A_1(i, j)$;

- pārejas $\bigstar$ imitācija — bloks $A_2(i, j)$.

(i) Bloka $A_1(i, j)$ konstrukcija ir atkarīga no komandas $q_i a_j \mapsto a_\sigma \bigstar q_s$. Uzsveram, bloka definīcija būtiski atkarīga no tā, vai $j < \sigma$, $j = \sigma$, vai $j > \sigma$:

$j < \sigma$	$j = \sigma$	$j > \sigma$
$q_{ij}1 \mapsto 0 \Rsh \dot{q}_1$	$q_{ij}1 \mapsto 1 \top \ddot{q}_\sigma$	$q_{ij}1 \mapsto 0 \Lsh \dot{q}_1$
$\dot{q}_1 0 \mapsto 0 \Rsh \dot{q}_2$		$\dot{q}_1 0 \mapsto 0 \Lsh \dot{q}_2$
$\dot{q}_2 0 \mapsto 0 \Rsh \dot{q}_3$		$\dot{q}_2 0 \mapsto 0 \Lsh \dot{q}_3$
$. \quad . \quad . \quad . \quad .$		$. \quad . \quad . \quad . \quad .$
$\dot{q}_{\sigma-j} 0 \mapsto 1 \top \ddot{q}_\sigma$		$\dot{q}_{j-\sigma} 0 \mapsto 1 \top \ddot{q}_\sigma$

Bloks $A_1(i,j)$ darbu sāk stāvoklī q_{ij}, darbu beidz stāvoklī $\ddot{q}_\sigma$, kas ir bloka $A_2(i,j)$ sākuma stāvoklis.

(ii) Bloka $A_2(i,j)$ konstrukcija ir atkarīga no komandas $q_i a_j \mapsto a_\sigma \bigstar q_s$. Uzsveram, bloka definīcija būtiski atkarīga no σ un no tā, vai $\bigstar = \Lsh$, $\bigstar = \top$, vai $\bigstar = \Rsh$. Pati sarežģītākā ir kustība pa labi. Ja nu izrādās, ka labajā pusē nav koda, tad tur atrodas burts t. Šai gadījumā nepieciešams uzkonstruēt burta t kodu un atgriezties uz koda sākuma burtu.

Mēs neuzrādīsim visas bloka $A_2(i,j)$ komandas, proti, mēs neuzrādīsim tās komandas, kas neietekmē bloka darbu. Konkrētāk, bez īpašas vajadzības mēs neuzrādīsim komandas $q_i a_j \mapsto a_j \top q_i$.

$\bigstar = \Lsh$ un $\sigma \neq 1$	$\bigstar = \top$ un $\sigma \neq 1$	$\bigstar = \Rsh$ un $\sigma \neq n$
$\ddot{q}_\sigma 1 \mapsto 1 \Lsh \ddot{q}_{\sigma-1}$	$\ddot{q}_\sigma 1 \mapsto 1 \Lsh \ddot{q}_{\sigma-1}$	$\ddot{q}_\sigma 1 \mapsto 1 \Rsh \ddot{q}_{\sigma+1}$
$\ddot{q}_{\sigma-1} 0 \mapsto 0 \Lsh \ddot{q}_{\sigma-2}$	$\ddot{q}_{\sigma-1} 0 \mapsto 0 \Lsh \ddot{q}_{\sigma-2}$	$\ddot{q}_{\sigma+1} 0 \mapsto 0 \Rsh \ddot{q}_{\sigma+2}$
$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$
$\ddot{q}_1 0 \mapsto 0 \Lsh q'_1$	$\ddot{q}_1 0 \mapsto 0 \top p_s$	$\ddot{q}_n 0 \mapsto 0 \Rsh q'_1$
$q'_1 t \mapsto 0 \Lsh q'_2$		$q'_1 t \mapsto 1 \Rsh q'_2$
$q'_1 0 \mapsto 0 \Lsh q'_2$		$q'_1 0 \mapsto 0 \top p_s$
$q'_1 1 \mapsto 1 \Lsh q'_2$		$q'_1 1 \mapsto 1 \top p_s$
$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$		$q'_2 t \mapsto 0 \Rsh q'_3$
$q'_{n-1} t \mapsto 0 \Lsh q'_n$		$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$
$q'_{n-1} 0 \mapsto 0 \Lsh q'_n$		$q'_{n-1} t \mapsto 0 \Rsh q'_n$
$q'_{n-1} 1 \mapsto 1 \Lsh q'_n$		$q'_n t \mapsto 0 \Lsh q''_{n-1}$
$q'_n t \mapsto 1 \top p_s$		$q''_{n-1} 0 \mapsto 0 \Lsh q''_{n-2}$
$q'_n 0 \mapsto 0 \top p_s$		$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$
$q'_n 1 \mapsto 1 \top p_s$		$q''_2 0 \mapsto 0 \Lsh p_s$

Ņemam vērā, ka te p_s ir apakšprogrammas $A(s)$ sākuma stāvoklis.

$\bigstar = \Lsh$ un $\sigma = 1$

$$
\begin{array}{l}
\ddot{q}_\sigma 1 \mapsto 1 \Lsh q'_1 \\
q'_1 t \mapsto 0 \Lsh q'_2 \\
q'_1 0 \mapsto 0 \Lsh q'_2 \\
q'_1 1 \mapsto 1 \Lsh q'_2 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
q'_{n-1} t \mapsto 0 \Lsh q'_n \\
q'_{n-1} 0 \mapsto 0 \Lsh q'_n \\
q'_{n-1} 1 \mapsto 1 \Lsh q'_n \\
q'_n t \mapsto 1 \top p_s \\
q'_n 0 \mapsto 0 \top p_s \\
q'_n 1 \mapsto 1 \top p_s
\end{array}
$$

$\bigstar = \top$ un $\sigma = 1$

$$
\ddot{q}_\sigma 1 \mapsto 1 \top p_s
$$

$\bigstar = \Rsh$ un $\sigma = n$

$$
\begin{array}{l}
\ddot{q}_\sigma 1 \mapsto 1 \Rsh q'_1 \\
q'_1 t \mapsto 1 \Rsh q'_2 \\
q'_1 0 \mapsto 0 \top p_s \\
q'_1 1 \mapsto 1 \top p_s \\
q'_2 t \mapsto 0 \Rsh q'_3 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
q'_{n-1} t \mapsto 0 \Rsh q'_n \\
q'_n t \mapsto 0 \Lsh q''_{n-1} \\
q''_{n-1} 0 \mapsto 0 \Lsh q''_{n-2} \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
q''_2 0 \mapsto 0 \Lsh p_s
\end{array}
$$

Apakšprogramma $A(0)$. Mēs pieņemam, ka mašīna $\mathfrak{T}_0$ šobrīd nonākusi beigu stāvoklī q_0, tāpēc mašīna $\mathfrak{T}$ atrodas stāvoklī p_0. Esam sasnieguši mašīnas $\mathfrak{T}_0$ darba simulācijas pēdējo fāzi. Uz lentas ir funkcijas $f(x)$ vērtība, tikai pieraksts nav 2–ku sistēmā. Ja $f(x) = y$ un $(y)_2 = y_1 y_2 \dots y_\varkappa$, tad uz lentas ir vārds $u u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa} u'$, kur katrs u_{j_v} ir burta y_v kods. Vārds u ir izskatā $(10^{n-1})^{s_1}$, vāds u' ir izskatā $(10^{n-1})^{s_2}$; te gan s_1, gan s_2 ir nenegatīvi veseli skaitļi. Saprotams, mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa šobrīd aplūko koda u_{j_1} pirmo burtu.

Apakšprogramma $A(0)$ sastāv no trīs blokiem:

- vārda u nodzēšana — bloks $A_1(0)$;
- vārda u' nodzēšana — bloks $A_2(0)$;
- $u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa}$ pārstrādāšana par $(y)_2$ — bloks $A_3(0)$.

(i) Bloks $A_1(0)$ darbu sāk stāvoklī p_0, darbu beidz stāvoklī q_1^2. Šai gadījumā uz lentas ir palicis ieraksts $u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa} u'$, mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa aplūko koda u_{j_1} pirmo burtu.

$$\begin{array}{rcl} p_0 0 & \mapsto & 0 \Lsh q_1^1 \\ q_1^1 t & \mapsto & t \Rsh q_2^1 \\ q_1^1 0 & \mapsto & t \Lsh q_1^1 \\ q_1^1 1 & \mapsto & t \Lsh q_1^1 \\ q_2^1 t & \mapsto & t \Rsh q_2^1 \\ q_2^1 0 & \mapsto & 0 \top q_1^2 \end{array}$$

(ii) Bloks $A_2(0)$ darbu sāk stāvoklī q_1^2, darbu beidz stāvoklī p_1'. Šai gadījumā uz lentas ir palicis ieraksts $u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa}$; mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa aplūko koda u_{j_1} pirmo burtu.

$$\begin{array}{lll} q_1^2 t \mapsto t \Lsh q_2^4 & q_1^3 t \mapsto t \Lsh q_1^4 & q_1^4 t \mapsto t \Lsh q_1^4 \\ q_1^2 0 \mapsto 0 \Rsh q_2^2 & q_1^3 1 \mapsto t \Rsh q_2^3 & q_1^4 0 \mapsto 0 \Lsh q_2^4 \\ q_1^2 1 \mapsto t \Rsh q_2^3 & q_2^3 0 \mapsto t \Rsh q_3^3 & q_1^4 1 \mapsto 1 \Lsh q_2^4 \\ q_2^2 0 \mapsto 0 \Rsh q_3^2 & . \quad . \quad . \quad . \quad . & q_2^4 t \mapsto t \Rsh p_1' \\ q_2^2 1 \mapsto 1 \Rsh q_3^2 & q_n^3 0 \mapsto t \Rsh q_1^3 & q_2^4 0 \mapsto 0 \Lsh q_2^4 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & & q_2^4 1 \mapsto 1 \Lsh q_2^4 \\ q_n^2 0 \mapsto 0 \Rsh q_1^2 & & \\ q_n^2 1 \mapsto 1 \Rsh q_1^2 & & \end{array}$$

Ja stāvoklī q_1^2 mašīna aplūko burtu

- t, tad galviņa atrodas aiz vārda $u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa}$ pa labi un $u' = \lambda$;
- 0, tad galviņa atrodas uz kāda no vārdiem u_{j_v};
- 1, tad galviņa atrodas uz burta t koda 10^{n-1}.

Mašīna $\mathfrak{T}$ stāvokļos q_i^3 dzēš vārdu u'. Mašīna $\mathfrak{T}$ stāvokļos q_i^4 atgriežas uz vārda $u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa}$ sākumu.

(iii) Bloks $A_3(0)$ darbu sāk stāvoklī p_1', darbu beidz stāvoklī q_0, kad uz lentas ir ieraksts $(y)_2$.

$$\begin{array}{lll}
p'_1 0 \mapsto t \Rsh p'_2 & p'_{n+1} t \mapsto t \Lsh p'_{n+2} & p' t \mapsto t \Rsh p' \\
p'_2 0 \mapsto 1 \Rsh p'_3 & p'_{n+1} 0 \mapsto t \Rsh p' & p' 0 \mapsto t \Rsh p^1_3 \\
p'_2 1 \mapsto 0 \Rsh p'_3 & & p' 1 \mapsto t \Rsh p^0_3 \\
p'_3 0 \mapsto t \Rsh p'_4 & p'_{n+2} t \mapsto t \Lsh p'_{n+2} & \\
p'_3 1 \mapsto t \Rsh p'_4 & p'_{n+2} 0 \mapsto 0 \top q_0 & \\
p'_4 0 \mapsto t \Rsh p'_5 & p'_{n+2} 1 \mapsto 1 \top q_0 & \\
. \ . \ . \ . \ . & & \\
p'_n 0 \mapsto t \Rsh p'_{n+1} & &
\end{array}$$

Mašīna $\mathfrak{T}$ stāvokļos p'_i vārdu u_{j_1} pārstrādā par 0, vai 1. Ja nu

$$u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa} = u_{j_1},$$

tad mašīna $\mathfrak{T}$ pilda komanda $p'_{n+1} t \mapsto t \Lsh p'_{n+2}$, nonāk stāvoklī p'_{n+2}, dodas pa kreisi, sasniedz ciparu 0, vai 1 un apstājas. Mašīnas $\mathfrak{T}_0$ modelēšanas process ir sekmīgi noslēdzies.

Pretējā gadījumā, t.i., ja $\varkappa > 1$, mašīna $\mathfrak{T}$ pilda komanda $p'_{n+1} 0 \mapsto t \Rsh p'$. Tagad nāksies apstrādāt arī vārdu $u_{j_2} \dots u_{j_\varkappa}$. Turpmākais darbs organizēts ciklā. Ja kārtējais vārds u_{j_v} ir cipara 0 kods, tad mašīna $\mathfrak{T}$ nonāk stāvoklī p^0_3, ja u_{j_v} ir cipara 1 kods — stāvoklī p^1_3.

$$\begin{array}{lll}
p^0_3 0 \mapsto t \Rsh p^0_4 & p^0_0 t \mapsto t \Lsh p^0_0 & p^0_{n+2} t \mapsto t \Lsh p^0_{n+2} \\
. \ . \ . \ . \ . & p^0_0 0 \mapsto 0 \Rsh p^0_1 & p^0_{n+2} 0 \mapsto 0 \Rsh p^0_{n+3} \\
p^0_n 0 \mapsto t \Rsh p^0_{n+1} & p^0_0 1 \mapsto 1 \Rsh p^0_1 & p^0_{n+2} 1 \mapsto 1 \Rsh p^0_{n+3} \\
p^0_{n+1} t \mapsto t \Lsh p^0_0 & p^0_1 t \mapsto 0 \Lsh p^0_2 & p^0_{n+3} t \mapsto 0 \Rsh p' \\
p^0_{n+1} 0 \mapsto t \Lsh p^0_{n+2} & p^0_2 t \mapsto t \Rsh q_0 & \\
 & p^0_2 0 \mapsto 0 \Lsh p^0_2 & \\
 & p^0_2 1 \mapsto 1 \Lsh p^0_2 &
\end{array}$$

Mašīna stāvokļos $p^0_3, p^0_4, \dots, p^0_n$ dzēš cipara 0 kodu. Stāvoklis p^0_{n+1} pārliecinās, vai $v = \varkappa$, t.i., vai nodzēsts kods $u_{j_\varkappa}$.

Ja $v = \varkappa$, tad darbs jābeidz. Mašīna $\mathfrak{T}$ pāriet stāvoklī p^0_0, dodas līdz vārdam $(y')_2 \leftharpoondown y_1 y_2 \dots y_v$, pievieno 0 (stāvoklis p^0_1); tagad $(y')_2 0 = (y)_2$. Visbeidzot sasniedz vārda $(y)_2$ sākumu (stāvoklis p^0_2) un beidz darbu stāvoklī q_0.

Ja $\upsilon < \varkappa$, tad mašīna $\mathfrak{T}$ pāriet stāvoklī p^0_{n+2}, vārdam $(y')_2$ pievieno 0 un pāriet stāvoklī p', lai turpinātu darbu (tagad jau koda $u_{j_{\upsilon+1}}$ apstrādi).

$$
\begin{array}{lll}
p^1_3 1 \mapsto t \Rsh p^1_4 & p^1_0 t \mapsto t \Lsh p^1_0 & p^1_{n+2} t \mapsto t \Lsh p^1_{n+2} \\
p^1_4 0 \mapsto t \Rsh p^1_5 & p^1_0 0 \mapsto 0 \Rsh p^1_1 & p^1_{n+2} 0 \mapsto 0 \Rsh p^1_{n+3} \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & p^1_0 1 \mapsto 1 \Rsh p^1_1 & p^1_{n+2} 1 \mapsto 1 \Rsh p^1_{n+3} \\
p^1_n 0 \mapsto t \Rsh p^1_{n+1} & p^1_1 t \mapsto 1 \Lsh p^1_2 & p^1_{n+3} t \mapsto 1 \Rsh p' \\
p^1_{n+1} t \mapsto t \Lsh p^1_0 & p^1_2 t \mapsto t \Rsh q_0 & \\
p^1_{n+1} 0 \mapsto t \Lsh p^1_{n+2} & p^1_2 0 \mapsto 0 \Lsh p^1_2 & \\
 & p^0_2 1 \mapsto 1 \Lsh p^1_2 &
\end{array}
$$

Komandas p^1_i nodrošina to pašu darbu, ko komandas p^0_i iepriekšējā aprakstā, tikai tagad apstrādā cipara 1 kodu. ■

Mēs teiksim, ka funkcija $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$ ir *izrēķināma alfabētā* A, ja eksistē Tjūringa mašīna ar ārējo alfabētu A, kas to rēķina.

Pārskatot Teorēmas 3.2.1 pierādījumu secināms: ja Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_0$ rēķina funkciju $f : \mathbb{N} \multimap\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$ normāli un vienpusēji, tad to dara arī Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$, kas rēķina šo funkciju alfabētā $\{t, 0, 1\}$. Līdz ar to mūsu rīcībā ir

Sekas 3.2.2. *Katra izrēķināma funkcija* $f : \mathbb{N} \multimap\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$ *ir vienpusēji normāli izrēķināma alfabētā* $\{t, 0, 1\}$.

Vingrinājums 3.2.3. *Katrai izrēķināmai funkcijai* $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$ *eksistē Tjūringa mašīna ar ārējo alfabētu* $\{t, 0, 1, *\}$*, kas to rēķina.*

Vingrinājums 3.2.4. *Katra izrēķināma funkcija* $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\!\longrightarrow \mathbb{N}$ *ir vienpusēji normāli izrēķināma alfabētā* $\{t, 0, 1, *\}$.

Pieņemsim, ka $\mathfrak{T}'$ ir kopas $\mathfrak{M}_2$ universālā Tjūringa mašīna. Šī universālā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}'$ definē kādu divargumentu funkciju $\mathcal{U}(x, y)$.

Piemērs 3.2.5. *Funkcija*

$$
\chi(x) \leftharpoondown\!\!= \begin{cases} 1, & \text{ja } (x, x) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}); \\ 0, & \text{ja } (x, x) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}) \end{cases}
$$

nav izrēķināma.

□ Pieņemsim, ka $\chi(x)$ ir izrēķināma funkcija, tad izrēķināma ir arī funkcija

$$\chi'(x) \leftharpoondown \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } (x,x) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}); \\ 0, & \text{ja } (x,x) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}). \end{cases}$$

Tā kā $\chi'(x)$ ir vienargumenta izrēķināma funkcija, tad (Sekas 3.2.2) tā ir izrēķināma alfabētā $\{t, 0, 1\}$, t.i., eksistē kopas $\mathfrak{M}_2$ Tjūringa mašīna $\mathfrak{H}'$, kas rēķina funkciju $\chi'(x)$. Pieņemsim, ka $a \leftharpoondown \mathfrak{c}(\mathfrak{H}')$, tad $\chi'(x) = \mathcal{U}(a, x)$ un

$$\mathcal{U}(a,a) = \chi'(a) \leftharpoondown \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } (a,a) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}); \\ 0, & \text{ja } (a,a) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}). \end{cases}$$

Sanāk, ka $\mathcal{U}(a, a)$ ir definēta tad un tikai tad, ja $\mathcal{U}(a, a)$ nav definēta. Pretruna! ■

4. nodaļa

4.1. Standartuniversālā Tjūringa mašīna

Kopas $\mathfrak{M}_2$ universālā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}'$ paredzēta darbam ar vārdiem $v * w$, kur v ir kādas mašīnas $\mathfrak{T} \in \mathfrak{M}_2$ kods $\mathfrak{c}(\mathfrak{T})$ un $w \in \{0,1\}^*$. Taču ne katrs vārds $v \in \{0,1\}^+$ ir kādas mašīnas $\mathfrak{T}$ kods. Tā kā koda $\mathfrak{T}$ pirmais burts ir 1, tad kodi 2–ku sistēmā ir naturāli skaitļi. Līdz ar to attēlojumu $\mathfrak{c} : \mathfrak{M}_2 \to \{0,1\}^*$ mēs varam uztvert kā attēlojumu $\mathfrak{M}_2 \to \mathbb{N}$. Šis attēlojums kopā $\mathfrak{M}_2$ definē lineāru sakārtojumu

$$\mathfrak{T}_1 \preceq \mathfrak{T}_2 \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_1) \leq \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_2).$$

Šai sakārtojumā tātad ir nulltā kopas $\mathfrak{M}_2$ mašīna, pirmā, otrā, trešā, utt. Tas nozīmē, ka eksistē bijekcija $\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{N}$, ko inducē sakārtojums $\preceq$, proti,

$$\mathfrak{c}_1(\mathfrak{T}_1) \leq \mathfrak{c}_1(\mathfrak{T}_2) \Leftrightarrow \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_1) \leq \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_2).$$

Līdz ar to katram naturālam skaitlim $n \in \mathbb{N}$ atbilst tieši viena kopas $\mathfrak{M}_2$ mašīna $\mathfrak{c}_1^{-1}(n)$. Mēs teiksim, ka šīs mašīnas $\mathfrak{c}_1^{-1}(n)$ standartnumurs ir n. Pašu attēlojumu $\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{N}$ sauc par Tjūringa mašīnu *standartnumerāciju.*

Standartuniversālā Tjūringa mašīna (turpmāk to apzīmēsim ar $\mathfrak{T}_1^s$) paredzēta darbam ar vārdiem $u * w$, kur u ir kāda naturāla skaitļa $n \in \mathbb{N}$ pieraksts 2–ku sistēmā un $w \in \{0,1\}^*$. Šī mašīna vārdu $u * w$ pārstrādā par vārdu $\mathfrak{c}(\mathfrak{c}_1^{-1}(u)) * w$ un tālāk strādā kā kopas $\mathfrak{M}_2$ universālā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}'$.

Teorēma 4.1.1. *Kopai $\mathfrak{M}_2$ eksistē standartuniversālā Tjūringa mašīna.*

□ Kopas $\mathfrak{M}_2$ standartuniversālo Tjūringa mašīnu

$$\mathfrak{T}_1^s = \langle Q_0^s, Q^s, A', S, q_0, q_1, t, T_1^s \rangle$$

mēs definēsim pakāpeniski. Vispirms aprakstīsim, ko darīs mašīna $\mathfrak{T}_1^s$.

- Sākumā uz lentas ir uzrakstīts vārds $v * w$. Pārbaudam, vai v atbilst kāda naturāla skaitļa n pierakstam 2–ku sistēmā.

- Pieņemsim, ka
$$\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_n, \ldots$$
ir kopas $\mathfrak{M}_2$ Tjūringa mašīnu saraksts, kur $\mathfrak{T}_n$ ir Tjūringa mašīna ar standartnumuru n. Mūsu mērķis — ierakstu $(n)_2 * w$ aizstāt ar $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_n) * w$, un tad palaist universālo Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}'$. Šai nolūkā mēs ierakstu $(n)_2 * w$ aizstājam ar ierakstu $0 * 0 * (n)_2 * w$.

  Vispārīgā gadījumā mūsu rīcībā būs ieraksts $(s)_2 * (k)_2 * (n)_2 * w$, kur $k \leq n$. Tagad sniegsim koda $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_n)$ meklēšanas induktīvu aprakstu.

  Pārbaudam, vai $(s)_2$ ir Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_k$ kods.

  (i) Ja $(s)_2 = \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_k)$ un $k = n$, tad esam atraduši $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_n)$. Ierakstu $(s)_2 * (k)_2 * (n)_2 * w$ pārrakstam par $(s)_2 * w$ un palaižam universālo mašīnu $\mathfrak{T}'$.

  (ii) Ja $(s)_2 = \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_k)$ un $k < n$, tad gan skaitli s, gan skaitli k palielinam par 1 un atsākam pārbaudi, vai $(s)_2$ ir Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_k$ kods.

  (iii) Ja $(s)_2 \neq \mathfrak{c}(\mathfrak{T}_k)$, tad skaitli s palielinam par 1 un atsākam pārbaudi, vai $(s)_2$ ir Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_k$ kods.

Tālākais pierādījums ir tikai demonstrācija, ka tiešām šādu standartuniversālo Tjūringa mašīnu $\mathfrak{T}_1^s$ var uzkonstruēt. Mašīnas $\mathfrak{T}_1^s$ programmu T_1^s definēsim pakāpeniski.

Programma T_1^s sastāvēs no vairākiem fragmentiem: lielākos fragmentus mēs sauksim par apakšprogrammām, mazākos — par blokiem. Mēs nevēlamies, lai apzīmējumi būtu pārāk smagnēji un aizēnotu lietas būtību, tāpēc rakstot šos fragmentus mēs nerūpēsimies par to, lai katram fragmentam stāvokļi būtu dažādi. Burtus p_i, p_{ij}, p_{ij}^k mēs lietosim visu fragmentu pierakstos, taču kopējā programmā šiem stāvokļiem ir jābūt atšķirīgiem. Kas attiecas uz citu burtu lietošanu stāvokļu apzīmēšanai, tad tie ir fiksēti visai programmai T_1^s. Tā, piemēram, ja gan blokā F_1, gan blokā F_2 ir sastopami stāvokļi p_1 un q_3, un tie abi ir programmas T_1^s sastāvdaļas, tad programmā T_1^s abos fragmentos jābūt stāvoklim q_3, taču stāvoklis p_1 vai nu blokā F_1, vai blokā F_2 ir jāpārsauc.

