PROBLĒMAS IZKLĀSTS

Apzīmējumi

$\leftharpoondown\!\!=$, $=\!\!\rightharpoondown$ — vienādības saskaņā ar definīciju,
$\overline{1,n} \leftharpoondown\!\!= \{1, 2, \ldots, n\}$,
$x_1 x_2 \ldots x_n \leftharpoondown\!\!= \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \leftharpoondown\!\!= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftharpoondown\!\!= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \overline{1,n}\, (x_i \in A_i)\}$,
$f : X \twoheadrightarrow Y$ — sirjektīvs attēlojums,
$|u|$, A^n, A^+, λ, A^*

1. Tue – Morsa vārds

Pieņemsim, ka A ir galīga kopa, ko turpmāk sauksim par *alfabētu*, bet kopas A elementus par — *burtiem.* Katru kopas $A^+ \leftharpoondown\!\!= \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ elementu $u \in A^+$ sauc par alfabēta A *netukšu vārdu.* Pieņemsim, ka

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_k), \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

ir alfabēta A netukši vārdi, tad

$$u\#v \leftharpoondown\!\!= (u_1, u_1, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Šo kopā A^+ definēto operāciju sauc par *konkatenāciju.* Tā kā

$$(u\#v)\#w = u\#(v\#w)$$

visiem alfabēta A netukšiem vārdiem u, v, w, tad $\langle A^+, \#\rangle$ ir pusgrupa. Šo pusgrupu sauc par *kopas A veidoto brīvo pusgrupu A^+.*

Pieņemsim, ka $\lambda \notin A^+$ un $A^* \leftharpoondown\!\!= A^+ \cup \{\lambda\}$, tad kopu A^* var sekojoši pārvērst par monoīdu:

$$\lambda\#\lambda \leftharpoondown\!\!= \lambda, \quad \lambda\#u \leftharpoondown\!\!= u =\!\!\rightharpoondown u\#\lambda\,.$$

Šo monoīdu sauc par *kopas A veidoto brīvo monoīdu A^*.* Kopas A^* elementus sauc par *vārdiem*, λ — par *tukšo vārdu.* Kā tas tradicionāli pieņemts, ja nerodas pārpratumi, tad konkatenācijas operāciju izlaiž un lieto pierakstu $uv \leftharpoondown\!\!= u\#v$, bez tam $u_1 u_2 \ldots u_k \leftharpoondown\!\!= (u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

Pieņemsim, ka $u \in A^n$, tad skaitli n sauc par vārda u garumu, ko turpmāk apzīmēsim ar $|u|$. Saskaņā ar definīciju pieņemsim, ka $|\lambda| \leftharpoondown\!\!= 0$.

Attēlojumu $f : S \to S'$ sauc par pusgrupas S *morfismu (homomorfismu)* pusgrupā S', ja

$$\forall x \forall y\; f(xy) = f(x)f(y).$$

Pusgrupu morfismu $f : M \to M'$ sauc par *monoīdu morfismu (homomorfismu)*, ja $f(\lambda) = \lambda'$, kur λ un λ' attiecīgi — monoīdu M un M' neitrālie elementi.

Pieņemsim, ka $\tau : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ ir monoīdu morfisms, kas definēts ar vienādībām

$$\tau(0) \leftharpoondown 01,\ \tau(1) \leftharpoondown 10\,,$$

tad

$$\tau^2(0) \leftharpoondown \tau(\tau(0)) = \tau(01) = \tau(0)\tau(1) = 0110$$

un

$$\tau^{n+1}(0) \leftharpoondown \tau(\tau^n(0))\,.$$

Tādējādi

$$\tau^3(0) = \tau(0110) = 0110\,1001$$

un

$$\tau^4(0) = \tau(0110\,1001) = 0110\,1001\,1001\,0110\,.$$

1.1. Definīcija. *Visur definētu attēlojumu $x : \mathbb{N} \to A$ sauc par alfabēta A ω-vārdu.*

Alfabēta A visu ω-vārdu veidoto kopu turpmāk apzīmēsim ar A^ω.

1.2. Definīcija. *Alfabēta A ω-vārdu $ux \leftharpoondown u_1u_2\dots u_kx_0x_1\dots x_n\dots$ sauc par vārdu $u = u_1u_2\dots u_k \in A^*$ un $x = x_0x_1\dots x_n\dots \in A^\omega$ konkatenāciju. Vārdu $w \in A^*$ sauc par vārda $x \in A^\omega$ dalītāju, ja eksistē tādi $v \in A^*$ un $y \in A^\omega$, ka $x = vwy$. Šai situācijā vārdu v sauc par priedēkli, bet y — par piedēkli.*

Līdzīgi šos jēdzienus definē arī vārdiem $x \in A^*$.

