Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte

Inese Bula

EKONOMISKO MODEĻU MATEMĀTISKIE PAMATI

LEKCIJU KONSPEKTS — 2007

SATURS

NODAĻA 0

IEVADS

0.1 Kursa noteikumi

ANOTĀCIJA

Kurss iepazīstina ar matemātiskajā ekonomikā pazīstamākajiem ekonomiskajiem modeļiem un tajos izmantotajiem matemātiskajiem līdzekļiem. Kursa ietvaros tiks apskatīti līdzsvara un kvazi-līdzsvara, lineārie matricu un diskrētie ekonomiskie modeļi. Mācību procesā kā pamatliteratūra izmantojama kursa autores sarakstītā grāmata [1]. Dziļākai ekonomisko un matemātisko likumsakarību izpētei ieteicams izmantot pārējās literatūras sarakstā minētās grāmatas un informācijas avotus.

REZULTĀTI

Beidzot kursu jāspēj orientēties kursā aplūkotajos jēdzienos un atšķirt apskatītos ekonomiskos modeļus. Jāzina, kādi matemātiskie ldzekļi izmantoti, lai pierādītu līdzsvaru vai kādu citu ekonomisko stāvokli. Jāprot risināt atbilstoša rakstura uzdevumi.

PRASĪBAS KREDĪTPUNKTU IEGŪŠANAI

1. Jāizpilda semestra laikā uzdotie mājas darbi, laikā līdz eksāmenam jāatrāda visu mājas darbu atrisinājumi rokrakstā (10%).

2. Semestra laikā jāuzraksta divi kontroldarbi vai gala pārbaudījumā jānokārto rakstisks tests (jautājumi un uzdevumi par semestra laikā apgūto), kas arī nosaka gala vērtējumu (90%).

LITERATŪRA

Mācību pamatliteratūra

1. I.Bula, *Dažu ekonomisko modeļu matemātiskie pamati.* Latvijas Akadēmiskās

bibliotēkas izdevniecība, 1999.
2. L.Frolova, *Matematiskā modelēšana ekonomikā un menedžmentā.* Rīga, SIA Izglītības soļi, 2005.

Papildliteratūra

3. N.Schofield, *Mathematical Methods in Economics and Social Choice.* Springer-Verlag, 2004.
4. D.Kļaviņš, *Optimizācijas metodes ekonomikā I, II.* Otrais izdev., Datorzinību centrs, 2003.
5. K.J.Arrow, F.H.Hahn, *General Competitive Analysis.* North-Holland Publishing Company, sixt printing, 1991.
6. H.Nikaido, *Convex structures and economic theory.* Academic Press, 1968 (krieviski: "Mir", Maskava, 1972).
7. E.M.Braverman, *Matematiceskije modeli planirovanija i upravlenija v ekonomiceskih sistemah.* "Nauka", Maskava, 1976 (krieviski).
8. S.N.Elaydi, *An introduction to difference equations.* Springer-Verlag, second edition, 1999.
9. C.Alipprantis, K.Border, *Infinite Dimensional Analysis.* Springer-Verlag, 3rd ed., 2006.

Periodika, interneta resursi un citi avoti

10. Journal of Mathematical Economics (Elsevier).
11. Economic Theory (Springer-Verlag).
12. http://repec.org/

0.2 Modelis un modelēšana

Par modelēšanu parasti uzskata objektu praktiskās vai teorētiskās netiešās izpētes metodi. Lietojot modelēšanas metodi, tiek pētīts nevis pats mūs interesējošais objekts, bet gan mākslīga vai reāla palīgsistēma, kas atrodas objektīvā atbilstībā ar pētāmo objektu un noteiktos pētīšanas apstākļos var to aizvietot. Šādu pētījumu rezultātā tiek iegūta informācija par pašu pētāmo objektu. Tādējādi objekts-orģināls, kurš interesē novērotāju, modelējot tiek aizvietots ar kādu citu objektu, kuru sauc par objektu-aizvietotāju. Objekts-aizvietotājs aizstāj objektu-orģinālu tikai pētījumā ar konkrētu mērķi. Mainoties pētījuma mērķim, jāmaina arī iepriekšējais objekts-aizvietotājs.

Modelis ir objekts aizvietotājs, kas var būt mākslīga vai reāla palīgsistēma, atrodas objektīvā atbilstībā ar objektu-orģinālu un pētījuma rezultātā dod meklējamo informāciju par to.

0.3 Modelēšanas nepieciešamība

Vajadzība pēc modelēšanas metodes ekonomikā rodas tad, ja, lietojot objektu-orģinālu pētīšanai tiešās izzināšanas metodes, neizdodas iegūt apmierinošus rezultātus. Svarīgākie gadījumi:
ja vēl nav izstrādāta pētāmā ekonomiskā objekta teorija (tad modeli var izmantot vai nu teorijas vietā, vai arī lai izveidotu pašu teoriju;
ja pētāmā ekonomiskā objekta teorija ir jau izstrādāta (tad modelēšanas metodi var lietot teorijas tālākai attīstīšanai un pilnveidošanai, tās interpretācijai, tiešās pielietošanas grūtību novēršanai);
ja pētāmā ekonomiskā objekta tieša pārbaude nav iespējama (ar modeļa palīdzību var izstrādāt un praktiski aprobēt dažādas zinātniskas hipotēzes attiecībā pret šī objekta funkcionēšanu);
modeļus izmanto tādu ekonomisko objektu pētīšanai, ar kuriem nevar eksperimentēt:
objekts ir vai nu pārāk mazs, vai pārāk liels;
objekts atrodas pārāk tālu;
pētāmā procesa ilgums vairākas reizes pārsniedz pētītāja dzīves laiku;
veicot eksperimentu ar objektu, rodas milzīgs materiālu, darba un naudas patēriņš, nepieļaujams laika patēriņš, u.c.

0.4 Modelēšanas veidi

Par materiālo modelēšanu sauc tādu modelēšanu, kurā modelis reproducē objekta-orģināla galvenās ğeometriskās, fizikālās, dinamiskās un funkcionālās īpašības.

Par ideālo modelēšanu sauc modelēšanu, kas pamatojas nevis uz objekta-orģināla un modeļa materiālo analoģiju, bet gan uz ideālu, izdomātu analoģiju.

0.5 Matemātiskā modelēšana

Matemātiskā modelēšana tiek raksturota ar četrām galvenājām īpatnībām:
var pētīt tikai tos objekta-orģināla parametrus, kurus var aprakstīt skaitliski, t.i., formalizēt;
jebkurš matemātiskais modelis ir vispārināts;
modernās datoru tehnikas nepieciešamība;
sākotnējais informācijas pietiekamība.

Jebkurš matemātiskais modelis ir vispārināts tādā nozīmē, ka objektam-orģinālam nav jābūt fizikāli līdzīgam modelim. Šī prasība ir lieka, jo modelēšanas procesā modelīpēta tikai tos parametrus, kuriem eksistē skaitlisks apraksts un kuri ir saistīti ar noteiktām matemātiskām sakarībām. No tā izriet, ka katrs konkrēts matemātiskais modelis apraksta ne tikiai līdzīgu procesu klasi, bet arī citas īstenības izpausmes, ja tikai tām piemīt likumsakarības, kuras var izteikt ar tās pašas matemātiskās struktūras līdzekļiem.

Matemātiskajam modelim ir jēga tikai tad, ja tas atspoguļo pētāmā reālā objekta pašas svarīgākās īpašības, abstrahējoties no tādām īpašībām, kurām konkrētās problēmas atrisinājumā ir otršķirīga nozīme. Praktiski gandrīz nekad nav iespējams formalizēt visas ekonomiskā objekta skaitliski izsakāmās sakarības, jo

ne visi faktori, kas ietekmē pētāmo objektu, ir zināmi;

ja arī daudzi faktori ir zināmi, tad ne par katru no tiem ir pietiekama informācija, lai to varētu izteikt skaitliskā formā;

iekļaujot modelī daudzus faktorus (pat ja tie ir zināmi un ja tos var izteikt skaitliskā formā), tas kļūst pārāk sarežģīts un grūti izmantojams praktisku rezultātu iegūšanai pieņemamos termiņos.

Ieejas informācijas veidošanas etaps ir matemātiskās modelēšanas procesa visdarbietilpīgākais etaps. Modeļa lietošana ir saistīta ar stingrām prasībām pret ieejas informāciju.

ETAPI:

Uzdevuma ekonomiskā nostādne,
Matemātiskā modeļa sastādīšana,
Matemātiskā modeļa pētīšana,
Ieejas informācijas veidošana,
Matemātiskā modeļa realizācija,
Iegūto rezultātu analīze.

NODAĻA 1

K.J.ARROVA UN F.H.HĀNA EKONOMISKĀ LĪDZSVARA MODELIS

1.1 MODEĻA APRAKSTS

Šajā nodaļā aplūkots klasisks mikroekonomikas modelis, kura pirmsākumi meklējami L.Valrasa (*Walras*) darbā [1954]. Plašāku izklāstu par modeli var atrast K.J.Arrova (*Arrow*) un Ž.Debrē (*Debreu*) [1954], R.R.Kronvala (*Cornwall*) [1984], K.J.Arrova un F.H.Hāna (*Hahn*) [1980], arī E.Dīrkera (*Dierker*) [1974] darbos. Šī modeļa apraksts atrodams arī mikroekonomikas mācību grāmatās, piemēram, H.Variana [1990], D.M.Krepa [1990], V.Niholsona [1992] grāmatās.

Modeļa mērķis ir pieprasījuma-piedāvājuma līdzsvara eksistences noskaidrošana specifiskos apstākļos.

Iepazīsimies ar modeļa aprakstu, kāds atrodams K.J.Arrova un F.H.Hāna [1980] grāmatā (16.-29.lpp) (kursa apraksta literatūras sarakstā [5]).

Pieņemsim, ka ir n dažādi labumu: preces un pakalpojumi, ir patērētāji un ražotāji. Katrs patērētājs var būt ražotājs un katrs ražotājs var būt patērētājs. Patērētājus un ražotājus pieņemts saukt par ekonomiskajiem aģentiem. Ar x_i apzīmēsim i-tā labuma kopumu, ko pieprasa visi patērētāji kopumā. Principā mēs domājam par šo lielumu kā par nenegatīvu skaitli, bet teorētiski iespējams, ka $x_i < 0$ — tad $|x_i|$ ir i-tā labuma piedāvājums. Ar y_i apzīmēsim i-tā labuma kopumu, ko piedāvā visi ražotāji kopumā. Līdzīgi kā iepriekš, mēs domājam par šo lielumu kā par nenegatīvu skaitli, bet teorētiski iespējams, ka $y_i < 0$ — tad $|y_i|$ ir i-tā labuma pieprasījums. Ar $\overline{x_i}$ apzīmēsim i-tā labuma kopumu, kas apskatāmajā laika brīdī ir uzkrāts kā resursi (sākotnējais labuma daudzums). Šis skaitlis vienmēr ir nenegatīvs.

Tirgus līdzsvars ir saistīts ar atšķirīgo ražotāju un patērētāju lēmumu savienojamību. Kopējais piedāvājums ir summa no labumu produkcijas un labumiem, kas saražoti līdz šim. Tādā gadījumā i-tā labuma pieprasījuma pārpalikums ir $\sigma_i = x_i - y_i - \overline{x}_i$, kur $i = 1, ..., n$ ($\sigma_i > 0$ nozīmē i-tā labuma neapmierināto pieprasījumu, $\sigma_i \leq 0$ nozīmē, ka $|\sigma_i|$ ir i-tā labuma daudzums, kas tiek piedāvāts, bet tam nav pieprasījuma).

PIEŅĒMUMS 1.1.1. Pieņemsim, ka $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ir doto n labumu cenu vektors, un pieņemsim, ka pieprasījuma pārpalikumu σ_i ir iespējams izteikt kā funkciju no $\mathbf{p}$ vienā vienīgā veidā. Šo funkciju apzīmēsim ar z_i, $i = 1, ..., n$, tad $z_i(\mathbf{p}) = \mathbf{x_i}(\mathbf{p}) - \mathbf{y_i}(\mathbf{p}) - \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{i}(\mathbf{p})$, $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{p}) \\ z_2(\mathbf{p}) \\ ... \\ z_n(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}$ — kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija.

Jāatzīmē, ka ne vienmēr pieprasījuma pārpalikumu σ_i ir iespējams izteikt kā funkciju no $\mathbf{p}$ vienā vienīgā veidā.

Piemērs 1.1.1.
Pieņemsim, ka pie dota $\mathbf{p}$ labumu i pieprasa viens vienīgs patērētājs: $x_i(\mathbf{p})$. Pieņemsim, ka labumu i ražo viens vienīgs ražotājs, kurš citus labumus vispār neražo. Pieņemsim, ka ražotājs ražo i-to labumu tā, ka tas maksimizē tā peļņu, teiksim y_{f_i}, bet maksimālā peļņa $\mathbf{p}\mathbf{y}_f$ ir vienāda ar 0, kaut arī ražotāja ienākumi ir konstants lielums. Tādā gadījumā arī pie $k > 0$ produkcijas izlaide $k\mathbf{y}_f$ maksimizēs ražotāja peļņu, tādējādi dotais $\mathbf{p}$ nenosaka kopējo piedāvājumu labumam i viennozīmīgi. ■

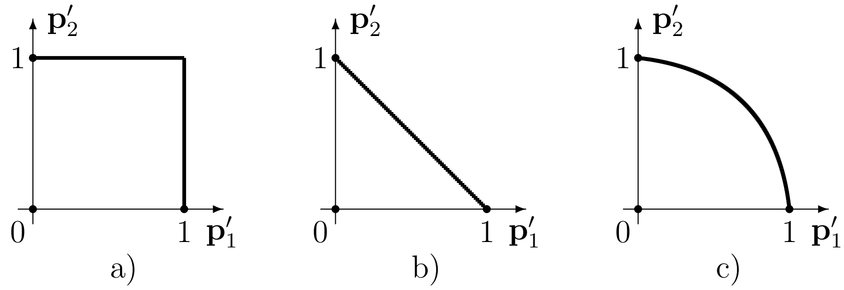
PIEŅĒMUMS 1.1.2. $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(k\mathbf{p})$, $\forall \mathbf{p} > \mathbf{0}$ un $k > 0$.

Pieņēmums 1.1.2 apgalvo, ka visu cenu mēroga maiņa attiecībā pret visām precēm vienlaicīgi pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtību neizmaina. Jeb — ja vienlaicīgi k reizes izmaina algas un cenas, tad patiesībā pirkt- un pārdot-spēja nav izmainījusies. No Pieņēmuma 1.1.2 seko, ka cenu vektors ir normējams. To var izdarīt dažādos veidos (skatīt, piemēram, R.R.Kornvals [1984]). Ar normēšanas palīdzību dotajam cenu vektoram $\mathbf{p}$ piekārto vektoru $\mathbf{p}'$ no $\mathbf{R}^n$ vienības lodes. Varam to izdarīt, piemēram, sekojošos veidos:

1) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \rightarrow \mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{\max\limits_{j=1,2,...,n} p_j}, ..., \frac{p_n}{\max\limits_{j=1,2,...,n} p_j} \right)$;

2) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \rightarrow \mathbf{p}' = \left(\frac{p_1^m}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^m}, ..., \frac{p_n^m}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^m} \right)$, kur $m > 0$, $m \in \mathbf{N}$;

3) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \rightarrow \mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{\sqrt[m]{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^m}}, ..., \frac{p_n^m}{\sqrt[m]{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^m}} \right)$, kur $m > 1$, $m \in \mathbf{N}$.



1.1.1. zīm.

Pieņemsim, ka $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, un uzskatāmībai aplūkosim normēto cenu vektoru kopas divu labumu gadījumā. 1) gadījumā iespējamo cenu vektoru kopa veido lauztu līniju, kas iet caur punktiem (0;1), (1;1) un (1;0) (zīm.1.1.1.a)). 2) gadījumā ($m = 1$) izveidojas taisnes nogrieznis ar galapunktiem (0;1) un (1;0) (zīm.1.1.1.b)), bet 3) gadījumā ($m = 2$) iegūsim riņķa līnijas loku ar tiem pašiem galapunktiem (zīm.1.1.1.c)). Visos trijos gadījumos iegūtās kopas ir kompaktas (t.i., slēgtas un ierobežotas), bet tikai 2) gadījumā kopa ir arī izliekta (t.i., satur nogriezni, kurš savieno jebkurus divus nesakrītošus kopas punktus). Tās ir divas labas īpašības, kuras nepieciešamas labu matemātisku rezultātu iegūšanai. Tāpēc mēs turpmāk šī Pieņēmuma 1.1.2 ietvaros uzskatīsim, ka cenu vektors pieder n-dimensiju simpleksam

$$S_n = \{\mathbf{p} \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \, \mathbf{p} > \mathbf{0}\}.$$

Mēs izslēdzam situāciju ar negatīvām cenām un iespēju visām cenām vienlaicīgi būt vienādām ar 0. Tātad normēšana tiek veikta piedāvātajā 2.veidā, ņemot $m = 1$

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \;\rightarrow\; \mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}, ..., \frac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \right).$$

Kopai S_n piemīt pieminētās lieliskās īpašības.

APGALVOJUMS 1.1.1. Kopa S_n ir kompakta un izliekta.

Pierādījums.

S_n izliektība: izvēlamies patvaļīgus divus vektorus $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}' \in S_n$ un pierādīsim, ka nogrieznis, kurš savieno punktus $\mathbf{p}$ un $\mathbf{p}'$, pieder kopai S_n, t.i., pierādīsim, ka kopa $\{\mathbf{p}(t) = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}' \,|\, t \in [0; 1]\}$ ietilpst kopā S_n.

Fiksējam $t \in [0; 1]$, tad vektors

$$\mathbf{p}(t) = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} tp_1 + (1-t)p'_1 \\ ... \\ tp_n + (1-t)p'_n \end{pmatrix} \in S_n, \text{ jo}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = \sum_{i=1}^{n} (tp_i + (1-t)p'_i = t \sum_{i=1}^{n} p_i + (1-t) \sum_{i=1}^{n} p'_i) = t + (1-t) = 1.$$

S_n kompaktība: tā kā $S_n \subset \mathbf{R}^n$, tad pietiek pierādīt, ka S_n ir ierobežota un slēgta kopa (kompaktības jēdzienu precīzāk definēsim vēlāk; pagaidām izmantosim faktu, ka telpā $\mathbf{R}^n$ kompakta kopas jēdziens ir ekvivalents jēdziens ierobežotai un slēgtai kopai).

Ierobežotība seko no tā fakta, ka kopa S_n iekļaujas vienības lodē $B(0; 1)$.

S_n slēgtību pierādīsim, pierādot, ka S_n papildinājums $\mathbf{R}^n \setminus S_n$ ir vaļēja kopa. Saskaņā ar vaļējas kopas definīciju nepieciešams pierādīt, ka katram punktam $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus S_n$ eksistē kaut kāda ε-apkārtne, kura pilnībā ietilpst kopā $\mathbf{R}^n \setminus S_n$.

Kopas $\mathbf{R}^n \setminus S_n$ punktus mēs varam iedalīt divās daļās:

1) tie $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus S_n$, kuriem vismaz viena koordināta ir lielāka par 1 vai mazāka par 0;

2) tie $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus S_n$, kuriem koordinātu summa nav 1: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 1$.

Tā kā visas normas telpā $\mathbf{R}^n$ ir ekvivalentas, tad ērtības labad izmantosim moduļa normu jeb moduļa metriku.

Pirmajā gadījumā mēs varam novērtēt attālumu starp patvaļīgu kopas $\mathbf{R}^n \setminus S_n$ punktu $\mathbf{x}$, kuram, teiksim, j-tā koordināta ir $1+\varepsilon'$ vai $-\varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$, un kopu S_n sekojošā veidā

$$d(\mathbf{x}, S_n) = \sup\{d(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in S_n\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - p_i| \,\middle|\, \mathbf{p} \in S_n\right\} \geq |x_j - p_j| \geq \varepsilon',$$

jo $0 \leq p_j \leq 1$ un $x_j = 1 + \varepsilon'$ vai $x_j = -\varepsilon'$. Ja izvēlamies punkta $\mathbf{x}$ apkārtni $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$, kur $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, tā pilnībā ietilpst kopā $\mathbf{R}^n \setminus S_n$.