Definējam mašīnas $\mathfrak{T}_1^s$ ārējo alfabētu $A' \leftharpoondown \{t, 0, 1, \dot{t}, \dot{0}, \dot{1}, t', 0', 1', *\}$. Kā redzams tas sakrīt ar universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ ārējo alfabētu.

Sākuma ieraksta pārbaude. Mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ darbu sāk stāvoklī q_1 un vispirms pārliecinās, ka uz lentas dots vārds $v * w$, kur v ir kāda naturāla skaitļa n pieraksts 2–ku sistēmā un $w \in \{0, 1\}^*$.

$$
\begin{array}{lll}
q_1 0 \mapsto 0 \Rsh p_1 & p_3 t \mapsto t \Lsh p_4 & p_4 t \mapsto * \Lsh p_5 \\
q_1 1 \mapsto 1 \Rsh p_2 & p_3 0 \mapsto 0 \Rsh p_3 & p_4 0 \mapsto 0 \Lsh p_4 \\
p_1 * \mapsto * \Rsh p_3 & p_3 1 \mapsto 1 \Rsh p_3 & p_4 1 \mapsto 1 \Lsh p_4 \\
p_2 0 \mapsto 0 \Rsh p_2 & & p_4 * \mapsto * \Lsh p_4 \\
p_2 1 \mapsto 1 \Rsh p_2 & & p_5 t \mapsto 0 \Lsh p_6 \\
p_2 * \mapsto * \Rsh p_3 & & p_6 t \mapsto * \Lsh p_7 \\
 & & p_7 t \mapsto 0 \top q_2
\end{array}
$$

Tikko dotā bloka aprakstā nav iekļautas komandas izskatā $qa \mapsto a \top q$. Šīs komandas nodrošina, ka mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ nekad neapstāsies, ja v nav kāda naturāla skaitļa pieraksts 2–ku sistēmā. Tāpat šīs komandas nodrošina, ka mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ nekad neapstāsies, ja $w \notin \{0, 1\}^*$.

- Pirmajā ailē dotās komandas veic pārbaudi, vai v ir kāda naturāla skaitļa n pieraksts 2–ku sistēmā.
- Otrās ailes komandas nodrošina pārbaudi, vai $w \in \{0, 1\}^*$.
- Trešās ailes komandas veic galviņas pārvietošanu uz vārda $(n)_2 * w$ sākumu, un tad šo vārdu pārraksta par vārdu $0 * 0 * (n)_2 * w$ Pēc tam mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ nonāk stāvoklī q_2.

Komandas koda pārbaude. Vispirms jāpārliecinās, vai $(s)_2$ ir izskatā

$$\tilde{K}_1 0^4 \tilde{K}_2 0^4 \ldots \tilde{K}_n 0^4$$

Katras komandas $K_i = qa \mapsto a' \bigstar q'$ kods

$$\tilde{K}_i = \tilde{q}\ 0^2\ \tilde{a}\ 0^2\ \tilde{a}'\ 0^2\ \tilde{\bigstar}\ 0^2\ \tilde{q}'\ 0^4,$$

turklāt stāvokļa q kods $\tilde{q}$ vienmēr sākas ar priedēkli 10, burta a kods $\tilde{a} \in \{01, 10, 11\}$, kustības $\bigstar$ kods $\tilde{\bigstar}$ arī ir kopas $\{01, 10, 11\}$ elements.

(i) Kodu $\tilde{q}, \tilde{q}'$ pārbaudes bloki.

- Bloks A darbu sāk stāvoklī q_2.

- Bloks A' darbu sāk stāvoklī p_1.

A	A'
$q_2* \mapsto * \Lsh p_5$	$p_1 0 \mapsto 0 \Rsh p_2^0$
$q_2 1 \mapsto 1 \Rsh p_2$	$p_1 1 \mapsto 1 \Rsh p_2$
$p_2 0 \mapsto 0 \Rsh p_3$	$p_2 0 \mapsto 0 \Rsh p_3$
$p_3 0 \mapsto 0 \Rsh p_4$	$p_3 0 \mapsto 0 \Rsh p_4$
$p_3 1 \mapsto 1 \Rsh p_2$	$p_3 1 \mapsto 1 \Rsh p_2$
$p_4 0 \mapsto 0 \Rsh p_0$	$p_4 0 \mapsto 0 \Rsh p_5$
$p_4 1 \mapsto 1 \Rsh p_3$	$p_4 1 \mapsto 1 \Rsh p_3$
$p_5 0 \mapsto 0 \Lsh p_5$	$p_5 0 \mapsto 0 \Rsh p_6$
$p_5 1 \mapsto 1 \Lsh p_5$	$p_6 0 \mapsto 0 \Rsh q_2$
$p_5 * \mapsto * \Rsh q_3$	
	$p_2^0 1 \mapsto 1 \Rsh p_3^0$
	$p_3^0 0 \mapsto 0 \Rsh p_4^0$
	$p_4^0 0 \mapsto 0 \Rsh p_5$

Visas pārējās komandas ir izskatā $qa \mapsto a \top q_{10}$. Mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ nonāk stāvoklī q_{10}, ja vārds $(s)_2$ nav nevienas Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_i$ kods.

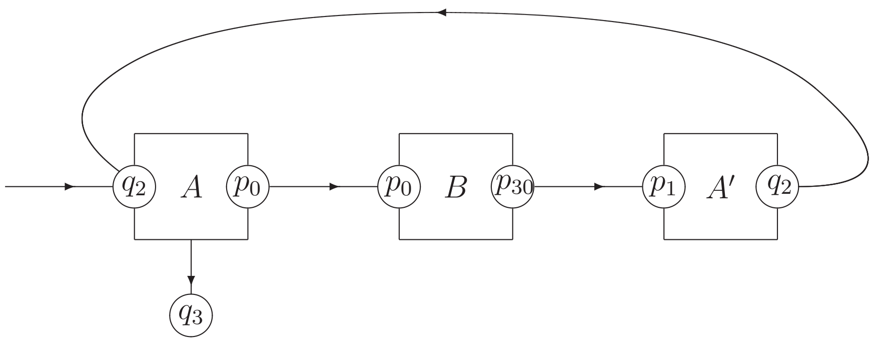
- Ja bloks A nonāk stāvoklī p_0, tad konstatēts dalītājs $\tilde{q}0^2$ (skatīt komandas p_2, p_3, p_4). Ja bloks nonāk stāvoklī q_3, tad vārds $(s)_2$ ir izturējis pirmo pārbaudi, t.i., šī vārda struktūra atbilst kādas programmas koda struktūrai. Galviņa tiek novietota uz vārda $(s)_2$ sākuma (stāvokļi p_5, q_3).

- Ja bloks A' nonāk stāvoklī q_2, kas ir bloka A sākuma stāvoklis, tad konstatēts dalītājs $\tilde{q}'0^4$.

(ii) Apakšvārda $\tilde{a}\ 0^2\ \tilde{a}'\ 0^2\ \tilde{\bigstar}\ 0^2$ pārbaude ir bloks B, kas darbu sāk stāvoklī p_0.

$\tilde{a}$ pārbaude	$\tilde{a}'$ pārbaude	$\tilde{\bigstar}$ pārbaude
$p_0 0 \mapsto 0 \Rsh p_1$	$p_{10} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{11}$	$p_{20} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{21}$
$p_0 1 \mapsto 1 \Rsh p_2$	$p_{10} 1 \mapsto 1 \Rsh p_{12}$	$p_{20} 1 \mapsto 1 \Rsh p_{22}$
$p_1 1 \mapsto 1 \Rsh p_3$	$p_{11} 1 \mapsto 1 \Rsh p_{13}$	$p_{21} 1 \mapsto 1 \Rsh p_{23}$
$p_2 0 \mapsto 0 \Rsh p_3$	$p_{12} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{13}$	$p_{22} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{23}$
$p_2 1 \mapsto 1 \Rsh p_3$	$p_{12} 1 \mapsto 1 \Rsh p_{13}$	$p_{22} 1 \mapsto 1 \Rsh p_{23}$
$p_3 0 \mapsto 0 \Rsh p_4$	$p_{13} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{14}$	$p_{23} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{24}$
$p_4 0 \mapsto 0 \Rsh p_{10}$	$p_{14} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{20}$	$p_{24} 0 \mapsto 0 \Rsh p_{30}$

Visas pārējās komandas ir izskatā $qa \mapsto a \top q_{10}$.



4.1. zīm.: Komandas koda pārbaude.

Tagad saliekam visus trīs blokus vienā apakšprogrammā: $A \to B \to A'$, un veidojam ciklu (skatīt ilustrāciju 4.1. zīm.). Tā rezultātā, ja vārda $(s)_2$ struktūra atbilst programmas izskatam, mēs nonākam stāvoklī q_3; ja nē — stāvoklī q_{10}. Stāvokli q_{10} mēs rezervējam, lai palielinātu skaitļa s vērtību par 1; atkārtojam: tā ir situācija, kad $(s)_2$ nav nevienas Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_i$ kods $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_i)$.

Komandu skaita pārbaude. Mēs pārbaudīsim, vai komandas ir sakārtotas secībā

$$qt \mapsto \dots \qquad q'0 \mapsto \dots \qquad q''1 \mapsto \dots \qquad q'''t \mapsto \dots$$

Tas nozīmē, ka mums jāpārbauda apakšvirknes $\tilde{t}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{t}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{t}, \dots$ esamība virknē $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3, \dots$ Šīs pārbaudes rezultātā mēs arī noskaidrosim, vai ir vajadzīgais komandu skaits, proti, komandu skaitam jādalās ar skaitli 3.

Pārejam pie precīza apraksta. Vispirms definējam blokus $A(t), A(0)$, $A(1)$:

$A(t)$ atpazīst $\tilde{t}$	$A(0)$ atpazīst $\tilde{0}$	$A(1)$ atpazīst $\tilde{1}$
$p_1* \mapsto * \Lsh p_4$		
$p_1 1 \mapsto 1 \Rsh p_2$	$p_1 0 \mapsto 0 \Rsh p_2$	$p_1 \mapsto 1 \Rsh p_2 1$
$p_2 1 \mapsto 1 \Rsh p_3$	$p_2 1 \mapsto 1 \Rsh p_3$	$p_2 0 \mapsto 0 \Rsh p_2$
$p_4 0 \mapsto 0 \Lsh p_4$		
$p_4 1 \mapsto 1 \Lsh p_4$		
$p_4* \mapsto * \Rsh q_4$		

Visas pārējās komandas ir izskatā $qa \mapsto a \top q_{10}$.

Definējam 3 blokus.

- Bloks $A_1(t)$ atpazīst komandas $qt \mapsto \ldots$ kodā burta t kodu: $\boxed{\Rsh_2} \to A(t) \to \boxed{\Rsh_4}$.
- Bloks $A_1(0)$ atpazīst komandas $q'0 \mapsto \ldots$ kodā burta 0 kodu: $\boxed{\Rsh_2} \to A(0) \to \boxed{\Rsh_4}$.
- Bloks $A_1(1)$ atpazīst komandas $q''1 \mapsto \ldots$ kodā burta 1 kodu: $\boxed{\Rsh_2} \to A(1) \to \boxed{\Rsh_4}$.

Detaļas par blokiem $\boxed{\Rsh_4}$, $\boxed{\Rsh_2}$ skatīt zīmējumā 2.2.b,c.

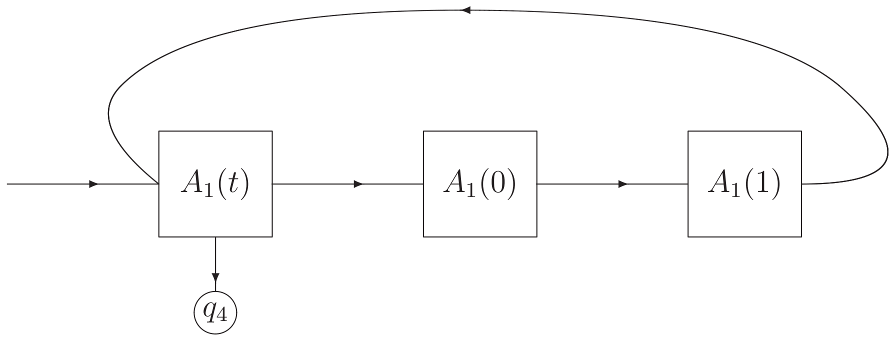
Tagad saliekam visus trīs blokus vienā apakšprogrammā:

$$A_1(t) \to A_1(0) \to A_1(1),$$

un veidojam ciklu (skatīt ilustrāciju 4.2. zīm.). Bloks $A_1(t) \to A_1(0) \to A_1(1)$ darbu sāk stāvoklī q_3. Tā rezultātā, ja vārdā $(s)_2$ ir iekodētas komandas secībā

$$qt \mapsto \ldots \qquad q'0 \mapsto \ldots \qquad q''1 \mapsto \ldots$$

mēs nonākam stāvoklī q_4; ja nē — stāvoklī q_{10}. Stāvokli q_{10} mēs rezervējam, lai palielinātu skaitļa s vērtību par 1; atkārtojam: tā ir situācija, kad $(s)_2$ nav nevienas Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_i$ kods $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_i)$.



4.2. zīm.: Secības $t, 0, 1$ pārbaude.

Stāvokļu secības pārbaude. Mēs pārbaudīsim, vai komandas ir sakārtotas secībā

$$q_1 t \mapsto \dots \qquad q_1 0 \mapsto \dots \qquad q_1 1 \mapsto \qquad q_2 t \mapsto \dots$$

Mēs jau zinam, ka secība $t, 0, 1$ ir ievērota. Tas nozīmē, ka mums tikai jāpārbauda virkne $\tilde{q}_1, \tilde{q}_1, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_i, \tilde{q}_i, \tilde{q}_i, \dots$ Tā rezultātā mums jāpārbauda 3 reizes skaitļa 1 kods $\tilde{1}$, 3 reizes skaitļa 2 kods $\tilde{2}$, utt.

(i) Bloks P_1. Mēs demonstrēsim kā atrast skaitļa $m+1$ kodu, ja zināms skaitļa m kods $\tilde{m}$. Mums jāņem vērā trīs dažādas situācijas.

- Ja $(m)_2 = u0$, tad $\tilde{m} = \tilde{u}01$. No šejienes $\widetilde{m+1} = \tilde{u}10$.
- Ja $(m)_2 = u01^k$, tad $\tilde{m} = \tilde{u}01(10)^k$. No šejienes $\widetilde{m+1} = \tilde{u}10(01)^k$.
- Ja $(m)_2 = 1^k$, tad $\tilde{m} = (10)^k$. No šejienes $\widetilde{m+1} = 10(01)^k$.

Atliek to visu noformēt ar Tjūringa mašīnas komandām.

$$\begin{array}{lll} p_1 1 \mapsto 0 \Lsh p_2 & p_1 0 \mapsto 1 \Lsh p_3 & p_1 t \mapsto 0 \Lsh p_4 \\ p_2 0 \mapsto 1 \top p_0 & p_3 1 \mapsto 0 \Lsh p_1 & p_4 t \mapsto 1 \top p_0 \end{array}$$

Visas pārējās komandas ir izskatā $qa \mapsto a \top q$.

Bloks P_1 darbu sāk stāvoklī p_1, galviņa atrodas uz $\tilde{m}$ pēdējā burta; darbu beidz stāvoklī p_0, galviņa atrodas uz vārda $\widetilde{m+1}$.

(ii) Vārdu salīdzināšana. Mūsu mērķis: kodu $\tilde{q}_i$ pārbaude, taču šim nolūkam mums nepieciešams bloks, kas nodrošina vārdu salīdzināšanu. Šai stadijā ierakstu $(s)_2*(k)_2*(n)_2*w$ mēs aizstājam ar ierakstu $10*(s)_2*(k)_2*(n)_2*w$. Vispārīgā gadījumā mūsu rīcībā būs ieraksts

$$\tilde{m}*(s)_2*(k)_2*(n)_2*w$$

Vārdā $(s)_2$ mums jānofiksē apakšvārdi u_1, u_2, u_3, kurus tad arī mēs salīdzināsim ar $\tilde{m}$. Pieņemsim, ka šādu fiksēšanu jau esam veikuši, t.i., ja

$$\begin{array}{rcl} \tilde{m}* & = & av* \\ u_1 0 & = & a_1 v_1 0 \\ u_2 0 & = & a_2 v_2 0 \\ u_3 0 & = & a_3 v_3 0 \end{array}$$

tad šo vārdu vietā esam ierakstījuši vārdus

$$\begin{array}{c} \dot{a}v* \\ \dot{a}_1 v_1 \dot{t} \\ \dot{a}_2 v_2 \dot{t} \\ \dot{a}_3 v_3 \dot{t} \end{array}$$

a) Bloks P_2. Mums jāpārliecinās, ka

$$\dot{a}v = \dot{a}_1 v_1 = \dot{a}_2 v_2 = \dot{a}_3 v_3$$

Pieņemsim, ka galviņa atrodas uz burta $\dot{a}$ vārdā $\dot{a}v$ un bloks P_2 darbu sāk stāvoklī p_1.

$$\begin{array}{l}
p_1\dot{0} \mapsto \dot{0} \Rsh p^1_{02} \\
p^1_{02}0 \mapsto 0 \Rsh p^1_{02} \\
p^1_{02}1 \mapsto 1 \Rsh p^1_{02} \\
p^1_{02}* \mapsto * \Rsh p^1_{02} \\
p^1_{02}\dot{t} \mapsto 0 \Lsh q_{11} \\
p^1_{02}\dot{0} \mapsto 0 \Rsh p^1_{03} \\
p^1_{02}\dot{1} \mapsto 1 \Lsh q_{11} \\
p^1_{03}0 \mapsto \dot{0} \Rsh p^1_{04} \\
p^1_{03}1 \mapsto \dot{1} \Rsh p^1_{04} \\
p^1_{03}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^2_{02} \\
p^1_{04}0 \mapsto 0 \Rsh p^1_{04} \\
p^1_{04}1 \mapsto 1 \Rsh p^1_{04} \\
p^1_{04}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^2_{02}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
p_1\dot{1} \mapsto \dot{1} \Rsh p^1_{12} \\
p^1_{12}0 \mapsto 0 \Rsh p^1_{12} \\
p^1_{12}1 \mapsto 1 \Rsh p^1_{12} \\
p^1_{12}* \mapsto * \Rsh p^1_{12} \\
p^1_{12}\dot{t} \mapsto 0 \Lsh q_{11} \\
p^1_{12}\dot{0} \mapsto 0 \Lsh q_{11} \\
p^1_{12}\dot{1} \mapsto 1 \Rsh p^1_{13} \\
p^1_{13}0 \mapsto \dot{0} \Rsh p^1_{14} \\
p^1_{13}1 \mapsto \dot{1} \Rsh p^1_{14} \\
p^1_{13}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^2_{12} \\
p^1_{14}0 \mapsto 0 \Rsh p^1_{14} \\
p^1_{14}1 \mapsto 1 \Rsh p^1_{14}1 \\
p^1_{14}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^2_{12}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
p_1* \mapsto * \Rsh p^1_{22} \\
p^1_{22}0 \mapsto 0 \Rsh p^1_{22} \\
p^1_{22}1 \mapsto 1 \Rsh p^1_{22} \\
\\
p^1_{22}\dot{t} \mapsto 0 \Rsh p^2_{22} \\
p^1_{22}\dot{0} \mapsto 0 \Lsh q_{11} \\
p^1_{22}\dot{1} \mapsto 1 \Lsh q_{11}
\end{array}$$

$p^2_{02}0 \mapsto 0 \Rsh p^2_{02}$	$p^2_{12}0 \mapsto 0 \Rsh p^2_{12}$	$p^2_{22}0 \mapsto 0 \Rsh p^2_{22}$
$p^2_{02}1 \mapsto 1 \Rsh p^2_{02}$	$p^2_{12}1 \mapsto 1 \Rsh p^2_{12}$	$p^2_{22}1 \mapsto 1 \Rsh p^2_{22}$
$p^2_{02}\dot{t} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^2_{12}\dot{t} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^2_{22}\dot{t} \mapsto 0 \Rsh p^3_{22}$
$p^2_{02}\dot{0} \mapsto 0 \Rsh p^2_{03}$	$p^2_{12}\dot{0} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^2_{22}\dot{0} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$
$p^2_{02}\dot{1} \mapsto 1 \Lsh q_{11}$	$p^2_{12}\dot{1} \mapsto 1 \Rsh p^2_{13}$	$p^2_{22}\dot{1} \mapsto 1 \Lsh q_{11}$
$p^2_{03}0 \mapsto \dot{0} \Rsh p^2_{04}$	$p^2_{13}0 \mapsto \dot{0} \Rsh p^2_{14}$	
$p^2_{03}1 \mapsto \dot{1} \Rsh p^2_{04}$	$p^2_{13}1 \mapsto \dot{1} \Rsh p^2_{14}$	
$p^2_{03}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^3_{02}$	$p^2_{13}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^3_{12}$	
$p^2_{04}0 \mapsto 0 \Rsh p^2_{04}$	$p^2_{14}0 \mapsto 0 \Rsh p^2_{14}$	
$p^2_{04}1 \mapsto 1 \Rsh p^2_{04}$	$p^2_{14}1 \mapsto 1 \Rsh p^2_{14}$	
$p^2_{04}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^3_{02}$	$p^2_{14}\dot{t} \mapsto \dot{t} \Rsh p^3_{12}$	

$p^3_{02}0 \mapsto 0 \Rsh p^3_{02}$	$p^3_{12}0 \mapsto 0 \Rsh p^3_{12}$	$p^3_{22}0 \mapsto 0 \Rsh p^3_{22}$
$p^3_{02}1 \mapsto 1 \Rsh p^3_{02}$	$p^3_{12}1 \mapsto 1 \Rsh p^3_{12}$	$p^3_{22}1 \mapsto 1 \Rsh p^3_{22}$
$p^3_{02}\dot{t} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^3_{12}\dot{t} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^3_{22}\dot{t} \mapsto 0 \Rsh p_{00}$
$p^3_{02}\dot{0} \mapsto 0 \Rsh p_2$	$p^3_{12}\dot{0} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^3_{22}\dot{0} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$
$p^3_{02}\dot{1} \mapsto 0 \Lsh q_{11}$	$p^3_{12}\dot{1} \mapsto 1 \Rsh p_2$	$p^3_{22}\dot{1} \mapsto 1 \Lsh q_{11}$

- Pirmajā ailē dotas komandas, kas veic salīdzināšanu, ja $\dot{a} = \dot{0}$.
- Otrajā ailē dotas komandas, kas veic salīdzināšanu, ja $\dot{a} = \dot{1}$.
- Trešajā ailē dotas komandas, kas veic salīdzināšanu, ja $\dot{a} = *$.
- Ja mašīna nonāk stāvoklī q_{11}, tad $(s)_2$ nav nevienas Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}_i$ kods $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_i)$.
- Ja mašīna nonāk stāvoklī p_2, tad viena burta $\dot{a}$ pārbaude ir bijusi sekmīga. Tagad jānodrošina nākošā burta salīdzināšana. Vārdā $(s)_2$ jau punkti uz burtiem uzlikti (stāvokļi $p^1_{03}, p^1_{13}, p^2_{03}, p^2_{13}, p_2$). Atliek vārdā $\tilde{m}$ pareizi novietot punktu uz burta (stāvoklis p_5).