Pieņemsim, ka A — alfabēts, tad $A^\infty \leftharpoondown A^* \cup A^\omega$. Vārda $x \in A^\infty$ visu priedēkļu kopu apzīmēsim ar $\mathrm{Pref}(x)$.

1.3. Definīcija. *Attēlojumu*

$$d(u,v) \leftharpoondown \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad u = v; \\ 2^{-m}, & \text{ja} \quad u \neq v \ \wedge\ m = \max\{\,|w|\,|\, w \in \mathrm{Pref}(u) \ \wedge\ w \in \mathrm{Pref}(v)\} \end{cases}$$

sauc par priedēkļu metriku (attālumu) kopā A^∞.

1.4. Definīcija. *Vārdu*

$$t \leftharpoondown \lim_{n\to\infty} \tau^n(0)$$

sauc par Tue – Morsa vārdu.

2. Ierobežoti biideāli

Pieņemsim, ka mums dota alfabēta A vārdu virkne $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, t.i., $\forall i\ u_i \in A^*$, pie tam $u_0 \neq \lambda$. Vārdu virkni (v_i) definēsim induktīvi:

$$v_0 \leftharpoondown u_0, \qquad v_{i+1} \leftharpoondown v_iu_{i+1}v_i.$$

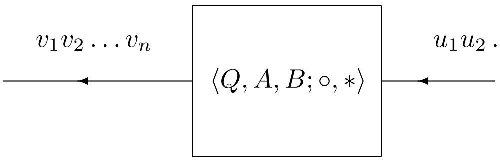
2.1. Definīcija. *Virknes v_i robežu $\lim\limits_{i\to\infty} v_i \rightharpoondown x$ sauc par biideālu. Ja $\forall i\ |u_i| \leq l$, tad biideālu x sauc par l–ierobežotu biideālu. Biideālu x sauc par ierobežotu biideālu, ja eksistē tāds skaitlis l, ka x ir l–ierobežots biideāls.*

3. Mīlija mašīnas

Trīs šķiru algebru $\langle Q, A, B; \circ, * \rangle$ sauc par *Mīlija mašīnu*, ja Q, A, B — galīgas netukšas kopas, $Q \times A \xrightarrow{\circ} Q$ un $Q \times A \overset{*}{\twoheadrightarrow} B$. Kopu Q sauc par mašīnas *iekšējo stāvokļu* kopu, A un B attiecīgi — par *ieejas* un *izejas* alfabētiem. Kopu A un B elementus sauc par *burtiem.* Operācijas $\circ$ un $*$ attiecīgi sauc par *pārejas* un *izejas* funkcijām.

Trīs šķiru algebru $\langle Q, A, B; q_0, \circ, * \rangle$ sauc par *iniciālu Mīlija mašīnu*, ja $q_0 \in Q$ un $\langle Q, A, B; \circ, * \rangle$ ir Mīlija mašīna.

Tā kā mūsu mērķis ir analizēt dažādu automātu uzvedību, tad ieejas simbolu plūsmas vietā aplūkot tikai atsevišķus simbolus drīzāk ir mākslīga pieeja. Šī iemesla dēļ Mīlija mašīnas definīcija tiek paplašināta (inženiertehnisku interpretāciju skatīt 1. zīm.).



1. zīm.

3.1. Definīcija. *Pieņemsim, ka $\langle Q, A, B; \circ, * \rangle$ ir Mīlija mašīna, tad*

$$q \circ \lambda \rightleftharpoons q, \quad q \circ ua \rightleftharpoons (q \circ u) \circ a;$$
$$q * \lambda \rightleftharpoons \lambda, \quad q * ua \rightleftharpoons (q * u)\#(q \circ u) * a.$$

Pieņemsim, ka $V = \langle Q, A, B; q_0, \circ, * \rangle$, $(x, y) \in A_0^\omega \times B_0^\omega$, kur $A_0 \times B_0 \subseteq A \times B$. Mēs teiksim, ka mašīna V vārdu x *pārstrādā* par y, ja

$$\forall n \; y_0 y_1 \ldots y_n = q_0 * x_0 x_1 \ldots x_n.$$

4. Precīzs problēmas formulējums

Vai eksistē ierobežots biideāls x un tāda iniciāla Mīlija mašīna

$$V = \langle Q, A, B; q_0, \circ, * \rangle,$$

kas biideālu x pārstrādā par Tue – Morsa vārdu t?