Otrajā gadījumā ērtības labad pieņemsim, ka patvaļīgi izraudzīta kopas $\mathbf{R}^n \setminus S_n$ punkta $\mathbf{x}$ koordinātu summa ir $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 + \varepsilon'$, $\varepsilon' \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Tādā gadījumā

$$d(\mathbf{x}, S_n) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - p_i| \,\middle|\, \mathbf{p} \in S_n\right\} \geq \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\right| \,\middle|\, \mathbf{p} \in S_n\right\} = |\varepsilon'|.$$

Un, ņemot punkta $\mathbf{x}$ apkārtni $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$, kur $0 < \varepsilon < |\varepsilon'|$, iegūsim prasīto. ∎

PIEŅĒMUMS 1.1.3 jeb Valrasa likums. $\forall \mathbf{p} \in S_n : \quad \mathbf{p}\,\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0.$

Kā motivāciju šim Pieņēmumam 1.1.3 var minēt sekojošo. Visu ražotāju nolūks ir maksimizēt to peļņu. $\mathbf{p}\,\mathbf{y} = (p_1, ..., p_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i y_i$ ir visu ražotāju kopējā peļņa, varam pieņemt, ka $\mathbf{p}\,\mathbf{y}$ ir vienmēr nenegatīvs lielums. Patērēt=āji kontrolē ražotājus (ražotāji un patērētāji noteiktās situācijās nonāk mainītās lomās). Tas nozīmē, ka katrs patērētājs h saņem zināmu daļu $d_h \geq 0$ no ražotāju kopējās peļņas ($\sum\limits_h d_h = 1$). Katrs patērētājs h izvēlas tikai tādu $\mathbf{x}_h = \begin{pmatrix} x_{h_1} \\ ... \\ x_{h_n} \end{pmatrix}$, kas apmierina viņa budžeta nevienādību $\mathbf{p}\,\mathbf{x}_h - \mathbf{p}\overline{\mathbf{x}}_h - d_h\mathbf{p}\,\mathbf{y} \leq 0$ (kur $\overline{\mathbf{x}}_h = \begin{pmatrix} \overline{x}_{h_1} \\ ... \\ \overline{x}_{h_n} \end{pmatrix}$ ir sākotnējo labumu, kas atrodas patērētāja h rīcībā, daudzuma vektors). Patērētājs h vienmēr dod priekšroku vektoram $\mathbf{x}_h$ salīdzinājumā ar $\mathbf{x}'_h$, ja $\mathbf{x}_h > \mathbf{x}'_h$, un nekad neizvēlas darbību, ja iespējama labāka. Tiek panākts, ka $\mathbf{x}_h$ vienmēr tiek izvēlēts tā, lai $\mathbf{p}\,\mathbf{x}_h - \mathbf{p}\overline{\mathbf{x}}_h - d_h\mathbf{p}\,\mathbf{y} = 0$. Summējot pēdējo vienādību pa visiem patērētājiem h, iegūsim $\mathbf{p}\,\mathbf{z} = 0$.

PIEŅĒMUMS 1.1.4. Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\mathbf{z}$ ir nepārtraukta visā definīcijas apgabalā S_n.

No Pieņēmuma 1.1.4 seko, ka $\mathbf{z}(S_n)$ ir ierobežota kopa, jo S_n ir kompakta kopa. Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcijas nepārtrauktība nozīmē, ka pie nelielām cenu vektora izmaiņām, maz izmainīsies kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtība. Tātad šīs funkcijas nepārtrauktība atspoguļo faktu, ka modelis apraksta stabilas ekonomiskas situācijas.

Vai pie šiem četriem pieņēmumiem ir iespējama tāda situācija, kad gan ražotāji, gan patērētāji būtu apmierināti? Tādu situāciju varētu nosaukt par līdzsvaru, precīzāk:

DEFINĪCIJA 1.1.1. Cenu vektoru $\mathbf{p}^* \in S_n$ sauc par *tirgus līdzsvaru*, ja $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$.

TEORĒMA 1.1.1. Ja izpildās Valrasa likums un $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^* \in S_n$, tad no nosacījuma $z_i(\mathbf{p})^* < 0$ seko, ka $p_i^* = 0$.

Pierādījums. Dots, ka izpildās Valrasa likums:

$$\mathbf{p}^* \, \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = p_1^* z_1(\mathbf{p}^*) + ... + p_n^* \, z_n(\mathbf{p}^*) = 0.$$

Tā kā $p_i^* \geq 0$ un $z_i(\mathbf{p})^* < 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, tad visi saskaitāmie iepriekš pierakstītajā summā ir mazāki vai vienādi par 0. Valrasa likuma summā vienādība ar 0 iespējama tikai tad, ja visi saskaitāmie būs 0. Tātad, ja $z_i(\mathbf{p})^* < 0$, tad $p_i^* = 0$. ■

1.2 LĪDZSVARA EKSISTENCE DIVU LABUMU EKONOMIKĀ

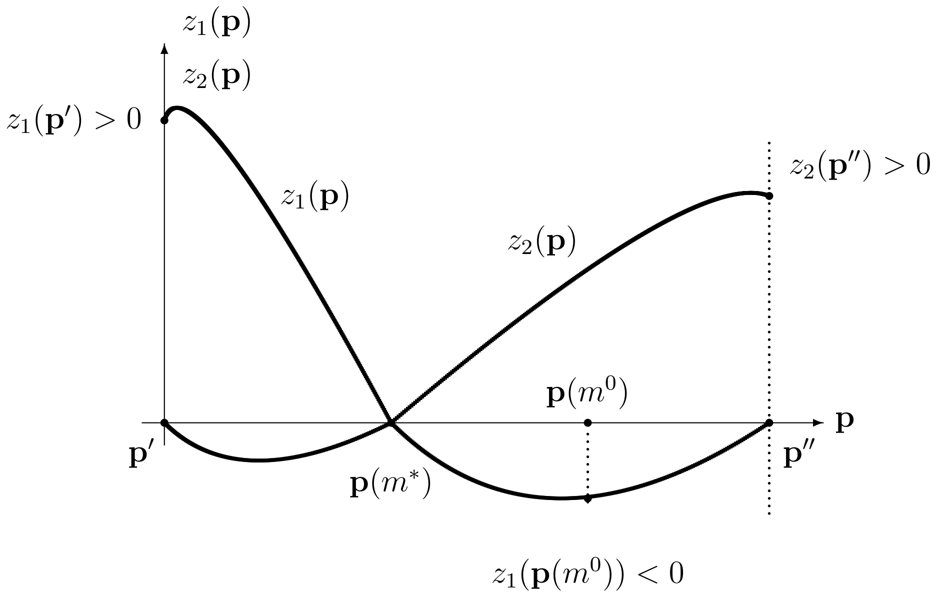
Apzīmēsim līdzsvara cenu kopu ar E, t.i.,

$$E = \{\mathbf{p} \,|\, \mathbf{z}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0};\, \mathbf{p} \in S_n\}.$$

Apskatīsim divu labumu ekonomiku un divus iespējamos cenu vektorus:

$$\mathbf{p}' = (0; 1), \quad \mathbf{p}'' = (1; 0)$$

(skatīt 1.2.1.zīmējumu). Šī analīze kalpos kā ievads pierādījumam, ka vispār pie dotajiem pieņēmumiem kopa E nav tukša.



1.2.1. zīm.

Pieņemsim, ka $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}'' \notin E$ (pretējā gadījumā nav ko pierādīt). Pēc Valrasa likuma:

$$\mathbf{p}'\mathbf{z}(\mathbf{p}') = 0 \cdot z_1(\mathbf{p}') + 1 \cdot z_2(\mathbf{p}') = 0,$$
$$\mathbf{p}'\mathbf{z}(\mathbf{p}'') = 1 \cdot z_1(\mathbf{p}'') + 0 \cdot z_2(\mathbf{p}'') = 0.$$

No šejienes seko, ka $z_2(\mathbf{p}') = 0$, $z_1(\mathbf{p}'') = 0$. Ja tiek pieņemts, ka $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}'' \notin E$, jābūt $z_1(\mathbf{p}') > 0$, $z_2(\mathbf{p}'') > 0$.

Apskatīsim cenu vektoru

$$\mathbf{p}(m) = m\mathbf{p}' + (1 - m)\mathbf{p}'', \quad 0 \leq m \leq 1.$$

Ja izpildās $\mathbf{p}(m) \notin E$, $m \neq 0$, $m \neq 1$ un Valrasa likums

$$\mathbf{p}(m)\,\mathbf{z}(\mathbf{p}(m)) = p_1\, z_1(\mathbf{p}(m)) + p_2\, z_2(\mathbf{p}(m)) = 0,$$

un tā kā p_1, $p_2 > 0$, tad viens no skaitļiem $z_1(\mathbf{p}(m))$, $z_2(\mathbf{p}(m))$ ir pozitīvs, otrs negatīvs. Ērtības labad pieņemsim, ka $z_1(\mathbf{p}(m^0)) < 0$ kaut kādam $0 < m^0 < 1$. Pieņemsim, ka $m^0 \to 1$. No iepriekšējā ir zināms, ka $z_1(\mathbf{p}(1)) = z_1(\mathbf{p}') > 0$. Tas nozīmē, ka funkcija $z_1(\mathbf{p}(m))$ intervālā $]m^0; 1[$ maina zīmi. Pēc $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nepārtrauktības nosacījuma seko, ka

$$\exists m^* \in]m^0; 1[: \quad z_1(\mathbf{p}(m^*)) = 0.$$

Tad arī $z_2(\mathbf{p}(m^*)) = 0$ (Valrasa likums!) un $\mathbf{p}(m^*) \in E$.

1.3 LĪDZSVARA EKSISTENCE EKONOMIKĀ AR GALĪGU SKAITU LABUMU

Un tagad pārliecināsimies, ka četri izdarītie pieņēmumi ir pietiekoši, lai izveidotajā ekonomikā eksistēu tirgus līdzsvars.

LĪDZSVARA TEORĒMA NR.1. Ja izpildās pieņēmumi 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 un 1.1.4, tad ekonomikā ar galīgu skaitu labumu eksistē tirgus līdzsvars, t.i., eksistē tāds cenu vektors $\mathbf{p}^* \in S_n$, kas pilnībā apmierina patērētāju pieprasījumu pēc labumiem.

Pierādījums.
Pierādījuma shēma:
1) konstruēsim noteikta tipa attēlojumu $\mathbf{T}(\mathbf{p}) : S_n \to S_n$,
2) tam eksistēs nekustīgais punkts, kurš
3) būs meklētais līdzsvars.

Attēlojumu konstruēsim sekojošā veidā:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p})}{(\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e}},$$

$$\text{kur} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}_{n-\text{dim}}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{p}) = (m_1(\mathbf{p}), ..., m_n(\mathbf{p})),$$

$$m_i(\mathbf{p}) = \max\{0;\, z_i(\mathbf{p})\}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Tā kā $(\mathbf{p}+\mathbf{M}(\mathbf{p}))\mathbf{e} = \sum\limits_{i=1}^{n}(p_i+m_i(\mathbf{p}))\cdot 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{p}) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{p})$, tad

$$0 \leq t_i(\mathbf{p}) = \frac{p_i + m_i(\mathbf{p})}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{p})} \leq 1 \text{ visiem } i = 1, 2, ..., n, \text{ un}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i + m_i(\mathbf{p})}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{p})} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i + m_i(\mathbf{p}))}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{p})} = 1.$$

Tātad $\mathbf{T} : S_n \to S_n$. Tas ir nepārtraukts attēlojums kā nepārtrauktu attēlojumu summa un dalījums (saucējs nav nekad vienāds ar 0!). Kopa S_n ir izliekta un kompakta. Varam lietot Bola-Brauera teorēmu, kura apgalvo: katram nepārtrauktam attēlojumam f, kas attēlo izliektu un kompaktu kopu $K \subset \mathbf{R}^n$ sevī, eksistē nekustīgais punkts: $\exists x^* \in K : f(x^*) = x^*$. Mūsu gadījumā

$$\exists \mathbf{p}^* \in S_n : \ \mathbf{T}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*.$$

Pamatosim, ka šis cenu vektors $\mathbf{p}^*$ ir tirgus līdzsvars. Pēc $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ definīcijas:

$$\mathbf{p}^* + \mathbf{M}(\mathbf{p}^*) = ((\mathbf{p}^* + \mathbf{M}(\mathbf{p}^*))\mathbf{e})\mathbf{p}^*$$

jeb $\mathbf{M}(\mathbf{p}^*) = \lambda \mathbf{p}^*$, kur $\lambda = (\mathbf{p}^* + \mathbf{M}(\mathbf{p}^*))\mathbf{e} - 1$. Pareizinām abas vienādības puses ar $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*)$ un atceramies Valrasa likumu:

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \lambda \mathbf{p}^* \, \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0 \text{ jeb}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = (\max\{0;\, z_1(\mathbf{p}^*)\}, ..., \max\{0;\, z_N(\mathbf{p}^*)\}\,) \cdot \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{p}^*) \\ ... \\ z_n(\mathbf{p}^*) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max\{0;\, z_i(\mathbf{p}^*)\,\}\, z_i(\mathbf{p}^*) = \sum_{z_i(\mathbf{p}^*>0} z_i^2(\mathbf{p}^*) = 0.$$

Atliek secināt, ka $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$ visiem $i = 1, ..., n$. Tas tad arī nozīmē, ka cenu vektors $\mathbf{p}^*$ ir tirgus līdzsvars. ■

1.4 ARROVA-HĀNA MODELIS AR NEIEROBEŽOTU PIEPRASĪJUMA PĀRPALIKUMA FUNKCIJU

Pieņēmums 1.1.4 apgalvo, ka pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\mathbf{z}$ ir nepārtraukta visā definīcijas apgabalā S_n. Tas nozīmē, ka pieprasījums ir ierobežots. Ir vairāki iemesli, kāpēc būtu ieteicams pavājināt šo pieņēmumu
$\star$ nevar ne noliegt, ne pamatot, ka vismaz dažu labumu pieprasījums, cenai tiecoties uz 0, varētu tiekties uz bezgalību,
$\star$ nepiesātinājuma hipotēze, kas ir Valrasa likuma pamatā, ir vismaz deļēji nesavienojama ar piesātinājumu jebkura viena labuma gadījumā,
$\star$ principā pieņēmums, ka visi labumi var būt aizvietotāji, var veidot situāciju, ka pieprasījums pēc tiem tiecas uz bezgalību, cenām tiecoties uz 0.

Tomēr, formulējot pavājinātas nepārtrauktības pieņēmumu, mums ir jābūt uzmanīgiem. Vienkāršākā iespēja būtu pieņemt, ka pieprasījuma pārpalikuma funkcija $z_i(\mathbf{p})$ var pieņemt ne tikai galīgas vērtības, bet arī $+\infty$, un definēt $z_i(\mathbf{p})$ nepārtrauktību kā paplašinājumu parastajai definīcijai (t.i., ja $z_i(\mathbf{p})$tiecas uz bezgalību vienai cenu vektoru konverģentai virknei, tad tam tā ir jānotiek ar katru konverģentu cenu vektoru virkni, kas tiecas uz to pašu robežu). No šī pieņēmuma patiešām sekotu līdzsvara eksistence, bet to nevar iegūt no patērētāju uzvedības derīguma maksimizācijas teorijas.

PIEMĒRS 2.1.1. Pieņemsim, ka tiek apskatīta trīs labumu situācija un patērētāja derīguma funkcija ir

$$U(\mathbf{q}) = \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \sqrt{q_3},$$

kur $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ ir doto labumu daudzumu vektors. Pieņemsim, ka patērētāja budžets ir viena vienība. mēģināsim noskaidrot pieprasījuma apjomu, ja trešās preces cena ir 1, bet pārējās divas preču cenas tiecas uz 0.

Vispirms atradīsim pieprasījuma funkcijas katrai no precēm atkarībā no preču cenām. No patērētāja uzvedības derīguma funkcijas maksimizācijas teorijas seko, ka ir jāatrod derīguma funkcijas maksimums pie dotā budžeta ierobežojuma. Tas ir nosacītā ekstrēma uzdevums ar mērķa funkciju $U(\mathbf{q})$ un saites vienādojumu (budžeta vienādību)

$$c_1\, q_1 + c_2\, q_2 + c_3\, q_3 = 1,$$

kur $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ir labumu cenu vektors. Risināšanu varam veikt ar Lagranža reizinātāju metodi. Sastādam Lagranža funkciju (λ - nezināmais reizinātājs)

$$F(\mathbf{q}, \lambda) = \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \sqrt{q_3} + \lambda(c_1\, q_1 + c_2\, q_2 + c_3\, q_3 - 1).$$

Ekstrēmu punktus meklējam no sistēmas

$$\begin{cases} F_{q_1} = \frac{1}{2\sqrt{q_1}} + \lambda c_1 = 0, \\ F_{q_2} = \frac{1}{2\sqrt{q_2}} + \lambda c_2 = 0, \\ F_{q_3} = \frac{1}{2\sqrt{q_3}} + \lambda c_3 = 0, \\ c_1\, q_1 + c_2\, q_2 + c_3\, q_3 = 1. \end{cases}$$

No pirmajiem trim vienādojumiem iegūsim dubulto vienādību

$$\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{q_1}c_1} = -\frac{1}{2\sqrt{q_2}c_2} = -\frac{1}{2\sqrt{q_3}c_3}.$$

Varam izteikt q_2 un q_3 caur cenām un q_1 šādi:

$$q_2 = \frac{q_1\, c_1^2}{c_2^2}, \quad q_3 = \frac{q_1\, c_1^2}{c_3^2}.$$

Savietojam budžeta vienādībā un izsakām q_1:

$$q_1\, c_1 + \frac{q_1\, c_1^2}{c_2^2} \cdot c_2 + \frac{q_1\, c_1^2}{c_3^2} \cdot c_3 = 1 \;\Rightarrow$$

$$q_1 = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2} + \frac{c_1^2}{c_3}}.$$

Līdzīgi var atrast arī

$$q_2 = \frac{1}{c_2 + \frac{c_2^2}{c_1} + \frac{c_2^2}{c_3}},$$

$$q_3 = \frac{1}{c_3 + \frac{c_3^2}{c_1} + \frac{c_3^2}{c_2}}.$$

No ceļiem, pa kuriem c_1 un c_2 abi tiecas uz 0, ir iespējams izvēlēties vienu tādu, ka $\frac{c_1^2}{c_2}$ tiecas uz jebkuru dotu nenegatīvu skaitli vai pat uz $+\infty$. No tā seko, ka nav iespējams definēt nepārtrauktību punktā $q_1(0,0,1)$. Līdz ar to $\mathbf{q}(\mathbf{c})$ punktā $(0,0,1)$ nav definēta funkcija.

Tomēr var parādīt, ka $q_1(\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{c}) + q_3(\mathbf{c}) \to +\infty$. Ja $\mathbf{c} = (0,0,1)$, tad

$$q_3(\mathbf{c}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

un tāpēc $q_3(\mathbf{c})$ noteikti tiecas uz 0, ja c_1 un c_2 tiecas uz 0 (t.i., robeža eksistē). Tā kā $c_3 = 1$, tad $c_3\, q_3(\mathbf{c}) \to 0$. Tad budžeta vienādība

$$c_1 q_1(\mathbf{c}) + c_2 q_2(\mathbf{c}) \to 1.$$

Tāpat var sarēķināt, ka

$$
\begin{aligned}
&(c_1 - c_2)\, q_1(\mathbf{c}) - 1 = \\
&(c_1 - c_2)\, \frac{1}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2} + \frac{c_1^2}{c_3}} - 1 = \frac{c_1 - c_2 - c_1 - \frac{c_1^2}{c_2} - c_1^2}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2} + c_1^2} = \\
&= \frac{-c_2 \left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_1^2}{c_2}\right)}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2} + c_1^2} == \frac{-\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}(1 + c_2)\right)}{\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_1^2}{c_2}} = \\
&= -\frac{1 + (\frac{c_1}{c_2})^2(1 + c_2)}{\frac{c_1}{c_2} + (\frac{c_1}{c_2})^2(1 + c_2)} = -\frac{1 + u^2 v}{u + u^2 v},
\end{aligned}
$$

kur $u = \frac{c_1}{c_2}$ un $v = 1 + c_2$. Ja c_2 ir mazs, var uzskatīt, ka v no labās puses tiecas uz 1. Savukārt vienādības labā puse ir negatīva, jo u pieņem pozitīvas vērtības un $v \geq 1$. Vienādības labā puse tiecas uz $-\infty$, ja u tiecas uz 0, un tiecas uz -1, ja u tiecas uz $+\infty$, tātad tā pavisam droši ir negatīva un ierobežota ar 0 no augšas. Tomēr

$$c_2(q_1(\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{c})) = (c_1 q_1(\mathbf{c}) + c_2 q_2(\mathbf{c}) - 1) - ((c_1 - c_2) q_1(\mathbf{c}) - 1).$$

Tā kā vienādības labās puses pirmā daļa tiecas uz 0 pēc budžeta vienādības, bet otrā ir negatīva un ierobežota no augšas, tad var secināt, ka $c_2(q_1(\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{c}))$ vērtība ir pozitīva un ierobežota no apakšas. Tā kā $c_2 \to 0$, tad jābūt $q_1(\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{c}) \to +\infty$, un tā kā $q_3(\mathbf{c}) \to 0$, tad $q_1(\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{c}) + q_3(\mathbf{c}) \to +\infty$.

Šis konkrētais rezultāts ir derīguma maksimizācijas sekas. Mēs varam izdarīt pieņēmumu, ka pieprasījuma pārpalikuma koordinātu summa tiecas uz bezgalību vienmēr, kad pieprasījuma pārpalikuma funkcija nav definēta. ■

Arrovs un Hāns piedāvā nepārtrauktības pieņēmumu aizstāt ar diviem citiem.

PIEŅĒMUMS 1.4.1. Eksistē tāds galīgs pozitīvs skaitlis K, ka

$$\forall \mathbf{p} \in S_n : \quad z_i(\mathbf{p}) > -K,\ i = 1, 2, ..., n,$$

t.i., funkcija $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir ierobežota no apakšas.

Pieņēmumu 1.4.1 var pamatot ar domu, ka jebkura viena saražotā labuma daudzums, kas saražots jebkurā laikā, kas nav bezgalīgi tāls no tagadnes, ir galīgs, tāpēc labumu daudzumus, kas sākotnēji piederējuši mājsaimniecībām, var uzskatīt par galīgiem. Līdz ar to nav nereāli uzskatīt, ka jebkuru pakalpojumu, kuru dotajā brīdī brīdī spēj sniegt mājsaimniecība, daudzums arī nav bezgalīgs. Pieņēmums 1.4.1 ir nevajadzīgs, ja tiek prasīts Pieņēmums 1.1.4, bet tikai tad, ja tas netiek pavājināts, kā nākamajā pieņmumā.