$p_2 0 \mapsto \dot{0} \Lsh p_3$	$p_3 0 \mapsto 0 \Lsh p_3$	$p_4 0 \mapsto 0 \Lsh p_4$	$p_5 0 \mapsto \dot{0} \top p_1$
$p_2 1 \mapsto \dot{1} \Lsh p_3$	$p_3 1 \mapsto 1 \Lsh p_3$	$p_4 1 \mapsto 1 \Lsh p_4$	$p_5 1 \mapsto \dot{1} \top p_1$
$p_2 \dot{t} \mapsto \dot{t} \Lsh p_3$	$p_3 \dot{t} \mapsto \dot{t} \Lsh p_3$	$p_4 \dot{0} \mapsto 0 \Rsh p_5$	$p_5 * \mapsto * \top p_1$
	$p_3 \dot{0} \mapsto \dot{0} \Lsh p_3$	$p_4 \dot{1} \mapsto 1 \Rsh p_5$	
	$p_3 \dot{1} \mapsto \dot{1} \Lsh p_3$		
	$p_3 * \mapsto * \Lsh p_4$		

- Ja mašīna nonāk stāvoklī p_{00}, tad ir spēkā vienādība

$$av = a_1v_1 = a_2v_2 = a_3v_3$$

b) Bloks P_3 nodrošina vārdu salīdzināšanas uzsākšanu, proti, lai vispār varētu sāk darbināt bloku P_2, jābūt saliktiem punktiem. To dara bloks P_3, t.i., bloks P_3 pirmajā reizē konstruē vārdus

$$\dot{a}v*,\ \dot{a}_1v_1\dot{t},\ \dot{a}_2v_2\dot{t},\ \dot{a}_3v_3\dot{t}$$

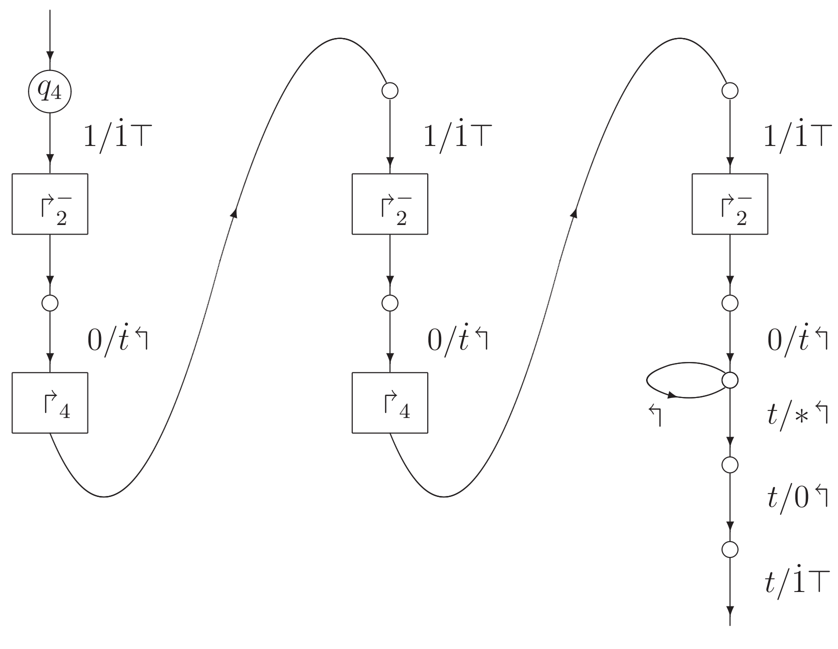
Ko īsti nozīmē "pirmā reize"?

Mēs pieņemam, ka mūsu rīcībā ir vārds

$$(s)_2 * (k)_2 * (n)_2 * w$$

mašīna atrodas stāvoklī q_4, tās galviņa aplūko vārda $(s)_2$ pirmo burtu, t.i., bloks P_3 darbu sāk stāvoklī q_4, galviņa atrodas uz vārda $(s)_2$ pirmā burta.

Bloka P_3 shēmā (skatīt 4.4. zīm.) neuzrādītās komandas ir izskatā $aq \mapsto a\top q$.



4.3. zīm.: Pirmreizēja vārdu $\dot{a}v*,\ \dot{a}_1v_1\dot{t},\ \dot{a}_2v_2\dot{t},\ \dot{a}_3v_3\dot{t}$ konstruēšana.

Atzīmēsim, ka pirms bloks P_3 sāk darbu jau ir pārbaudīts, ka $(s)_2$ ir izskatā

$$\tilde{K}_1 0^4 \tilde{K}_2 0^4 \ldots \tilde{K}_n 0^4$$

Pieņemsim, ka

$$\tilde{K}_1 = \tilde{q}\ 0^2\ \tilde{a}\ 0^2\ \tilde{a}'\ 0^2\ \tilde{\bigstar}\ 0^2\ \tilde{q}'\ 0^4$$

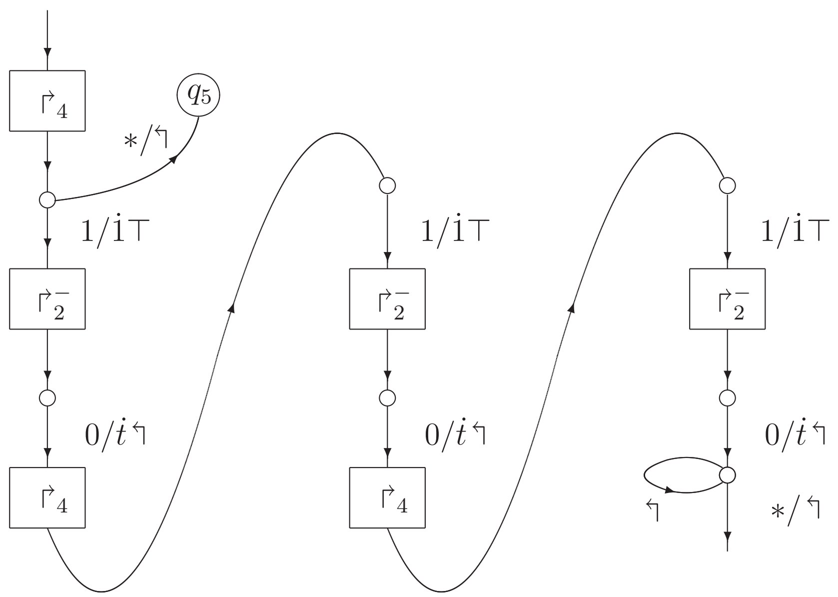
Bloks P_3 vārda $\tilde{q}0^2$ pirmo burtu 1 aizstāj ar $\dot{1}$, priekšpēdējo burtu 0 aizstāj ar $\dot{t}$. Shēmā (4.4. zīm.) tā ir pirmā aile. Līdzīgi bloks P_3 pārveido $\tilde{K}_2 0^4$ un $\tilde{K}_3 0^4$. Jauniegūto vārdu apzīmēsim ar $(\dot{s})_2$. Pēc vārda $(s)_2$ pārveidošanas par vārdu $(\dot{s})_2$ galviņa dodas uz vārda sākumu, kur ieraksta $\dot{1}0*$. Tagad mūsu rīcībā ir vārds

$$\dot{1}0 * (\dot{s})_2 * (k)_2 * (n)_2 * w$$

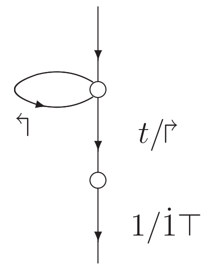
Galviņa atrodas uz šī vārda pirmā burta $\dot{1}$. Darbu var sākt bloks P_2.

c) Bloks P_4 faktiski dara to pašu, ko bloks P_3, tikai tagad jau konstatēta virkne

$$\tilde{q}_1, \tilde{q}_1, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_2, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_m, \tilde{q}_m, \tilde{q}_m$$

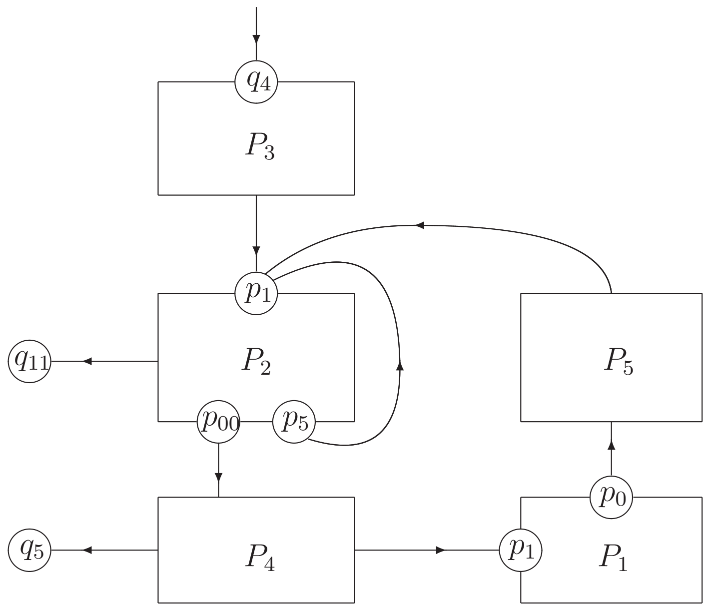


4.4. zīm.: Atkārtota vārdu $\dot{a}v*$, $\dot{a}_1 v_1 \dot{t}$, $\dot{a}_2 v_2 \dot{t}$, $\dot{a}_3 v_3 \dot{t}$ konstruēšana.



4.5. zīm.: Došanās uz vārda sākumu.

(iii) Jauna cikla uzsākšana. Vārda $\widetilde{m+1}$ pirmo burtu aizstājam ar İ. Tas ir bloks P_5 (skatīt 4.5. zīm.). Tagad saliekam visus blokus vienā apakšprogrammā (skatīt 4.6. zīm.).



4.6. zīm.: Stāvokļu secības pārbaude.

- Bloks P_3 saliek punktus uz burtiem.
- Bloks P_2 salīdzina vai

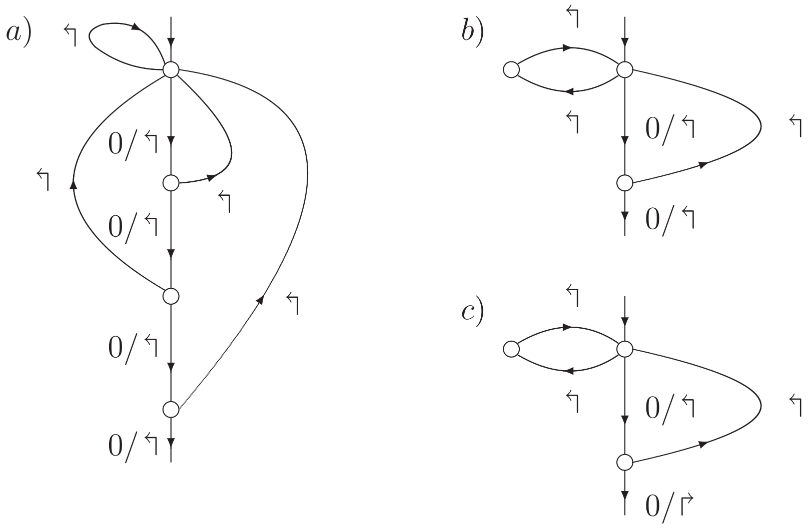
$$a = a_1 = a_2 = a_3$$

vārdos

$$\dot{a}v,\ \dot{a}_1v_1,\ \dot{a}_2v_2,\ \dot{a}_3v_3$$

- Bloks P_4 saliek punktus uz burtiem.
- Bloks P_1 kodu $\tilde{m}$ aizstāj ar $\widetilde{m+1}$.
- Bloks P_5 novieto galviņu uz koda $\widetilde{m+1}$ pirmā burta tam uzliekot punktu. Tagad var sākties nākošais pārbaudes cikls.

Apakšprogrammas $\boxed{\Lsh_4}$, $\boxed{\Lsh_2}$, $\boxed{\Lsh_2^-}$ (skatīt 4.7. zīm.).



4.7. zīm.: Iešana pa kreisi: a) 0000 b) 00 c) 00

Ar apakšprogrammām $\boxed{\Rsh_4}$, $\boxed{\Rsh_2}$, $\boxed{\Rsh_2^-}$ (skatīt 2.1. zīm.) mēs jau esam pazīstami. Līdzīgi definētas apakšprogrammas $\boxed{\Lsh_4}$, $\boxed{\Lsh_2}$, $\boxed{\Lsh_2^-}$ (skatīt 4.7. zīm.), tikai te galviņas kustība ir pa kreisi.

Jauno stāvokļu pārbaude. Ja mašīna ir nonākusi stāvoklī q_5, mēs zinam, cik komandu ir potenciālai mašīnai $\mathfrak{T}_k$, proti, mašīnai $\mathfrak{T}_k$ ir m komandas. Skaitļa m kods $\tilde{m}$ ir uz lentas, jo mūsu rīcībā ir vārds

$$\tilde{m} * (s)_2 * (k)_2 * (n)_2 * w$$

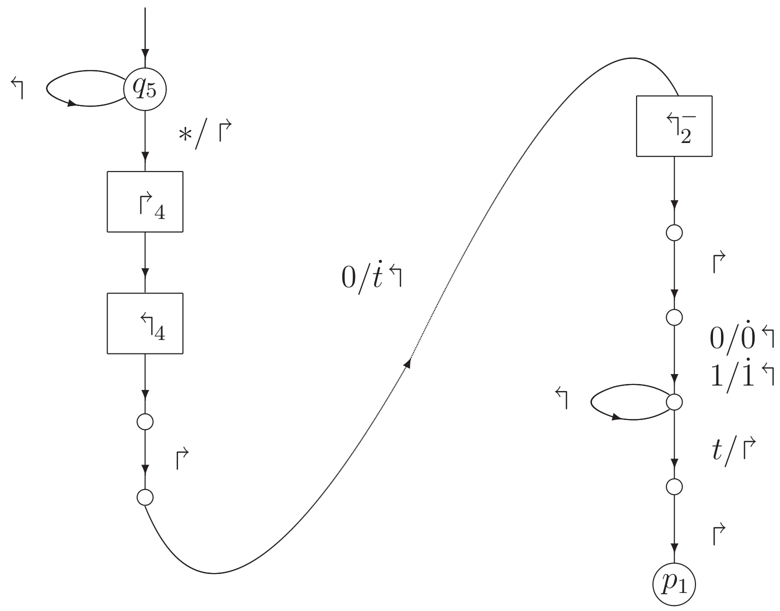
Šai brīdī mašīnas galviņa aplūko vārda $(s)_2$ pēdējo burtu.

Atgādinam, ka katras komandas K kods ir izskatā

$$\tilde{q}\ 0^2\ \tilde{a}\ 0^2\ \tilde{a}'\ 0^2\ \tilde{\bigstar}\ 0^2\ \tilde{q}'\ 0^4$$

Mums jāpārliecinās, ka kods $\tilde{q}'$ reprezentē skaitli, kas nav lielāks par m.

(i) Bloks S_1.



4.8. zīm.: Bloks S_1.

- Vispirms mašīna dodas pa kreisi līdz vārda $(s)_2$ sākumam. Sasniegusi vārda $(s)_2$ sākumu tā nofiksē situāciju $\tilde{q}'$, t.i., veic aizstāšanu

$$\tilde{q}'0^4 \mapsto \tilde{q}'\dot{t}0^3$$

  Tā ir bloka S_1 pirmā aile (skatīt 4.8. zīm.).

- Pieņemsim, ka $\tilde{q}' = au$. Mašīna veic pārveidojumu

$$\tilde{q}'\dot{t}0^3 \mapsto \dot{a}u\dot{t}0^3$$

  Tas ir bloka S_1 otrās ailes sākums.

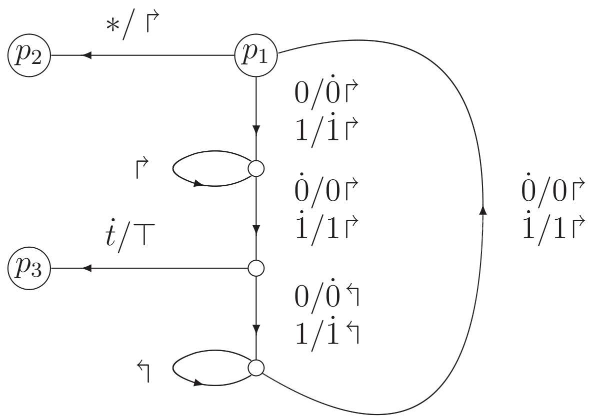
- Pieņemsim, ka $\tilde{m} = m_1 m_2 v$. Mašīna dodas uz vārda $\tilde{m}$ sākumu, veic kustību pa labi līdz galviņa aplūko burtu m_2. Te mašīna nonāk stāvoklī p_1. Tā ir bloka S_1 otrā aile (skatīt 4.8. zīm.).

(ii) Bloks S_2. Mašīna nonāk stāvoklī p_1 pēc bloka S_1 izpildes. Šai gadījumā mūsu rīcībā ir vārds

$$m_1 m_2 v * \ldots \dot{a} u \dot{t} 0^3 \ldots$$

Bloks S_2 pārliecinās, vai

$$|\tilde{m}| = |m_1 m_2 v| \leq |\tilde{a} u| = |\tilde{q}'|.$$



4.9. zīm.: Bloks S_2.

- Ja mašīna nonāk stāvoklī p_2, tad $|\tilde{m}| \leq |\tilde{q}'|$.
- Ja mašīna nonāk stāvoklī p_3, tad $|\tilde{m}| > |\tilde{q}'|$.

(iii) Bloks S_3. Ja mašīna nonāk stāvoklī p_2 pēc bloka S_2 izpildes, tad tās galviņa atrodas uzreiz pa labi aiz vārda $\tilde{m}*$ un mūsu rīcībā ir vārds

$$\tilde{m} * \ldots u_1 \dot{a}_1 u_2 \dot{t} 0^3 \ldots$$

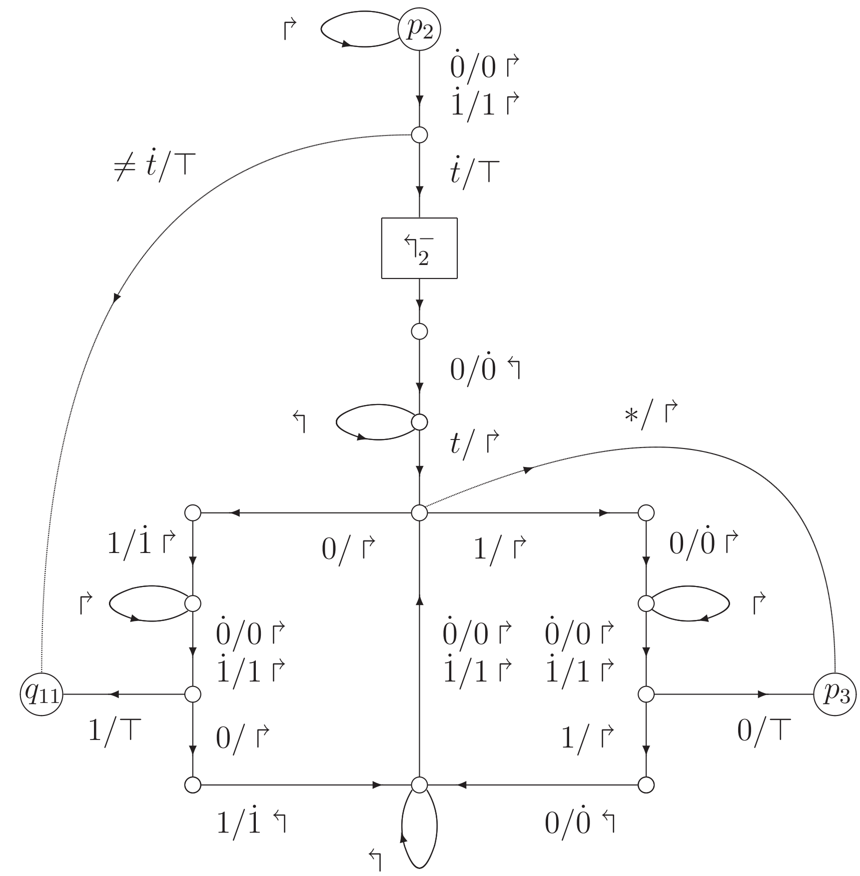
Te $u_1 a_1 u_2 = \tilde{q}'$.

- Mašīna vispirms dodas pa labi līdz burtam $\dot{a}_1$; to pārraksta par burtu a_1.

- Ja $u_2 \neq \lambda$, t.i., ja u_2 nav tukšais vārds, tad $|\tilde{m}| < |\tilde{q}'|$. Tas nozīmē, ka $(s)_2$ nav nevienas mašīnas $\mathfrak{T}_k$ kods. Šai gadījumā mašīna pāriet stāvoklī q_{11} (skatīt 4.10. zīm.) un mūsu rīcībā ir vārds

$$\tilde{m} * \ldots u_1 a_1 u_2 \dot{t} 0^3 \ldots$$

Mašīnas galviņa aplūko vārda u_2 pirmo burtu.



4.10. zīm.: Bloks S_3.

- Ja $u_2 = \lambda$, tad $|\tilde{m}| = |\tilde{q}'|$. Šai gadījumā jāveic pārbaude, vai $m \geq sk(q')$. Te $sk(q')$ ir skaitlis, ko reprezentē kods $\tilde{q}'$. Tā ir bloka S_3 centrālā daļa (skatīe 4.10. zīm.).

Ievērojam, ja

$$n_1 n_2 \dots n_s \geq n'_1 n'_2 \dots n'_s$$

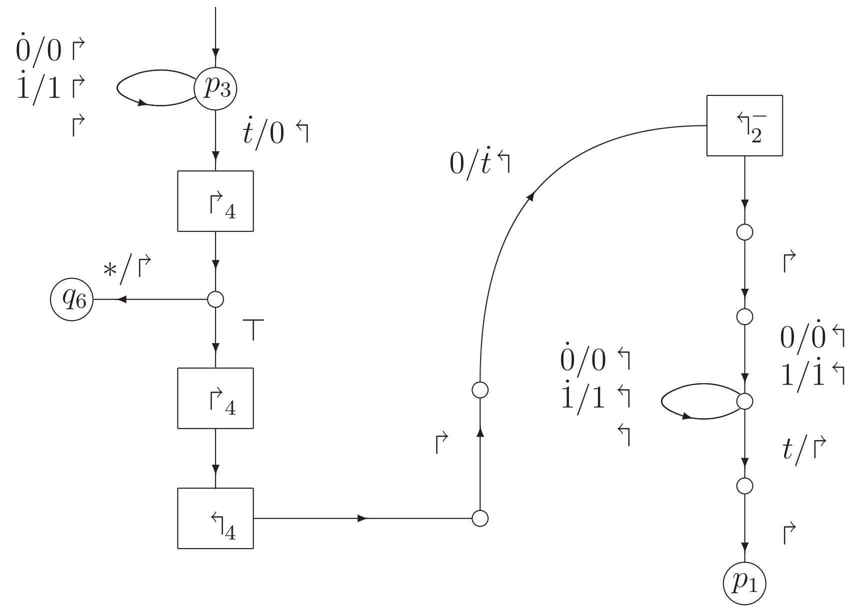
ir divi skaitļi, kas pierakstīti 2–ku sistēmā, tad

$$\forall i \; n_i = n'_i$$

vai arī

$$\forall i \leq i_0 \; n_i = n'_i \qquad \text{un} \qquad n_{i_0} > n'_{i_0}.$$

Ņemot vērā koda īpatnības mums jāsalīdzina nevis vārdi $\tilde{m}$, $\tilde{q}'$ pa burtiem, bet gan pa burtu pāriem; cipars 0 kodēts ar vārdu 01, cipars 1 — ar 10.



4.11. zīm.: Bloks S_4.

(iv) Bloks S_4. Šis bloks uzsāk darbu stāvoklī p_3; galviņa atrodas uz vārda $(s)_2$ kaut kur pa kreisi no burtiem $\dot{0}, \dot{1}, \dot{t}$. Šai gadījumā vārdā $(s)_2$ tieši divi burti ir ar punktu (viens no tiem noteikti ir $\dot{t}$). Var gadīties, ka galviņa atrodas uz burta $\dot{t}$ (šai gadījumā vārdā (s_2) nav burtu $\dot{0}, \dot{1}$). Vārdā $\tilde{m}$ var arī būt kāds no burtiem $\dot{0}$, vai $\dot{1}$.

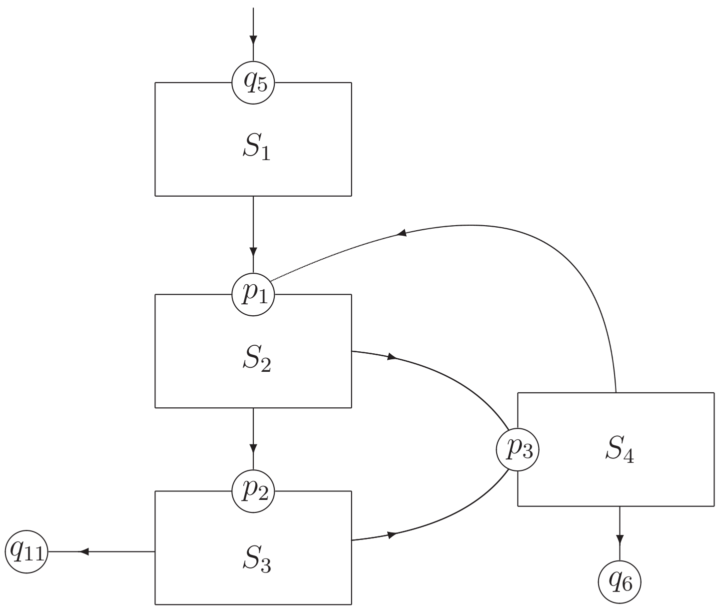
Bloks S_4 lielos vilcienos atkārto to pašu, ko bloks S_1, tikai šoreiz jānovāc liekie punkti gan vārdā $(s)_2$, gan vārdā $\tilde{m}$; turklāt var gadīties. ka visas pārbaudes jau veiktas, tad jādodas uz stāvokli q_6 (skatīt 4.11. zīm.).

Induktīvi tas izskatās šādi. Ja mašīna ir konstatējusi, ka kodā

$$\tilde{K}_i = v_i 0^2 \tilde{q}' 0^4 \qquad \text{skaitlis} \qquad sk(q') \leq m,$$

tad darbu uzsāk bloks S_4. Šis bloks nodrošina pārbaudes uzsākšanu kodam $\tilde{K}_{i+1}$, vai arī konstatē, ka visi kodi $\tilde{K}_i$ ir jau pārbaudīti.

Tagad saliekam visus blokus kopā (skatīt 4.12. zīm.).



4.12. zīm.: Jauno stāvokļu pārbaude.

- Bloks S_1 nofiksē poziciju q' komandas $q_1 0 \mapsto a' \star q'$ kodā.
- Bloks S_2 veic pārbaudi, vai $|\tilde{m}| \leq |\tilde{q}'|$?
- Bloks S_3 veic pārbaudi, vai $m \geq sk(q')$?
- Bloks S_4 induktīvi nodrošina faktiski tās pašas darbības, ko bloks S_1.

Pārbaude, vai $k = n$? Mašīna nonāk stāvoklī q_6 pēc bloka S_4 izpildes. Šai gadījumā galviņa atrodas uz vārda $(k)_2$ pirmā burta, $(s)_2$ ir kādas Tjūringa mašīnas kods, piedevām $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_k) = (s)_2$. Mums atliek pārliecināties, vai $k = n$?

(i) Bloks N_1 (skatīt 4.13. zīm.). Pieņemsim, ka

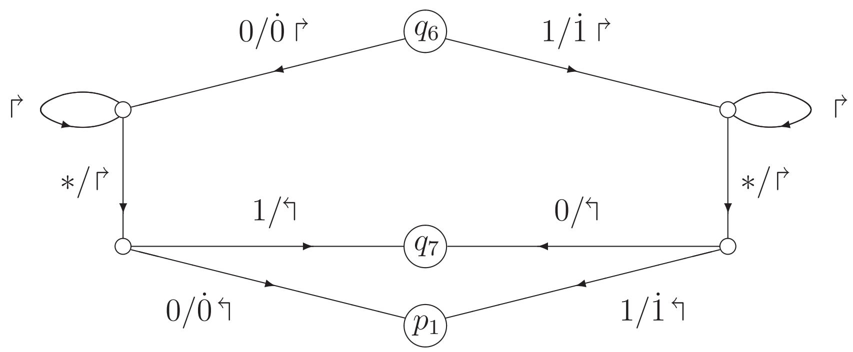
$$(k)_2 = ak' \qquad \text{un} \qquad (n)_2 = bn'$$

Bloks N_1 pārliecinās, vai $a = b$. Ja tas tā ir, tad ir veikti pārveidojumi

$$\begin{array}{rcl} ak' & \mapsto & \dot{a}k' \\ bn' & \mapsto & \dot{b}n' \end{array}$$

Mašīna nonāk stāvoklī p_1; mašīnas galviņa atrodas tieši pirms burta $\dot{b}$.

Ja $a \neq b$, tad $k \neq n$, mašīna nonāk stāvoklī q_7 un mašīnas galviņa atrodas tieši pirms burta b; veikts pārveidojums $ak' \mapsto \dot{a}k'$.



4.13. zīm.: Sākotnējās pārbaudes organizēšana.

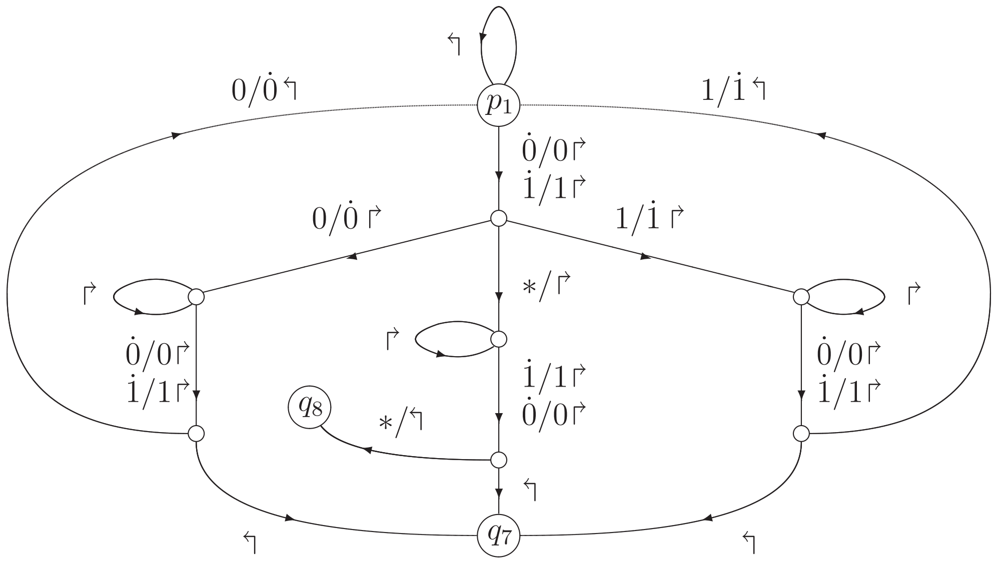
(ii) Bloks N_2 (skatīt 4.14. zīm.). Pieņemsim, ka

$$(k)_2 = u_1 a_1 a_2 k_1, \qquad (n)_2 = v_1 b_1 b_2 n_1,$$

$u_1 = v_1$ un mašīna atrodas stāvoklī p_1. Pieņemsim, ka veikti pārveidojumi

$$\begin{array}{rcl} (k)_2 & \mapsto & u_1 \dot{a}_1 a_2 k_1, \\ (n)_2 & \mapsto & v_1 \dot{b}_1 b_2 n_1 \end{array}$$

un mašīnas galviņa atrodas tieši pirms burta $\dot{b}_1$.



4.14. zīm.: Iteratīvais pārbaudes solis.

- Ja $a_2 = b_2$, tad bloks N_2 veic pārveidojumus

$$\begin{aligned} u_1\dot{a}_1a_2k_1 &\mapsto u_1a_1\dot{a}_2k_1, \\ v_1\dot{b}_1b_2n_1 &\mapsto v_1b_1\dot{b}_2n_1, \end{aligned}$$

  mašīna nonāk stāvoklī p_1 un galviņa tad atrodas tieši uz burta b_1.

- Ja $a_2 \neq b_2$, tad bloks N_2 veic pārveidojumus

$$\begin{aligned} u_1\dot{a}_1a_2k_1 &\mapsto u_1a_1\dot{a}_2k_1, \\ v_1\dot{b}_1b_2n_1 &\mapsto v_1b_1b_2n_1, \end{aligned}$$

  mašīna nonāk stāvoklī q_7 un galviņa tad atrodas tieši uz burta b_1. Šai gadījumā $k < n$.

- Ja $a_2k_1 = \lambda \neq b_2n_1$, tad tad bloks N_2 veic pārveidojumus

$$\begin{aligned} u_1\dot{a}_1 &\mapsto u_1a_1, \\ v_1\dot{b}_1b_2n_1 &\mapsto v_1b_1b_2n_1, \end{aligned}$$

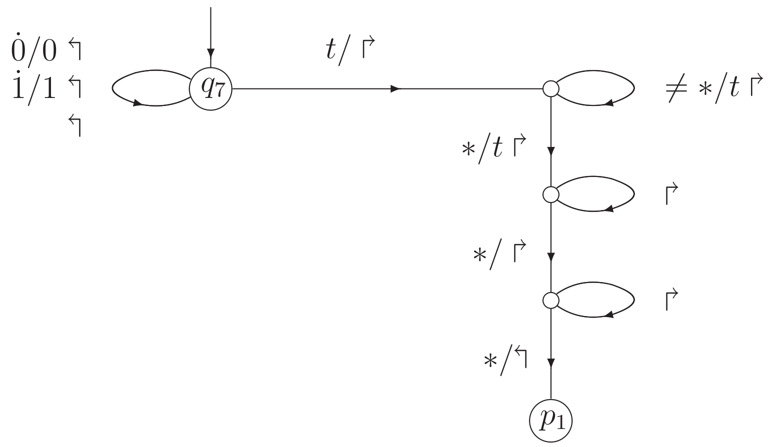
  mašīna nonāk stāvoklī q_7 un galviņa tad atrodas tieši uz burta b_1. Šai gadījumā $k < n$.

- Ja $a_2k_1 = \lambda = b_2n_1$, tad bloks N_2 veic pārveidojumus

$$\begin{array}{rcl} u_1\dot{a}_1 & \mapsto & u_1a_1, \\ v_1\dot{b}_1 & \mapsto & v_1b_1, \end{array}$$

  mašīna nonāk stāvoklī q_8 un galviņa tad atrodas tieši uz burta b_1. Šai gadījumā $k = n$.

Pārveidojums $k \mapsto k+1$. Ja $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_k) = (s)_2$ un $k < n$, tad mašīna nonāk stāvoklī q_7. Šai gadījumā vispirms jāatjauno vārds $(s)_2 * (k)_2$ (skatīt 4.15. zīm.) nodzēšot visu pa kreisi no vārda $(s)_2$.

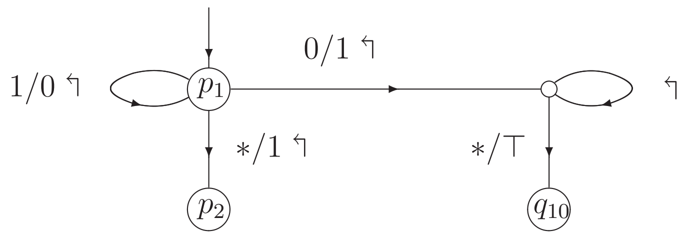


4.15. zīm.: Vārda $(s)_2 * (k)_2$ atjaunošana.

(i) Pēc vārda $(s)_2 * (k)_2$ atjaunošanas mašīna nonāk stāvoklī p_1, galviņa atrodas uz vārda $(k)_2$ pēdējā burta. Tagad jāveic pārveidojums $(k)_2 \mapsto (k+1)_2$ (skatīt 4.16. zīm.).

(ii) Gadījumā ja $(k)_2$ ir izskatā $1^{\varkappa}$, tad $|(k+1)_2| = |(k)_2|+1$. Šai situācijā vārds $(s)_2$ ir jānobīda vienu vietu pa kreisi, tāpēc mašīna nonāk stāvoklī p_2 (skatīt 4.16. zīm.).

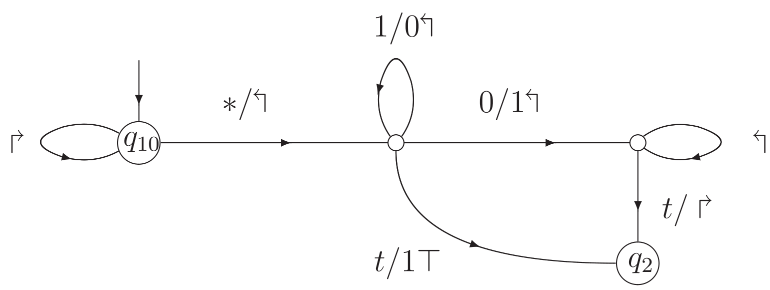
$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} & & & p_{10}t & \mapsto & 0 \Rsh q_{10} & p_{11}t & \mapsto & 1 \Rsh q_{10} \\ p_20 & \mapsto & * \Lsh p_{10} & p_{10}0 & \mapsto & 0 \Lsh p_{10} & p_{11}0 & \mapsto & 1 \Lsh p_{10} \\ p_21 & \mapsto & * \Lsh p_{11} & p_{10}1 & \mapsto & 0 \Lsh p_{11} & p_{11}1 & \mapsto & 1 \Lsh p_{11} \end{array}$$



4.16. zīm.: $k \mapsto k+1$

Pārveidojums $s \mapsto s+1$. Ja $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_k) = (s)_2$ un $k < n$, tad jāveic gan pārveidojums $(k)_2 \mapsto (k+1)_2$, gan arī pārveidojums $(s)_2 \mapsto (s+1)$. Pēdējais pārveidojums $(s)_2 \mapsto (s+1)_2$ jāveic arī tai gadījumā, ja $(s)_2$ nav nevienas Tjūringa mašīnas kods. Šai situācijā mašīna vispirms var nonākt stāvoklī q_{11}, tad nākas atjaunot vārdu $(s)_2$ (skatīt 4.18. zīm.) nodzēšot visu pa kreisi no vārda $(s)_2$. Pretējā gadījumā mašīna uzreiz nonāk stāvoklī q_{10}.

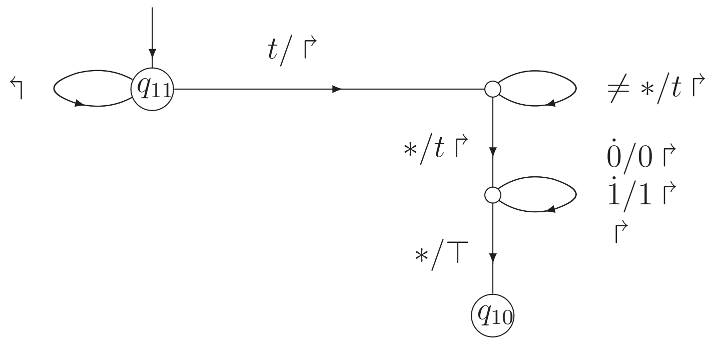
Pēc vārda $(s)_2$ atjaunošanas (ja tas bija vajadzīgs) mašīna nonāk stāvoklī q_{10}, galviņa atrodas aiz vārda $(s)_2$ uz $*$. Tagad jāveic pārveidojums $(s)_2 \mapsto (s+1)_2$ (skatīt 4.17. zīm.).



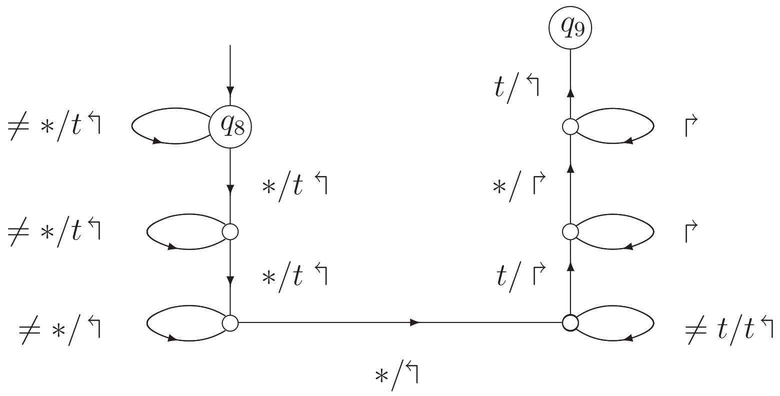
4.17. zīm.: $s \mapsto s+1$

Universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ palaišana.

(i) Lieko vārdu nodzēšana. Ja mašīna nonāk stāvoklī q_8, tad $k = n$ un $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_n) = (s)_2$, galviņa atrodas uz vārda $(n)_2$ pēdējā burta. Tagad ir jānodzēš vārds $*(k)_2 * (n)_2$ un viss pa kreisi no vārda $*(s)_2$ (skatīt 4.19. zīm.). Mašīna nonāk stāvoklī q_9 un galviņa atrodas uz vārda $(s)_2$ pēdējā burta.



4.18. zīm.: Vārda $(s)_2$ atjaunošana.



4.19. zīm.: Lieko vārdu nodzēšana.

(ii) Vārda $(s)_2$ nobīdīšana. Ja mašīna nonāk stāvoklī q_9, tad uz lentas ir vārds izskatā

$$*(s)_2 t^{\varkappa} * w \mapsto (s)_2 * w,$$

galviņa atrodas uz vārda $(s)_2$ pēdējā burta.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_9t & \mapsto & t \Lsh q_9 & p_0t & \mapsto & t \Rsh p_0 & p_1t & \mapsto & t \Rsh p_1 \\
q_90 & \mapsto & t \Rsh p_0 & p_00 & \mapsto & 0 \Lsh p_{10} & p_10 & \mapsto & 0 \Lsh p_{11} \\
q_91 & \mapsto & t \Rsh p_1 & p_01 & \mapsto & 1 \Lsh p_{10} & p_11 & \mapsto & 1 \Lsh p_{11} \\
q_9* & \mapsto & t \Rsh p_2 & p_0* & \mapsto & * \Lsh p_{10} & p_1* & \mapsto & * \Lsh p_{11} \\
p_2t & \mapsto & t \Rsh p_2 & p_{10}t & \mapsto & 0 \Lsh q_9 & p_{11}t & \mapsto & 1 \Lsh q_9 \\
p_20 & \mapsto & 0 \top q & & & & & & \\
p_21 & \mapsto & 1 \top q & & & & & &
\end{array}$$

Ja mašīna nonāk stāvoklī q, tad $\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_n) = (s)_2$, uz lentas ir vārds $(s)_2 * w$, mašīnas galviņa aplūko vārda $(s)_2$ pirmo burtu. Stāvoklis q ir universālās mašīnas $\mathfrak{T}'$ (Teorēma 2.3.1) sākuma stāvoklis. ■

Apstāšanās problēma. Vai eksistē algoritms, kas katrai Tjūringa mašīnai $\mathfrak{T}$ un patvaļīgam vārdam $w \in \{0,1\}^*$ dod atbildi, vai $\mathfrak{T}(w) \downarrow$?

Piezīme. Pieņemsim, ka fiksēta kāda kopa P. Situācijā, ja funkcija

$$h(x) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja } x \notin P; \\ 1, & \text{ja } x \in P \end{cases}$$

ir izrēķināma pēc Tjūringa, mēdz teikt, ka problēma $x \in P$ ir algoritmiski izšķirama. Pretējā gadījumā saka, ka problēma $x \in P$ nav algoritmiski izšķirama vai ir algoritmiski neizšķirama.

Pieņemsim, ka $\mathfrak{T}_1^s$ ir kopas $\mathfrak{M}_2$ standartuniversālā Tjūringa mašīna. Šī standartuniversālā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ definē kādu divargumentu funkciju $\mathcal{U}_s(x,y)$.

Piemērs 4.1.2. *Funkcija*

$$\chi_s(x) \leftharpoondown \begin{cases} 1, & \text{ja } (x,x) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s) \\ 0, & \text{ja } (x,x) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s) \end{cases}$$

nav izrēķināma.

□ Pieņemsim, ka $\chi_s(x)$ ir izrēķināma funkcija, tad izrēķināma ir arī funkcija

$$\chi_s'(x) \leftharpoondown \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } (x,x) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s); \\ 0, & \text{ja } (x,x) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s). \end{cases}$$

Tā kā $\chi_s'(x)$ ir vienargumenta izrēķināma funkcija, tad (Sekas 3.2.2) tā ir izrēķināma alfabētā $\{t,0,1\}$, t.i., eksistē kopas $\mathfrak{M}_2$ Tjūringa mašīna $\mathfrak{H}'$, kas rēķina funkciju $\chi_s'(x)$. Tas nozīmē, ka eksistē tāds $k \in \mathbb{N}$, ka $\mathfrak{H}' = \mathfrak{T}_k$. No šejienes $\chi_s'(x) = \mathcal{U}_s(k,x)$ un

$$\mathcal{U}_s(k,k) = \chi_s'(k) \leftharpoondown \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } (k,k) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s); \\ 0, & \text{ja } (k,k) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s). \end{cases}$$

Sanāk, ka $\mathcal{U}_s(k,k)$ ir definēta tad un tikai tad, ja $\mathcal{U}_s(k,k)$ nav definēta. Pretruna! ■

Pieņemsim, ka apstāšanās problēma ir algoritmiski izšķirama, tad eksistē algoritms, kas katrai mašīnai $\mathfrak{T}_k \in \mathfrak{M}_2$ dod atbildi, vai $\mathfrak{T}_k(w) \downarrow$. Tas nozīmē, ka funkcija

$$\chi(x,y) \leftharpoondown \left.\begin{cases} 1, & \text{ja } \mathfrak{T}_x((y)_2) \downarrow \\ 0, & \text{ja } \mathfrak{T}_x((y)_2) \uparrow \end{cases}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{ja } (x,y) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s) \\ 0, & \text{ja } (x,y) \notin \mathrm{Dom}(\mathcal{U}_s) \end{cases}$$

ir izrēķināma pēc Tjūringa. No šejienes: funkcija $\chi_s(x)$ ir izrēķināma pēc Tjūringa. Pretruna!

Piezīme. Parasti apstāšanās problēmu formulē citādi, proti, vai eksistē algoritms, kas katrai Tjūringa mašīnai $\mathfrak{T}$ un patvaļīgam vārdam $w \in \{0,1\}^*$ dod atbildi, vai mašīna rēķinot $\mathfrak{T}(w)$ apstāsies?

Pieņemsim, ka šādi formulētā apstāšanās problēma ir algoritmiski izšķirama, tad funkcija

$$\chi_*(x,y) \leftharpoondown \begin{cases} 1, & \text{ja } \mathfrak{T}_x((y)_2) \ \text{ apstāsies} \\ 0, & \text{ja } \mathfrak{T}_x((y)_2) \text{ neapstāsies} \end{cases}$$

ir izrēķināma pēc Tjūringa. No šejienes arī funkcija

$$\chi_*'(x) \leftharpoondown \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } \mathfrak{T}_x((x)_2) \text{ apstāsies} \\ 0, & \text{ja } \mathfrak{T}_x((x)_2) \text{ neapstāsies} \end{cases}$$

ir izrēķināma pēc Tjūringa. Tā kā $\chi_*'(x)$ ir vienargumenta izrēķināma funkcija, tad (Sekas 3.2.2) tā ir normāli izrēķināma alfabētā $\{t,0,1\}$, t.i., eksistē kopas $\mathfrak{M}_2$ Tjūringa mašīna $\mathfrak{H}'$, kas normāli rēķina funkciju $\chi_*'(x)$. Tas nozīmē, ka eksistē tāds $k \in \mathbb{N}$, ka $\mathfrak{H}' = \mathfrak{T}_k$. Mēs jau zinam, ka $\mathfrak{T}_k$ normāli rēķina funkciju $\chi_*'(x)$, tāpēc

$$x \in \mathrm{Dom}(\chi_s) \Leftrightarrow \mathfrak{T}_k((x)_2) \ \text{ apstāsies}$$

No šejienes

$$\chi'_s(k) = \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } \mathfrak{T}_k((k)_2) \text{ apstāsies} \\ 0, & \text{ja } \mathfrak{T}_k((k)_2) \text{ neapstāsies} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \text{nav} & \text{definēta, ja } k \in \mathrm{Dom}(\chi_s) \\ 0, & \text{ja } k \notin \mathrm{Dom}(\chi_s) \end{cases}$$

Sanāk:

$$k \in \mathrm{Dom}(\chi_s) \Leftrightarrow k \notin \mathrm{Dom}(\chi_s). \quad \text{Pretruna!}$$

4.2. Dabīgā numerācija

Definīcija 4.2.1. *Visur definētu sirjektīvu funkciju kopas $\mathfrak{F}$ attēlojumu naturālo skaitļu kopā $\mathbb{N}$ sauc par funkciju klases $\mathfrak{F}$ numerāciju.*

Ja attēlojums $\pi : \mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ ir funkciju klases $\mathfrak{F}$ numerācija un $\pi(f) = n$, tad funkcijas f apzīmēšanai turpmāk lietosim pierakstu π_n, un teiksim, ka funkcijas f *numurs* ir n jeb f ir n–tā funkcija numerācijā π.

Pieņemsim, ka funkciju klase $\mathfrak{F}$ ir naturāla vienargumenta funkciju klase. Funkciju $\Pi(n, x)$ sauc par *atbilstošu numerācijai* π, ja

$$\forall nx\ \Pi(n, x) = \pi_n(x).$$

Līdzīgi, klases $\mathfrak{F}$ numerāciju π sauc par *atbilstošu funkcijai* $\Pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, ja

$$\forall nx\ \Pi(n, x) = \pi_n(x).$$

Kā jau iepriekš minēts, kopas $\mathfrak{M}_2$ standartuniversālā Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_1^s$ definē kādu divargumentu funkciju $\mathcal{U}_s(n, x)$. Teorēma 3.2.1 ļauj secināt, ka katrai pēc Tjūringa izrēķināmai vienargumenta funkcijai eksistē kopas $\mathfrak{M}_2$ Tjūringa mašīna, kas to rēķina. Tātad katrai pēc Tjūringa izrēķināmai vienargumenta funkcijai f eksistē tāds n, ka

$$\forall x\ f(x) = \mathcal{U}_s(n, x).$$

Definīcija 4.2.2. *Visu pēc Tjūringa izrēķināmo vienargumenta funkciju klases numerāciju, kas atbilst funkcijai $\mathcal{U}_s(n, x)$ sauc par dabīgo numerāciju.*

Turpmāk dabīgās numerācijas apzīmēšanai lietosim pierakstu τ, t.i.,

$$\tau_n(x) \leftharpoondown \mathcal{U}_s(n, x).$$

Definīcija 4.2.3. *Klases $\mathfrak{F}$ numerāciju π sauc par izrēķināmu numerāciju, ja tai atbilstošā funkcija $\Pi(n, x)$ ir pēc Tjūringa izrēķināma.*

Sekas 4.2.4. *Dabīgā numerācija τ ir izrēķināma numerācija.*

5. nodaļa

Posta atbilstības problēma

Posta atbilstības problēma (angliski: Post correspondence problem; saīsinājums: PCP). Doti divi korteži

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (A^*)^k,$$
$$(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in (A^*)^k.$$

Vai eksistē tāds $m \in \mathbb{Z}_+$ un indeksi $i_1, i_2, \ldots, i_m$, ka

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_m}\,?$$

Pieņemsim, ka dota PCP P. Pozitīvas atbildes gadījumā mēs teiksim, ka problēmai P eksistē atrisinājums. Pretējā gadījumā teiksim, ka problēmai P atrisinājums neeksistē. Katram $i \in \overline{1,k}$ pāri (x_i, y_i) mēs sauksim par *domino* jeb domino kauliņu. Vārdu $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ dažkārt mēs sauksim par PCP pirmo vārdu, bet $y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_m}$ — par otro problēmas vārdu. Vārdu pāri $\langle x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_m} \rangle$ mēs sauksim par PCP daļēju atrisinājumu, ja $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ ir vārda $y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_m}$ priedēklis.