PIEŅĒMUMS 1.4.2. Pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir definēta visiem $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ (t.i., tiem cenu vektoriem, kuriem nav nevienas 0 koordinātas) un varbūt arī citiem $\mathbf{p}$, un ir nepārtraukta visā savā definīcijas apgabalā. Ja $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēta cenu vektoram $\mathbf{p}^0$, tad

$$\lim_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}^0} \sum_{i=1}^{n} z_i(\mathbf{p}) = +\infty.$$

Veicot zināmas modifikācijas Līdzsvara teorēmas Nr.1 pierādījumā, var pārliecināties par līdzsvara eksistenci šajā modelī.

LĪDZSVARA TEORĒMA NR.2. Ja izpildās pieņēmumi 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.4.1 un 1.4.2, tad ekonomikā ar galīgu skaitu labumu eksistē tirgus līdzsvars.

Pierādījums.
$\mathbf{M}(\mathbf{p})$ definēsim kā iepriekš:

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) = (m_1(\mathbf{p}), ..., m_n(\mathbf{p})), \quad \text{kur } m_i(\mathbf{p}) = \max\{0;\, z_i(\mathbf{p})\,\}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

bet tagad prasīsim, lai tas būtu nepārtraukts visur, kur $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir definēts, un līdz ar to nepārtraukti ir arī reizinājumi $m_i(\mathbf{p})\, z_i(\mathbf{p}) \geq 0$ visiem $i = 1, ..., n$ un $(\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i > 0$. Apzīmēsim $Z(\mathbf{p}) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i(\mathbf{p})$.

Tagad konstruēsim tādu nepārtrauktu funkciju $\alpha(Z)$, kura definēta visiem reāliem skaitļiem Z šādi: vispirms tiek fiksēts $Z_1 > 0$, tad

$$\alpha(Z) = \begin{cases} 0, & Z \leq 0, \\ 1, & Z \geq Z_1 > 0, \\ \in [0;1], & 0 < Z < Z_1. \end{cases}$$

Tad definēsim $\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(Z(\mathbf{p}))$ un

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \begin{cases} (1 - \alpha(\mathbf{p})\,\mathbf{M}(\mathbf{p}) + \alpha(\mathbf{p})\,\mathbf{e}', & \text{ja } \mathbf{z}(\mathbf{p}) \text{ ir definēts}, \\ \mathbf{e}', & \text{ja } \mathbf{z}(\mathbf{p}) \text{ nav definēts}, \end{cases}$$

kur $\mathbf{e}'$ ir rindas vektors, kura visas komponentes ir 1. $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ ir izveidots tā, lai tas sakristu ar $\mathbf{M}(\mathbf{p})$, ja $Z(\mathbf{p}) \leq 0$ (apgabals, kurā ir zināms, ka ir iespējams līdzsvars), un būtu stingri pozitīvs vektors, ja $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēts vai ja $Z(\mathbf{p}) \geq Z_1$, tad pēc Pieņēmuma 1.4.2 $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ būs stingri pozitīvs vektors jebkura punkta, kurā $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēts, jebkurā apkārtnē. Acīmredzami, ka $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ ir nepārtraukts visur, kur $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir definēts.

Pieņemsim, ka $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēts cenu vektoram $\mathbf{p}^0$. Pēc Pieņēmuma 1.4.2 ir iespējams atrast tādu $\mathbf{p}^0$ apkārtni, ka $Z(\mathbf{p}) \geq Z_1$ visiem $\mathbf{p}$ no šīs apkārtnes, kuriem $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir definēts. Tad $\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \mathbf{e}'$ visiem šādiem $\mathbf{p}$. $\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \mathbf{e}'$ arī visiem tiem $\mathbf{p}$, kuriem $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēts, tātad arī $\mathbf{p}^0$. Tādējādi $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ ir konstants vektors, kas vienāds ar $\mathbf{e}'$ visā apkārtnē, tātad nepārtraukta funkcija.

Tā kā $0 \leq \alpha(\mathbf{p}) \leq 1$, tad no $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ definīcijas seko, ja $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir definēts, tad $m_i(\mathbf{p}) \leq 1$ un $N_i(\mathbf{p}) \geq m_i(\mathbf{p})$, tāpēc $p_i + N_i(\mathbf{p}) \geq p_i + m_i(\mathbf{p}) \geq 0$. Savukārt no $m_i(\mathbf{p}) > 0$ seko $N_i(\mathbf{p}) > 0$ un tāpēc $p_i + N_i(\mathbf{p}) > p_i \geq 0$. Līdz ar to visiem i izpildās nevienādība $p_i + N_i(\mathbf{p}) \geq 0$. Arī, ja eksistē tāds i, ka $M_i(\mathbf{p}) > 0$, tad $\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}) > 0$, tādējādi $(\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} > 0$. Savukārt, ja visiem i izpildās nevienādība $M_i(\mathbf{p}) \leq 0$, tad $\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p})$ jeb $(\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} \geq (\mathbf{p} + \mathbf{M}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} > 0$. Tādējādi, ja $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēts, tad $(\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} > 0$; ja $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ nav definēts, tad $(\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} = (\mathbf{p} + \mathbf{e}')\,\mathbf{e}$ ir noteikti lielāks par 0.

No iepriekš aprakstītā seko, ka attēlojums

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p})}{(\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e}}$$

ir nepārtraukts cenu vektoru kopas S_n attēlojums sevī, tādēļ šim attēlojumam eksistē nekustīgais punkts $\mathbf{p}^*$. Ja vienādībā $\mathbf{T}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$ aizvieto $\mathbf{T}$ ar tā definīciju un iegūto vienādojumu atrisina attiecībā pret $\mathbf{N}(\mathbf{p}^*)$, tad iegūst

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}^*) = \lambda\,\mathbf{p}^*,$$

kur $\lambda = (\mathbf{p}^* + \mathbf{N}(\mathbf{p}^*))\,\mathbf{e} - 1$. Ja $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*)$ nebija definēts, tad $\mathbf{N}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{e}' = (1, ..., 1)$. Tā kā

$$\lambda = (\mathbf{p}^* + \mathbf{e}')\,\mathbf{e} - 1 = \sum_{i=1}^{n} (p_i + 1) \cdot 1 - 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} 1 - 1 = 1 + n - 1 = n,$$

tad no vienādības

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}^*) = (1, ..., 1) = \lambda \mathbf{p}^* = n\mathbf{p}^* = (np_1^*, ..., np_n^*)$$

seko, ka $p_i^* = \frac{1}{n} > 0$, bet šādos punktos $\mathbf{p}^*$ funkcija $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*)$ ir definēta — iegūta pretruna. Tālab tālāk skatamies tikai situāciju, kad $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*)$ ir definēta funkcija.

Abas vienādojuma $\mathbf{N}(\mathbf{p}^*) = \lambda\,\mathbf{p}^*$ puses pareizina ar $(\mathbf{p}^*)$. No Valrasa likuma iegūst, ka $\mathbf{Nz}(\mathbf{p}^*) = 0$ vai no $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ definīcijas

$$(1 - \alpha(\mathbf{p}^*))\,\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\,\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) + \alpha(\mathbf{p}^*)\,Z(\mathbf{p}^*) = 0.$$

Ievērosim, ka pēc definīcijas $Z(\mathbf{p}) = \mathbf{e}'\,\mathbf{z}(\mathbf{p})$. Bet tā kā $M_i(\mathbf{p})\,z_i(\mathbf{p}^*) \geq 0$ visiem i, tad $(1-\alpha(\mathbf{p}^*))\,\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\,\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \geq 0$, tāpēc $\alpha(\mathbf{p}^*)\,Z(\mathbf{p}^*) \leq 0$. Tā kā pēc konstrukcijas no $\alpha(\mathbf{p}^*) > 0$ seko $Z(\mathbf{p}^*) >)$, tad jābūt $\alpha(\mathbf{p}^*) = 0$. Līdz ar to $\mathbf{M}(\mathbf{p}^*)\,\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$, no kā seko, ka $\mathbf{p}^*$ ir līdzsvara cenu vektors. ∎

NODAĻA 2

BOLA-BRAUERA NEKUSTĪGO PUNKTU TEORĒMA

Iepriekējās nodaļas galveno rezultātu - līdzsvara teorēmas - pamatojums balstījās uz Bola-Brauera teorēmu. Tagad pārliecināsimies, ka tas nebūt nav vienkāršs matemātiskais apgalvojums.

Viena no ievērojamākajām nekustīgā punkta eksistences teorēmām tika iegūta 20.gs. sākumā, un šobrīd plašākai matemātiķu saimei tā pazīstama kā holandieu matemātiķa L.Brauera teorēma. Sākotnējā formulējumā šī teorēma apgalvoja (pēc J.Dugundži un A.Granass 1982.gada grāmatas par nekustīgo punktu teoriju, 46.lpp):

BRAUERA TEORĒMA (L.Brauers [1910], pierādīta 1909.gadā gadījumā, ja n=3).
Ja $V^n = \left\{ \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ...),\, \forall i > n :\, x_i = 0,\, \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1 \right\}$ un nepārtraukts attēlojums f attēlo kopu V^n sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

parMatemātikas vēsturnieki tā īsti joprojām nav noskaidrojuši, kurš tad

bijis pirmais slavenās nekustīgo punktu teorēmas autors. Taču, kā pamatojuši A.D. Miškis un I.M.Rabinovičs 1955.gadā (un ne tikai viņi vien!), tad iespējamie pirmsākumi šīs teorēmas idejai meklējami baltvācu matemātiķa, kurš noteiktu laiku strādājis arī Rīgā, Pīrsa Bola darbos [1904]. J.Dugundži un A.Granasa [1982] grāmatā (46.lpp) pierādīts, ka P.Bola un L.E.J.Brauera teorēmu formulējumi ir ekvivalenti.

BOLA TEORĒMA (P.Bols [1904], gadījumā, ja n=3).
Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums f attēlo kopu V^n kopā $E^n = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ...), \forall i > n : x_i = 0\}$. Tad vai nu $\exists \mathbf{x}^* \in V^n : f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$, vai arī $\exists \mathbf{x} \in \delta V^n : \mathbf{x} = \lambda f(\mathbf{x})$, $0 < \lambda < 1$.

P.Bols šo teorēmu iegūst kā pastarpinātu rezultātu, un tāpēc ilgu laiku matemātiskajās aprindās tas netiek pamanīts. Teorēmu P.Bols izmanto pierādījumā, lai pamatotu, ka diferenciālvienādojumu sistēmai ar noteiktām īpašībām eksistē atrisinājums, līdz ar to pirms tam iegūto rezultātu par nekustīgā punkta eksistenci viņš īpaši neizceļ.

Taču V.I.Istratesku [1981] raksta (113.lpp), ka ekvivalenta rezultāta formulējums atrodams arī H.Puankarē 1886.gada darbā.

Laika gaitā Bola-Brauera teorēma ir vairākkārt vispārināta. Vispirms Ž.Adamārs (J.Hadamard [1910]) devis pirmo pierādījumu galīgdimensionālā telpā, izmantojot Kronekera indeksus. 1912.gadā Brauers devis citu pierādījumu, izmantojot simpleksu aproksimācijas tehniku. Vēl citu sameklēsim J.V.Aleksandera [1922] un G.D.Birkhoffa, O.D.Kelloga [1922] rakstos. Populārāko Bola-Brauera teorēmas pierādījumu izstrādājuši Knasters-Kuratovskis-Mazurkevičs [1929], tas balstīts uz E.Špernera lemmu [1928]. Šodienas matemātiķi pazīst sekojošu formulējumu:

ŠAUDERA TEORĒMA (J.Šauders [1930]).
Ja nepārtraukts attēlojums f attēlo netukšu, kompaktu un izliektu normētas telpas apakškopu sevī, tad attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts.

Šīs teorēmas pierādījumu atradīsim J.Šaudera [1930] rakstā. Bet vēsture ar to vēl nav beigusies. 1935.gadā A.Tihonovs Šaudera teorēmas analogu pierādījis lokāli izliektā topoloģiskā vektoru telpā. Ar 1941.gada rakstu S.Kakutani iesāk Bola-Brauera-Šaudera teorēmas iespējamos vispārinājumus daudzvērtīgiem attēlojumiem. Savukārt V.L.Klē (Klee) 1955.gadā pamatojis, ka katram nepārtrauktam attēlojumam lokāli izliektās topoloģiskās vektoru telpas izliektā apakškopā nekustīgais punkts eksistē tikai tad, ja šī kopa ir arī kompakta. 1967.gadā H.E.Šarfs (Scarf) izstrādājis algoritmu (bāzētu uz Špernera lemmu) tuvinātai nekustīgā punkta atrašanai, kuru var lietot nekustīgā punkta meklēšanā ar datora palīdzību.

Ir zināmi vairāki Brauera un Šaudera teorēmu pierādījumu veidi. Ar tiem varam iepazīties, piemēram, E.Burgera [1959], C.B.Tompkina [1964], H.Nikaido [1968, 1970], E.Kleina [1973], D.Smarta [1974], J.Franklina [1980], K.J.Arrova, F.H.Hāna [1980], L.Lusternika, V.Soboļeva [1982], K.C.Bordera

[1985], U.Raituma [1993] darbos. Samērā izsmeļošu informāciju par Bola-Brauera-Šaudera teorēmas attīstības gaitu varam atrast J.Dugundži, A.Granasa [1982] un V.I.Istratesku [1981] grāmatās. Taču slavenākā nekustīgo punktu teorēma joprojām nedod mieru matemātiķu prātiem. Tā, piemēram, vēl 1981.gadā K.Grogera (Gröger) rakstā parādījies jauns Brauera teorēmas pierādījums, kā arī 1991.gada N.Šioji (Shioji) rakstā tiek vispārināta Knastera-Kuratovska-Mazurkeviča teorēma. Un droši vien tie nav pēdējie rezultāti.

Lai veiktu Bola-Brauera teorēmas pierādījumu, nepieciešams sagatavošanās darbs. Šeit izklāstītā pierādījuma shēma aizgūta no Lusternika un Soboļeva grāmatas [1982].

2.1 VIENKĀRŠĀKAIS GADĪJUMS

Vienkāršākajā gadījumā slavenā nekustīgo punktu teorēma ir viegli pierādāma, izmantojot tikai dažas nepārtrauktu funkciju īpašības.

APGALVOJUMS 2.1.1. Ja $f:[a;b]\to[a;b]$ ir nepārtraukta funkcija, tad

$$\exists x^* \in [a;b]: \ f(x^*) = x^*.$$

Pierādījums. Pieņemsim, ka intervāla galapunkti a un b nav funkcijas f nekustīgie punkti (ja kaut viens no tiem ir nekustīgais punkts, tad pierādījums pabeigts). Tad

$$f(a) > a \text{ un } f(b) < b.$$

Apskatīsim funkciju $g(x) = f(x) - x$, $x \in [a;b]$. Tā kā f un $y = x$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad g arī ir nepārtraukta funkcija kā nepārtrauktu funkciju starpība. Atliek ievērot, ka

$$g(a) = f(a) - a > 0 \text{ un } g(b) = f(b) - b < 0.$$

Nepārtraukta funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp divām savām vērtībām, tāpēc

$$\exists x^* \in]a;b[: \ g(x^*) = 0.$$

Tas nozīmē, ka $f(x^*) - x^* = 0$ jeb $f(x^*) = x^*$. ■

2.2 PAMATJĒDZIENI

Tā kā visi slēgti izliekti ķermeņi n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbf{R}^n$ ir homeomorfi viens ar otru (t.i., kopa X ir *homeomorfa* kopai Y, ja eksistē nepārtraukts bijektīvs attēlojums $f : X \to Y$ un tā inversais attēlojums $f^{-1} : Y \to X$ arī ir nepārtraukts, f šādā gadījumā sauc par *homeomorfismu*), tad ir pietiekoši pierādīt Bola-Brauera-Šaudera teorēmu nepārtrauktam attēlojumam n-dimensiju simpleksa gadījumā. Šeit izklāstītais pierādījums pieder Knāsteram-Kuratovskim-Mazurkēvicam (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) (1926.gads).

Vispirms sāksim ar simpleksa jēdziena noskaidrošanu.

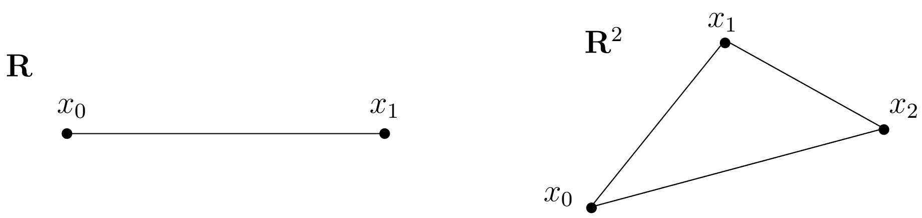
DEFINĪCIJA 2.2.1. Punktu kopu $x_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, ..., s$, sauc par *afīni neatkarīgu*, ja jebkuriem λ_i, $i = 1, 2, ..., s$, kuriem $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i = 0$ un $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i x_i = 0$, izpildās vienādības $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, ..., s$.

SECINĀJUMS 2.2.1. Maksimāli iespējamais punktu skaits telpā $\mathbf{R}^n$, kuri var veidot afīni neatkarīgu kopu, ir $n + 1$.

DEFINĪCIJA 2.2.2. Par *n-dimensiju simpleksu* sauc kopu

$$S_n = \{z = \sum_{i=0}^{n} x_i \lambda_i |\, \lambda_i \geq 0, i = 0, 1, ..., n, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\},$$

kur $x_i, i = 0, 1, ..., n$, veido afīni neatkarīgu kopu un katru no šīs kopas punktiem sauc par *simpleksa virsotni.*

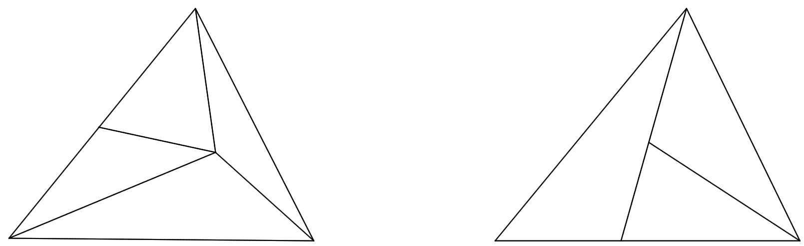


Tā, piemēram, 1-dimensiju simpleksu telpā $\mathbf{R}$ veido nogrieznis, kas savieno divas simpleksa virsotnes, bet 2-dimensiju simpleksu kopā $\mathbf{R}^2$ veido trīsstūris, kurš savieno trīs punktus. Citiem vārdiem sakot, n-dimensiju simpleksu veido $n + 1$ punkta afīni neatkarīgas kopas izliektā čaula.

Apskatīsim n-dimensiju simpleksu s_0 un apzīmēsim ar $x_0, x_1, ..., x_n$ tā virsotnes. Jebkuru k-dimensiju skaldni $(0 < k \leq n)$ no simpleksa apzīmēsim ar $(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$, kur x_{i_m}, $m = 0, 1, 2, ..., k$, veido šīs skaldnes virsotņu kopu. Pieņemsim, ka simplekss s_0 ir sadalīts simplikāli simpleksos s.

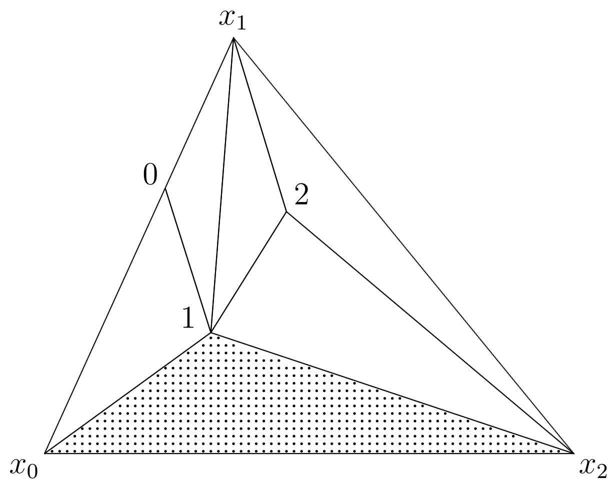
DEFINĪCIJA 2.2.3. *Simplikālais sadalījums* ir galīga skaita simpleksu kopa ar īpašību: diviem simpleksiem šajā kopā vai nu nav neviena kopīga punkta, vai to kopīgo punktu kopa ir abu simpleksu kopīga skaldne.