Mēs parādīsim, ka vispārīgā gadījumā PCP nav algoritmiski izšķirama. PCP galvenokārt izmanto kā instrumentu, lai ar redukciju uz PCP pierādītu, ka kāda cita konkrēta problēma nav algoritmiski izšķirama.

Modificētā Posta atbilstības problēma (saīsinājums: MPCP). Doti divi korteži

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (A^*)^k,$$
$$(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in (A^*)^k.$$

Vai eksistē tāds $m \in \mathbb{Z}_+$ un indeksi $i_2, \ldots, i_m$, ka

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_m} = y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_m}\,?$$

Teorēma 5.0.5. *Katrai Tjūringa mašīnai $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$ un patvaļīgam $w \in A_t^*$ efektīvi atrodama tāda MPCP P, ka problēmai P eksistē atrisinājums tad un tikai tad, ja $\mathfrak{T}(w)$ apstājas.*

□ Pieņemsim, ka dota Tjūringa mašīna $\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T\rangle$ un $w \in A_t^*$. Vispirms mēs 7 soļos aprakstīsim procedūru, kā dotai Tjūringa mašīnai konstruējama atbilstošā MPCP.

(i) $(\dagger, \dagger\ddagger q_1 w \dagger)$ ir pirmais domino.

(ii)

$$(q\dagger, qt\dagger) \in P, \quad \text{ja} \quad q \in Q_0.$$

Ja $qa \mapsto a' \Rsh q'$ ir programmas T komanda, tad izvēlamies domino $(qa, a'q')$. Turpmāk to visu mēs noformēsim īsāk, proti,

$$(qa, a'q') \in P, \quad \text{ja} \quad qa \mapsto a' \Rsh q' \in T.$$

(iii)

$$(qa, q'a') \in P, \quad \text{ja} \quad qa \mapsto a' \top q' \in T.$$

(iv)

$$\begin{aligned} (\ddagger qa, \ddagger tqa) \in P, &\quad \text{ja} \quad q \in Q_0. \\ (bqa, q'ba') \in P, &\quad \text{ja} \quad b \in A, \\ &\quad \text{un} \quad qa \mapsto a' \Lsh q' \in T. \end{aligned}$$

(v) $(a, a) \in P$ visiem $a \in A$; $(\dagger, \dagger) \in P$, $(\ddagger, \ddagger) \in P$.

(vi) $(aq_0, q_0) \in P$ un $(q_0 a, q_0) \in P$ visiem $a \in A$.

(vii) $(q_0 \dagger\ddagger\spadesuit, \spadesuit) \in P$.

Saskaņā ar MPCP definīciju mums jāsāk ar daļēju problēmas P atrisinājumu $\langle \dagger, \dagger\ddagger q_1 w \dagger \rangle$.

Jautājums:

— Kurus domino kauliņus var pielikt klāt?

Ja mēs vēlamies iegūt atrisinājumu, mums domino kauliņi jāliek klāt tā, lai pirmā vārda priedēklis būtu vārds $\dagger\ddagger q_1 w \dagger$. Tā rezultātā mums noteikti vajadzīgs domino kauliņš, kura pirmā komponente satur burtu q_1, t.i., mums nepieciešams (ii), (iii), vai (iv) grupas domino kauliņš.

- Ja $w = \lambda$, tad vienīgais derīgais domino ir $(q_1\dagger, q_1 t \dagger)$. Ņemot palīgā domino $(\ddagger, \ddagger)$ iegūstam daļēju atrisinājumu $\langle \dagger\ddagger q_1 \dagger, \dagger\ddagger q_1 t \dagger \rangle$.

- Ja $w = av$, kur $a \in A$, tad der domino, kura pirmā komponente ir $q_1 a$. Ja vispār šāds domino kauliņš ir atrodams, tad tas ir viens vienīgs, un tas ir (ii), vai (iii) grupas domino.

  – Ja tas ir (ii) grupas domino, tad tas atbilst mašīnas $\mathfrak{T}$ komandai izskatā
  $$q_1 a \mapsto a' \Rsh q'.$$
  Pats domino tad ir $(q_1 a, a' q')$. Ņemot palīgā (v) grupas domino kauliņus iegūstam daļēju atrisinājumu
  $$\langle \dagger\ddagger q_1 a v \dagger, \dagger\ddagger q_1 a v \dagger\ddagger a' q' v \dagger \rangle$$

  – Ja tas ir (iii) grupas domino, tad tas atbilst mašīnas $\mathfrak{T}$ komandai izskatā
  $$q_1 a \mapsto a' \top q'.$$
  Pats domino tad ir $(q_1 a, q' a')$. Ņemot palīgā (v) grupas domino kauliņus iegūstam daļēju atrisinājumu
  $$\langle \dagger\ddagger q_1 a v \dagger, \dagger\ddagger q_1 a v \dagger\ddagger q' a' v \dagger \rangle$$

- Ja $w = av$, kur $a \in A$ un nav tāda domino kauliņa, kura pirmā komponente ir $q_1 a$, tad tas nozīmē, ka atrodama viena vienīga mašīnas $\mathfrak{T}$ komanda izskatā
$$q_1 a \mapsto a' \Lsh q'. \tag{5.1}$$

Šai gadījumā der (iv) grupas domino kauliņs $(\ddagger q_1 a, \ddagger t q_1 a)$. Ņemot palīgā (v) grupas domino kauliņus iegūstam daļēju atrisinājumu

$$\langle \dagger\ddagger q_1 a v\dagger, \dagger\ddagger q_1 a v\dagger\ddagger t q_1 a v\dagger\rangle \tag{5.2}$$

Ja reiz (5.1) ir mašīnas $\mathfrak{T}$ komanda, tad ir tieši viens domino kauliņš, kas ļauj turpināt daļējo atrisinājumu (5.2), proti, (iv) grupas domino kauliņš $(tq_1a, q'ta')$. Ņemot palīgā (v) grupas domino kauliņus iegūstam daļēju atrisinājumu

$$\langle \dagger\ddagger q_1 a v\dagger\ddagger t q_1 a v\dagger, \dagger\ddagger q_1 a v\dagger\ddagger t q_1 a v\dagger\ddagger q' t a' v\dagger\rangle$$

Tālākie spriedumi induktīvi, proti, mēs varam konstruēt daļējus atrisinājumus

$$\langle \dagger\ddagger w_0\dagger\ddagger w_1\dagger\ddagger\ldots\dagger\ddagger w_{i-1}\dagger, \dagger\ddagger w_0\dagger\ddagger w_1\dagger\ddagger\ldots\dagger\ddagger w_{i-1}\dagger\ddagger w_i\dagger\rangle, \tag{5.3}$$

kur $w_0 = w$ un visiem $j \in \overline{0, i-1}$

$$\begin{gathered} w_j \vdash w_{j+1}, \text{ vai arī} \\ tw_j = w_{j+1}, \quad w_j t = w_{j+1}. \end{gathered}$$

Ievērojam, ja $w_j = w_{j-1}t$, tad w_{j-1} ir izskatā $w'_{j-1}q$, $q \in Q_0$ un $w_{j-1} \vdash w_{j+1}$. Savukārt, ja $w_j = tw_{j-1}$, tad w_{j-1} ir izskatā qaw''_{j-1}, $q \in Q_0$, $a \in A$ un $w_{j-1} \vdash w_{j+1}$, turklāt mašīnai $\mathfrak{T}$ ir komanda izskatā $qa \mapsto a' \urcorner q'$. Saskaņā ar grupas (i)–(v) domino kauliņiem, kamēr neparādās q_0, mums citu iespēju nemaz nav. Tātad vārdu w_j determinēti nosaka vārds w_{j-1}. Visos šajos gadījumos (skatīt (5.3)) pirmais problēmas P vārds ir īsāks par otro, t.i., mēs iegūstam daļējus atrisinājumus, kas nav MPCP atrisinājums. Tātad, ja problēmai P eksistē atrisinājums, tad
$\exists i \; q_0 \searrow w_i$.

Savukārt, ja $\exists i \; q_0 \searrow w_i$, tad izmantojot (vi) un (vii) grupas domino kauliņus panākams, ka pirmais problēmas P vārds ir vienāds ar otro. Līdz ar to esam pamatojuši, ka problēmai P eksistē atrisinājums tad un tikai tad, ja $\mathfrak{T}(w)$ apstājas. ■

Piemērs 5.0.6. Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_2$ (skatīt Piemēru 1.2.3 (ii))

$$\begin{array}{rcl}
q_1\, t & \mapsto & 1 \Lsh q_2 \\
q_1\, 0 & \mapsto & 0 \Rsh q_1 \\
q_1\, 1 & \mapsto & 1 \Rsh q_1 \\
q_2\, t & \mapsto & t \Rsh q_0 \\
q_2\, 0 & \mapsto & 0 \Lsh q_2 \\
q_2\, 1 & \mapsto & 1 \Lsh q_2
\end{array}$$

aiz vārda $u \in \{0,1\}^*$ pieraksta 1, proti, $\mathfrak{T}_2(u) = u1$. Shematiski tas attēlots 1.3. zīmējumā.

Mēs konstruēsim šai mašīnai atbilstošo MPCP P_2 pieņemot, ka sākotnējais vārds $u = 10$. Problēmas P_2 domino kauliņi:

$(\dagger, \dagger\ddagger q_1 10\dagger)$	pirmais	domino	kauliņš
$(\ddagger q_1 t, \ddagger t q_1 t)$	(tq_1t, q_2t1)	$(0q_1t, q_201)$	$(1q_1t, q_211)$
$(q_1\dagger, q_1t\dagger)$		$(q_10, 0q_1)$	$(q_11, 1q_1)$
$(q_2\dagger, q_2t\dagger)$	(q_2t, tq_0)		
$(\ddagger q_20, \ddagger tq_20)$	(tq_20, q_2t0)	$(0q_20, q_200)$	$(1q_20, q_210)$
$(\ddagger q_21, \ddagger tq_21)$	(tq_21, q_2t1)	$(0q_21, q_201)$	$(1q_21, q_211)$
	(t, t)	$(0, 0)$	$(1, 1)$
$(\dagger, \dagger)$	$(\ddagger, \ddagger)$		
	(tq_0, q_0)	$(0q_0, q_0)$	$(1q_0, q_0)$
	(q_0t, q_0)	(q_00, q_0)	(q_01, q_0)
$(q_0\dagger\ddagger\spadesuit, \spadesuit)$			

Tagad demostrējam, kā P_2 modelē mašīnas $\mathfrak{T}_2$ darbu sākotnējam vārdam $u = 10$:

$\dagger$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger$	pirmais domino kauliņš
$\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger$	$(\ddagger, \ddagger)$
$\dagger\ddagger q_1 1$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1$	$(q_11, 1q_1)$
$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 1$	$(0,0), (\dagger,\dagger)$, $(\ddagger, \ddagger)$, (1,1)

$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1$	$(q_1 0, 0 q_1)$
$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10$	$(\dagger,\dagger), (\ddagger,\ddagger)$, (1,1), (0,0)
$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10 q_1 t\dagger$	$(q_1\dagger, q_1 t\dagger)$
$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 1$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10 q_1 t\dagger\ddagger 1$	$(\ddagger,\ddagger), (1,1)$
$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10 q_1 t$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10 q_1 t\dagger\ddagger 1 q_2 01$	$(0 q_1 t, q_2 01)$
$\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10 q_1 t\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger q_1 10\dagger\ddagger 1 q_1 0\dagger\ddagger 10 q_1\dagger\ddagger 10 q_1 t\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger$	$(\dagger,\dagger), (\ddagger,\ddagger)$

Vietas taupīšanas nolūkos abiem vārdiem atmetīsim daļu no jau uzkonstruētā kopīgā priedēkļa. Turpinam demonstrāciju jaunā tabulā:

$\dagger\ddagger 1 q_2 0$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 10$	$(1 q_2 0, q_2 10)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger$	$(1,1), (\dagger,\dagger)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 1$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 1$	$(\ddagger q_2 1, \ddagger t q_2 1)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger$	$(0,0), (1,1)$, $(\dagger,\dagger)$, $(\ddagger,\ddagger)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 1$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger q_2 t 1$	$(t q_2 1, q_2 t 1)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger q_2 t 101\dagger\ddagger$	$(0,0), (1,1)$, $(\dagger,\dagger)$, $(\ddagger,\ddagger)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger q_2 t$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger q_2 t 101\dagger\ddagger t q_0$	$(q_2 t, t q_0)$
$\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger q_2 t 101\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger 1 q_2 01\dagger\ddagger q_2 101\dagger\ddagger t q_2 101\dagger\ddagger q_2 t 101\dagger\ddagger t q_0 101\dagger\ddagger$	$(1,1), (0,0), (1,1)$, $(\dagger,\dagger)$, $(\ddagger,\ddagger)$

Vēlreiz vietas taupīšanas nolūkos abiem vārdiem atmetīsim daļu no jau uzkonstruētā kopīgā priedēkļa. Turpinam demonstrāciju jaunā tabulā:

$\dagger\ddagger tq_0$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0$	(tq_0, q_0)
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger$	$(1,1),(0,0),(1,1),$ $(\dagger,\ \dagger),\ (\ddagger,\ \ddagger)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 1$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0$	$(q_0 1, q_0)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger$	$(0,0),(1,1)$ $(\dagger,\ \dagger),\ (\ddagger,\ \ddagger)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 0$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0$	$(q_0 0, q_0)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1\dagger\ddagger$	$(1,1),(\dagger,\dagger)$ $(\ddagger,\ \ddagger)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1\dagger\ddagger q_0$	$(q_0 1, q_0)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1\dagger\ddagger$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1\dagger\ddagger q_0\dagger\ddagger$	$(\dagger,\dagger),(\ddagger,\ddagger)$
$\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1\dagger\ddagger q_0\dagger\ddagger\spadesuit$ $\dagger\ddagger tq_0 101\dagger\ddagger q_0 101\dagger\ddagger q_0 01\dagger\ddagger q_0 1\dagger\ddagger q_0\dagger\ddagger\spadesuit$	$(q_0\dagger\ddagger\spadesuit, \spadesuit)$

Teorēma 5.0.7. *PCP nav algoritmiski izšķirama.*

□ Pieņemsim, ka PCP ir algoritmiski izšķirama. Mūsu mērķis: MPCP efektīvi pārveidot par PCP.

Pieņemsim, ka $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, kur $\forall i\ u_i \in A$ un $\clubsuit \notin A$, tad

$$\begin{aligned} \clubsuit u &\leftharpoondown \clubsuit u_1 \clubsuit u_2 \clubsuit \ldots \clubsuit u_n, \\ u\clubsuit &\leftharpoondown u_1 \clubsuit u_2 \clubsuit \ldots \clubsuit u_n \clubsuit, \\ \clubsuit u \clubsuit &\leftharpoondown \clubsuit u_1 \clubsuit u_2 \clubsuit \ldots \clubsuit u_n \clubsuit. \end{aligned}$$

Pieņemsim, ka mūsu rīcībā ir kāda konkrēta MPCP problēma

$$P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\},$$

turklāt $\forall i\ x_i \neq \lambda \neq y_i$. Definējam PCP problēmu

$$P' \leftharpoondown \{(\clubsuit x_1, \clubsuit y_1 \clubsuit), (\clubsuit x_2, y_2 \clubsuit), \ldots, (\clubsuit x_n, y_n \clubsuit), (\clubsuit\diamondsuit, \diamondsuit)\}$$

Šai problēmai iespējams tikai šāds atrisinājums $\clubsuit x_1 \ldots = \clubsuit y_1 \clubsuit$. Citi domino kauliņi neder par pirmo domino kauliņu. Ja izrādās, ka PCP ir algoritmiski izšķirama, tad mēs varam efektīvi atbildēt uz jautājumu, vai P' eksistē atrisinājums. Tā kā problēmai P eksistē atrisinājums tad un tikai tad, ja problēmai P' eksistē atrisinājums, tad mēs esam ieguvuši efektīvu atbildi uz jautājumu:

— Vai problēmai P eksistē atrisinājums? Pretruna!

Atzīmēsim, ka iepriekšējā teorēmā pierādījām, ka MPCP ir algoritmiski neizšķirama, turklāt, ja pievēršamies šīs teorēmas pierādījumam, tad redzam, ka mēs interesējāmies tikai par tām MPCP, kurām visu kauliņu komponentes ir netukši vārdi. ∎

6. nodaļa

6.1. Primitīvi rekursīvas funkcijas

Definīcija 6.1.1. *Funkcijas*

$$\begin{aligned} o : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ &: \ x \mapsto 0; \\ s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ &: \ x \mapsto x+1; \\ u^n_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \ &: \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_m, \end{aligned}$$

visiem $m \in \overline{1,n}$, sauc par bāzes funkcijām.

Vingrinājums 6.1.2. *Parādīt, ka bāzes funkcijas ir izrēķināmas pēc Tjūringa!*

Definīcija 6.1.3. *Funkciju $h : X^n \multimap\!\!\!\to X$ sauc par funkciju*

$$\begin{aligned} f \ &: \ X^m \multimap\!\!\!\to X, \\ g_1 \ &: \ X^n \multimap\!\!\!\to X, \\ g_2 \ &: \ X^n \multimap\!\!\!\to X, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_m \ &: \ X^n \multimap\!\!\!\to X \end{aligned}$$

kompozīciju, ja

$$h(\bar{x}) \leftharpoondown f(g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \ldots, g_m(\bar{x})).$$

Īsāka pieraksta labad šai situācijā lietosim apzīmējumu $h = f(g_1, g_2, \ldots, g_m)$.

Definīcija 6.1.4. *Saka, ka funkcija $h(\bar{x}, y)$ iegūta no funkcijām $f(\bar{x})$, $g(\bar{x}, y, z)$ ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību, ja h definēta induktīvi ar nosacījumiem*

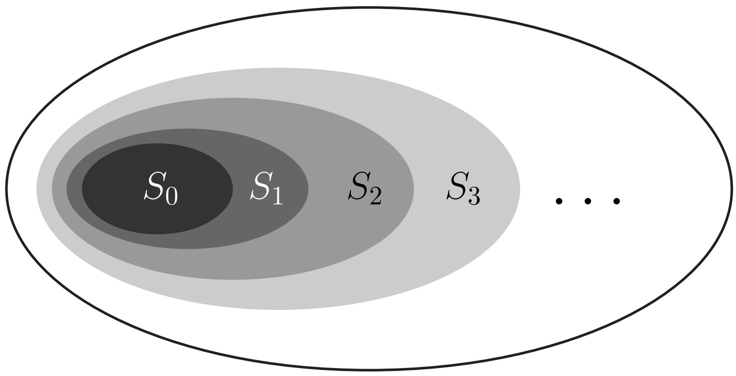
$$\begin{cases} h(\bar{x}, 0) & \leftharpoondown \ f(\bar{x}); \\ h(\bar{x}, y+1) & \leftharpoondown \ g(\bar{x}, y, h(\bar{x}, y)). \end{cases}$$

Speciālā gadījumā, ja $h_1(y)$ *definēta induktīvi ar nosacījumiem*

$$\begin{cases} h_1(0) & \leftharpoondown \quad c \in \mathbb{N}; \\ h_1(y+1) & \leftharpoondown \quad g(y, h(y)), \end{cases}$$

tad saka, ka h_1 *iegūta no konstantes* c *un funkcijas* $g_2(y,z)$ *ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.*

Abos gadījumos saka, ka funkcija h iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.



5.zīm. Kopas S definīcija ar vispārināto indukciju.

Vispārīgā gadījumā kopas var definēt izmantojot tā saukto vispārināto indukcijas metodi (principu).

1. solis — nofiksējam sākotnējo kopu S_0;

2. solis — nofiksējam *izveduma likumus* $\mathfrak{F}$.

Kopu S'_0 definējam kā kopu, kas iegūta no kopas S_0 elementiem izmantojot izveduma likumus $\mathfrak{F}$. Tagad kopu S_1 definējam kā apvienojumu $S_1 \leftharpoondown S_0 \cup S'_0$. Nākošajā solī definējam kopu S'_1 kā kopu, kas iegūta no kopas S_1 elementiem izmantojot izveduma likumus $\mathfrak{F}$, un definējam S_2 kā apvienojumu $S_2 \leftharpoondown S_1 \cup S'_1$. Tā rezultātā iegūstam kopu virkni

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$$

Visbeidzot definējam $S \leftharpoondown \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$. Dotās shēmas ilustrāciju skatīt 5. zīmējumā.

Definīcija 6.1.5. *Funkciju h sauc par primitīvi rekursīvu funkciju, ja tā apmierina kaut vienu no sekojošiem nosacījumiem:*

- *h ir bāzes funkcija;*
- *h ir primitīvi rekursīvu funkciju kompozīcija;*
- *h iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.*

Saskaņā ar vispārināto indukcijas principu primitīvi rekursīvo funkciju klase definēta korekti. Šai gadījumā

$$S_0 \leftharpoondown \{o, s\} \cup \{u_m^n |\ n \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ un } \ m \in \overline{1, n}\}.$$

Savukārt izveduma likumi $\mathfrak{F}$ ir šādi.

- Ja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}, \\ g_1 &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \\ g_2 &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \\ &. \ . \ . \ . \ . \\ g_m &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

  ir kopas $\mathfrak{X}$ funkcijas, tad

$$h(\bar{x}) \leftharpoondown f(g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x}))$$

  ir kopas $\mathfrak{X}$ funkcija.

- Ja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \\ g &: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

ir kopas $\mathfrak{X}$ funkcijas, tad $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, kas definēta induktīvi ar nosacījumiem

$$\begin{cases} h(\bar{x}, 0) & \leftharpoondown & f(\bar{x}); \\ h(\bar{x}, y+1) & \leftharpoondown & g(\bar{x}, y, h(\bar{x}, y)) \end{cases}$$

ir kopas $\mathfrak{X}$ funkcija.

- Ja

$$\begin{array}{rcl} c & \in & \mathbb{N}, \\ g & : & \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \end{array}$$

ir kopas $\mathfrak{X}$ funkcijas, tad $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas definēta induktīvi ar nosacījumiem

$$\begin{cases} h(0) & \leftharpoondown & c, \\ h(y+1) & \leftharpoondown & g(y, h(y)) \end{cases}$$

ir kopas $\mathfrak{X}$ funkcija.

Piemēri 6.1.6. *Sekojošās funkcijas ir primitīvi rekursīvas.*

(i) $\forall k \in \mathbb{N} \quad s_k(x) = k.$

Pierādījums induktīvs. Ja $k = 0$, tad $s_0(x) = o(x)$. Tā ir bāzes funkcija, tātad — primitīvi rekursīva.

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka funkcija $s_k(x)$ ir primitīvi rekursīva. Tas ir induktīvais pieņēmums. Mums tagad jāparāda: no šejienes izriet, ka funkcija $s_{k+1}(x)$ ir primitīvi rekursīva. Pats pierādījums ir šāds:

$$s_{k+1}(x) = k + 1 = s(k) = s(s_k(x)).$$

Tātad $s_{k+1}(x)$ ir primitīvi rekursīvu funkciju kompozīcija, tāpēc (Definīcija 6.1.5) $s_{k+1}(x)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad o^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$

$$o^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 = o(x_1) = o(u_1^n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Tātad $o^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīvu funkciju kompozīcija, tāpēc (Definīcija 6.1.5) $o^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall k \in \mathbb{N} \quad s_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k.$

Pierādījums induktīvs. Ja $k = 0$, tad

$$s_0^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 = o^n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Mēs tikko punktā (ii) parādījām, ka $o^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīva, tātad arī $s_0^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīva.

Induktīvā pāreja: pieņemam, ka funkcija $s_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīva. Tas ir induktīvais pieņēmums. Mums tagad jāparāda: no šejienes izriet, ka funkcija $s_{k+1}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīva. Pats pierādījums ir šāds:

$$s_{k+1}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\;=\;\; k + 1 = s(k) = s(s_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Tātad $s_{k+1}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīvu funkciju kompozīcija, tāpēc (Definīcija 6.1.5) $s_{k+1}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.