Piemēram, iepriekš apskatīto 2-dimensiju simpleksu (trīsstūri) var sadalīt simplikāli kā a) gadījumā, bet ne b). Ievērojiet, ka a) gadījumā visiem četriem simpleksiem ir kopīgs punkts — viens punkts ir 0-dimensionāla skaldne.



a) b)

Katrai simpleksu s virsotnei x tiek piekārtots skaitlis $\varphi(x)$ sekojošā veidā. Apskatīsim mazākās dimensijas skaldni pamatsimpleksā s_0, kura satur punktu x. Pieņemsim, ka tā ir skaldne $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k})$. Skaitli $\varphi(x)$ ņemam vienādu ar kādu no indeksiem $i_0, i_1, ..., i_k$. Piemēram, ja x sakrīt ar s_0 virsotni x_i, tad $\varphi(x) = i$; ja x atrodas uz viendimensiju skaldnes (x_i, x_j) un nesakrīt ar x_i vai x_j, tad $\varphi(x)$ var ņemt vienādu gan ar i, gan ar j. Ja x atrodas s_0 iekšienē (nepieder nevienai k-dimensiju skaldnei, $k = 0, 1, ..., n-1$), tad $\varphi(x)$ var būt vienāds ar jebkuru no $n + 1$ skaitļiem 0,1,2,..,n. Funkciju $\varphi(x)$ sauc par virsotņu *normālo funkciju*. Simpleksu s sauc par *reprezentatīvu*, ja tā virsotnēm ir piekārtoti $n + 1$ atšķirīgi skaitļi 0,1,...,n.



Zīmējumā parādīts 2-dimensiju simpleksa simplikālais sadalījums. Iepunktotais trīsstūris ir reprezentatīvais simplekss. Piekārtoto skaitļu 1 un 2 vietā varētu būt arī jebkurš no 0, 1 vai 2, bet 0 vietā var būt arī 1. Varat pārliecināties paši, ka visos gadījumos eksistēs reprezantatīvais simplekss.

2.3 BOLA-BRAUERA TEORĒMA

ŠPERNERA LEMMA. Lai kāds arī nebūtu simpleksa s_0 simplikālais sadalījums un lai kāda arī nebūtu virsotņu normālā funkcja $\varphi(x)$, vienmēr eksistē reprezentatīvie simpleksi, pie tam nepāra skaitā.

Pierādījums. Pierādījums tiek veikts ar matemātiskās indukcijas palīdzību pēc simpleksa virsotņu skaita n.

$n = 0$ — apgalvojums triviāls, jo simpleksu veido viens punkts.

Uzskatīsim apgalvojumu par patiesu $(n-1)$-dimensijas gadījumā un pierādīsim tā patiesumu n dimensiju gadījumā.

Pieņemsim, ka ir dots n-dimensiju simpleksa s_0 simplikālais sadalījums un virsotņu normālā funkcija. Mēģināsim saskaitīt n-dimensiju reprezentatīvos simpleksus, pie reizes saskaitot arī $(n-1)$-dimensiju reprezantatīvos simpleksus, kas atrodas n-dimensiju simpleksā. Iespējami 3 gadījumi.

1. Simplekss $s_1 \in s_0$ ir reprezentatīvs, t.i., satur virsotnes ar indeksiem 0,1,2,...,n; vienlaicīgi šis n-dimensiju simplekss satur vienu $(n-1)$-dimensiju simpleksu ar virsotnēm 0,1,2,...,$n-1$.

2. Simplekss $s_2 \in s_0$ nav reprezentatīvs, bet satur n virsotnes ar numuriem 0,1,..., $n-1$, pie tam vienu no šiem skaitļiem satur divreiz — tad tas satur divus $(n-1)$-dimensiju simpleksus.
3. Simplekss $s_3 \in s_0$ nav reprezentatīvs un virsotnēm nav piekārtots kāds no numuriem 0,1,..., $n-1$ — tad te nav neviena $(n-1)$-dimensiju simpleksa (ar virsotēm 0,1,..., $n-1$).

Tātad n-dimensiju reprezentatīvie simpleksi ir iespējami 1.gadījumā un to skaita paritāte sakrīt ar visos trijos gadījumos uzskaitīto $(n-1)$-dimensiju simpleksu (ar virsotnēm no 0 līdz $n-1$) paritāti. Kā mēs šos $(n-1)$-dimensiju reprezentatīvos simpleksus esam saskaitījuši? Principā divos veidos: 1)ja $(n-1)$-dimensiju reprezentatīvais simplekss ietilpst simpleksa s_0 iekšienē, tad tas ir ieskaitīts divreiz; 2)ja tas atrodas uz s_0 skaldnes, tad tas atrodas uz $(n-1)$-dimensijas reprezentatīvās skaldnes (un tāda ir tikai viena), pēc induktīvā pieņēmuma: sadalot $(n-1)$-dimensiju simpleksu simplikāli $(n-1)$-dimensiju simpleksos, reprezentatīvo $(n-1)$-dimensiju simpleksu skaits ir nepāra. Šī neparitāte sakrīt ar iepriekš (1-3) gadījumos uzskaitīto n-dimensiju reprezentatīvo simpleksu skaita neparitāti. Tā kā n-dimensiju reprezentatīvo simpleksu skaits ir nepāra, tad šādu simpleksu skaits nevar būt 0, t.i., reprezentatīvie simpleksi eksistē vienmēr. ■

LEMMA 2.3.1. (Borsuka lemma) Pieņemsim, ka n-dimensiju simplekss s_0 ir pārklāts ar $n+1$ slēgtām kopām $F_0, F_1, ..., F_n$ tādā veidā, ka jebkura tā k-dimensiju $(0 \leq k \leq n)$ skaldne $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ ir pārklāta ar kopām $F_{i_0}, F_{i_1}, ..., F_{i_k}$. Pie šādiem nosacījumiem simpleksā s_0 eksistē tāds punkts, kurš pieder visām kopām F_i, $i = 0, 1, ..., n$.

Pierādījums. Veiksim s_0 simplikālo sadalīšanu un simpleksu virsotnēs x definēsim funkciju $\varphi(x)$ sekojošā veidā.

Apskatīsim skaldni $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k})$, $0 \leq k \leq n$, ar mazāko dimensiju, kas ietver punktu x. Šis punkts atrodas kādā no kopām $F_{i_0}, F_{i_1}, ..., F_{i_k}$, kas pārklāj skaldni $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k})$. Funkcija $\varphi(x)$ ir vienāda ar to indeksu no šīm kopām, kura satur punktu x (vai ar jebkuru no tiem indeksiem, kuru kopu $F_{i_0}, F_{i_1}, ..., F_{i_k}$ šķēlumā punkts atrodas). $\varphi(x)$ ir virsotņu normālā funkcija. Pēc Špernera lemmas starp sadalījuma simpleksiem eksistē reprezentatīvais simplekss s_1. Tā virsotnēs x funkcija $\varphi(x)$ pieņem visas $n+1$ vērtības 0,1,...,n, t.i., s_1 virsotnes pieder $n+1$ atšķirīgām kopām F_i.

Sadalīsim s_0 aizvien mazākos un mazākos simpleksos. Pieņemsim, ka m-tā sadalījuma simpleksu diametri nepārsniedz δ_m pie nosacījuma $\delta_m \to 0$, kad $m \to \infty$. Apskatīsim reprezentatīvo simpleksu virkni $s_1, s_2, ..., s_m, ...$

pie 1-mā, 2-rā,..., m-tā,... sadalījuma. No kopas s_0 kompaktības seko, ka simpleksu $\{s_m\}$ virsotņu kopai eksistē robežpunkts x^*.

Izvēlēsimie patvaļīgu $\delta > 0$, apskatīsim tos simpleksus s_m, kuriem $\delta_m < \frac{\delta}{2}$. Lode ar rādiusu $\frac{\delta}{2}$ un centru x^* šķeļas vismaz ar vienu virsotni no s_m simpleksiem, tāpēc lodē ar rādiusu δ un centru x^* atrodas visas $n+1$ virsotnes no šī simpleksa. Tā kā s_m virsotnes pieder $n+1$ dažādām kopām $F_0, F_1, ..., F_n$, tad punkta x^* jebkurā δ apkārtnē eksistēs punkti no visām kopām F_i, $i = 0, 1, ..., n$. No šejienes seko, ka x^* ir robežpunkts visām kopām F_i; tā kā F_i ir slēgtas kopas, tad $x^* \in \cap_{i=0}^{n} F_i$. ■

BOLA-BRAUERA TEORĒMA. Jebkuram nepārtrauktam attēlojumam f, kas attēlo n-dimensiju simpleksu s sevī, eksistē nekustīgais punkts, t.i., $\exists x^* \in s: \ f(x^*) = x^*$.

Pierādījums. Simpleksā s izveidosim tā saucamo baricentrisko koordinātu sistēmu $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n$ tā, lai $\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i = 1$. Visiem s punktiem $\mu \geq 0$. Pieņemsim, ka punkts $x(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n) \in s$ pie funkcijas f pāriet par punktu $y(\nu_0, \nu_1, ..., \nu_n) \in s$, $y = f(x)$. Atkal $\sum\limits_{i=0}^{n} \nu_i = 1$, $\nu_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Pieņemsim, ka punkts $x(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n)$ atrodas uz skaldnes $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k})$, $0 \leq k \leq n$. Koordinātes $\mu_j = 0$, ja $j \neq i_0, i_1, ..., i_k$.

Tā kā $1 = \mu_{i_0} + \mu_{i_1} + ... + \mu_{i_k} = \sum\limits_{i=0}^{n} \nu_i = \nu_{i_0} + \nu_{i_1} + ... + \nu_{i_k}$, tad vienlaicīgi nevar izpildīties nevienādības $\mu_{i_0} < \nu_{i_0}$, $\mu_{i_1} < \nu i_1, ..., \mu_{i_k} < \nu i_k$, tāpēc vismaz vienam koordinātu pārim būs spēkā $\mu_{i_r} \geq \nu_{i_r}$. Ja ar F_i apzīmēsim to punktu kopu, kuriem μ_i koordināta nepieaug pie funkcijas f, tad jebkurš punkts x no skaldnes $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ tiek pārklāts ar kādu no kopām $F_{i_0}, F_{i_1}, ..., F_{i_k}$. Kopas F_i apmierina visas iepriekšējās lemmas prasības (F_i slēgtība seko no f nepārtrauktības). Tāpēc eksistē tāds punkts $x^*(\mu_0^*, \mu_1^*, ..., \mu_n^*) \in s$, kurš pieder visām šīm kopām. Neviena no μ_i^* koordināta pie f nepieaug. Un, ja $f(x^*) = y^*(\nu_0^*, \nu_1^*, ..., \nu_n^*)$, tad

$$\mu_i^* \geq \nu_i^*, \ i = 0, 1, ..., n. \qquad (4)$$

No (4) un baricentrisko koordinātu īpašībām seko, ka

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i^* \geq \sum_{i=0}^{*} \nu_i^* = 1. \qquad (5)$$

No (4) un (5) seko, ka $\mu_i^* = \nu_i^*$, $i = 0, 1, ..., n$, t.i., $f(x^*) = x^*$. ■

SEKAS 2.3.1. Pieņemsim, ka $S \subset \mathbf{R^n}$ ir izliekta, slēgta un ierobežota kopa un $f : S \to S$ ir nepārtraukts attēlojums, tad šim attēlojumam kopā S eksistē nekustīgais punkts.

Pierādījums. Kopa S ir homeomorfa ar telpas $\mathbf{R^n}$ simpleksu s, t.i., eksistē tāda nepārtraukta bijekcija $\gamma : S \to s$, ka arī tās inversais attēlojums $\gamma^{-1} : s \to S$ ir nepārtraukts attēlojums. Tad $\overline{f} = \gamma f \gamma^{-1} : \ s \to s$ ir nepārtraukts attēlojums un no pēdējās teorēmas seko, ka attēlojumam $\overline{f}$ eksistē nekustīgais punkts x^*. Iegūsim, ka $\gamma^{-1}(x^*)$ ir f nekustīgais punkts. ∎

SEKAS 2.3.2 (Šaudera teorēma). Pieņemsim, ka K ir izliekta un kompakta kopa n-dimensiju normētā vektoru telpā X. Ja $f : K \to K$ ir nepārtraukts attēlojums, tad $\exists x^* \in K : \ f(x^*) = x^*$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $e_1, e_2, ..., e_n$ ir telpas X bāze. Elementam $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi e_n$ piekārtosim punktu $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbf{R^n}$, kur $\mathbf{R^n}$ ir n-dimensiju Eiklīda telpa. Šī atbilstība φ ir *izometrija* (telpas X un Y sauc par izometriskām, ja eksistē tāda bijekcija (izometrija) $f : X \to Y$, ka jebkuriem $x, y \in X : d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)).$) un *izomorfisms* (telpas X un Y sauc par izomorfām, ja eksistē tāda bijekcija (izomorfisms) $f : X \to Y$, kas saglabā algebriskās operācijas, t.i., $\forall x, y \in X$, ja $f(x) = x'$un $f(y) = y'$, tad $f(x + y) = x' + y'$ un $f(\lambda x) = \lambda x'$, $\lambda \in \mathbf{R}$), kas izliektu, kompaktu kopu $K \subset X$ attēlo par ir izliektu, kompaktu kopu $S \subset \mathbf{R^n}$. Tad $\overline{f} = \varphi f \varphi^{-1}$ ir nepārtraukts kopas S attēlojums. Pēc Sekām 1 eksistē tāds punkts $\overline{x}^* \in S$, kas ir $\overline{f}$ nekustīgais punkts. Tad $\varphi f \varphi^{-1}(\overline{x}^*) = \overline{x}^*$ vai $f \varphi^{-1}(\overline{x}^*) = \varphi^{-1}(\overline{x}^*)$, t.i., $\varphi^{-1}(\overline{x}^*)$ ir f nekustīgais punkts. ∎

NODAĻA 3

ARROVA-HĀNA MODEĻA ANALOGS AR W-NEPĀRTRAUKTU PIEPRASĪJUMA PĀRPALIKUMA FUNKCIJU

3.1 W-NEPĀRTRAUKTĪBA UN PAMAT-REZULTĀTS

Pieņemsim, ka X ir metriska telpa ar metriku d, $D(f) \subset X$ ir attēlojuma f definīcijas kopa un $f : D(f) \to X$.

DEFINĪCIJA 3.1.1. Attēlojumu f sauc par *w-nepārtrauktu ($w > 0$) punktā* $x_0 \in D(f)$, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem punktiem $x \in D(f)$: $d(x_0, x) < \delta$ izpildās nosacījums $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon + w$.

DEFINĪCIJA 3.1.2. Ja attēlojums f ir *w-nepārtraukts* jebkurā definīcijas apgabala $D(f)$ punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu kopā $D(f)$ jeb w-nepārtrauktu.

Ja pieņemam, ka $w = 0$, iegūsim nepārtraukta attēlojuma definīciju.

Šādā izskatā w-nepārtrauktas funkcijas jēdziens dots I.Bulas darbā 1996.gadā, kurš publicēts *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications*, V.26.

Piemērs 3.1.2. Dirihlē funkcija $f : \mathbf{R} \to \{0,\, 1\}$, kas definēta šādi

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{I}, \end{cases}$$

ir 1-nepārtraukta. ∎

Piemērā 3.1.2 Dirihlē funkciju mēs varam uzskatīt arī par 10-nepārtrauktu vai pat 10^{10}-nepārtrauktu — Definīcija 3.1.2 ir apmierinta. Mēs negribētu uzlikt stingrākus nosacījumus uz w izvēli. Taču, domājot par iespējamo reālo situāciju, gribam w izvēlēties pēc iespējas mazu.

Pamatrezultāts, kas nepieciešams Arrova-Hāna modeļa analogam ar w-nepārtrauktu pieprasījuma pārpalikuma funkciju, ir nekustīgo punktu teorēma. Tikai šajā gadījumā būs runa par kvazi-nekustīgajiem punktiem, t.i., tādiem punktiem, kuriem attālums starp pašu punktu un tā attēlu ir novērtējams ar kādu konkrētu konstanti, kas saistīta ar w lielumu. Šeit noderēs O.Zaiceva iegūtais rezultāts 1998.gadā (publicēts *Proc. of the Latvian Academy of Sciences, Section B*), kuru mūsu gadījumā varam pārformulēt šādi:

TEORĒMA 3.1.1. Ja K ir netukša, kompakta un izliekta normētas telpas X apakškopa, kuru w-nepārtraukts attēlojums f attēlo sevī, tad kopā K eksistē tāds punkts x^*, ka $||f(x^*) - x^*|| \leq w$.

3.2 W-NEPĀRTRAUKTU FUNKCIJU ĪPAŠĪBAS

Iepazīstoties tālāk ar tirgus līdzsvara teoriju, nonāksim pie secinājuma, ka tiešā veidā lietot Teorēmu 3.1.1 par w-nepārtraukta attēlojuma w-nekustīgo punktu pagaidām nemākam. Nonāksim pie secinājuma, ka nepieciešams zināt precīzi w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības. Tālab vispirms precizēsim w-nepārtraukta attēlojuma definīciju normētās telpās (jo ekonomiskā teorija pamatā ir attīstīta telpā $\mathbf{R}^n$, kuru varam uzskatīt par normētu telpu; vispārīgāki rezultāti pagaidām mums nav nepieciešami).

DEFINĪCIJA 3.2.1. Attēlojumu $f : X \to Y$, kur X, Y - normētas vektoru telpas, sauc par *w-nepārtrauktu ($w > 0$) punktā* $x_0 \in X$, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem punktiem $x \in X$: $||x - x_0||_X < \delta$ izpildās nosacījums: $||f(x) - f(x_0)||_Y < \varepsilon + w$.

Ja attēlojums f ir *w-nepārtraukts* jebkurā telpas X punktā, tad šādu attēlojumu sauc par w-nepārtrauktu telpā X jeb w-nepārtrauktu

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad (||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon + w).$$

Piemērs 3.2.1. Vispārinātā Dirihlē funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \{0, 1\}$, kas definēta sekojoši:

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \forall x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}\ x_i \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \exists x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}\ x_i \in \mathbf{I}, \end{cases}$$

ir 1-nepārtraukts. ■

Tālāk apskatīsim w-nepārtrauktu attēlojumu īpašības, kuras būs nepieciešamas vēlāk kvazi-līdzsvara pierādījumā.

TEORĒMA 3.2.1. Pieņemsim, ka attēlojums $f : X \to Y$ ir w'-nepārtraukts, attēlojums $g : X \to Y$ ir w''-nepārtraukts, kur X, Y ir normētas vektoru telpas. Tad $f + g$ ir $w' + w''$-nepārtraukts attēlojums.

Pierādījums. Brīvi izvēlēsimies punktu $x_0 \in X$ un $\varepsilon > 0$. Tā kā f ir w'-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in X \quad (||x - x_0||_X < \delta_1 \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_Y < \frac{\varepsilon}{2} + w'),$$

un, tā kā g ir w''-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in X \quad (||x - x_0||_X < \delta_2 \Rightarrow ||g(x) - g(x_0)||_Y < \frac{\varepsilon}{2} + w'').$$

Definēsim $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tad

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad (||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow \; & ||(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))||_Y = \\ & = ||(f(x) - (f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))||_Y \leq \\ & \leq ||f(x) - (f(x_0)||_Y + ||g(x) - g(x_0)||_Y < \\ & < \tfrac{\varepsilon}{2} + w' + \tfrac{\varepsilon}{2} + w'' = \varepsilon + (w' + w'')\ ). \blacksquare \end{aligned}$$

SEKAS 3.2.1. Ja $f : X \to Y$ ir w-nepārtraukts attēlojums un $f : X \to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, tad $f + g$ ir w-nepārtraukts attēlojums.

Lai runātu par w-nepārtrauktu attēlojumu reizinājumu, vispirms vienosimies, ko mēs saprotam ar jēdzienu "reizinājums" normētā vektoru telpā.

DEFINĪCIJA 3.2.2. (S.Lengs [1976], 118.lpp) Pieņemsim, ka X, Y, Z ir normētas vektoru telpas. Par vektoru $a \in X$, $v \in Y$ *reizinājumu* sauc attēlojumu, kas pārim $(a, v) \in X \times Y$ piekārto elementu $av = z \in Z$ un kas apmierina sekojošus nosacījumus:
1. Ja $a, b \in X$ un $v \in Y$, tad $(a + b)v = av + bv$.
Ja $a \in X$ un $u, v \in Y$, tad $a(u + v) = au + av$.
2. Ja $c \in \mathbf{R}$, $a \in X$, $v \in Y$, tad $(ca)v = c(av) = a(cv)$.
3. $\forall a \in X\ \forall v \in Y \quad ||av||_Z \leq ||a||_X\, ||v||_Y$.

Kā vienkāršāko piemēru varam minēt vektoru skalāro reizinājumu telpā $\mathbf{R}^n$ (t.i., $X = Y = \mathbf{R}^n$ un $Z = \mathbf{R}$).

Pieņemsim, ka dots reizinājums $X \times Y \to Z$. Apskatīsim attēlojumus $f : K \to X$ un $g : K \to Y$, kur K ir normētas vektoru telpas V apakškopa. Tad ar attēlojumu reizinājumu sapratīsim

$$\forall x \in K \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

TEORĒMA 3.2.2. Pieņemsim, ka attēlojums $f : V \to X$ ir w'-nepārtraukts, attēlojums $g : V \to Y$ ir w''-nepārtraukts, V, X, Y ir normētas vektoru telpas. Pie šiem nosacījumiem $f \cdot g$ ir $w'w'' + w'\, ||g(x_0)||_Y + w''\, ||f(x_0)||_X$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā x_0 .

Pierādījums. Brīvi izvēlēsimies punktu $x_0 \in V$ un $\varepsilon > 0$. Definēsim

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\Bigg(- w' - w'' - ||g(x_0)||_Y - ||f(x_0)||_X +$$

$$+ \sqrt{(w' + w'' + ||g(x_0)||_Y + ||f(x_0)||_X)^2 + 4\varepsilon}\Bigg) > 0.$$

Tā kā f ir w'-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in V \quad (||x - x_0||_V < \delta_1 \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_Y < \varepsilon' + w'),$$

Tā kā g ir w''-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in V \quad (||x - x_0||_V < \delta_2 \Rightarrow ||g(x) - g(x_0)||_Y < \varepsilon'' + w'').$$

Izvēlēsimies $\delta = \min\{\delta_1,\, \delta_2\}$, tad

$$\forall x \in V \quad (||x - x_0||_V < \delta \Rightarrow ||(f(x)g(x)) - f(x_0)g(x_0)||_Z =$$

$$
\begin{aligned}
&= ||(f(x)g(x)) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)||_Z \leq \\
&\leq ||g(x)(f(x) - f(x_0))||_Z + ||f(x_0)(g(x) - g(x_0))||_Z \leq \\
&\leq ||(g(x) - g(x_0) + g(x_0))(f(x) - f(x_0))||_Z + ||f(x_0)||_X ||g(x) - g(x_0)||_Y \leq \\
&\leq ||g(x) - g(x_0)||_Y ||f(x) - f(x_0)||_X + ||g(x_0)||_Y ||f(x) - f(x_0)||_X + \\
&\qquad\qquad + ||f(x_0)||_X ||g(x) - g(x_0)||_Y < \\
&< (\varepsilon' + w'')(\varepsilon' + w') + ||g(x_0)||_Y (\varepsilon' + w') + ||f(x_0)||_X (\varepsilon' + w'') = \\
&= \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon' w' + \varepsilon' w'' + w'w'' + \\
&\qquad + ||g(x_0)||_Y \varepsilon' + ||g(x_0)||_Y w' + ||f(x_0)||_X \varepsilon' + ||f(x_0)||_X w''.
\end{aligned}
$$

Atliek pamatot, ka

$$\varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon' w' + \varepsilon' w'' + ||g(x_0)||_Y \varepsilon' + ||f(x_0)||_X \varepsilon' = \varepsilon.$$

Apzīmēsim $w' + w'' + ||g(x_0)||_Y + ||f(x_0)||_X = t$. Parādīsim, ka $(\varepsilon')^2 + \varepsilon' t = \varepsilon$. Aizvietojot sākotnēji izvēlēto $\varepsilon' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2 + 4\varepsilon} - t\right)$ vērtību, iegūsim

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\left(t^2 + 4\varepsilon - 2t\sqrt{t^2 + 4\varepsilon} + t^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{t^2 + 4\varepsilon} - t\right) t = \\
&= \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}t\sqrt{t^2 + 4\varepsilon} + \varepsilon - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t\sqrt{t^2 + 4\varepsilon} = \varepsilon. \blacksquare
\end{aligned}
$$

SEKAS 3.2.2. Ja $f : V \to X$ ir w-nepārtraukts attēlojums un $g : V \to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, tad $f \cdot g$ ir $||g(x_0)||_Y\, w$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas V punktā x_0 .

SEKAS 3.2.3. Ja $f : V \to X$ ir w-nepārtraukts attēlojums un c ir konstante, tad $c \cdot f$ ir $|c|\, w$-nepārtraukts attēlojums.

SEKAS 3.2.4. Ja $f : X \to Y$ ir w'-nepārtraukts attēlojums un $g : X \to Y$ ir w''-nepārtraukts attēlojums, X un Y normētas vektoru telpas, tad $f - g$ ir $w' + w''$-nepārtraukts attēlojums.

Pierādījums. Pēc Sekām 3.2.3 attēlojums $-g = (-1)g$ ir w''-nepārtraukts attēlojums dotajā punktā, tāpēc, ievērojot Teorēmu 3.2.1, $f + (-1)g = f - g$ ir $w' + w''$-nepārtraukts attēlojums. $\blacksquare$

Dalījuma gadījumā apmierināsimies tikai ar vienu vienkāršotu situāciju.

TEORĒMA 3.2.3. Ja $f : X \to [1; +\infty[$ ir w-nepārtraukts attēlojums normētā vektoru telpā X, tad $\frac{1}{f}$ ir $\frac{w}{f(x_0)}$-nepārtraukts attēlojums katrā telpas X punktā x_0.

Pierādījums. Brīvi izvēlēsimies punktu $x_0 \in X$ un $\varepsilon > 0$, definēsim $\varepsilon' = \varepsilon\, f(x_0)$. Tā kā f ir w-nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad (||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon' + w).$$

Tādā gadījumā:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} \right| = \frac{|f(x_0) - f(x)|}{f(x)f(x_0)} <$$
$$< \frac{\varepsilon' + w}{f(x)f(x_0)} \leq \frac{\varepsilon' + w}{f(x_0)} = \frac{\varepsilon\, f(x_0) + w}{f(x_0)} = \varepsilon + \frac{w}{f(x_0)}. \blacksquare$$

Zināmu lomu ekonomiskajos modeļos spēlē nepārtraukta attēlojuma vērtību kopas ierobežotība, ja vien definīcijas kopa ir kompakta. Šādā situācijā var garantēt arī vērtību kopas kompaktību, taču w-nepārtraukta attēlojuma gadījumā vairāk par vērtību kopas ierobežotību iegūt nevar.

TEORĒMA 3.2.4. Pieņemsim, ka X, Y ir normētas telpas, kopa A ir kompakta telpas X apakškopa un $f : A \to Y$ ir w-nepārtraukts attēlojums. Tad kopa $f(A)$ ir ierobežota.

Kompaktas kopas attēla kompaktību pie w-nepārtraukta attēlojuma nevar garantēt, to pamato kaut vai šis piemērs:

Piemērs 3.2.2. $f : [0; 1] \to [0; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & x \in]0; 1[, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

f ir $\frac{1}{2}$-nepārtraukts attēlojums, kuram vērtību kopa $f([0; 1]) =]0; 1[$ nav kompakta. $\blacksquare$

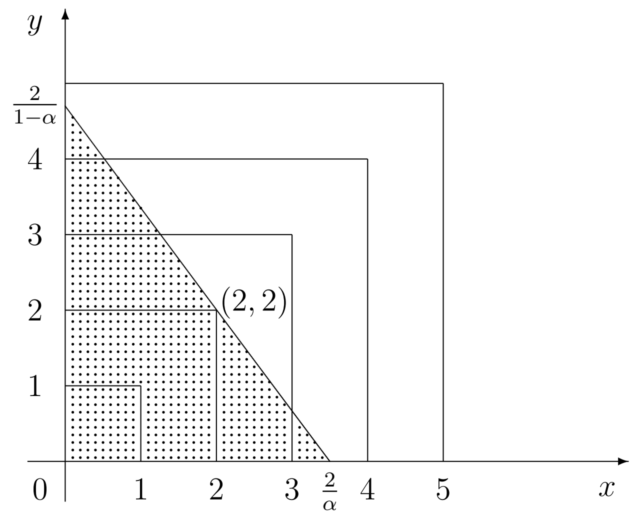
3.3 MODELIS AR PĀRTRAUKTU PIEPRASĪJUMA PĀRPALIKUMA FUNKCIJU

Ekonomikā parasti apskata nepārtrauktas lielumu funkcijas, jo tā ir matemātiski ērtāk (visa pamatteorija ir izstrādāta priekš nepārtrauktām funkcijām). Bet vai patiešām ir iespējamas pārtrauktas pieprasījuma, piedāvājuma un līdz ar to pieprasījuma pārpalikuma funkcijas?

Aplūkosim priekšrocību sakārtojumu telpā $\mathbf{R}^2_+$, kuru reprezentē derīguma funkcija $u(x,y) = \max\{x, y\}$, un sākuma resursu daudzums ir $\omega = (2,2)$. Vienādo derīgumu līknes vērtībām 1, 2, 3, 4 un 5 ir attēlotas 3.3.1.zīmējumā. Pieņemsim, ka $\mathbf{p} = (\alpha, 1-\alpha)$ ir cenu vektors ($\alpha \in]0;1[$). Atradīsim derīguma funkcijas u maksimālo vērtību pie budžeta vienādības

$$\alpha x + (1-\alpha)y = 2\alpha + 2(1-\alpha) = 2.$$

Šī budžeta līnija iet caur punktu $(2,2)$ un krusto koordinātu asis punktos $(0, \frac{2}{1-\alpha})$ un $(\frac{2}{\alpha}, 0)$.



3.3.1.zīm.

No 3.3.1.zīmējuma redzams, ka maksimālais derīguma vektors u pie dotās budžeta kopas (zīmējumā tā ir iepunktētā kopa) ir punkts $(0, \frac{2}{1-\alpha})$, ja $\alpha > \frac{1}{2}$, un $(\frac{2}{\alpha}, 0)$, ja $\alpha < \frac{1}{2}$. Ja $\alpha = \frac{1}{2}$, tad $\frac{2}{1-\alpha} = \frac{2}{\alpha}$, tāpēc šajā gadījumā ir divi maksimizējošie vektori. Pieprasījuma funkcija šajā gadījumā ir

$$x(p) = x(\alpha, 1-\alpha) = \begin{cases} (0, \frac{2}{1-\alpha}), & \alpha > \frac{1}{2}, \\ \{(0,4),(4,0)\}, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ (\frac{2}{\alpha}, 0), & \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Punktā $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pieprasījuma multifunkcija ir pārtraukta.

C.D.Aliprantis grāmatā "Problems in Equilibrium Theory" (1996, Springer-Verlag) ir parādījis, ka derīguma funkcija $u : X \to \mathbf{R}$ (kur vispārīgā gadījumā

X ir topoloģiska telpa), kura reprezentē nepārtrauktu priekšrocību sakārtojumu, nav nepieciešami nepārtraukta funkcija. Ja mēs analīzi sākam ar patvaļīgu pārtrauktu derīguma funkciju, tad mums vispār nav izstrādātu matemātisko līdzekļu, lai atrastu atbilstošo pieprasījuma funkciju (klasiskajā situācijā tiek meklēts patērētāja derīguma funkcijas maksimums pie dotas budžeta vienādības (nevienādības), tiek izmantota Lagranža reizinātāju metode, lai atrastu pieprasījuma funkciju).

Arrova-Hāna iepriekš aprakstītie modeļi apskata ekonomiku bez dota priekšrocību sakārtojuma. Kad pieprsījuma pārpalikuma funkcija varētu būt pārtraukta? Apskatīsim preci i un fiksētu cenu sistēmu $\mathbf{p}$. Ja šī prece, piemēram, ir lidmašīna vai elektrostacija, tad tās pieprasījums $x_i(\mathbf{p})$ dabīgi ir vesels skaitlis. Acīmredzot, ja prece ir gabalprece (kā galds, kurpes, ziedi, mašīna, u.c.), tad pieprasījums un arī piedāvājums tiks izteikti ar veseliem skaitļiem. Tāpēc šādu preču pieprasījuma un piedāvājuma funkcijas kā funkcijas no cenas ir pārtrauktas funkcijas, tāda līdz ar to ir arī pieprasījuma pārpalikuma funkcija.

Ko var pateikt par līdzsvara eksistenci ekonomikā ar pārtrauktu pieprasījuma pārpalikuma funkciju? Piemēram, ja tā ir w-nepārtraukta funkcija? Šajā nodaļā piedāvāsim modeli, kas varētu atbildēt uz uzstādīto jautājumu.

Pamatā modeļa apraksts satur iepriekš apskatītā K.J.Arrova un F.H.Hāna modeļa pieņēmumus. Modeļu kopīgās nostādnes ir sekojošas: ir patērētāji un ražotāji, ir n dažādi labumi (preces un pakalpojumi). Ja mēs raksturojam ar x_{h_i} patērētāja h lēmumu attiecībā pret i-to labumu, tad $x_{h_i} < 0$ nozīmē, ka i ir labums, ko piedāvā patērētājs h, un $x_{h_i} \geq$ nozīmē, ka i ir labums, ko pieprasa patērētājs h (ietverot arī 0 pieprasījumu). Tad $x_i = \sum\limits_h x_{h_i}$ nozīmē i-tā labuma kopumu, ko piedāvā (ja $x_i < 0$) vai pieprasa (ja $x_i \geq 0$) visi patērētāji kopumā. Ja mš raksturojam ar y_{f_i} ražotaja f lēmumu attiecībā pret i-to labumu, tad ar $y_{f_i} < 0$ sapratīsim, ka i-to labumu ražotājs f pieprasa, un ar $y_{f_i} \geq 0$ sapratīsim, ka i-to labumu ražotājs f piedāvā (ietverot arī 0 piedāvājumu). Tad $y_i = \sum\limits_f y_{f_i}$ nozīmē i-tā labuma kopumu, ko piedāvā (ja $y_i \leq 0$) vai pieprasa (ja $y_i < 0$) visi ražotāji kopumā. Ar $\overline{x}_i$ sapratīsim to i-tā labuma daudzumu, kas apskatāmajā laika brīdī ir dots kā sākotnējais labuma daudzums jeb resursi. Atzīmēsim, ka tas vienmēr ir nenegatīvs lielums. Tirgus līdzsvars ir saistīts ar atšķirīgo ražotāju un patērētāju lēmumu savienojamību. Kopējais piedāvājums ir summa no labumu produkcijas un labumiem, kas saražoti līdz šim. Tādā gadījumā i-tā labuma pieprasījuma pārpalikums ir $\sigma_i = x_i - y_i - \overline{x}_i$, $i = 1, ..., n$.

PIEŅĒMUMS 3.3.1. Pieņemsim, ka $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ir doto n labumu cenu vektors, un pieņemsim, ka pieprasījuma pārpalikumu σ_i ir iespējams izteikt kā funkciju no $\mathbf{p}$ vienā vienīgā veidā. Šo funkciju apzīmēsim ar z_i, $i = 1, ..., n$, tad $z_i = (\mathbf{p}) = \mathbf{x_i}(\mathbf{p}) - \mathbf{y_i}(\mathbf{p}) - \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{i}(\mathbf{p})$, $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{p}) \\ z_2(\mathbf{p}) \\ ... \\ z_n(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$,

$\mathbf{z}$ — kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija.

PIEŅĒMUMS 3.3.2. $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(k\mathbf{p})$, $\forall \mathbf{p} > \mathbf{0}$ un $k > 0$.

No Pieņēmuma 3.3.2 seko, ka cenu vektors ir normējams un tāpēc turpmāk uzskatīsim, ka tas pieder n-dimensiju simpleksam

$$S_n = \{\mathbf{p} \,|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \mathbf{p} > \mathbf{0}\} = \{\mathbf{p} \,|\, (\forall i = 1, 2, ..., n:\ p_i \geq 0)\,\&\, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,\}.$$

Pamatojoties uz Teorēmu 3.2.4, kopas $\mathbf{z}(S_n)$ ierobežotība saglabāsies arī pie pieņēmuma, ja $\mathbf{z}$ ir w-nepārtraukts attēlojums. $\mathbf{z}(S_n)$ ierobežotība ekonomiski nozīmē to, ka pieprasījuma pārpalikuma funkcijas vērtības nevar tiekties uz bezgalību (ne pieprasījums, ne piedāvājums nevar būt bezgalīgi liels).

Tālākie pieņēmumi ir atšķirīgi no K.J.Arrova un F.H.Hāna standartmodeļa.

PIEŅĒMUMS 3.3.3. Kopējā pieprasījuma pārpalikuma funkcija $\mathbf{z}$ ir w-nepārtraukta visā definīcijas apgabalā S_n.

Pieņēmums par kopējās pieprasījuma pārpalikuma funkcijas w-nepārtrauktību paver iespēju modeli lietot arī nestabilu (piemēram, pārejas tipa) ekonomisko situāciju aprakstos.

Ja $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ ir w-nepārtraukta funkcija, tad laikam gan garantēt tirgus līdzsvaru, t.i., tāda cenu vektora eksistenci, kuram $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$, nebūs iespējams.

DEFINĪCIJA 3.3.2. Cenu vektoru $\mathbf{p}^* \in S_n$ sauc par *tirgus k-līdzsvaru*, ja eksistē tāda konstante $k > 0$, ka $\sum\limits_{i:\, z_i(\mathbf{p}^*) > 0} z_i(\mathbf{p}^*) \leq k$.

Tirgus k-līdzsvars Definīcijas 3.3.2 izpratnē nozīmē, ka pieprasījuma pārpalikuma funkcijas pozitīvo koordinātu summa ir ierobežota. Varam arī sacīt, ka konstante k raksturo novirzi no tirgus līdzsvara Definīcijas 1.1.1 izpratnē jeb tas ir kopīgais neapmierinātā pieprasījuma daudzums, kurš pie dotā $\mathbf{p}^* \in S_n$ ir maksimālais iespējamais.

Ir dabīgi pieņemt, ka jebkuram cenu vektoram $\mathbf{p} \in S_n$ eksistē vismaz viens tāds labums i ar cenu $p_i > 0$, pēc kura pieprasījums ir apmierināts, t.i., $z_i(\mathbf{p}) \leq 0$.

Ja kaut kādā ekonomikā $\mathcal{E}$ ar pieprasījuma pārpalikuma vektoru $\mathbf{z}(\mathbf{p}),\ \mathbf{p} \in S_n$ izpildās Valrasa likums, t.i., $\mathbf{p}\,\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ jebkuram $\mathbf{p} \in S_n$, tad jebkuram $\mathbf{p} \in S_n$ izpildās nevienādība

$$\gamma_p = \sum_{i:z_i(\mathbf{p})\leq 0} p_i > 0.$$

Ērtības labad tālāk mēs rakstīsim "$z_i(\mathbf{p}) \leq 0$" tajās vietās, kur vajadzētu "$i : z_i(\mathbf{p}) \leq 0$" un citos līdzīgos gadījumos.

Patiešām, ja kādam $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in S_n$ izpildītos $\sum\limits_{z_i(\mathbf{p})\leq 0} p_i = 0$, tad no

$$\sum_{z_i(\mathbf{p})\leq 0} p_i + \sum_{z_i(\mathbf{p})>0} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

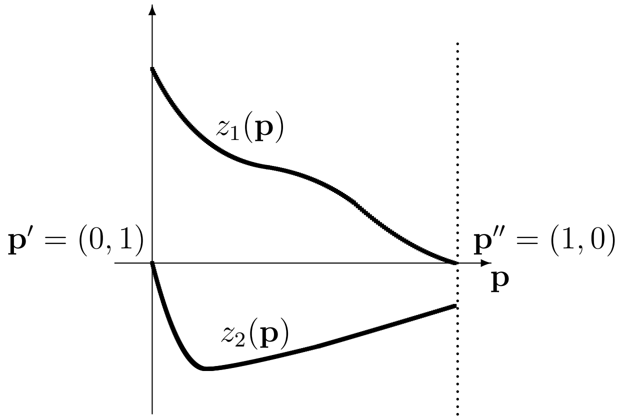
sekotu tāda indeksa i_0 eksistence, ka $p_{i_0} > 0$ un $z_{i_0}(\mathbf{p}) = 0$, jo pretējā gadījumā nebūtu apmierināts Valrasa likums.

Mūsu nākošais pieņēmums pieprasa vienmērīgu apakšējās robežas eksistenci summām $\sum\limits_{z_i(\mathbf{p})\leq 0} p_i$ visiem $\mathbf{p} \in S_n$.

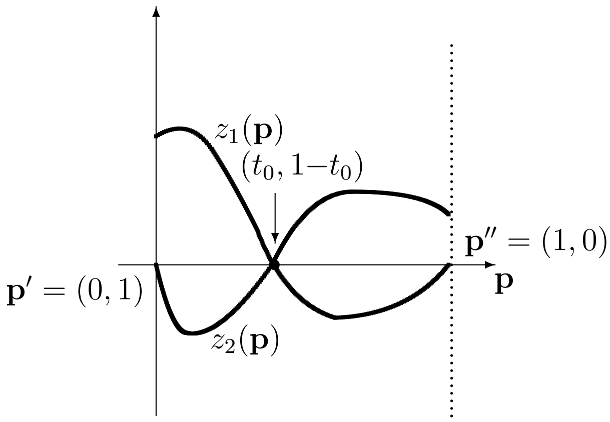
PIEŅĒMUMS 3.3.4.

$$\exists\gamma \quad \gamma = \inf_{\mathbf{p}\in S_n} \gamma_p = \inf_{\mathbf{p}\in S_n} \sum_{z_i(\mathbf{p})\leq 0} p_i > 0.$$

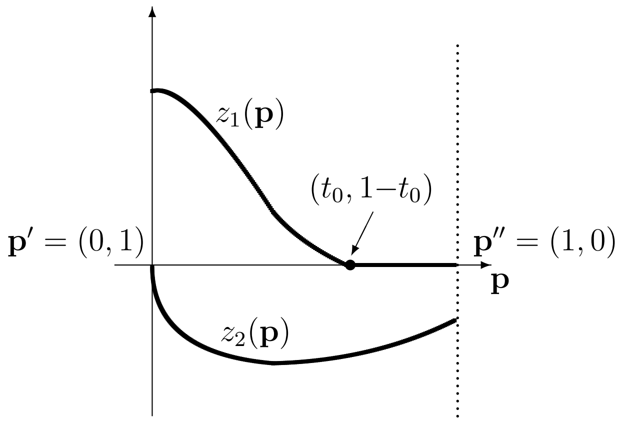
Apskatīsim dažus vienkāršus piemērus, kas demonstrē, ka Pieņēmums 3.3.4 un Valrasa likums ir neatkarīgi pieņēmumi. 3.3.2.zīmējuma katrā atsevišķajā gadījumā funkcijas z_1 un z_2 ir apskatītas intervālā $[\mathbf{p}', \mathbf{p}'']$, kas atbilst simpleksam S_2. Ja mēs reprezentējam vektoru $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in S_2$ kā $\mathbf{p} = (1-t)\mathbf{p}' + t\mathbf{p}''$, kur $t \in [0,1]$, tad $p_i = (1-t)p_i' + tp_i''$, no kurienes seko, ka $p_1 = t$ un $p_2 = 1-t$. Patvaļīgi izvēlētam $t \in (0,1)$ Valrasa likums $\mathbf{p}\,\mathbf{z}(\mathbf{p}) = p_1 z_1((p_1,p_2)) + p_2 z_2((p_1,p_2)) = 0$ reducējas par vienādību $z_2(\mathbf{p}) = -\frac{t}{1-t} z_1(\mathbf{p})$ vai $z_1(\mathbf{p}) = -\frac{1-t}{t} z_2(\mathbf{p})$. Gadījumi $t \in \{0,1\}$ jāapskata atsevišķi.