Teorēma 6.1.7. *Ja $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftharpoondown f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}),$$

kur $\forall s \in \overline{1, m}$ $(i_s \in \overline{1, n})$, ir primitīvi rekursīva funkcija.

$$\square \qquad h(\bar{x}) = f(u_{i_1}^n(\bar{x}), u_{i_2}^n(\bar{x}), \ldots, u_{i_m}^n(\bar{x})) \qquad \blacksquare$$

Apgalvojums 6.1.8. *Ja $f(x, y)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad*

(i) $h_1(x_1, x_2) \leftharpoondown f(x_2, x_1)$*;*

(ii) $h_2(x) \leftharpoondown f(x, x)$*;*

(iii) $h_3(x_1, x_2, x_3) \leftharpoondown f(x_2, x_3)$*;*

(iv) $h_4(x) \leftharpoondown f(x, m)$*, kur* $m \in \mathbb{N}$*,*

ir primitīvi rekursīvas funkcijas.

$\square$ Pirmie trīs pierādījumi balstās uz Teorēmu 6.1.7.

(i) Izvēlamies $i_1 = 2$ un $i_2 = 1$, tad $h(x_1, x_2) \leftharpoondown f(x_{i_1}, x_{i_2})$ ir primitīvi rekursīva funkcija un

$$h(x_1, x_2) = f(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_2, x_1) = h_1(x_1, x_2).$$

(ii) Izvēlamies $i_1 = 1$ un $i_2 = 1$, tad $h(x_1) \leftharpoondown f(x_{i_1}, x_{i_2})$ ir primitīvi rekursīva funkcija un

$$h(x_1) = f(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_1, x_1) = h_2(x_1).$$

(iii) Izvēlamies $i_1 = 2$ un $i_2 = 3$, tad $h(x_1, x_2, x_3) \leftharpoondown f(x_{i_1}, x_{i_2})$ ir primitīvi rekursīva funkcija un

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_{i_1}, x_{i_2}) = f(x_2, x_3) = h_3(x_1, x_2, x_3).$$

(iv) Funkcija $f(x_1, m)$ ir primitīvi rekursīvu funkciju $f(y_1, y_2)$ un $s_m(x_1)$ (Piemērs 6.1.6 (i)), $u_1^1(x_1)$ kompozīcija.

$$h_4(x_1) = f(x_1, m) = f(u_1^1(x_1), s_m(x_1)). \quad \blacksquare$$

Piemēri 6.1.9. *Biežāk sastopamo primitīvi rekursīvo funkciju piemēri.*

(i) $h_1(x, y) \leftharpoondown x + y$.

$$\begin{array}{rcl} h_1(x, 0) & = & x; \\ h_1(x, y+1) & = & (x+y)+1. \end{array}$$

Balstoties uz Teorēmu 6.1.7 varam apgalvot, ka funkcija $g(x, y, z) \leftharpoondown s(z)$ ir primitīvi rekursīva. Te

$$\begin{array}{l} x \text{ ir mainīgā } x_1 \text{ lomā;} \\ y \text{ — mainīgā } x_2 \text{ lomā;} \\ z \text{ — mainīgā } x_3 \text{ lomā.} \end{array}$$

Tā rezultātā izvēlamies $i_1 = 3$ un saskaņā ar Teorēmu 6.1.7 varam apgalvot, ka funkcija $g(x_1, x_2, x_3) \leftharpoondown s(x_3)$ ir primitīvi rekursīva. No šejienes: funkcija $h_1(x, y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām $u_1^1(x)$, $g(x, y, z)$ ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību:

$$\begin{array}{rcl} h_1(x, 0) & = & u_1^1(x); \\ h_1(x, y+1) & = & g(x, y, h_1(x, y)), \end{array}$$

tādēļ (Definīcija 6.1.5) $h_1(x, y)$ ir primitīvi rekursīva. Turpmākajos piemēros mēs vairs tik detalizēti nepaskaidrosim, kā jābalstās uz Teorēmu 6.1.7.

(ii) $h_2(x,y) \leftharpoondown xy.$

$$\begin{aligned} h_2(x,0) &= 0; \\ h_2(x,y+1) &= x(y+1) = xy+y. \end{aligned}$$

Šoreiz funkcija $h_2(x,y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām $o(x)$, $g(x,y,z) \leftharpoondown h_1(y,z)$ ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(iii)

$$h_3(x,y) \leftharpoondown \begin{cases} x^y, & \text{ja} \quad x \neq 0 \vee y \neq 0; \\ 1, & \text{ja} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_3(x,0) &= 1; \\ h_3(x,y+1) &= x^{y+1} = x^y x. \end{aligned}$$

Funkcija $h_3(x,y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām

$$s_1(x), \quad g(x,y,z) \leftharpoondown h_2(x,z)$$

ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(iv) $h_4(x) \leftharpoondown x \dot{-} 1.$

$$\begin{aligned} h_4(0) &= 0; \\ h_4(y+1) &= y. \end{aligned}$$

Funkcija $h_4(y)$ iegūta no konstantes 0 un primitīvi rekursīvās funkcijas $g(y,z) \leftharpoondown u_1^2(y,z)$ ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(v)

$$h_5(x,y) \leftharpoondown x \dot{-} y \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x < y; \\ x-y, & \text{ja} \quad x \geq y. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_5(x,0) &= x; \\ h_5(x,y+1) &= x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1. \end{aligned}$$

Funkcija $h_5(x,y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām

$$u_1^1(x), \quad g(x,y,z) \leftharpoondown h_4(z)$$

ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(vi)

$$h_6(x) \leftharpoondown \mathrm{sg}(x) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x = 0; \\ 1, & \text{ja} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_6(0) &= 0; \\ h_6(y+1) &= 1. \end{aligned}$$

Funkcija $h_6(y)$ iegūta no konstantes 0 un primitīvi rekursīvās funkcijas $g(y,z) \leftharpoondown s_1(y)$ ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(vii)

$$h_7(x) \leftharpoondown \overline{\mathrm{sg}}(x) \leftharpoondown \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x = 0; \\ 0, & \text{ja} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = 1 \dot{-} \mathrm{sg}(x),$$

tātad $\overline{\mathrm{sg}}(x)$ ir primitīvi rekursīvo funkciju $y_1 \dot{-} y_2$ un $s_1(x), \mathrm{sg}(x)$ kompozīcija.

(viii) $h_8(x,y) \leftharpoondown |x-y|$.

$$|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$

tātad $|x-y|$ ir primitīvi rekursīvo funkciju $y_1 + y_2$ un $h_5(x,y), h_5(y,x)$ kompozīcija.

(ix) $h_9(x) \leftharpoondown x!$.

$$\begin{aligned} h_9(0) &= 1; \\ h_9(y+1) &= (y+1)! = (y+1)y! \end{aligned}$$

Funkcija $h_9(y)$ iegūta no konstantes 1 un primitīvi rekursīvās funkcijas $g(y,z) \leftharpoondown s(y)z$ (Vingrinājums 6.1.10 (i)) ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(x) $h_{10}(x,y) \leftharpoondown \min(x,y)$.

$$\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y),$$

tātad $\min(x,y)$ ir primitīvi rekursīvo funkciju $y_1 \dot{-} y_2$ un $u_1^2(x,y), \ \ x \dot{-} y$ kompozīcija.

(xi) $h_{11}(x,y) \leftharpoondown \max(x,y)$.

$$\max(x,y) = x + (y \dot{-} x),$$

tātad $\max(x,y)$ ir primitīvi rekursīvo funkciju $y_1 + y_2$ un $u_1^2(x,y)$, $y \dot{-} x$ kompozīcija.

(xii) Pieņemsim, ka $x \neq 0$, tad katru y var izteikt kā summu

$$y = qx + r, \quad \text{kur} \quad 0 \leq r < x.$$

$$h_{12}(x,y) \leftharpoondown \begin{cases} y, & \text{ja} \quad x = 0; \\ r, & \text{ja} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Ievērojam, ka $y + 1 = qx + (r + 1)$. No šejienes

$$\begin{aligned} h_{12}(x, y+1) &= \begin{cases} h_{12}(x,y) + 1, & \text{ja} \quad h_{12}(x,y) + 1 \neq x; \\ 0, & \text{ja} \quad h_{12}(x,y) + 1 = x. \end{cases} \\ &= (h_{12}(x,y) + 1)\,\mathrm{sg}|h_{12}(x,y) + 1 - x|. \end{aligned}$$

Tā rezultātā

$$\begin{aligned} h_{12}(x,0) &= 0; \\ h_{12}(x,y+1) &= (h_{12}(x,y) + 1)\,\mathrm{sg}|h_{12}(x,y) + 1 - x|. \end{aligned}$$

Līdz ar to funkcija $h_{12}(x,y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām

$$o(x), \quad \text{un} \quad g(x,y,z) \leftharpoondown (z+1)\,\mathrm{sg}|z + 1 - x| \quad \text{(Vingrinājums 6.1.10 (ii))}$$

ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(xiii) Pieņemsim, ka $x \neq 0$, tad katru y var izteikt kā summu

$$y = qx + r, \quad \text{kur} \quad 0 \leq r < x.$$

$$h_{13}(x,y) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x = 0; \\ q, & \text{ja} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Ievērojam, ka $y + 1 = qx + (r + 1)$. No šejienes

$$\begin{aligned} h_{13}(x, y+1) &= \begin{cases} h_{13}(x,y), & \text{ja} \quad h_{12}(x,y+1) \neq 0; \\ h_{13}(x,y) + 1, & \text{ja} \quad h_{12}(x,y+1) = 0. \end{cases} \\ &= h_{13}(x,y) + \overline{\mathrm{sg}}(h_{12}(x,y+1)). \end{aligned}$$

Atzīmēsim, ka $0 = h_{13}(0,0) = h_{13}(0,y) = h_{13}(0,y+1)$. Tā kā

$$h_{12}(0,y) \quad = \quad y \begin{cases} = 0, & \text{ja} \quad y = 0; \\ \neq 0, & \text{ja} \quad y \neq 0, \end{cases}$$

tad

$$h_{13}(0,y+1) = h_{13}(0,y) = h_{13}(0,y) + \overline{\mathrm{sg}}(h_{12}(x,y+1)),$$

jo $\quad h_{12}(0,y+1) = y + 1 \neq 0. \quad$ Tā rezultātā

$$\begin{aligned} h_{13}(x,0) &= 0; \\ h_{13}(x,y+1) &= h_{13}(x,y) + \overline{\mathrm{sg}}(h_{12}(x,y+1)). \end{aligned}$$

Līdz ar to funkcija $h_{13}(x,y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām

$$o(x) \quad \text{un} \quad g(x,y,z) \rightleftharpoons z + \overline{\mathrm{sg}}(h_{12}(x,y+1)) \;\; \text{(Vingrinājums 6.1.10 (iii))}$$

ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(xiv)

$$\mathrm{div}(x,y) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad h_{12}(x,y) = 0; \\ 0, & \text{ja} \quad h_{12}(x,y) \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{div}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(h_{12}(x,y)).$$

Līdz ar to funkcija $\mathrm{div}(x,y)$ ir primitīvi rekursīvu funkciju $\overline{\mathrm{sg}}(y_1)$ un $h_{12}(x,y)$ kompozīcija.

Atzīmēsim, ja $x \neq 0$, tad

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(x,y) \quad &= \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \diagdown y; \\ 0, & \text{ja} \quad x \nmid y. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad \text{skaitlis } y \text{ ir skaitļa } x \text{ daudzkārtnis;} \\ 0, & \text{ja} \quad \text{skaitlis } y \text{ nav skaitļa } x \text{ daudzkārtnis.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vingrinājumi 6.1.10. *Pierādīt, ka dotās funkcijas ir primitīvi rekursīvas!*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad g_1(x_1,x_2,x_3) &&\rightleftharpoons (x_2+1)^{x_3}, \\ &\text{(ii)} \quad g_2(x_1,x_2,x_3) &&\rightleftharpoons (x_3+1)\,\mathrm{sg}|x_3+1-x_1|, \\ &\text{(iii)} \quad g_3(x_1,x_2,x_3) &&\rightleftharpoons x_3 + \overline{\mathrm{sg}}(h_{12}(x_1,x_2+1)). \end{aligned}$$

(iv) Pieņemsim, ka $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_k(\bar{x})$

ir primitīvi rekursīvas funkcijas. Pierādīt, ka

$$s_k^+(\bar{x}) \leftharpoondown f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) + \ldots + f_k(\bar{x})$$

ir primitīvi rekursīva funkcija!

(v) Pieņemsim, ka $f(\bar{x})$ un $g(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas. Pierādīt, ka $\overline{\mathrm{sg}}|f(\bar{x}) - g(\bar{x})|$ ir primitīvi rekursīva funkcija!

6.2. Daļēji rekursīvas funkcijas

Mēs meklējam vienādojuma $f(\bar{x}, t) = 0$ atrisinājumu; mēs gribam atrast mazāko t, kas ir šī vienādojuma sakne. Tomēr mēs šo atrisinājumu meklēsim ļoti primitīvi.

0–tais solis:
a) ja $(\bar{x}, 0) \notin \mathrm{Dom}(f)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $f(\bar{x}, 0) = 0$, tad esam atraduši mazāko atrisinājumu, un darbu beidzam;
c) ja $f(\bar{x}, 0) \neq 0$, tad pārejam pie nākošā soļa;
. . . .

k–tais solis:
a) ja $(\bar{x}, k) \notin \mathrm{Dom}(f)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $f(\bar{x}, k) = 0$, tad esam atraduši mazāko atrisinājumu, un darbu beidzam;
c) ja $f(\bar{x}, k) \neq 0$, tad pārejam pie nākošā soļa;
. . . .

Secinājums. Šī procedūra definē kādu funkciju $g(\bar{x})$, ko tradicionāli apzīmē šādi $g(\bar{x}) \rightleftharpoons \mu t(f(\bar{x}, t) = 0)$.

Definīcija 6.2.1. *Vispirms definējam kopu*

$$M(\bar{x}) \leftharpoondown \{t \mid f(\bar{x}, t) = 0\}.$$

Tagad varam nodefinēt pašu funkciju

$$g(\bar{x}) \leftharpoondown \begin{cases} \min M(\bar{x}), & \text{ja} \quad M(\bar{x}) \neq \emptyset \ \wedge \ \forall t < \min M(\bar{x}) \ [(\bar{x}, t) \in \mathrm{Dom}(f)]; \\ \text{nav definēta}, & \text{pretējā} \quad \text{gadījumā}. \end{cases}$$

Diemžēl, funkcija $g(\bar{x})$ var nebūt primitīvi rekursīva pat ja $f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva.

Piemērs 6.2.2.

$$\mu t(x+t=0) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad x = 0; \\ \text{nav definēta}, & \text{pretējā gadījumā}. \end{cases}$$

Tā kā primitīvi rekursīva funkcija ir visur definēta, tad $\mu t(x+t=0)$ nav primitīvi rekursīva.

Pieņemsim, ka

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{N}^n) \leftharpoondown \{f | f : \mathbb{N}^n \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}\},$$

tad attēlojumu

$$\mu : \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^n) \to \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^n) : f(\bar{x}, y) \mapsto \mu t(f(\bar{x}, t) = 0)$$

sauc par *minimizācijas* jeb *neierobežoto μ operatoru.*

Definīcija 6.2.3. *Funkciju h sauc par daļēji rekursīvu funkciju, ja tā apmierina kaut vienu no sekojošiem nosacījumiem:*

- *h ir primitīvi rekursīva funkcija;*
- *h ir daļēji rekursīvu funkciju kompozīcija;*
- *h iegūta no daļēji rekursīvām funkcijām ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību,*
- *h iegūta no daļēji rekursīvas funkcijas ar neierobežotā μ operatora palīdzību.*

Definīcija 6.2.4. *Visur definētu daļēji rekursīvu funkciju sauc par vispārīgi rekursīvu funkciju.*

Izrādās, ka eksistē vispārīgi rekursīvas funkcijas, kas nav primitīvi rekursīvas. Tāda, piemēram, ir *Akkermana funkcija*, ko definē šādi:

$$\begin{array}{rcl} \psi(0, y) & \leftharpoondown & y+1, \\ \psi(x+1, 0) & \leftharpoondown & \psi(x, 1), \\ \psi(x+1, y+1) & \leftharpoondown & \psi(x, \psi(x+1, y)). \end{array}$$

Lemma 6.2.5. *Akkermana funkcija ir definēta korekti.*

□ Vispirms kopā $\mathbb{N}^2$ definēsim lineāru sakārtojumu.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(0,0) & < & (0,1) & < & \ldots & < & (0,k) & < & \ldots \\
(1,0) & < & (1,1) & < & \ldots & < & (1,k) & < & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(n,0) & < & (n,1) & < & \ldots & < & (n,k) & < & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Tagad $\mathbb{N}^2$ ir lineāri sakārtota kopa. Izmantojot indukciju parādīsim, ka Akkermana funkcija $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definēta korekti.

(i) $\psi(0,k) \rightleftharpoons k+1$.

(ii) Induktīvais pieņēmums: funkcija $\psi(x,y)$ definēta visiem pāriem (x,y), ja $(x,y) < (n+1,0)$. $\psi(n+1,0) \rightleftharpoons \psi(n,1)$.

(iii) Induktīvais pieņēmums: funkcija $\psi(x,y)$ definēta visiem pāriem (x,y), ja $(x,y) < (n+1,k+1)$. $\psi(n+1,k+1) \rightleftharpoons \psi(n,\psi(n+1,k))$. ■

6.3. Primitīvi rekursīvi predikāti

Definīcija 6.3.1. *Kopas $\mathbb{N}^n$ apakškopu M sauc par naturālo skaitļu kopā $\mathbb{N}$ definētu n–vietīgu predikātu (attiecību).*

Ja $\bar{x} \in M$, tad mēdz teikt, ka kortežam $\bar{x}$ predikāts M ir *patiess*. Šai situācijā parasti lieto pierakstu $M(\bar{x}) \sim p$. Pretējā gadījumā, ja $\bar{x} \notin M$, saka, ka kortežam $\bar{x}$ predikāts M ir *aplams* un lieto pierakstu $M(\bar{x}) \sim a$.

Definīcija 6.3.2. *Funkciju*

$$\chi(\bar{x}) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad M(\bar{x}) \sim p; \\ 0, & \text{ja} \quad M(\bar{x}) \sim a. \end{cases}$$

sauc par predikāta $M(\bar{x})$ raksturīgo (harakteristisko) funkciju.

Predikātu $M(\bar{x})$ sauc par *primitīvi rekursīvu* predikātu, ja tā raksturīgā funkcija $\chi(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīva.

Lemma 6.3.3. *Ja $M(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvs predikāts, tad negācija $\neg M(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvs predikāts.*

□ Pieņemsim, ka $\chi(\bar{x})$ ir predikāta $M(\bar{x})$ raksturīgā funkcija, tad predikāta $\neg M(\bar{x})$ raksturīgā funkcija $\chi_{\neg}(\bar{x}) = 1 \dot{-} \chi(\bar{x})$. ■

Lemma 6.3.4. *Ja $M(\bar{x})$ un $Q(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvi predikāti, tad*

$$M(\bar{x}) \wedge Q(\bar{x})$$

ir primitīvi rekursīvs predikāts.

□ Pieņemsim, ka $\chi_1(\bar{x})$ un $\chi_2(\bar{x})$ ir attiecīgi predikātu $M(\bar{x})$ un $Q(\bar{x})$ raksturīgās funkcijas, tad konjunkcijas $M(\bar{x}) \wedge Q(\bar{x})$ raksturīgā funkcija

$$\chi_{\wedge}(\bar{x}) = \chi_1(\bar{x})\chi_2(\bar{x}). \quad ■$$

Vingrinājumi 6.3.5. *Ja $M(\bar{x})$ un $Q(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvi predikāti, tad*

$$\begin{array}{rc} \text{(i)} & M(\bar{x}) \vee Q(\bar{x}), \\ \text{(ii)} & M(\bar{x}) \Rightarrow Q(\bar{x}), \\ \text{(iii)} & M(\bar{x}) \Leftrightarrow Q(\bar{x}) \end{array}$$

ir primitīvi rekursīvi predikāti.

Teorēma 6.3.6. *Ja $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_k(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas,*

$$M_1(\bar{x}), M_2(\bar{x}), \ldots, M_k(\bar{x})$$

ir primitīvi rekursīvi predikāti, turklāt vēl katram $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ tieši viens no šiem predikātiem ir patiess, tad

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}), & \text{ja} \quad M_1(\bar{x}) \sim p; \\ f_2(\bar{x}), & \text{ja} \quad M_2(\bar{x}) \sim p; \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_k(\bar{x}), & \text{ja} \quad M_k(\bar{x}) \sim p. \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīva funkcija.

□ Pieņemsim, ka $\chi_i(\bar{x})$ ir predikāta $M_i(\bar{x})$ raksturīgā funkcija, tad (Vingrinājums 6.1.10 (iv))

$$f(\bar{x}) = f_1(\bar{x})\chi_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})\chi_2(\bar{x}) + \ldots + f_k(\bar{x})\chi_k(\bar{x})$$

ir primitīvi rekursīva funkcija. ■

Apgalvojums 6.3.7. *Ja $f(\bar{x})$ un $g(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas, tad $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvs predikāts.*

$\square$ Funkcija $\overline{\mathrm{sg}}|f(\bar{x}) - g(\bar{x})|$ ir predikāta $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ raksturīgā funkcija. Tā ir primitīvi rekursīva (Vingrinājums 6.1.10 (v)). $\blacksquare$

Vingrinājumi 6.3.8. *Pieņemsim, ka $f(\bar{x})$ un $g(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas. Pierādīt, ka dotie predikāti ir primitīvi rekursīvi.*

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & f(\bar{x}) \neq g(\bar{x}), \\ \text{(ii)} & f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}), \\ \text{(iii)} & f(\bar{x}) < g(\bar{x}). \end{array}$$

6.4. Ierobežota summa un reizinājums

Definīcija 6.4.1. *Par funkcijas $f(\bar{x}, t)$ ierobežoto summu $\sum\limits_{t<y} f(\bar{x}, t)$ sauc funkciju*

$$\begin{cases} \sum\limits_{t<0} f(\bar{x}, t) & \leftharpoondown \quad 0, \\ \sum\limits_{t<y+1} f(\bar{x}, t) & \leftharpoondown \quad \sum\limits_{t<y} f(\bar{x}, z) + f(\bar{x}, y). \end{cases}$$

Apgalvojums 6.4.2. *Ja $f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad ierobežotā summa ir primitīvi rekursīva funkcija.*

$\square$ Pieņemsim, ka $S(\bar{x}, y) \leftharpoondown \sum\limits_{t<y} f(\bar{x}, t)$, tad

$$\begin{aligned} S(\bar{x}, 0) &= 0; \\ S(\bar{x}, y+1) &= S(\bar{x}, y) + f(\bar{x}, y). \end{aligned}$$

Funkcija $S(\bar{x}, y)$ iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām

$$o^n(\bar{x}), \quad g(\bar{x}, y, z) \leftharpoondown z + f(\bar{x}, y)$$

ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību. $\blacksquare$

Sekas 6.4.3. *Ja $f(\bar{x}, t)$ un $k(\bar{x}, y)$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas, tad ierobežotā summa $\sum\limits_{t<k(\bar{x},y)} f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.*

□ Ņemot vērā iepriekšējā pierādījuma apzīmējumus, secināms

$$S(\bar{x}, k(\bar{x}, y)) = \sum_{t<k(\bar{x},y)} f(\bar{x}, t).$$

Tātad ierobežotā summa $\sum\limits_{t<k(\bar{x},y)} f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvu funkciju $S(\bar{x}, y)$ un $k(\bar{x}, y)$ kompozīcija. ■

Sekas 6.4.4. *Ja $f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad $\sum\limits_{t\leq y} f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.*

□

$$\sum_{t\leq y} f(\bar{x}, t) = \sum_{t<y+1} f(\bar{x}, t). \qquad ■$$

Definīcija 6.4.5. *Par funkcijas $f(\bar{x}, t)$ ierobežoto reizinājumu $\prod\limits_{t<y} f(\bar{x}, t)$ sauc funkciju*

$$\begin{cases} \prod\limits_{t<0} f(\bar{x}, t) & \leftharpoondown \quad 1, \\ \\ \prod\limits_{t<y+1} f(\bar{x}, t) & \leftharpoondown \quad \left(\prod\limits_{t<y} f(\bar{x}, z)\right) f(\bar{x}, y). \end{cases}$$

Vingrinājumi 6.4.6. *Pierādīt sekojošos faktus!*

(i) Ja $f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad ierobežotais reizinājums ir primitīvi rekursīva funkcija.

(ii) Ja $f(\bar{x}, t)$ un $k(\bar{x}, y)$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas, tad ierobežotais reizinājums $\prod\limits_{t<k(\bar{x},y)} f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.

(iii) Ja $f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad $\prod\limits_{t\leq y} f(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.

6.4.1. Ierobežotais μ–operators

Mēs meklēšanu varam ierobežot nofiksējot, cik soļus mēs darbināsim meklēšanas procedūru. Tātad nofiksējam kādu skaitli y un sākam meklēšanu.