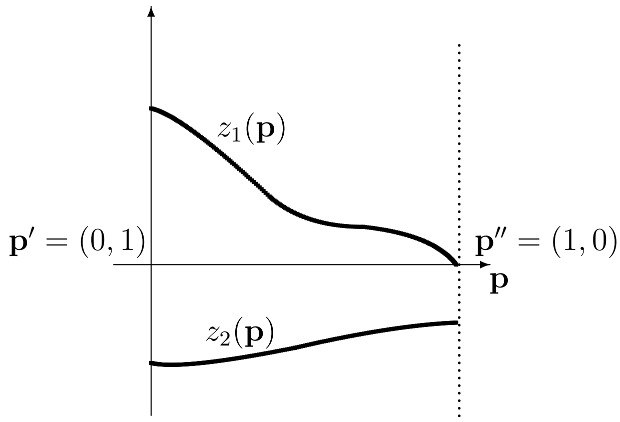
3.3.2.zīm. a) Izpildās Valrasa likums, neizpildās Pieņēmums 3.3.4.



3.3.2.zīm. b) Izpildās abi pieņēmumi.



3.3.2.zīm. c) Izpildās Pieņēmums 3.3.4, neizpildās Valrasa likums.



3.3.2.zīm. d) Neizpildās abi pieņēmumi.

3.3.2.zīmējuma a) un b) gadījumos izpildās Valrasa likums, bet c) un d) gadījumos var atrast tādu cenu vektoru $\mathbf{p} \in S_2$ (piemēram, d) gadījumā vektors $\mathbf{p}'$), ka $\mathbf{p}\,\mathbf{z}(\mathbf{p}) \neq 0$. 3.3.2.zīmējuma a) un d) gadījumā neizpildās Pieņēmums 3.3.4. Abos gadījumos jebkuram $\mathbf{p} \in S_2$ varam izskaitļot $\sum_{z_i(\mathbf{p})\leq 0} p_i = p_2 = 1 - t$ un tāpēc $\inf_{t\in(0,1)} (1-t) = 0$. Savukārt 3.3.2.zīmējuma b) un c) gadījumos Pieņēmums 3.3.4 izpildās ar šādu γ vērtību:

$$\gamma = \min\{t_0, 1 - t_0\}.$$

Tagad varam pierādīt līdzsvara teorēmu, tikai šajā modelī būs runa par kvazi-līdzsvaru. Tā kā telpā $\mathbf{R}^n$ visas normas ir ekvivalentas, tad mēs varam vienoties par vienas konkrētas izmantošanu. Tātad vienojamies, ka jebkuram $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ norma ir

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

TEORĒMA 3.3.1. Pieņemsim, ka ekonomikā ar galīgu labumu skaitu n izpildās Pieņēmumi 3.3.1, 3.3.2 un 3.3.4 ar $\gamma > 0$. Pieņemsim, ka

$$w_+ = w_+(n,\gamma) = \frac{-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 8n\gamma}}{2n}.$$

Ja Pieņēmums 3.3.3 izpildās ar konstanti $w \in [0, w_+[$, tad ekonomikā eksistē

k-līdzsvars jebkurai konstantei

$$k \geq \frac{nw^2 + (n+1)w}{2\gamma - nw^2 - (n+1)w}.$$

Piezīme. Situācija ar $w = 0$ un $k = 0$ interpretējama kā līdzsvars (nevis kvazi-līdzsvars).

Pierādījums. Patvaļīgam cenu vektoram $\mathbf{p} \in S_n$ definēsim

$$z_i^+(\mathbf{p}) = \max\{0,\, z_i(\mathbf{p})\},\ i = 1, ..., n,$$

$$\mathbf{z}^+(\mathbf{p}) = (z_1^+(\mathbf{p}), \ldots, z_n^+(\mathbf{p})),$$

$$\nu(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{e} = 1 + \sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p}) \quad \text{un}$$

$$t_i(\mathbf{p}) = \frac{p_i + z_i^+(\mathbf{p})}{\nu(\mathbf{p})},\ i = 1, ..., n,$$

kur ar $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$ tiek apzīmēts $\mathbf{R}^n$ vektors, kura visas koordinātas ir 1. Ievērosim, ka $\|\mathbf{e}\| = n$.

Tagad definēsim attēlojumu $\mathbf{T} : S_n \to S_n$ ar vienādību

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p})}{(\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p}))\,\mathbf{e}}.$$

Tā kā $0 \leq t_i(\mathbf{p}) \leq 1$ jebkuram i un

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i + z_i^+(\mathbf{p}))}{\nu(p)} = \frac{1 + \sum_{z_i(\mathbf{p})>0} z_i(\mathbf{p})}{\nu(\mathbf{p})} = 1,$$

tad $\mathbf{T}(\mathbf{p}) : S_n \to S_n$.

Noskaidrosim, kādas īpašības piemīt attēlojumam $\mathbf{T}$! Identiskais attēlojums id kopā S_n ir nepārtraukts, pēc Pieņēmuma 3.3.3 attēlojums $\mathbf{z} : S_n \to \mathbf{R}^n$ ir w-nepārtraukts un tāds ir arī z^+. Pēc Sekām 3.2.1 attēlojums $id + z^+$ ir w-nepārtraukts, kas nozīmē, ka pēc Sekām 3.2.3 attēlojums $\nu(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p}))\,\mathbf{e}$ ir $w\|e\|$-nepārtraukts, t.i., nw-nepārtraukts. Tā kā $\nu : S_n \to [1, +\infty[$, tad funkcija $\dfrac{1}{\nu}$ ir $\dfrac{nw}{\nu(\mathbf{p})}$-nepārtraukta (pēc Teorēmas 3.2.3).

Visbeidzot, ievērojot Teorēmu 3.2.2, attēlojums $\mathbf{T}(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p}))\,\dfrac{1}{\nu(\mathbf{p})}$ ir w_0-nepārtraukts punktā $\mathbf{p} \in S_n$, kur

$$w_0 = w_0(\mathbf{p}) = \frac{nw^2}{\nu(\mathbf{p})} + \frac{w}{\nu(\mathbf{p})} + \frac{nw\|\mathbf{p} + \mathbf{z}^+(\mathbf{p})\|}{\nu(\mathbf{p})} = \frac{nw^2 + w}{\nu(\mathbf{p})} + nw \le nw^2 + (n+1)w,$$

tādējādi $\mathbf{T}$ ir $nw^2 + (n+1)w$-nepārtraukts attēlojums kopā S_n.

Tā kā S_n ir izliekta un kompata apakškopa normētā vektoru telpā $\mathbf{R}^n$ un $\mathbf{T}(\mathbf{p}) : S_n \to S_n$, tad, ievērojot Teorēmu 3.1.1, eksistē tāds cenu vektors $\mathbf{p}^* \in S_n$, ka izpildās nevienādība

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{p}^*) - \mathbf{p}^*\| \le nw^2 + (n+1)w.$$

Izmantojot $\mathbf{R}^n$ normas definīciju, iegūsim

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{p}^*) - \mathbf{p}^*\| = \left\| \frac{\mathbf{p}^* + \mathbf{z}^+(\mathbf{p}^*)}{\nu(\mathbf{p}^*)} - \mathbf{p}^* \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{p_i^* + z_i^+(\mathbf{p}^*)}{\nu(\mathbf{p}^*)} - p_i^* \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{p_i^* + z_i^+(\mathbf{p}^*) - p_i^* - p_i^* \sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*)}{\nu(\mathbf{p}^*)} \right| \le nw^2 + (n+1)w.$$

Tā kā $1 + \sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) > 0$, tad

$$\sum_{i=1}^{n} \left| z_i^+(\mathbf{p}^*) - p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \right| \le \big(nw^2 + (n+1)w\big)\ \nu(\mathbf{p}^*).$$

Kreiso nevienādības pusi var sadalīt divās summās

$$\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} \left| z_i^+(\mathbf{p}^*) - p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \right| + \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} \left| z_i(\mathbf{p}^*) - p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \right| =$$

$$= \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0} p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) + \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} \left| z_i(\mathbf{p}^*) - p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \right|.$$

Izmantojot moduļa trīsstūra nevienādību, iegūsim novērtējumu

$$\left| \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} \left(z_i(\mathbf{p}^*) - p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \right) \right| \le \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} \left| z_i(\mathbf{p}^*) - p_i^* \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0} z_i(\mathbf{p}^*) \right|,$$

tālāk varam pārveidot iegūtās nevienādības kreiso pusi

$$\left|\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left(z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\right)\right|=\left|\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\left(1-\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}p_i^*\right)\right|=$$

$$=\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\left(1-\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}p_i^*\right)=\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0}p_i^*.$$

Ievērojot iepriekš iegūtās nevienādības un vienādības, iegūsim

$$\begin{aligned}&2\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0}p_i^*\le\\ &\le\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0}p_i^*+\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}\left|z_i(\mathbf{p}^*)-p_i^*\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\right|\le\\ &\le(nw^2+(n+1)w)\ \nu(\mathbf{p}^*).\end{aligned}$$

Tagad varam izmantot Pieņēmumu 3.3.4

$$2\gamma\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\le 2\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)\le 0}p_i^*\le\big(nw^2+(n+1)w\big)\ \nu(\mathbf{p}^*).$$

Tā kā $\nu(\mathbf{p}^*)=1+\sum\limits_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)$, tad pēdējā nevienādība ir pārrakstāma šādi

$$\sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\le\frac{nw^2+(n+1)w}{2\gamma-nw^2-(n+1)w},\quad \text{t.i.,}\quad \sum_{z_i(\mathbf{p}^*)>0}z_i(\mathbf{p}^*)\le k,$$

kur $k\ge\dfrac{nw^2+(n+1)w}{2\gamma-nw^2-(n+1)w}$.

Tā kā skaitlim $2\gamma-nw^2-(n+1)w$ ir jābūt pozitīvam, tad w ir jāpieder intervālam $[0,\,w_+)$, kur w_+ ir vienādojuma $w^2+\dfrac{n+1}{n}w-\dfrac{2\gamma}{n}=0$ pozitīvā sakne. ■

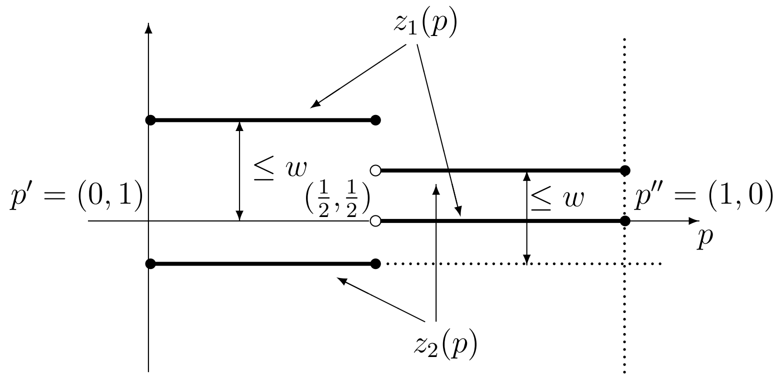
PIEZĪMES.

1. Pieņemsim, ka n un $\gamma>0$ ir fiksēti. Tad $w_+=w_+(n,\gamma)$ ir definēts kā Teorēmā. Konkrētam $w\in[0,w_+)$ varam atrast lielumu

$$k_0(n,w)=\frac{nw^2+(n+1)w}{2\gamma-nw^2-(n+1)w}.$$

Šis skaitlis $k_0(n, w)$ ir nenegatīvs kā tas minēts Teorēmā. Var ievērot, ka Teorēmas nevienādību pārveidojumi izmanto novērtējumu $\nu(p) \geq 1$. Principā tas ir iegūts no izvēlētās telpas $\mathbf{R}^n$ normas. Iespējams, ka var iegūt citu precīzāku novērtējumu k_0, izvēloties citu normu.

2. 3.3.3.zīmējumā gadījumā $n = 2$ ir parādīta situācija, kas apmierina Teorēmas nosacījumus un kura neapmierina klasiskā Arrova-Hāna modeļa nosacījumus.



3.3.3.zīm.

Skaidrs, ka neeksistē $\mathbf{p} \in S_2$, kurš apmierinātu nevienādību

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = (z_1(\mathbf{p}), z_2(\mathbf{p})) \leq \mathbf{0}.$$

Pieņēmumi 3.3.1, 3.3.2 un 3.3.3 acīmredzami ir izpildīti. Pārbaudīsim, ka izpildās Pieņēmums 3.3.4. Pieņemsim, ka vektors $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in S_2$ tiek reprezentēts kā

$$\mathbf{p} = (1-t)\mathbf{p}' + t\mathbf{p}'', \qquad t \in [0, 1].$$

Ja $t \in [0, \frac{1}{2}]$, tad izpildās $z_1(\mathbf{p}) > 0$, $z_2(\mathbf{p}) < 0$ un tāpč $\gamma_{\mathbf{p}} = p_2$; ja $t \in]\frac{1}{2}, 1]$, tad $z_1(\mathbf{p}) = 0$, $z_2(\mathbf{p}) > 0$ un tāpēc $\gamma_{\mathbf{p}} = p_1$. Abos gadījumos mēs iegūsim $\gamma_{\mathbf{p}} \geq \frac{1}{2}$, kas parāda, ka Pieņēmums 3.3.4 izpildās ar $\gamma = \frac{1}{2}$. Mūsu pēdējā Teorēma garantē k-līdzsvara eksistenci konstantei $k \geq \frac{2w^2+3w}{1-2w^2-3w}$, ja $0 < w < -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$. Ievērojiet, ka Valrasa likums neizpildās.

3. Ja $w = 0$, tad $k_0(n, \gamma) = 0$, un ar $k = 0$ tiek iegūts klasiskais līdzsvars. Ievērojiet, ka klasiskā līdzsvara iegūšanai nav nepieciešams šajā modelī, lai izpildītos Valrasa likums.

4. Vēl varam ievērot, ka klasiskajā Arrova-Hāna modelī nav iespējama nekāda

kvantitatīva analīze. Bet Teorēmas 3.3.1 nevienādības

$$w < w_+(n, \gamma) \quad \text{un} \quad k \geq k_0(n, w)$$

dod iespēju analizēt ekonomikas uzvedību pie atšķirīgām parametru n, w, γ skaitliskām vērtībām. No

$$\begin{aligned} 0 \leq w_+(n, \gamma) = \frac{-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 8n\gamma}}{2n} < \\ < \frac{-(n+1) + (n+1) + \sqrt{8n\gamma}}{2n} = \sqrt{\frac{2\gamma}{n}} \end{aligned}$$

seko, ka $\lim\limits_{n\to\infty} w_+(n, \gamma) = +0$. Tā kā $k_0(n, 0) = 0$, tad pozitīvo skaitli k var izvēlēties pēc patikas mazu. Tas parāda, jo lielāks ir labumu skaits n, jo lielākas iespējas iegūt klasisko līdzsvaru.

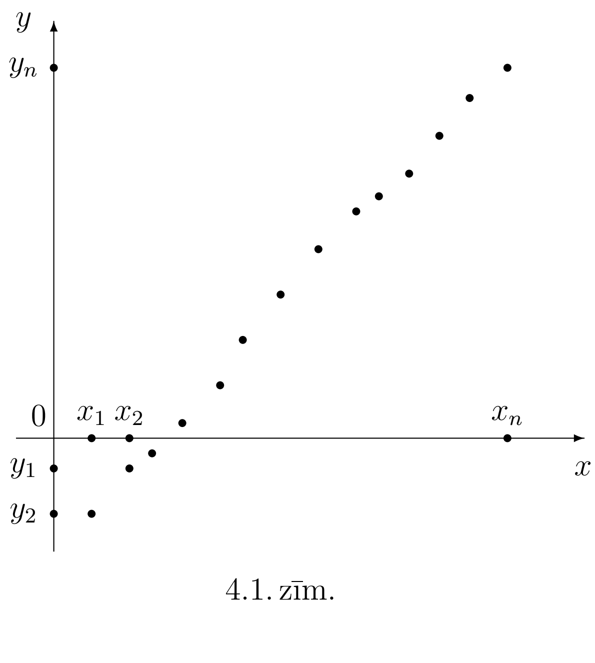
5. Vai ir iespējams, ka $k_0(n, w_+(n, \gamma)) = +\infty$? Ja fiksētiem n un γ vērtība w ir pietiekami tuvu $w_+(n, \gamma)$, tad k ir ļoti liels (robežsituācijā tiecas uz bezgalību). Šajā gadījumā k-līdzsvara eksistencei nav saprātīga ekonomiska skaidrojuma.

NODAĻA 4

MAZĀKO KVADRĀTU METODE

Iepriekšējās nodaļās mēs runājām par pieprasījuma, piedāvājuma un pieprasījuma pārpalikuma funkcijām. Kā reāli noteikt šīs funkcijas noteiktā situācijā? Tas nebūt nav vienkāršs jautājums, un atbilde uz to nav rodama vienā mirklī vai pat dienā. Ir nepieciešams savākt pietiekošā daudzumā datus par preces vai preču pieprasījumu un piedāvājumu pie dotām cenām ilgākā laika periodā. Un tikai tad, izejot no savāktajiem datiem, izmantojot atbilstošu matemātisko aparātu, varēsim atrast funkciju, kas lielākā vai mazākā mērā precīzi aprakstīs mūs interesējošo sakarību.

Iesākumā apskatīsim situāciju ar diviem (saistītiem) novērojumiem x un y (piemēram, noteiktā tirgū pieprasījums y pēc āboliem atkarībā no to cenas x). Pieņemsim, ka ir fiksēti n novērojumi un koordinātu plaknē tie izvietojas tā, kā tas parādīts 4.1.zīmējumā.

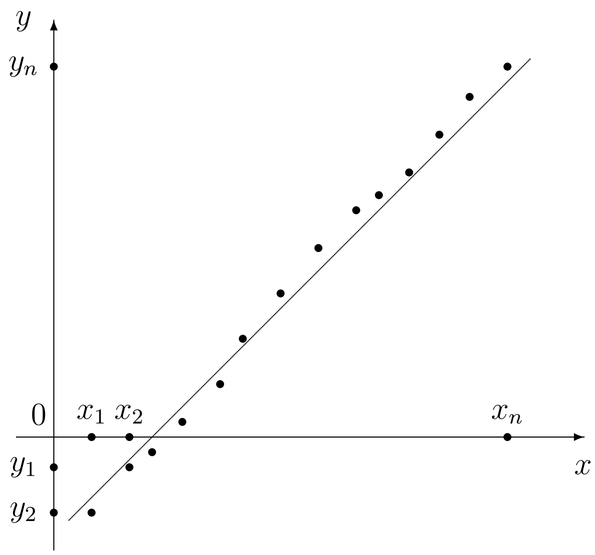


4.1. zīm.

Vienkāršākajā gadījumā mēs varētu sagaidīt, ka viena veida novērojumi (piemēram, pieprasījums) ir lineāri atkarīgi no otriem (piemēram, cenām): $y = ax + b$. Mums tātad būtu jāprot noteikt konstantes a un b. Precīzāk, būtu jāatrod tāda taisne visu taišņu kopā, kas vistuvāk atrodas dotajiem punktiem. Faktiskā situācija būs aprakstāma ar šādām vienādībām:

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., n,$$

kur ε_i raksturo iespējamo kļūdu vai novirzi starp reālajiem datiem un iespējamo sakarību taisni (skatīt 4.2.zīmējumu).



4.1. zīm.

Tātad mūsu rīcībā ir n vienādojumi:

$$\begin{aligned} &y_1 = ax_1 + b + \varepsilon_1, \\ &y_2 = ax_2 + b + \varepsilon_2, \\ &\dots \\ &y_n = ax_n + b + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Ja apzīmējam

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \text{ un } X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix},$$

tad šie n vienādojumi ir pārrakstāmi matricu formā: $y = Xk + \varepsilon$. Tā kā noviržu ε vērtības nav iepriekš zināmas, tad no šī matricu vienādojuma nevar aprēķināt k vērtības ar izteiksmi $k = X^{-1}(y-\varepsilon)$. Tāpēc vispārīgajā gadījumā nevar precīzi noteikt a un b. Taču, pamatojoties uz dotajiem datiem, šīs vērtības var aptuveni novērtēt.

Eksistē vairākas metodes koeficientu a un b noteikšanai. Viena no biežāk izmantotajām ir **mazāko kvadrātu metode**, kuru jau pagājušajā gadsimtā izveidojis ievērojamais vācu matemātiķis K.J.Gauss. Ekonometrikā kā pamatmetodes vēl tiek lietotas momentu metode un maksimālās varbūtības (*maximum-likelihoold*) metode. Ja mēs meklējam labāko taisni, tad visas trīs metodes atrod vienus un tos pašus tuvinātos novērtējumus koeficientiem a un b.

Mēs apskatīsim mazāko kvadrātu metodi. Apzīmēsim koeficientu a un b tuvinātās vērtības ar a' un b' neatkarīgi no tā, kā tās iegūtas un kādas ir to vērtības. Tādā gadījumā dotai vērtībai x_i atbilstošā y_i novērtējums y_i' tiks noteikts kā $y_i' = a'x_i + b'$. Starpība starp novērtējumu y_i' un novērojuma vērtību y_i ir vienāda ar $y_i - y_i' = \varepsilon_i'$, t.i., vienāda ar novirzes jeb kļūdas novērtējumu. Mazāko kvadrātu metode, balstoties uz šo sakarību, iegūst tādus novērtējumus a' un b', ka noviržu novērtējumu kvadrātu summas ir minimālās. Proti, mums jāatrod divargumentu funkcijas

$$f(a', b') = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a'x_i - b')^2$$

minimums, t.i.,
1) jāatrod $f(a', b')$ parciālie atvasinājumi,
2) pielīdzinot tos 0, atrod stacionāros punktus,
3) jāpārliecinās, ka iegūtais punkts patiešām ir minimums.

Atrodot parciālos atvasinājumus un tos pielīdzinot 0, iegūsim divu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} f_a' = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a'x_i - b')(-x_i) = 0, \\ f_b' = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - a'x_i - b')(-1) = 0. \end{cases}$$

No šīs vienādojumu sistēmas jāatrod a' un b' vērtības. Vispirms izdarīsim dažus algebriskus pārveidojumus:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a' x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} b' x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a' x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} b' = 0 \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} a' \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b' \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a' \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb' = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Summas $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = S_1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = S_2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i = S_3$ un $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = S_4$ ir atrodamas pēc dotajiem datiem, tādējādi jāatrisina pavisam vienkārša vienādojumu sistēma:

$$\begin{cases} S_1 a' + S_2 b' + S_3, \\ S_2 a' + nb' = S_4, \end{cases}$$

no kurienes iegūsim, ka

$$a' = \frac{nS_3 - S_2 S_4}{nS_1 - S_2^2}, \quad b' = \frac{S_1 S_4 - S_2 S_3}{nS_1 - S_2^2}.$$

Atliek noskaidrot, vai šīs a' un b' vērtības patiešām ir funkcijas $f(a', b')$ minimums,t.i., punktā (a', b') ir jāizpildās nosacījumiem: $D = f_{aa} f_{bb} - (f_{ab})^2 > 0$, $f_{aa} > 0$.

Pārliecināsimies par to:

$$f_{aa} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 > 0, \; f_{bb} = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n, \; f_{ab} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ un}$$

$$D = 4n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 > 0,$$

jo kvadrātiskais trinoms

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - u)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2u \sum_{i=1}^{n} x_i + nu^2$$

ir stingri pozitīvs lielums, un tas nozīmē, ka tā diskriminants

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ir stingri negatīvs, bet tas savukārt nozīmē, ka $D > 0$.

Ja punktu izvietojums plaknē ir sarežģītāks, tad faktiskā sakarība starp x un y var nebūt lineāra. Taču tādas nelineāras funkcijas, kuras attiecībā pret parametriem ir lineāras, var tuvināti noteikt ar mazāko kvadrāu metodi. Tā, piemēram, sakarības $y = ax_1^p + bx_2^q$ parametri p un q nav nosakāmi ar šo metodi, bet, ja p un q ir zināmi, tad y ir lineāra funkcija ar mainīgajiem x_1^p, x_2^q un var novērtēt a un b vērtības. Tāpat vienādojums $y = ax+bx^2+cx^3$ nav lineārs attiecībā pret mainīgo x, bet tas ir lineārs attiecībā pret mainīgajiem x, x^2 un x^3, tādējādi arī šajā gadījumā koeficienti a, b, c ir novērtējami. Dažos citos gadījumos var nelineāru funkciju pārveidot par lineāru attiecībā pret transformētiem mainīgajiem. Piemēram,

$$\begin{aligned}&y = e^{a+bx} \Rightarrow \ln y = a + bx,\\ &y = ae^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx,\\ &y = A^a x^b \Rightarrow \ln y = a\ln A + b\ln x,\ \text{utt.}\end{aligned}$$

Koeficientu novērtējumu noteikšanas procedūra lineāru sakarību gadījumos, kad koeficientu skaits k lielāks par 2, ir iepriekš aprakstītās metodes vispārinājums.

Vispirms apskatīsim tādu situāciju, kad nav brīvā koeficienta b. Šādu modeli apraksta vienādojumu sistēma:

$$y_i = a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + \ldots + a_kx_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ...n$$

(n — novērojumu skaits). Līdzīgi kā iepriekš šos vienādojums var pierakstīt matricu vienādojuma veidā: $y = Xa + \varepsilon$, kur

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_k \end{pmatrix} \text{ un } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ & \ldots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Mums nepieciešams ar mazāko kvadrātu metodes plīdzību atrast vektora a tuvinājumu. Ja $a' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \ldots \\ a_k' \end{pmatrix}$ ir tuvinājums, tad atbilstošā vektora y

tuvinātā vērtība ir $y' = Xa'$ un kļūdu vektora ε tuvinājums ir $\varepsilon' = y - y' = y - Xa'$. Kļūdu kvadrātu summa ir:

$$\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon')^2 = \varepsilon'^T\varepsilon' = (y - Xa')^T\,(y - Xa') =$$
$$= (y^T - (a')^T\,X^T)(y - Xa') = y^T y - 2(a')^T\,X^T\,y + (a')^T\,X^T\,X\,a'$$

(pie nosacījuma, ka $y^T\,X\,a' = (a')^T\,X^T\,y$).

Vektoru a' iegūsim $(\varepsilon')^T\,\varepsilon'$ minimizācijas ceļā, t.i., atrodot

$$y^T y - 2(a')^T\,X^T\,y + (a')^T\,X^T\,X\,a'$$

minimumu. Pielīdzinot šīs izteiksmes parciālos atvasinājumus pēc a' nullei, iegūsim:

$$\frac{\partial((\varepsilon')^T\,\varepsilon')}{\partial a'} = -2X^T\,y + 2X^T\,Xa' = 0.$$

Tādējādi esam atraduši, ka $X^T\,y = X^T\,X\,a'$. Pieņemot, ka eksistē $(X^T\,X)^{-1}$, atrodam atrisinājumu $a' = (X^T\,X)^{-1}\,X^T\,y$.

Reizinājums $X^T\,X$ veido kvadrātisku un simetrisku matricu:

$$X^T\,X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{ik} \\ & \dots & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{ik} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 \end{pmatrix}.$$

Vektoru $X^T\,y$ reizinājums veido summas no mainīgo x un y novērojumu reizinājumiem:

$$X^T\,y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2}y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i \end{pmatrix}.$$

Atzīmēsim, ka vektora $a' = (X^T\,X)^{-1}\,X^T\,y$ aprēķināšanai nepieciešama matricas $(X^T\,X)^{-1}$ eksistence, kuru nodrošina tas apstāklis, ka matricai X eksistē pilns kolonnas rangs, citiem vārdiem sakot, kolonnu k vektori ir lineāri neatkarīgi.

Tagad apskatīsim tādu situāciju, kad ir brīvais koeficients. Šādu modeli apraksta vienādojumu sistēma:

$$y_i = b_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \ldots + a_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ...n$$

(n — novērojumu skaits). Ja apzīmējam $x_{i0} = 1$ visiem $i = 1, 2, ..., n$, tad modeli varam pārrakstīt formā

$$y_i = b_0 x_{i0} + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \ldots + a_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ...n,$$

jeb matricu formā

$$y = X^* \, a^* + \varepsilon,$$

kur y un ε ir ar iepriekšējo nozīmi, bet X^* ir tāda matrica, kuras pirmā kolonna sastāv no vieniniekiem un pārējā matricas daļa ir identiska ar matricu X, savukārt a^* ir vektors, kura pirmais elements ir b_0, bet pārējie identiski ar vektora a elementiem. Neskatoties uz izmaiņām sākotnējā situācijā, esam ieguvuši tādu pašu modeli kā situācijā bez brīvā koeficienta. Tuvinājumu vektors, kas iegūts ar mazāko kvadrātu metodes palīdzību, būs formā

$$a^{*'} = (X^{*T} \, X^*)^{-1} \, X^{*'} \, y.$$

NODAĻA 5

LINEĀRIE MATRICU MODEĻI

5.1 STARPNOZARU BILANCES MODELIS (ĻEONTJEVA MODELIS)

Pieņemsim, ka saimniecības visa ražošana sadalīta tīrās n nozarēs. Tas nozīmē, ka katra no n nozarēm ražo tikai viena veida produkciju un dažādas nozares ražo atšķirīga veida produkcijas. Tāda veida darba iedalījums noved pie tā, ka starp nozarēm pastāv cieši saimnieciskie sakari, t.i., daļa no katras nozares produkcijas tiek izmantota citā nozarē kā ražošanas resursi. Piemēram, maizes cepšanas nozare izmanto miltu un cukura ražošanas nozaru produkcijas. Var būt arī tā, ka nozare izmanto kā resursus pati savu produkciju, piemēram, elektroenerģijas ražošanas nozare izmanto elektroenerģiju telpu apgaismošanai un dažādu ierīču darbināšanai.

Nozares produkcijas daļu, kura tiek izmantota kā resursi pašas nozares un citu nozaru ražošanā, sauksim par *izmaksām*. Atlikušo produkcijas daļu sauksim par šīs nozares *gala produkciju*, to izmanto neražojošajā sfērā.

Tātad *pilno (bruto- jeb kop-produkciju) nozares produkciju* mēs varam iedalīt izmaksās un gala produkcijā.

Mūsu uzdevums ir aprakstīt ar bilances vienādību palīdzību sakarības starp visu n nozaru pilnajām produkcijām, izmaksām un gala produkcijām noteiktā laika periodā.

Matemātiskā modeļa izstrādāšanai nepieciešams izveidot noteiktu apzīmējumu sistēmu. Visas n nozares sanumurēsim no 1 līdz n. i-tās nozares,

$i \in \{1, ..., n\}$, pilnās produkcijas izlaidi, kas dota noteiktās mērvienībās, apzīmēsim ar x_i. Ar $X = (x_1, ..., x_n)$ sapratīsim saimniecības kopējo pilno produkcijas izlaidi. i-tās nozares produkcijas vienību skaitu, kas nepieciešams j-tās nozares vienas vienības produkcijas ražošanai, apzīmēsim ar a_{ij}. Šos skaitļus sauc par *tiešo izmaksu koeficientiem.* Koeficients a_{ii} parāda, kāds i-tās nozares produkcijas daudzums tiek ieguldīts tās pašas nozares vienas vienības produkcijas ražošanā. Tiešo izmaksu koeficientus a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, ērti var izkārtot matricas veidā

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Šo matricu sauksim par *tiešo izmaksu koeficientu matricu* (sauc arī par tehnoloģijas koeficientu matricu).

Matrica A satur daudz informācijas par savstarpējiem nozaru sakariem. Tā, piemēram, matricas A j-tā kolonna $A_{.j} = (a_{1j}\, a_{2j} \ldots a_{nj})^T$ pilnībā raksturo j-tās nozares izmaksas, kādas tiek ieguldītas, lai saražotu vienu vienību jebkuras citas no n produkcijām. Ievērosim, ka ražošanas tehnoloģijas izmaiņas jebkurā no nozarēm tūlīt izmainīs matricas A atbilstošās kolonnas tiešo izmaksu koeficientus. Tāpēc mēs izdarīsim pieņēmumu, ka *ražošanas tehnoloģijas apskatāmajā laika periodā netiek izmainītas.*

Viens no modeļa pieņēmumiem ir tā saucamais linearitātes postulāts. Tas nozīmē, ka jebkura ražošanas veida izmaksas ir proporcionālas ražošanas izlaidei. Saskaņā ar šo postulātu *j-tās nozares produkcijas x_j vienību ražošanai nepieciešams patērēt $a_{ij}x_j$ i-tās nozares ($i, j = 1, 2, ..., n$) produkcijas vienību.*

Linearitātes postulāts praksē izpildās ne vienmēr.

■ Piemēram, apskatīsim elektroenerģijas izmaksas u, kas nepieciešamas kaut kādas produkcijas izlaidei x. Neatkarīgi no tā, vai produkcija tiek ražota, noteikts elektroenerģijas daudzums a_0 tiek patērēts darba vietas apgaismošanai. Tāpēc resursa izmaksas u kā funkciju no izlaides x vajadzētu pierakstīt

$$u = \begin{cases} a_0, & x = 0 \\ ax + a_0, & x > 0 \end{cases}$$

un nevis $u = ax$, kā to pieprasa linearitātes postulāts. ■

Neatkarīgi no iepriekš sacītā mēs pieturēsimies pie linearitātes postulāta, kuram ir divas priekšrocības. Pirmkārt, linearitātes postulāts tomēr pietiekoši labi apraksta reālo situāciju: pie lielas produkcijas izlaides var uzskatīt, ka, a reižu palielinoties izlaidei, a reizes pieaugs izmaksas. Otrkārt, pateicoties linearitātei, šāds modelis ir piemērots materiāls matemātiskiem pētījumiem.

Atgriezīsimies pie modeļa apraksta. Ar $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ apzīmēsim kopējo pilno izlaidi. Ņemot vērā linearitātes postulātu, i-tās nozares kopējās izmaksas ir pierakstāmas kā summa $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$. Tādējādi i-tās nozares gala produkcija y_i izsakāma kā starpība starp pilno izlaidi un kopējām izmaksām:

$$x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.1.1}$$

Šīs vienādības (7.1.1) sauc par bilances vienādībām. Un tātad, izrakstot atklātā veidā, esam ieguvuši:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) = y_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) = y_2, \\ \qquad \cdots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n) = y_n. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Sistēmu (5.1.2) sauc par *starpnozaru bilances* jeb *Ļeontjeva matemātisko modeli*: šī vienādojumu sistēma parāda kopsakarības starp nozaru pilnajām izlaidēm $x_1, x_2, ..., x_n$, tiešo izmaksu koeficientiem a_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$, un gala produkcijām $y_1, y_2, ..., y_n$, un to var izmantot iepriekš minēto lielumu aprēķināšanā.

Tiešo izmaksu koeficientu matrica $A = (a_{ij})$ parasti tiek pieņemta kā dota, un to varam uzskatīt par nemainīgu. Ja zināma kopējā pilnā produkcijas izlaide $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, tad ar sistēmas (5.1.2) palīdzību varam izskaitļot kopējo gala produkciju $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Ja sākumā dota kopējā gala produkcija $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, tad ar sistēmas (5.1.2) starpniecību varam noskaidrot, vai eksistē tāda kopējā pilnā izlaide X, kura dotu vajadzīgo kopējo gala produktu daudzumu; ja tāda eksistē, tad sistēma (5.1.2) ļauj to arī izskaitļot. Pie tam varēsim izskaitļot arī starpnozaru piegādes apjomus $a_{ij}x_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Sistēmai (5.1.2) dabīgi piemīt visas tās īpašības, kādas ir jebkurai lineāru vienādojumu sistēmai. Tomēr šai sistēmai ir kāda īpašība, kura piesaista matemātiķu uzmanību. Proti, no ekonomiskiem apsvērumiem seko, ka gan tiešo izmaksu koeficienti a_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$, gan kopējās gala produkcijas $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ komponentes, gan kopējās pilnās produkcijas izlaides $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ komponentes ir nenegatīvi skaitļi. Rodas matemātiskas dabas jautājums: kādi nosacījumi jāapmierina gala produkcijām $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_n \geq 0$ un tiešo izmaksu koeficientiem $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$, sistēmā (5.1.2), lai sistēmai eksistētu nenegatīvs pilnās produkcijas izlaižu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ atrisinājums? No ekonomiskā viedokļa šīs sistēmas (5.1.2) atrisināmība ar nenegatīviem x_i, $i = 1, 2, ..., n$, nozīmē Ļeontjeva modeļa darba spējīgumu. *Ja sistēmai (5.1.2) eksistē nenegatīvs atrisinājums, tad saka, ka tā ir produktīva.*

Sistēma (5.1.2) ir speciāls gadījums (ja $\rho = 1$) sistēmai

$$\rho x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.1.3}$$

kur ρ ir parametrs. Apskatīsim sekojošu vienādojumu sistēmu, kas cieši saistīta ar sistēmu (5.1.3):

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (5.1.4))$$

kur koeficienti d_{ij} apmierina pamatnosacījumu

$$d_{ij} \leq 0 \ (i \neq j). \tag{5.1.5}$$

Ja $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$, tad sistēmu (5.1.3) var pārveidot par sistēmu (5.1.4), pieņemot, ka $d_{ij} = \rho\,\delta_{ij} - a_{ij}$, kur δ_{ij} (Kronekera simbols) vienāds ar 0, ja $i \neq j$, un vienāds ar 1, ja $i = j$. Kā arī otrādi: no sistēmas (5.1.4) var iegūt sistēmu formā (5.1.3). Patiešām, ja izvēlamies tādu pietiekoši lielu pozitīvu skaitli ρ, ka $\rho > d_{ii}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, un ņemam $a_{ij} = \rho\,\delta_{ij} - d_{ij}$, tad iegūsim, ka $d_{ij} = \rho\,\delta_{ij} - a_{ij}$, pie kam $a_{ij} \geq 0$ visiem i un j, $i, j = 1, 2, ..., n$. Tādā veidā sistēmu (5.1.4) varam pārveidot par sistēmu (5.1.3). Līdz ar to, lai atrisinātu iepriekš uzstādīto jautājumu, nepieciešams atrast nenegatīva atrisinājuma eksistences nosacījumus sistēmai (5.1.4).

Apskatīsim četrus sistēmai (5.1.4) piemērojamus nosacījumus:

(I) $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, ir sistēmas (5.1.4) atrisinājums pie zināmiem pozitīviem $y_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$;

(II) sistēmai (5.1.4) eksistē nenegatīvs atrisinājums $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, jebkurām nenegatīvām vērtībām $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$;

(III) sistēmas (5.1.4) koeficientu kvadrātiskās matricas $D = (d_{ij})$ n galveno minoru virknes visi elementi ir pozitīvi, t.i.,

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ & \dots & \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} > 0, \; k = 1, 2, ..., n;$$

(IV) visi matricas D galvenie minori ir pozitīvi.

(Piezīme. Ar matricas D galvenajiem minoriem šeit jāsaprot visi tie determinanti, kurus iegūst no matricas D izsvītrojot patvaļīgā skaitā rindiņas un kolonnas, pie tam, ja izsvītro i-to rindiņu, tad jāizsvītro arī i-tā kolonna, un otrādi, ja izsvītro j-to kolonnu, tad jāizsvītro arī j-tā rindiņa.)

Nosacījumi (III) un (IV) pazīstami kā Hokinsa-Saimona nosacījumi. Skaidrs, ka no (II) seko (I) un no (IV) seko (III). Nosacījumi (I) un (III) liekas daudz vājāki nekā (II) un (IV). Bet tā tas nebūt nav. Nākamajā teorēmā pierādīsim, ka tie ir ekvivalenti.

TEORĒMA 5.1.1. Nosacījumi (I), (II), (III) un (IV) ir savstarpēji ekvivalenti.

Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ka $(I) \Rightarrow (III) \Rightarrow (II) \Rightarrow (I)$. Pēc tam parādīsim, ka (IV) ir ekvivalents ar pārējiem trim nosacījumiem.

$(I) \Rightarrow (III)$ Pierādījumu veiksim ar matemātisko indukciju pēc n — vienādojumu skaita vai, kas ir tas pats, nezināmo skaita.

Gadījumā, ja $n = 1$, sistēma (5.1.4) satur vienu vienādojumu $d_{11}x_1 = y_1$. Ja šim vienādojumam eksistē atrisinājums $x_1 \geq 0$ pie dota $y_1 > 0$, tad d_{11} jābūt pozitīvam.

Pieņemsim, ka $(I) \Rightarrow (III)$ izpildās gadījumā, ja nezināmo skaits ir $n-1$. Pierādīsim, ka sakarība ir spēkā arī n nezināmo gadījumā. Pēc nosacījuma (I) vienādojumu sistēmai (5.1.4) eksistē nenegatīvs atrisinājums $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ pie zināmām $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, ..., $y_n > 0$ vērtībām. Pirmo sistēmas (5.1.4) vienādojumu varam pierakstīt kā

$$d_{11}x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n} d_{1j}x_j, \tag{5.1.6}$$

tā labā puse ir pozitīva, jo $y_1 > 0$, $d_{1j} \leq 0$, $x_j \geq 0$, $j = 2, ..., n$. Tādā veidā $d_{11}x_1 > 0$, tāpēc no nosacījuma $x_1 \geq 0$ seko, ka $d_{11} > 0$.