0–tais solis:
a) ja $(\bar{x}, 0) \notin \mathrm{Dom}(f)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $f(\bar{x}, 0) = 0$, tad esam atraduši mazāko atrisinājumu, un darbu beidzam;
c) ja $f(\bar{x}, 0) \neq 0$, tad pārejam pie nākošā soļa;
. . . .
k**–tais solis**:
a) ja $(\bar{x}, k) \notin \mathrm{Dom}(f)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $f(\bar{x}, k) = 0$, tad esam atraduši mazāko atrisinājumu, un darbu beidzam;
c) ja $f(\bar{x}, k) \neq 0$, tad pārejam pie nākošā soļa;
. . . .
solis y: uzskatam, ka atrisinājums ir y, un beidzam darbu.

Secinājums. Šī procedūra definē kādu funkciju $g(\bar{x}, y)$, ko tradicionāli apzīmē šādi $g(\bar{x}, y) \rightleftharpoons \mu t < y\ (f(\bar{x}, t) = 0)$.

Definīcija 6.4.7. *Vispirms definējam kopu* $N(\bar{x}, y) \rightleftharpoons M(\bar{x}) \cup \{y\}$.
Tagad varam nodefinēt pašu funkciju

$$g(\bar{x}, y) \rightleftharpoons \begin{cases} \min N(\bar{x}, y), & \text{ja} \quad \forall t < \min N(\bar{x}, y)\ [(\bar{x}, t) \in \mathrm{Dom}(f)]; \\ \text{nav definēta}, & \text{pretējā} \quad \text{gadījumā.} \end{cases}$$

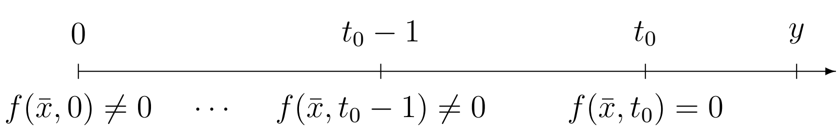
Sekas 6.4.8. *Ja* $f(\bar{x}, t)$ *ir visur definēta funkcija, tad arī*

$$\mu t < y\ (f(\bar{x}, t) = 0)$$

ir visur definēta funkcija.

Teorēma 6.4.9. *Ja* $f(\bar{x}, t)$ *ir primitīvi rekursīva funkcija, tad* $\mu t < y\ (f(\bar{x}, t) = 0)$ *ir primitīvi rekursīva funkcija.*

$\square$ $h(\bar{x}, t) \rightleftharpoons \prod_{u \le t} \mathrm{sg}(f(\bar{x}, u))$



Ievērojam, ja $t_0 = \mu t < y\ (f(\bar{x},t)=0)$, tad

$$h(\bar{x},t) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad t < t_0; \\ 0, & \text{ja} \quad t_0 \le t < y. \end{cases}$$

No šejienes

$$\sum_{t<y} h(\bar{x},t) = t_0 = \mu t < y\ (f(\bar{x},t)=0)\,.$$

Tā kā $h(\bar{x},t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad $\sum\limits_{t<y} h(\bar{x},t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija (Apgalvojums 6.4.2). Līdz ar to arī $\mu t < y\ (f(\bar{x},t)=0)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, jo $\sum\limits_{t<y} h(\bar{x},t) = \mu t < y\ (f(\bar{x},t)=0)\,.$ ■

Sekas 6.4.10. *Ja $f(\bar{x},t)$ un $k(\bar{x},y)$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas, tad $\mu t < k(\bar{x},y)\ (f(\bar{x},t)=0)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.*

□ Lielākas uzskatāmības labad pieņemsim, ka $g(\bar{x},u) \leftharpoondown \mu t < u\ (f(\bar{x},t) = 0)$, bet $h(\bar{x},y) \leftharpoondown g(\bar{x},k(\bar{x},y))$, tad $h(\bar{x},y) \rightharpoondown \mu t < k(\bar{x},y)\ (f(\bar{x},t)=0)$. ■

Sekas 6.4.11. *Ja $f(\bar{x},t)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad $\mu t \le y\ (f(\bar{x},t)=0)$ ir primitīvi rekursīva funkcija.*

□ $\mu t \le y\ (f(\bar{x},t)=0) = \mu t < y+1\ (f(\bar{x},t)=0)$. ■

Pieņemsim, ka $k(\bar{x},y)$ ir naturālu argumentu funkcija, tad attēlojumu

$$\mu_k : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^n) \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^n) : f(\bar{x},y) \mapsto \mu t < k(\bar{x},y)(f(\bar{x},t)=0)$$

sauc par *ierobežoto μ operatoru.* Te speciālā gadījumā pieļaujams , ka $f(\bar{x},t)$ ir viena argumenta t funkcija $f(t)$, tāpat arī pieļaujams, ka $k(\bar{x},y)$ ir viena argumenta y funkcija $k(y)$.

6.5. Citas rekursijas shēmas

Definīcija 6.5.1. *Pieņemsim, ka $K \subseteq \mathbb{N}^n$. Kopas K apakškopu P sauc par kopā K definētu n–vietīgu predikātu (attiecību).*

Ja $\bar{x} \in P$, tad mēdz teikt, ka kortežam $\bar{x}$ predikāts P ir *patiess*. Šai situācijā parasti lieto pierakstu $P(\bar{x}) \sim p$. Pretējā gadījumā, ja $\bar{x} \in K \setminus P$, saka, ka kortežam $\bar{x}$ predikāts P ir *aplams* un lieto pierakstu $P(\bar{x}) \sim a$. Ja $\bar{x} \in \mathbb{N}^n \setminus K$, tad saka, ka predikāts P *nav definēts*. Šī iemesla dēļ predikātu P sauc par kopā $\mathbb{N}^n$ *daļēji definētu predikātu*, un kopu K sauc par predikāta P *definīcijas apgabalu*. Līdzīgi kā funkciju gadījumā definīcijas apgabala apzīmēšanai lieto pierakstu $\mathrm{Dom}(P)$; tātad $\mathrm{Dom}(P) \leftharpoondown K$.

Definīcija 6.5.2. *Funkciju*

$$\chi(\bar{x}) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad P(\bar{x}) \sim p; \\ 0, & \text{ja} \quad P(\bar{x}) \sim a; \\ \text{nav definēta}, & \text{ja} \quad \bar{x} \notin \mathrm{Dom}(P). \end{cases}$$

sauc par predikāta $P(\bar{x})$ raksturīgo (harakteristisko) funkciju.

Pieņemsim, ka $P(\bar{x}, t)$ ir daļēji definēts predikāts.

0–tais solis:
a) ja $(\bar{x}, 0) \notin \mathrm{Dom}(P)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $P(\bar{x}, 0) \sim p$, tad par atrisinājumu ņemam skaitli 0, un darbu beidzam;
c) ja $P(\bar{x}, 0) \sim a$, tad pārejam pie nākošā soļa;
. . . .

k–tais solis:
a) ja $(\bar{x}, k) \notin \mathrm{Dom}(P)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $P(\bar{x}, k) \sim p$, tad par atrisinājumu ņemam skaitli k, un darbu beidzam;
c) ja $P(\bar{x}, k) \sim a$, tad pārejam pie nākošā soļa;
. . . .

Secinājums. Šī procedūra definē kādu funkciju $g(\bar{x})$, ko tradicionāli apzīmē šādi $g(\bar{x}) \rightleftharpoons \mu t(P(\bar{x}, t))$.

Līdzīgi var definēt shēmu ar ierobežoto μ–operatoru. Nofiksējam kādu funkciju $k(\bar{x}, y)$ un sākam meklēšanu. Ja $(\bar{x}, y) \notin \mathrm{Dom}(k)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu.

0–tais solis:
a) ja $(\bar{x}, 0) \notin \mathrm{Dom}(P)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;

b) ja $P(\bar{x}, 0) \sim p$, tad par atrisinājumu ņemam skaitli 0, un darbu beidzam;
c) ja $P(\bar{x}, 0) \sim a$, tad pārejam pie nākošā soļa;

. . . .

k–**tais solis**:
a) ja $(\bar{x}, k) \notin \mathrm{Dom}(P)$, tad atzīstam, ka meklēšana ir bijusi nesekmīga, un pārtraucam tālāko meklēšanu;
b) ja $P(\bar{x}, k) \sim p$, tad par atrisinājumu ņemam skaitli k, un darbu beidzam;
c) ja $P(\bar{x}, k) \sim a$, tad pārejam pie nākošā soļa;

. . . .

solis $k(\bar{x}, y)$: uzskatam, ka atrisinājums ir $k(\bar{x}, y)$, un beidzam darbu.

Secinājums. Šī procedūra definē kādu funkciju $g(\bar{x}, y)$, ko tradicionāli apzīmē šādi $g(\bar{x}, y) \rightleftharpoons \mu t < k(\bar{x}, y)\ (P(\bar{x}, t))$.

Apgalvojums 6.5.3. *Ja $P(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvs predikāts, tad $\mu t < y\ (P(\bar{x}, t))$ ir primitīvi rekursīva funkcija.*

□ Ja reiz $P(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvs predikāts, tad šī predikāta raksturīgā funkcija

$$\chi(\bar{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad P(\bar{x}, t) \sim p\,; \\ 0, & \text{ja} \quad P(\bar{x}, t) \sim a \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīva. Tā kā $\mu t < y\ (\overline{\mathrm{sg}}(\chi(\bar{x}, t)) = 0)$ ir primitīvi rekursīva funkcija un $\mu t < y\ (P(\bar{x}, t)) = \mu t < y\ (\overline{\mathrm{sg}}(\chi(\bar{x}, t)) = 0)$, tad arī $\mu t < y\ (P(\bar{x}, t))$ ir primitīvi rekursīva funkcija. ■

Vingrinājums 6.5.4. *Ja $P(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvs predikāts un $k(\bar{x}, y)$ ir primitīvi rekursīva funkcija, tad $\mu t < k(\bar{x}, y)\ (P(\bar{x}, t))$ ir primitīvi rekursīva funkcija.*

Apgalvojums 6.5.5. *Ja $P(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvs predikāts, tad $\forall t < y\ P(\bar{x}, t)$ un $\exists t < y\ P(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvi predikāti.*

□ Ja reiz $P(\bar{x}, t)$ ir primitīvi rekursīvs predikāts, tad šī predikāta raksturīgā funkcija

$$\chi(\bar{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad P(\bar{x}, k) \sim p\,; \\ 0, & \text{ja} \quad P(\bar{x}, k) \sim a \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīva. No šejienes predikāta $\forall t < y\ P(\bar{x}, t)$ raksturīgā funkcija

$$\chi^{\forall}(\bar{x}, y) = \prod_{t<y} \chi(\bar{x}, t).$$

Savukārt $\chi^{\exists}(\bar{x}, y) = \mathrm{sg}(\sum_{t<y} \chi(\bar{x}, t))$ ir predikāta $\exists t < y\ P(\bar{x}, t)$ raksturīgā funkcija. ■

Apgalvojums 6.5.6. *Ja $P(y_1, \ldots, y_m)$ ir primitīvi rekursīvs predikāts un $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ ir primitīvi rekursīvas funkcijas, tad $P(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$ ir primitīvi rekursīvs predikāts.*

□ Pieņemsim, ka $\chi(y_1, \ldots, y_m)$ ir predikāta $P(y_1, \ldots, y_m)$ raksturīgā funkcija, tad $\chi(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$ ir predikāta $P(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$ raksturīgā funkcija. ■

Piemēri 6.5.7.

(i) $(t+1)^2 > x$ ir primitīvi rekursīvs predikāts.

(ii) $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ ir primitīvi rekursīva funkcija.

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \mu t \leq x\ ((t+1)^2 > x)$$

(iii) Funkcija $D(x) \leftharpoondown\!\!\!\!\rightharpoonup \sum_{t \leq x} \mathrm{div}(t, x)$ ir primitīvi rekursīva. Šīs funkcijas sašaurinājums $D|\mathbb{Z}_+$ ir vienāds ar skaitļa x dalītāju skaitu. Funkcija $\mathrm{div}(t, x)$ definēta Piemērā 6.1.9 (xiv).

(iv) Pieņemsim, ka $\mathbb{P}$ ir visu pirmskaitļu kopa. Predikāts $x \in \mathbb{P}$ ir primitīvi rekursīvs. Pieņemsim, ka $\mathbb{P}(x)$ ir predikāta $x \in \mathbb{P}$ raksturīgā funkcija, tad

$$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{P}\,; \\ 0, & \text{ja} \quad x \notin \mathbb{P}\,. \end{cases}$$

$\mathbb{P}(x) = \overline{\mathrm{sg}}|D(x) - 2|$

(v) Pieņemsim, ka $p(0) \leftharpoondown\!\!\!\!\rightharpoonup 0$, toties ja $x \neq 0$, tad $p(x)$ ir pirmskaitlis, kura numurs dabiskajā uzskaitījumā ir x. Tātad

$$\begin{aligned} &p(1) = 2, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 5, \quad p(4) = 7,\ p(5) = 11,\ p(6) = 13, \\ &p(7) = 17,\ p(8) = 19,\ p(9) = 23,\ p(10) = 29,\ \ldots \end{aligned}$$

Vispirms definēsim funkciju

$$g(w) \leftharpoondown\!\!\!\!\rightharpoonup \mu t \leq (w! + 1)(t > w \wedge t \in \mathbb{P})\,.$$

Šī funkcija ir primitīvi rekursīva, jo funkcija $w! + 1$ ir primitīvi rekursīva, bet predikāti $t > w$ un $t \in \mathbb{P}$ ir primitīvi rekursīvi predikāti. Atzīmēsim, ka

$$g(0) = 2,\ g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 5,\ g(4) = 5,\ g(5) = 7,\ \ldots$$

Pieņemsim, ka $w > 4$, tad skaitli $w! + 1$ nedala neviens no skaitļiem $2, 3, 4, \ldots, w$, tāpēc starp skaitļiem $w+1, w+2, \ldots, w!+1$ ir vismaz viens pirmskaitlis. Līdz ar to funkcija $g(x)$ definē pirmo pirmskaitli, kas lielāks par w.

$$\begin{cases} p(0) & \leftharpoondown \quad 0\,; \\ p(x+1) & \leftharpoondown \quad g(p(x))\,. \end{cases}$$

Piemēri 6.5.8. (i) Pieņemsim, ka

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

kur $p_i \leftharpoondown p(i)$ ($p(i)$ definīciju skatīt Piemērā 6.5.7 (v)), tad

$$kan(x,y) \leftharpoondown \begin{cases} \alpha_y, & \text{ja} \quad x \neq 0 \neq y \wedge y \leq n, \\ 0, & \text{pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Tā, piemēram,

$$kan(12,y) = \begin{cases} 2, & \text{ja} \quad y = 1, \\ 1, & \text{ja} \quad y = 2, \\ 0, & \text{pārējos gadījumos.} \end{cases}$$

Rezultātā

$$12 = 2^2 \cdot 3 = p(1)^{kan(12,1)} p(2)^{kan(12,2)}.$$

No funkcijas $kan(x,y)$ definīcijas izriet, ka

$$kan(x,y) = \begin{cases} \mu t \leq x(p_y^{t+1} \nmid x), & \text{ja} \quad x \neq 0 \neq y, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$$

Ja $x \neq 0 \neq y$, tad predikāts $p_y^{t+1} \nmid x$ aizstājams ar nosacījumu (skatīt Piemēru 6.1.9 (xiv))

$$\operatorname{div}(p_y^{t+1}, x) = 0\,.$$

Tas savukārt ekvivalents ar nosacījumu (skatīt Piemēru 6.1.9 (iii))

$$\operatorname{div}(h_3(p_y, t+1), x) = 0$$

jeb

$$\operatorname{div}(h_3(p(y), t+1), x) = 0.$$

Tā kā funkcija $\operatorname{div}(h_3(p(y), t+1), x)$ ir primitīvi rekursīva, tad balstoties uz Sekām 6.4.11 un Teorēmu 6.3.6 secināms: funkcija $kan(x,y)$ ir primitīvi rekursīva.

(ii) Funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas definēta ar rekursiju

$$\begin{cases} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 2, \\ f(x+2) &= f(x) + f(x+1), \end{cases}$$

sauc par *Fibonači virkni.*

Vispirms nodemonstrēsim, ka funkcija

$$g(x) \leftharpoondown 2^{f(x)} 3^{f(x+1)}$$

ir primitīvi rekursīva. No funkcijas $g(x)$ definīcijas izriet, ka

$$\begin{aligned} f(x) &= kan(g(x), 1), \\ f(x+1) &= kan(g(x), 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 2^{f(0)} 3^{f(1)} = 2^1 \cdot 3^2 = 18, \\ g(x+1) &= 2^{f(x+1)} 3^{f(x+2)} \\ &= 2^{f(x+1)} 3^{f(x)+f(x+1)} \\ &= 2^{kan(g(x),2)} 3^{kan(g(x),1)+kan(g(x),2)}. \end{aligned}$$

Tātad funkcija $g(x)$ iegūta no konstantes 18 un funkcijas

$$2^{kan(z,2)} 3^{kan(z,1)+kan(z,2)}$$

ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

Vingrinājumi 6.5.9. *Turpmāk pieņemsim, ka $m > 0$ un*

$$\begin{aligned} \hat{y} &\leftharpoondown (y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ k\hat{a}n(z) &\leftharpoondown (kan(z,1), kan(z,2), \ldots, kan(z,m)). \end{aligned}$$

(i) Pierādīt, ka funkcija

$$m(t) \leftharpoondown \begin{cases} h_{12}(m,t), & \text{ja} \quad t \not\equiv 0 \mod m, \\ m, & \text{ja} \quad t \equiv 0 \mod m \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīva. (Funkcijas h_{12} definīciju skatīt Piemērā 6.1.9 (xii).)

(ii) Pieņemsim, ka $\xi_i(\hat{y})$, $i \in \overline{1,m}$, ir primitīvi rekursīvas funkcijas. Parādīt, ka

$$H(\hat{y},t) \leftharpoondown \xi_i(\hat{y}), \text{ ja } t \equiv i \mod m$$

ir primitīvi rekursīva funkcija.

(iii) Parādīt, ka sekojošās funkcijas ir primitīvi rekursīvas! (Funkcijas h_{13} definīciju skatīt Piemērā 6.1.9 (xiii).)

$$\begin{aligned}
p(z,t) &\leftharpoondown p(m(t))^{kan(z,m(t))}, \\
G_1(z,t) &\leftharpoondown h_{13}(p(z,t),z), \\
G_2(z,t) &\leftharpoondown p(m(t))^{H(\hat{y},t)}, \\
G(z,t) &\leftharpoondown G_1(z,t)\cdot G_2(z,t).
\end{aligned}$$

6.6. Kantora numerācija

Definīcija 6.6.1. *Funkciju*

$$c(x,y) \leftharpoondown \frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2+3x+y\right)$$

sauc par naturālo skaitļu kopas $\mathbb{N}$ *pāru* (x,y) *Kantora numerāciju.*

Lemma 6.6.2.

$$c(x,y) = T(x+y)+x, \quad \text{kur} \quad T(n) \leftharpoondown \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

$$\begin{aligned}
T(x+y)+x &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x = \frac{(x+y)^2+(x+y)}{2}+x \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right)+\frac{1}{2}\left(x+y\right)+\frac{1}{2}\left(2x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2+3x+y\right) = c(x,y)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Sekas 6.6.3. $\mathrm{Ran}(c) \subseteq \mathbb{N}$.

□ Tā kā viens no skaitļiem n, vai $n+1$ ir pārkaitlis, tad $T(n) = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ katram naturālam skaitlim n. No šejienes

$$c(x,y) = T(x+y)+x \in \mathbb{N}\,. \quad \blacksquare$$

Lemma 6.6.4. $\forall n \in \mathbb{N} \quad T(n) + n + 1 = T(n+1)$.

$\square$

$$\begin{aligned} T(n) + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = T(n+1)\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sekas 6.6.5. *Funkcija* $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \frac{n(n+1)}{2}$ *ir augoša.*

Sekas 6.6.6. $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *ir injekcija.*

$\square$ (i) Pieņemsim, ka $x + y < x' + y'$, tad

$$\begin{aligned} c(x,y) &= T(x+y) + x < T(x+y) + x + y + 1 \\ &= T(x+y+1) \leq T(x'+y') \leq T(x'+y') + x' \\ &= c(x',y')\,. \end{aligned}$$

(ii) Pieņemsim, ka $x + y = x' + y'$ un $c(x,y) = c(x',y')$, tad

$$T(x+y) + x = c(x,y) = c(x',y') = T(x',y') + x'\,.$$

No šejienes $x = x'$, tāpēc $y = y'$. Tas nozīmē, ja $(x,y) \neq (x',y')$, tad $c(x,y) \neq c(x',y')$. $\blacksquare$

Lemma 6.6.7. $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *ir sirjekcija.*

$\square$ Pieņemsim, ka $n \in \mathbb{N}$, tad eksistē (Sekas 6.6.5) tāds y, ka

$$T(y) \leq n < T(y+1).$$

Tā kā (Lemma 6.6.2) $\quad c(x,y) = T(x+y) + x, \quad$ tad

$$\begin{aligned} c(0,y) &= T(y), \\ c(1,y-1) &= T(y) + 1, \\ &\cdots \\ c(k,y-k) &= T(y) + k, \\ &\cdots \\ c(y,0) &= T(y) + y = T(y+1) - 1.\ \text{(Lemma 6.6.4)} \end{aligned}$$

Ja reiz $T(y) \leq n < T(y+1)$, tad eksistē tāds k, ka $c(k, y-k) = n$. $\blacksquare$

Teorēma 6.6.8. *Funkcija* $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *ir bijekcija.*

□ Sekas 6.6.6 un Lemma 6.6.7. ■

Lemma 6.6.9. *Ja* $c(x, y) = n$*, tad*

$$\begin{aligned} x &= n \dot{-} \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q(n)+1}{2} \right\rfloor \eqqcolon c_1^2(n), \\ y &= \left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor \dot{-} c_1^2(n) \eqqcolon c_2^2(n), \end{aligned}$$

kur $q(n) \coloneqq \lfloor\sqrt{8n+1}\rfloor$.

□ Pieņemsim, ka $n = c(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y\right)$, tad

$$\begin{aligned} 2n &= x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y, \\ 8n + 1 &= 4x^2 + 8xy + 4y^2 + 12x + 4y + 1. \end{aligned}$$

Ņemam vērā, ka

$$(2x + 2y + 1)^2 = 4x^2 + 8xy + 4y^2 + 4x + 4y + 1,$$

tāpēc $8n + 1 = (2x + 2y + 1)^2 + 8x$. Savukārt

$$(2x + 2y + 3)^2 = 4x^2 + 8xy + 4y^2 + 12x + 12y + 9,$$

tāpēc $8n + 1 = (2x + 2y + 3)^2 - 8x - 8$. No šejienes

$$\begin{array}{rcl} (2x+2y+1)^2 \leq & 8n+1 & < (2x+2y+3)^2, \\ 2x+2y+1 \leq & \sqrt{8n+1} & < 2x+2y+3, \\ 2x+2y+1 \leq & \lfloor\sqrt{8n+1}\rfloor & < 2x+2y+3, \\ 2x+2y+1 \leq & q(n) & < 2x+2y+3, \\ x+y+\frac{1}{2} \leq & \frac{q(n)}{2} & < x+y+1+\frac{1}{2}, \\ x+y \leq & \frac{q(n)-1}{2} & < x+y+1. \end{array}$$

Ievērojam, ka $q(n) = \lfloor\sqrt{8n+1}\rfloor \geq 1$, tāpēc $q(n) - 1 = q(n)\dot{-}1$. Līdz ar to

$$\begin{array}{rcl} x+y \leq & \frac{q(n)\dot{-}1}{2} & < x+y+1, \\ x+y \leq & \left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor & < x+y+1. \end{array}$$

Tā kā abi skaitļi gan $x+y$, gan $x+y+1$ ir veseli skaitļi un

$$\left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor < x+y+1,$$

tad

$$x+y = \left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor .$$

Atgriežamies nedauz atpakaļ:

$$\begin{aligned} x+y+\frac{1}{2} \leq & \quad \frac{q(n)}{2} & < x+y+1+\frac{1}{2}, \\ x+y+1 \leq & \quad \frac{q(n)+1}{2} & < x+y+2. \end{aligned}$$

Tas ļauj secināt, ka

$$x+y+1 = \left\lfloor \frac{q(n)+1}{2} \right\rfloor .$$

Līdz ar to

$$T(x+y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) = \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q(n)+1}{2} \right\rfloor .$$

Tagad atsaucamies uz Lemmu 6.6.2: $c(x,y) = T(x+y)+x$, tādēļ

$$x = n\dot{-}T(x+y) = n \dot{-} \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q(n)+1}{2} \right\rfloor = c_1^2(n) .$$

Tā kā $x+y = \left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor$, tad $y = \left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor \dot{-} x = \left\lfloor \frac{q(n)\dot{-}1}{2} \right\rfloor \dot{-} c_1^2(n) = c_2^2(n)$. ■

Sekas 6.6.10. *Funkcijas*

$$c_1^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad c_2^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

ir primitīvi rekursīvas.

Apgalvojums 6.6.11. *Attēlojums*

$$c^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 : n \mapsto (c_1^2(n), c_2^2(n))$$

ir attēlojuma $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ inversais attēlojums.

□ Pieņemsim, ka $n \in \mathbb{N}$, tad eksistē tādi x, y, ka $c(x, y) = n$, jo $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ir sirjekcija. Saskaņā ar Lemmu 6.6.9 $x = c_1^2(n)$ un $y = c_2^2(n)$. Līdz ar to

$$c \circ c^{-1}(n) = c(c_1^2(n), c_2^2(n)) = c(x, y) = n.$$

Pieņemsim, ka $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, tad saskaņā ar Lemmu 6.6.9

$$c^{-1} \circ c(a, b) = (c_1^2 \circ c(a, b), c_2^2 \circ c(a, b)) = (a, b). \quad \blacksquare$$

Vispārīgā gadījumā naturālo skaitļu kopas $\mathbb{N}$ n–dimensionālo kortežu $(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ Kantora numerāciju $c^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definē induktīvi.

$$\begin{array}{rcl} c^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & : & x_1 \mapsto x_1, \\ c^2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} & : & (x_1, x_2) \mapsto c(x_1, x_2), \\ c^3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} & : & (x_1, x_2, x_3) \mapsto c(c^2(x_1, x_2), x_3), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c^{n+1} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} & : & (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto c(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1}). \end{array}$$

Definīcija 6.6.12. *Funkciju*

$$c^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

sauc par naturālo skaitļu kopas $\mathbb{N}$ *n–dimensionālo kortežu* $(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ *Kantora numerāciju.*

Vingrinājumi 6.6.13.

(i) Pierādīt, ka $c^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ir bijekcija.

(ii) Pieņemsim, ka $n > 2$ un

$$\begin{cases} c_i^n & \rightleftharpoons \quad c_i^{n-1} \circ c_1^2, \quad \text{ja} \quad i \in \overline{1, n-1}, \\ c_n^n & \rightleftharpoons \quad c_2^2. \end{cases}$$

Pierādīt, ka attēlojums

$$c^{-n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n : a \mapsto (c_1^n(a), c_2^n(a), \ldots, c_n^n(a))$$

ir attēlojuma $c^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ inversais attēlojums.

(iii) Pierādīt, ka attēlojumi

$$c^n, c_1^n, c_2^n, \ldots, c_n^n,$$

ir primitīvi rekursīvas funkcijas.

6.7. Izrēķināmas un daļēji rekursīvas funkcijas

Teorēma 6.7.1. *Katra pēc Tjūringa izrēķināma funkcija $f : \mathbb{N} \multimap\rightarrow \mathbb{N}$ ir daļēji rekursīva.*

□ Pierādījuma galvenā ideja: modelēt Tjūringa mašīnas darbu ar daļēji rekursīvām funkcijām.

(i) Vispirms skaitli $x \in \mathbb{N}$ reprezentējam tai izskatā, kā tas ir pierakstīts uz Tjūringa mašīnas lentas, piemēram, 2-nieku sistēmā.

a) Funkcija

$$n(x) \leftharpoondown \begin{cases} 1, & \text{ja } x = 0; \\ \lfloor \log_2 x \rfloor + 1, & \text{ja } x \neq 0 \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīva, jo

$$n(x) = \mu t \leq x\ (2^t \geq x) + 1.$$

No šejienes skaitļa x pieraksts 2-nieku sistēmā ir

$$(x)_2 = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

kur $n = n(x)$.

b) Mūsu tuvākais mērķis: parādīt, ka funkcija

$$g(x) \leftharpoondown \sum_{i=1}^{n(x)} p_i^{a_i+1}$$

ir primitīvi rekursīva. Te p_i ir i-tais pirmskaitlis to dabiskajā uzskaitījumā, proti,

$$p_0 = 0,\ p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 + 7, \ldots$$

Funkcija $p(i) = p_i$ ir primitīvi rekursīva (skatīt Piemēru 6.5.7(v)) Pieņemsim, ka $y = qx + r$, $0 \leq r < x$, tad funkcijas

$$r(x, y) \leftharpoondown \begin{cases} y, & \text{ja } x = 0; \\ r, & \text{ja } x \neq 0, \end{cases}$$

$$q(x, y) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja } x = 0; \\ q, & \text{ja } x \neq 0, \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīvas (skatīt Piemērus 6.1.9 (xii – xiii)). No šejienes

$$a_{n-i} = r(2, q(2^{n-i}, x)),$$

kur $n = n(x)$ un $i \in \overline{0, n-1}$. Līdz ar to funkcija

$$a(x, i) \leftharpoondown r(2, q(2^{n(x) \dot{-} i}, x))$$

ir primitīvi rekursīva. No šejienes

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n(x)} p(i)^{a(x,i)+1},$$

un tā kā $p(i)^{a(x,i)}$ ir primitīvi rekursīva 2-argumentu funkcija, tad $g(x)$ kā ierobežotā summa ir primitīvi rekursīva funkcija.

(iii) Lai Tjūringa mašīna varētu strādāt nepieciešami 3 parametri:

1. kortežs $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ jeb ieraksts uz lentas,
2. i — izpildāmās komandas stāvokļa q_i numurs,
3. k — pozīcija, kur šobrīd atrodas Tjūringa mašīnas galviņa.

Pieņemsim, ka

$$T : Q_0 \times A \to A \times S \times Q$$

ir Tjūringa mašīnas

$$\mathfrak{T} = \langle Q_0, Q, A, S, q_0, q_1, t, T \rangle$$

programma. Definējam

$$\begin{array}{rcl}
A(t) & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists \varkappa q \; q_i a_j \mapsto t \varkappa q\}, \\
A(0) & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists \varkappa q \; q_i a_j \mapsto 0 \varkappa q\}, \\
A(1) & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists \varkappa q \; q_i a_j \mapsto 1 \varkappa q\}, \\
B(\Lsh) & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists b q \; q_i a_j \mapsto b \Lsh q\}, \\
B(\top) & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists b q \; q_i a_j \mapsto b \top q\}, \\
B(\Rsh) & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists b q \; q_i a_j \mapsto b \Rsh q\}, \\
C_s & \leftharpoondown & \{(i, j) \mid \exists b \varkappa \; q_i a_j \mapsto b \varkappa q_s\}.
\end{array}$$

Mēs pieņemam, ka $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$. Šai gadījumā $s \in \overline{0, m}$. Tā kā kopas Q, A, S ir galīgas, tad arī kopas $A(t), A(0), A(1), B(\Lsh), B(\top), B(\Rsh), C_s$ ir galīgas.

Lemma 6.7.2. *Ja $K \subseteq A \times B$ ir galīga kopa, tad predikāts $(x, y) \in K$ ir primitīvi rekursīvs.*

$$\Box \qquad (x, y) \in K \Leftrightarrow \bigvee_{(i,j)\in K} ((x = i) \wedge (y = j)). \qquad \blacksquare$$

Funkcijas

$$\alpha(i, j) \leftharpoondown\!\!= \begin{cases} 0, & \text{ja } (i, j) \in A(t); \\ 1, & \text{ja } (i, j) \in A(0); \\ 2, & \text{ja } (i, j) \in A(1); \\ j, & \text{ja } i = 0 \end{cases}$$

$$\beta(i, j, k) \leftharpoondown\!\!= \begin{cases} k \dot{-} 1, & \text{ja } (i, j) \in B(\Lsh); \\ k, & \text{ja } (i, j) \in B(\top); \\ k + 1, & \text{ja } (i, j) \in B(\Rsh); \\ k, & \text{ja } i = 0 \end{cases}$$

$$\gamma(i, j) \leftharpoondown\!\!= \begin{cases} s, & \text{ja } (i, j) \in C_s; \\ 0, & \text{ja } i = 0 \end{cases}$$

ir primitīvi rekursīvas funkcijas (pamatojums: Teorēma 6.3.6).

Mūsu tuvākais mērķis: definēt funkciju $h(x, t)$, kas modelē Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}$ darbu pa taktīm. Pieņemsim, ka $h(x, t) = c^3(i, k, g)$, kur

- c^3 — Kantora numerācija (skatīt Definīciju 6.6.12);
- i — izpildāmās komandas q_i numurs;
- k — šūnas numurs, kādu laika momentā t aplūko Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}$ galviņa;
- g — funkcija, kas reprezentē ierakstu uz Tjūringa mašīnas lentas laika momentā t, proti, ja laika momentā t mašīnas vārds ir $c_1 c_2 \ldots c_{k-1} q_i c_k \ldots c_n$, tad $k \in \overline{1, n}$ un

$$g = \sum_{s=1}^{n} p(s)^{\hat{c}_s},$$

kur

$$\hat{c}_s \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja } c_s = t; \\ 1, & \text{ja } c_s = 0; \\ 2, & \text{ja } c_s = 1. \end{cases}$$

Līdz ar to mēs varam atrast gan q_i, gan a_j, proti,

$$\begin{array}{rcl} i & = & c_1^3(h(x,t)), \\ k & = & c_2^3(h(x,t)), \\ g & = & c_3^3(h(x,t)), \\ j & = & kan(g,k) = \begin{cases} 0, & \text{ja } c_k = t; \\ 1, & \text{ja } c_k = 0; \\ 2, & \text{ja } c_k = 1. \end{cases} \end{array}$$

Funkcijas $kan(x,y)$ definīciju skatīt Piemērā 6.5.8(i).

No šejienes, ja $q_i a_k \mapsto b\varkappa q$, tad

$$\begin{array}{rcl} \alpha(i,j) & = & \left.\begin{cases} 0, & \text{ja } (i,j) \in A(t); \\ 1, & \text{ja } (i,j) \in A(0); \\ 2, & \text{ja } (i,j) \in A(1); \\ j, & \text{ja } i = 0 \end{cases}\right\} = \begin{cases} 0, & \text{ja } b = t; \\ 1, & \text{ja } b = 0; \\ 2, & \text{ja } b = 1; \\ j, & \text{ja } i = 0 \end{cases} \\ \beta(i,j,k) & = & \left.\begin{cases} k\dot{-}1, & \text{ja } (i,j) \in B(\Lsh); \\ k, & \text{ja } (i,j) \in B(\top); \\ k+1, & \text{ja } (i,j) \in B(\Rsh); \\ k, & \text{ja } i = 0 \end{cases}\right\} = \begin{cases} k\dot{-}1, & \text{ja } \varkappa = \Lsh; \\ k, & \text{ja } \varkappa = \top; \\ k+1, & \text{ja } \varkappa = \Rsh; \\ k, & \text{ja } i = 0 \end{cases} \\ \gamma(i,j) & = & \left.\begin{cases} s, & \text{ja } (i,j) \in C_s; \\ 0, & \text{ja } i = 0 \end{cases}\right\} = \begin{cases} s, & \text{ja } q = q_s; \\ 0, & \text{ja } i = 0 \end{cases} \\ \hat{g} & \leftharpoondown & g\, p(k)^{\alpha(i,j)\dot{-}j} = g\, p(k)^{\alpha(i,j)}\, q(g, p(k)^j) \end{array}$$

Tagad definējam

$$h(x,t+1) \leftharpoondown c^3(\gamma(i,j), \beta(i,j,k), \hat{g})$$

un mēs esam nomodelējuši Tjūringa mašīnas $\mathfrak{T}$ darba vienu soli.

Visā pilnībā funkciju $h(x,t)$ definējam šādi:

$$\begin{cases} h(x,0) & \leftharpoondown c^3(1,1,g(x)); \\ h(x,t+1) & \leftharpoondown c^3(\gamma(i,j),\beta(i,j,k),\hat{g}), \end{cases}$$

kas ir primitīvi rekursīva funkcija, jo iegūta no primitīvi rekursīvām funkcijām ar primitīvi rekursīvās shēmas palīdzību.

(iv) Ja Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$ apstāsies, tad tā nonāks stāvoklī q_0 un uz lentas būs funkcijas $f(x)$ vērtība 2-nieku sistēmā. Tas nozīmē, ka mums nepieciešama funkcija

$$stop(x) \leftharpoondown \mu t(\alpha(i,j)=0),$$

kur gan i, gan j ir mainīgā x primitīvi rekursīvas funkcijas (skatīt aprakstu punktā (iii)). Līdz ar to $stop(x)$ ir daļēji rekursīva funkcija.

Ievērojam, ja $x \in \mathrm{Dom(stop)}$, tad

$$h(x, stop(x)) = c^3(0,1,g),$$

kur $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu}$ un $(f(x))_2 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu$. Tātad

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_{\nu-i} 2^i$$

Pieņemsim, ka $t_0 = stop(x)$, tad

$$\nu = \mu t \leq h(x,t_0)(p(t+1) \nmid h(x,t_0))$$

Līdz ar to $\nu = \nu(x)$ ir daļēji rekursīva funkcija. Esam ieguvuši

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\nu(x)\dot{-}1} (kan(h(x,t_0),i)\dot{-}1)2^i$$

Tas arī parāda, ka $f(x)$ ir daļēji rekursīva funkcija.

(v) Pierādījumā būtiski izmantots fakts, ka katra pēc Tjūringa izrēķināma vienargumenta funkcija $f(x)$ ir vienpusēji normāli izrēķināma alfabētā $\{t,0,1\}$. ■

Vingrinājums 6.7.3. *Katra pēc Tjūringa izrēķināma funkcija* $f:\mathbb{N}^k \multimap\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ *ir daļēji rekursīva.*

Apgalvojums 6.7.4. *Ja $f(\bar{x})$ un $g(\bar{x}, y, z)$ ir izrēķināmas funkcijas un $h(\bar{x}, y)$ iegūta no f un g ar primitīvi rekursīvās shēmas*

$$\begin{cases} h(\bar{x}, 0) & = f(\bar{x}) \\ h(\bar{x}, y+1) & = h(\bar{x}, y, h(\bar{x}, y)) \end{cases}$$

palīdzību, tad h ir izrēķināma funkcija.

□ Ņemot vērā Sekas 3.1.7 varam pieņemt, ka visas funkcijas ir vienpusēji regulāri izrēķināmas. Tas nozīmē, ka eksistē vienpusējas Tjūringa mašīnas $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$, kas regulāri rēķina funkciju

$$f(\bar{x}) \qquad \text{un} \qquad g(\bar{x}, y, z).$$

Sākumā uz lentas ir vārds $(\bar{x})_2 * (y)_2$. Mēs parādīsim, kā iegūstama Tjūringa mašīna $\mathfrak{H}$, kas rēķina funkciju h. Vispirms dosim 3 bloku aprakstu.

(i) Bloks A.

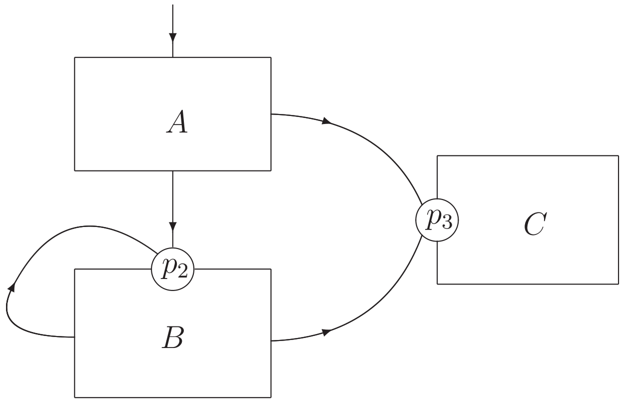
- Ierakstu $(\bar{x})_2 * (y)_2$ aizstājam ar $(\bar{x})_2 * (y)_2 t \bar{x}_2$.
- Novietojam mašīna galviņu uzreiz pēc vārda $(\bar{x})_2 * (y)_2 t$, t.i., mašīnas galviņa atrodas uz vārda $(\bar{x})_2$ sākuma.
- Palaižam mašīnu $\mathfrak{F}$. Ja mašīna apstāsies, tad esam ieguvuši ierakstu

  $$(\bar{x})_2 * (y)_2 t (f(\bar{x}))_2$$

  un mašīnas galviņa atrodas uzreiz pēc vārda $(\bar{x})_2 * (y)_2 t$, t.i., mašīnas galviņa atrodas uz vārda $(f(\bar{x}))_2$ sākuma.
- Pārbaudam, vai $y = 0$. Ja $y = 0$, tad rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{H}$ programmu tā, lai mašīna $\mathfrak{H}$ šai gadījumā nonāktu stāvoklī p_3.
- Ja $y \neq 0$, tad vārdu $(\bar{x})_2 * (y)_2 t (f(\bar{x}))_2$ aizstājam ar vārdu

  $$(\bar{x})_2 * (y)_2 * 0 t (f(\bar{x}))_2$$

  un mašīnas galviņu novietojam uz vārda $(\bar{x})_2 * (y)_2 * 0 t (f(\bar{x}))_2$ sākuma. Rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{H}$ programmu tā, lai šai laika momentā mašīna nonāktu stāvoklī p_2.



6.1. zīm.: Tjūringa mašīna $\mathfrak{H}$.

(ii) Bloks B. Pieņemam, ka uz lentas ir ieraksts

$$(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k)_2 t(h(\bar{x}, k))_2, \quad k < y,$$

mašīna atrodas stāvoklī p_2 un tās galviņa atrodas uz vārda sākuma.

- Ierakstu $(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k)_2 t(h(\bar{x}, k))_2$ aizstājam ar ierakstu

$$(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k+1)_2 t(\bar{x})_2 * (k)_2 * (h(\bar{x}, k))_2.$$

- Novietojam mašīna galviņu uzreiz pēc vārda $(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k+1)_2 t$, t.i., mašīnas galviņa atrodas uz vārda $(\bar{x})_2 * (k)_2 * (h(\bar{x}, k))_2$ sākuma.

- Palaižam mašīnu $\mathfrak{G}$. Ja mašīna apstāsies, tad esam ieguvuši ierakstu

$$(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k+1)_2 t(h(\bar{x}, k+1))_2$$

  un mašīnas galviņa atrodas uzreiz pēc vārda $(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k+1)_2 t$, t.i., mašīnas galviņa atrodas uz vārda $(h(\bar{x}, k+1))_2$ sākuma.

- Pārbaudam, vai vārdi $(y)_2$ un $(k+1)_2$ sakrīt. Ja $(y)_2 = (k+1)_2$, tad rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{H}$ programmu tā, lai mašīna $\mathfrak{H}$ šai gadījumā nonāktu stāvoklī p_3.

- Ja $(y)_2 \neq (k+1)_2$, tad mašīnas galviņu novietojam uz vārda $(\bar{x})_2 * (y)_2 * (k+1)_2 t(h(\bar{x}, k+1))_2$ sākuma. Rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{H}$ programmu tā, lai šai laika momentā mašīna nonāktu stāvoklī p_2.

(iii) Bloks C. Šai gadījumā Tjūringa mašīna $\mathfrak{H}$ atrodas stāvoklī p_3 un uz lentas ir ieraksts

$$(\bar{x})_2 * (y)_2 * (y)_2 t(h(\bar{x}, y))_2$$

Nodzēšam ierakstu $(\bar{x})_2 * (y)_2 * (y)_2$, novietojam mašīnas galviņu uz vārda $(h(\bar{x}, y))_2$ sākuma un mašīnu $\mathfrak{H}$ apstādinām. Esam izrēķinājuši funkcijas h vērtību $h(\bar{x}, y)$.

Saliekam visus blokus A, B, C kopā (skatīt 6.1. zīm.). Esam ieguvuši Tjūringa mašīnu $\mathfrak{H}$, kas rēķina funkciju h. ■

Vingrinājums 6.7.5. *Ja $c \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^2 \multimap \mathbb{N}$ ir izrēķināma funkcija un $h(y)$ iegūta no c un g ar primitīvi rekursīvās shēmas*

$$\begin{cases} h(0) & = c \\ h(y+1) & = h(y, h(y)) \end{cases}$$

palīdzību, tad h ir izrēķināma funkcija.

Apgalvojums 6.7.6. *Ja $f(\bar{x}, t)$ ir izrēķināma funkcija, tad $\mu t\ (f(\bar{x}, t) = 0)$ ir izrēķināma funkcija.*

□ Ņemot vērā Sekas 3.1.7 varam pieņemt, ka funkcija $f(\bar{x}, t)$ ir vienpusēji regulāri izrēķināma. Tas nozīmē, ka eksistē vienpusēja Tjūringa mašīna $\mathfrak{F}$, kas regulāri rēķina funkciju $f(\bar{x}, t)$. Sākumā uz lentas ir vārds $(\bar{x})_2$. Mēs parādīsim, kā iegūstama Tjūringa mašīna $\mathfrak{M}$, kas rēķina funkciju

$$h(\bar{x}) \leftharpoondown \mu t\ (f(\bar{x}, t) = 0).$$

Vispirms dosim 3 bloku aprakstu.

(i) Bloks A.

- Ierakstu $(x)_2$ aizstājam ar $0 * (\bar{x})_2 t(\bar{x})_2 * 0$.
- Novietojam mašīnas galviņu uz vārda $(\bar{x})_2 * 0$ sākuma.
- Rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{M}$ programmu tā, lai mašīna $\mathfrak{M}$ šai gadījumā nonāktu stāvoklī p_2.

(ii) Bloks B. Pieņemam, ka uz lentas ir ieraksts

$$(k)_2 * (\bar{x})_2 t(\bar{x})_2 * (k)_2, \quad k \in \mathbb{N},$$

mašīna atrodas stāvoklī p_2 un tās galviņa atrodas uz vārda $(\bar{x}) * (k)_2$ sākuma. Palaižam mašīnu $\mathfrak{T}$.

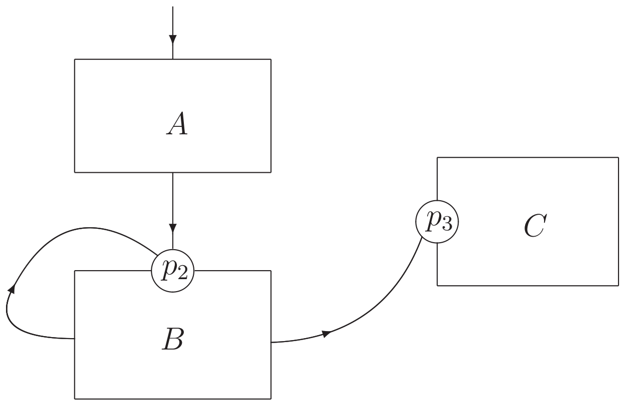
- Ja mašīna apstāsies un uz lentas būs ieraksts $(k)_2 * (\bar{x})t0$, tad rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{M}$ programmu tā, lai mašīna $\mathfrak{M}$ šai gadījumā nonāktu stāvoklī p_3.

- Ja mašīna apstāsies un uz lentas būs ieraksts $(k)_2 * (\bar{x})tu$, kur $u \neq 0$, tad vārdu $(k)_2 * (\bar{x})tu$ aizstājam ar vārdu

$$(k+1)_2 * (\bar{x})_2 t(\bar{x})_2 * (k+1)_2,$$

  novietojam mašīnas galviņu uz vārda $(\bar{x}) * (k+1)_2$ sākuma. Rakstam Tjūringa mašīnas $\mathfrak{M}$ programmu tā, lai mašīna $\mathfrak{M}$ šai gadījumā nonāktu stāvoklī p_2.

Bloks C. Ierakstu $(k)_2 * (\bar{x})_2 t0$ aizstājam ar ierakstu $(k)_2$, novietojam mašīnas $\mathfrak{M}$ galviņu uz vārda $(k)_2$ sākuma un mašīnu $\mathfrak{M}$ apstādinam. Esam izrēķinājuši funkcijas $h(\bar{x})$ vērtību.



6.2. zīm.: Tjūringa mašīna $\mathfrak{M}$.

Saliekam visus blokus A, B, C kopā (skatīt 6.2. zīm.). Esam ieguvuši Tjūringa mašīnu $\mathfrak{M}$, kas rēķina funkciju h. ■

Teorēma 6.7.7. *Funkcija $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ ir daļēji rekursīva tad un tikai tad, ja tā ir izrēķināma pēc Tjūringa.*

□ ⇒ Bāzes funkcijas $o(x)$ (Piemērs 1.3.6(i)), $s(x)$ (Piemērs 1.3.6(iii)) ir izrēķināmas pēc Tjūringa. Piemērā 1.3.10(i) parādīts, ka funkcija $u_3^7(\bar{x})$ ir izrēķināma pēc Tjūringa. Līdzīgi var parādīt, ka katram $m \in \overline{1,n}$ funkcija $u_m^n(\bar{x})$ ir izrēķināma pēc Tjūringa. No šejienes ņemot vērā Teorēmu 3.1.8, Apgalvojumu 6.7.4 un Vingrinājumu 6.7.5 secināms (Definīcija 6.1.5), ka visas primitīvi rekursīvās funkcijas ir izrēķināmas pēc Tjūringa. Tagad atsaucoties uz Teorēmu 3.1.8, Apgalvojumu 6.7.4, Vingrinājumu 6.7.5 un Apgalvojumu 6.7.6 secināms (Definīcija 6.1.5), ka visas daļēji rekursīvās funkcijas ir izrēķināmas pēc Tjūringa.

$\Leftarrow$ Teorēma 6.7.1. ■

Vingrinājums 6.7.8. *Funkcija* $f : \mathbb{N}^k \multimap\!\!\to \mathbb{N}$ *ir daļēji rekursīva tad un tikai tad, ja tā ir izrēķināma pēc Tjūringa.*