Pielietosim sistēmai (5.1.4) Gausa izslēgšanas metodi. Proti, ja atskaitīsim pirmo vienādojumu, kurš pareizināts ar $\dfrac{d_{i1}}{d_{11}}$, no i-tā vienādojuma sistēmā

(5.1.4), $i = 1, 2, ..., n$, tad iegūsim vienādojumu sistēmu sekojošā formā:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + & d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = y_1, \\ & d^*_{22} + \ldots + d^*_{2n}x_n = y^*_2, \\ & \quad \ldots \\ & d^*_{i2} + \ldots + d^*_{in}x_n = y^*_i, \\ & \quad \ldots \\ & d^*_{n2} + \ldots + d^*_{nn}x_n = y^*_n, \end{cases} \tag{5.1.7}$$

kur

$$\begin{aligned} d^*_{ij} &= d_{ij} - \frac{d_{i1}d_{1j}}{d_{11}}, \\ y^*_i &= y_i - \frac{d_{i1}y_1}{d_{11}}, \quad i, j = 2, ..., n \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

un $d^*_{ij} \le 0$, $y^*_i > 0$, $i, j = 2, ..., n$, $i \ne j$, jo $d_{ij} \le 0$ $(i \ne j)$, $y_i > 0$ un $d_{11} > 0$. Vienādojumu sistēma

$$\sum_{j=2}^{n} d^*_{ij}x_j = y^*_i, \quad i = 2, ..., n, \tag{5.1.9}$$

apmierina pamatnosacījumu (5.1.5) un tai eksistē nenegatīvs atrisinājums $x_2, ..., x_n$ pie zināmām fiksētām vērtībām $y^*_i > 0$, $i = 2, ..., n$. Pēc induktīvā pieņēmuma sistēmai (5.1.9) izpildās nosacījums (III), t.i.,

$$\begin{vmatrix} d^*_{22} & \ldots & d^*_{2k} \\ & \ldots & \\ d^*_{k2} & \ldots & d^*_{kk} \end{vmatrix} > 0, \; k = 2, ..., n.$$

Bet no sistēmas (5.1.4) pārveidošanas kārtības sistēmā (5.1.7) redzams, ka

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2k} \\ & & \ldots & \\ d_{k1} & d_{k2} & \ldots & d_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ 0 & d^*_{22} & \ldots & d^*_{2k} \\ 0 & d^*_{32} & \ldots & d^*_{3k} \\ 0 & & \ldots & \\ 0 & d^*_{k2} & \ldots & d^*_{kk} \end{vmatrix} = d_{11} \begin{vmatrix} d^*_{22} & \ldots & d^*_{2k} \\ & \ldots & \\ d^*_{k2} & \ldots & d^*_{kk} \end{vmatrix} > 0, \; k = 2, ..., n.$$

t.i., sistēma (5.1.4) apmierina nosacījumu (III).

$(III) \Rightarrow (II)$ Atkal darbosimies pēc indukcijas.

Vienādojumam $d_{11}x_1 = y_1$ (gadījums, kad $n = 1$) eksistē nenegatīvs atrisinājums $x_1 = \dfrac{y_1}{d_{11}}$ jebkuram $y_1 \ge 0$, ja $d_{11} > 0$.

Pieņemsim, ka izpildās implikācija $(III) \Rightarrow (II)$ gadījumam $n-1$. Pierādīsim, ka šī sakarība ir spēkā arī n vienādojumu sistēmai. Ja vienādojumu sistēma (5.1.4) apmierina nosacījumu (III), tad $d_{11} > 0$, un sistēmu (5.1.4) var pārveidot par sistēmu (5.1.7) kā iepriekšējā pierādījuma daļā. Tikai atzīmēsim, ka šoreiz, atšķirībā no iepriekšējā daļā pierādītā, lielumi $y_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, ir patvaļīgi.

Apskatīsim sistēmu (5.1.9), kas apmierina pamatnosacījumu (5.1.5). Sistēma (5.1.9) apmierina nosacījumu (III), jo nosacījumu (III) apmierina sākotnējā sistēma (5.1.4):

$$\begin{vmatrix} d^*_{22} \ldots d^*_{2k} \\ \ldots \\ d^*_{k2} \ldots d^*_{kk} \end{vmatrix} = \frac{1}{d_{11}} \begin{vmatrix} d_{11} \ldots d_{1k} \\ \ldots \\ d_{k1} \ldots d_{kk} \end{vmatrix} > 0, \ k = 2, ..., n.$$

Sakarības (5.1.8) ļauj secināt, ka $y^*_i \geq 0$, $i = 2, ..., n$, jebkuriem $y_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, un pēc induktīvā pieņēmuma sistēmai (5.1.9) šādam komplektam $y^*_i \geq 0$, $i = 2, ..., n$, eksistē nenegatīvs atrisinājums $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$,..., $x_n \geq 0$. No (5.1.6) iegūsim, ka $x_1 = \dfrac{1}{d_{11}} \left(y_1 - \sum_{j=2}^{n} d_{1j} x_j \right)$. Tādējādi esam konstruējuši sistēmai (5.1.7) nenegatīvu atrisinājumu $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,..., $x_n \geq 0$, kurš, pateicoties sistēmu (5.1.4) un (5.1.7) ekvivalencei, ir arī sistēmas (5.1.4) atrisinājums, tātad sistēma (5.1.4) apmierina nosacījumu (II).

$(II) \Rightarrow (I)$ Šī pāreja ir acīmredzama.

$(IV) \Leftrightarrow (I, II, III)$ Tagad, kad esam parādījuši nosacījumu (I), (II) un (III) ekvivalenci, nebūs grūti pierādīt (IV) ekvivalenci ar pirmajiem trim nosacījumiem. No (IV) acīmredzami seko (III). Lai pierādītu implikāciju otrā virzienā, pieņemsim, ka izpildās nosacījums (II). Vienlaicīgi pārnumurējot vienādojumus un nezināmos, var panākt, ka patvaļīga galvenā apakšmatrica sistēmas (5.1.4) koeficientu matricai kļūst par vienu no n galvenajām apakšmatricām. Pie kam šāda pārnumurēšana neietekmē šīs galvenās apakšmatricas determinantu (determinanta vērtība sakrīt ar sākotnējās matricas determinanta vērtību), kā arī joprojām izpildās nosacījums (II). Izmantojot implikāciju $(II) \Rightarrow (III)$ pārveidotajai sistēmai, mēs varam pārliecināties par sākotnājās matricas patvaļīga galvenā minora pozitivitāti. Tas arī pierāda implikāciju $(II) \Rightarrow (IV)$. ■

E.M.Bravermana 1976.gada grāmatā bilances vienādojumu sistēma pētīta matricu formā. Apskatīsim vēlreiz bilances vienādojumu sistēmu (5.1.2), kuru matricu formā varam pierakstīt kā $(I - A)X = Y$, kur I — vienības matrica, A — tiešo izmaksu koeficientu matrica, $X = (x_1, ..., x_n)$ — pilnās izlaides vektors, $Y = (y_1, ..., y_n)$ — gala produkcijas vektors. Ja eksistē inversā matrica $(I - A)^{-1}$, tad, zinot Y un A, varam aprēķināt $X = (I - A)^{-1}Y$. Lai atrisinājumam būtu ekonomiska jēga, tad X koordinātām jābūt nenegatīvām. Jāņem vērā, ka ne katrai matricai A, kura sastāv no nenegatīviem elementiem, eksistēs nenegatīvs atrisinājums. Vispārīgā gadījumā iespējamas tādas bilances vienādojumu sistēmas, kurām pie noteikta vektora $Y \geq 0$ eksistē nenegatīvs atrisinājums, bet pie cita tāda atrisinājuma nav. No ekonomiskā viedokļa īpašu interesi izraisa tādas sistēmas, kurām eksistē nenegatīvs atrisinājums jebkuram $Y \geq 0$ (jo praksē tieši gala produkcijas izlaide ir tā, kura tiek plānota). Tādējādi bilances vienādojumu sistēmas pētīšana liek atrisināt problēmu, kādi nosacījumi jāapmierina matricai A (≥ 0), lai katram $Y \geq 0$ eksistētu nenegatīvs atrisinājums X (t.i., II nosacījums).

Turpmāk ar stingro nevienādību $a = (a_1, ..., a_n) > 0$ sapratīsim, ka $a_i > 0$ visiem $i = 1, 2, ..., n$.

DEFINĪCIJA 5.1.1. Nenegatīvu matricu $A \geq 0$ sauc par produktīvu, ja $\exists X^* > 0 : (I - A)X^* > 0$. (Ekonomiski: matrica $A \geq 0$ ir produktīva, ja eksistē tāds plāns $X^* > 0$, ka katrā nozarē tiek saražots kaut neliels daudzums produkcijas.)

TEORĒMA 5.1.2. Matrica $A \geq 0$ ir produktīva tad un tikai tad, ja eksistē viens vienīgs nenegatīvs atrisinājums vienādojumu sistēmai $(I - A)X = Y$ katram $Y \geq 0$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka eksistē vienādojumu sistēmai $(I - A)X = Y$ nenegatīvs atrisinājums jebkuram $Y \geq 0$. Apskatīsim patvaļīgu vektoru $Y* > 0$ un tam atbilstošo atrisinājumu X^*; pēc dotā $X^* \geq 0$ un $(I - A)X^* = Y^* > 0$. Matricas A produktivitātes definīcijā bez šīs stingrās nevienādības ir vēl arī nosacījums $X^* > 0$. Lai to ieraudzītu, apskatīsim vēlreiz nevienādību $(I - A)X^* = Y^* > 0$, no kuras seko, ka $X^* > AX^*$. Tā kā $A \geq 0$ un $X^* \geq 0$, tad $AX^* \geq 0$. Esam ieguvuši, ka: $X^* > AX^* \geq 0$, ko arī vajadzēja pamatot.

Teorēmas pierādījumam uz otru pusi nepieciešamas trīs lemmas.

LEMMA 5.1.1. Ja A ir produktīva matrica, tad matricas A p-tās pakāpes matricas A^p visi elementi tiecas uz 0, ja vien $p \to \infty$.

Pierādījums. Ievērosim, ka diviem dotiem vektoriem $B = (b_1, ..., b_n)$ un $C = (c_1, ..., c_n)$, kurus saista sakarība $B \geq C$, ir spēkā nevienādība $AB \geq AC$, ja $A \geq 0$: ja mēs apskatām vektoru AB un AC i-tās koordinātas, kas atbilstoši vienādas ar $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_k$ un $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k$, tad $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k$.

No matricas A produktivitātes seko, ka $X^* > AX^* \geq 0$. Savukārt no šīs nevienādības seko tāda λ, $1 > \lambda > 0$, eksistence, ka $\lambda X^* > AX^*$. Pareizināsim abas nevienādības puses ar matricu A:

$$\lambda AX^* \geq A^2 X^* \geq 0$$

(ņemam vērā pierādījuma sākumā izdarīto piezīmi). Pareizinot nevienādības $\lambda X^* > AX^*$ abas puses ar λ, iegūsim:

$$\lambda^2 X^* > \lambda AX^*.$$

No pēdējām divām jauniegūtajām nevienādībām kopumā seko, ka

$$\lambda^2 X^* > A^2 X^* \geq 0.$$

Turpinot šo procedūru (t.i., apskatām nevienādību $\lambda^2 X^* > A^2 X^* \geq 0$, reizinām to ar A un λ, dabūsim $\lambda^3 X^* > A^3 X^* \geq 0$, utt.), galarezultātā iegūsim nevienādību

$$\lambda^p X^* > A^p X^* \geq 0.$$

Ja $p \to \infty$, tad $\lambda^p \to 0$ jeb $\lim\limits_{p\to\infty} A^p X^* = 0$ vai $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^p x_j^* = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, kur a_{ij}^p, $i, j = 1, 2, ..., n$, ir matricas A^p koeficienti. Tā kā $x_j^* > 0$, tad robežvienādība iespējama tikai tanī gadījumā, ja $\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^p = 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$. ■

LEMMA 5.1.2. Ja A ir produktīva matrica un eksistē tāds vektors X, ka $X \geq AX$, tad $X \geq 0$.

Pierādījums. Pareizinām nevienādības $X \geq AX$ abas puses $p - 1$ reizi ar matricu A; ievērojot Lemmas 5.1.1 sākumā izdarīto piezīmi, iegūsim nevienādīu virkni:

$$X \geq AX \geq A^2 X \geq ... \geq A^p X \text{ jeb } X \geq A^p X.$$

Ja $p \to \infty$, no Lemmas 5.1.1 seko, ka $A^p X \to 0$, tāpēc $X \geq 0$. ■

LEMMA 5.1.3. Ja A ir produktīva matrica, tad $I - A$ ir nedeğenerēta matrica.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo: matrica $I - A$ ir değenerēta, t.i., tās determinants ir vienāds ar 0. Tas nozīmē, ka matricas $I - A$ kolonnas ir lineāri atkarīgas, no šejienes seko tāda nenulles vektora $X \neq 0$ eksistence, ka $(I - A)X = 0$ vai $X = AX$. No Lemmas 5.1.2 seko, ka $A \geq 0$.

Apskatīsim vektoru $-X$. Šis vektors arī apmierina nevienādību $(I - A)(-X) = 0$ un pēc Lemmas 5.1.2: $-X \geq 0$, kas iespējams tikai tad, ja $X = 0$. Iegūta pretruna. ■

Teorēmas 5.1.2. pierādījuma turpinājums ($\Rightarrow$).

Pierādīt teorēmas nosacījuma pietiekamību nozīmē pierādīt: ja matrica A ir produktīva, tad bilances vienādojumu sistēmai eksistē viens vienīgs nenegatīvs atrisinājums jebkuram nenegatīvam gala produkcijas vektoram Y.

Apskatīsim bilances vienādojumu sistēmu $(I - A)X = Y$. Tā kā $I - A$ ir nedeģenerēta matrica (skatīt Lemmu 5.1.3), tad bilances vienādojumu sistēmai eksistē viens vienīgs atrisinājums jebkuram vektoram Y. Gala produkcijas vektors Y vienmēr ir nenegatīvs, tāpēc $(I - A)X = Y \geq 0$ jeb $(I - A)X \geq 0$. No Lemmas 5.1.2 seko, ka $X \geq 0$. ■

Teorēma 5.1.2 parāda, ka, nosakot plānu, nepieciešams iepriekš zināt, vai tehnoloģisko koeficientu matrica A ir produktīva. Šim mērķim noderēs nākošā teorēma.

TEORĒMA 5.1.3. Matrica $A \geq 0$ ir produktīva tad un tikai tad, ja eksistē $S = (I - A)^{-1} \geq 0$.

Pierādījums. $\Rightarrow$ Apzīmēsim matricas S elementus ar s_{ij}. Apskatīsim vienādojumu sistēmu $(I - A)X = e_j$, kur e_j ir n-dimensiju vektors, kura visas koordinātas vienādas ar 0, izņemot j-to, kas vienāda ar 1. No Teorēmas 5.1.2 seko, ka vienādojumu sistēmai $(I - A)X = e_j$ eksistē nenegatīvs atrisinājums $X = Se_j$ vai $x_i = s_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Pēdējā nevienādība parāda, ka visi matricas $S = (I - A)^{-1}$ j-tās kolonnas elementi ir nenegatīvi. Tā kā $j \in \{1, ..., n\}$, tad $s_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$, vai $S \geq 0$.

$\Leftarrow$ Mums jāpierāda, ja matrica $S = (I - A)^{-1}$ eksistē un tā ir nenegatīva, tad matrica A ir produktīva, t.i., eksistē tāds vektors $X > 0$, ka $(I - A)X > 0$ jeb $X > AX$.

Ievērosim, ka inversās matricas S determinants $detS$ apmierina vienādību: $detS = \frac{1}{det(I-A)}$, tāpēc $detS \neq 0$. No šejienes seko, ka neviena matricas S rinda nevar sastāvēt tikai no nullēm. Ņemot vērā, ka matrica $S \geq 0$, iegūsim, ka tās elementi s_{ij} apmierina nevienādību $\sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Apskatīsim vektoru $X = (I - A)^{-1}e$, kur e ir n-dimensiju vektors, kura visas koordinātas vienādas ar 1. Vektora X i-tā koordināta x_i ir vienāda ar $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n$. Ievērojot $\sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} > 0$, secinām, ka $x_i > 0$,

$i = 1, 2, ..., n$, vai $X > 0$.

Pareizinot vienādības $X = (I - A)^{-1}e$ abas puses ar matricu $I - A$ no kreisās puses, iegūsim, ka $(I-A)X = e > 0$. Tātad matrica A ir produktīva. ■

Tādējādi, ja mēs esam noskaidrojuši, ka sistēma (5.1.2) ir produktīva, tad iepriekšējās divas teorēmas mums ļauj pilnās izlaides vektoru aprēķināt pēc formulas $X = (I - A)^{-1}Y$.

Apskatīsim tagad sistēmām (5.1.2), (5.1.3) un (5.1.4) atbilstošās duālās sistēmas:

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i = v_j,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{5.1.2d}$$

$$\rho p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i = v_j,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{5.1.3d}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij}p_i = v_j,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{5.1.4d}$$

Ekonomiski duālās sistēmas raksturo produktu cenas vai daudznozaru sistēmas peļņu. p_j sistēmā (5.1.2d) varam interpretēt kā j-tā produkta cenu, bet v_j varam interpretēt kā peļņu, kas iekļauta j-tās nozares vienas vienības produkcijā. Acīmredzami, ka $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}p_i$ varam interpretēt kā izdevumu summu par j-tās nozares vienas vienības produkcijas saražošanu, tādējādi sistēmas (5.1.2d) kreisajā pusē ir tīrie ieņēmumi par j-tās nozares produkcijas vienu vienību. Šie tīrie ienākumi tiek pielīdzināti vienas vienības produkcijas paredzētajai peļņai.

Sistēmas (5.1.2) atrisināmību nenegatīvos skaitļos x_i, $i = 1, ..., n$, sauc parĻeontjeva modeļa **produktivitāti** (ražīgumu), duālās sistēmas (5.1.2d) atrisināmību nenegatīvos skaitļos (cenās) p_j, $j = 1, ..., n$, sauc par šī modeļa **rentabilitāti** (ienesīgumu).

Duālās sistēmas, ja neievērojam to izcelšanos, ir tieši ar tādu pašu struktūru kā sākotnējās sistēmas.

Pieņemsim, ka izpildās pamatnosacījums (5.1.5) sistēmai (5.1.4d); atkal izvirzīsim prasību, lai pie nenegatīvām labās puses vērtībām v_j eksistētu nenegatīvs atrisinājums (cenas p_j). No Teorēmas 5.1.1 seko šādu nosacījumu ekvivalence:

(Id) $p_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$, ir sistēmas (5.1.4d) atrisinājums pie zināmiem pozitīviem $v_j > 0$, $j = 1, 2, ..., n$;

(II) sistēmai (5.1.4d) eksistē nenegatīvs atrisinājums $p_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$, jebkurām nenegatīvām vērtībām $v_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$;

(III) sistēmas (5.1.4d) koeficientu kvadrātiskās matricas $D^T = (d_{ij})^T$ n galveno minoru virknes visi elementi ir pozitīvi, t.i.,

$$\begin{vmatrix} d_{11} \dots d_{k1} \\ \dots \\ d_{1k} \dots d_{kk} \end{vmatrix} > 0, \ k = 1, 2, ..., n;$$

(IV) visi matricas D^T galvenie minori ir pozitīvi.

Atzīmēsim, ka nosacījumi (I)-(IV) ir cieši saistīti ar nosacījumiem (Id)-(IVd), jo acīmredzami, ka nosacījumi (III) un (IIId), (IV) un (IVd) ir ekvivalenti (tajos tiek aplūkoti transponēti determinanti). Tādējādi ir spēkā

TEORĒMA 5.1.4. Nosacījumi (I), (II), (III), (IV), (Id), (IId), (IIId) un (IVd) ir savstarpēji ekvivalenti.

Šis fakts, ka katrs no nosacījumiem ir ekvivalents ar jebkuru citu no tiem, ir patiešām svarīgs. No šejienes seko, ka izdevumu sistēmas (5.1.2) produktivitāte (ražīgums) ir ekvivalenta ar cenu sistēmas (5.1.2d) rentabilitāti (ienesīgumu). No sistēmas (5.1.2) produktivitātes zināmām pozitīvām gala produkcijām $y_i > 0$ izriet ne tikai sistēmas (7.1.2) produktivitāte jebkuriem $y_i \geq 0$, bet arī rentabilitāte sistēmai (5.1.2d) jebkurām nenegatīvām peļņām $v_j \geq 0$. Analoģiski, iespēja bez zaudējumiem noteikt cenas sistēmā (5.1.2d) pie zināmām peļņām $v_j > 0$ garantē ne tikai tādu pašu iespēju jebkuram nenegatīvam komplektam $v_j \geq 0$, bet nozīmē arī sistēmas (5.1.2) produktivitāti jebkurām nenegatīvām gala produkcijām $y_i \geq 0$.

Vienkāršākais produktivitātes un rentabilitātes kritērijs pazīstams kā Brauera-Solova nosacījums, kurš formulējams ar matricas $A = (a_{ij})$ koeficientu summu pa rindiņām un kolonnām palīdzību. Apzīmēsim ar

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

un sauksim r_i par i-tās rindas summu un s_j par j-tās kolonnas summu matricā A.

TEORĒMAS 5.1.4 SEKAS (Brauera-Solova nosacījums). Katrs no zemāk minētajiem nosacījumiem ir pietiekošs, lai nosacījums (I) būtu produktīvs un vienlaicīgi nosacījums (Id) rentabls:

(a) $\rho > r_i$, $i = 1, ..., n$;
(b) $\rho > s_j$, $j = 1, ..., n$.

Pierādījums. No (a) seko, ka $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ ir nenegatīvs atrisinājums sistēmai (5.1.3), ja y_i izvēlēti kā $y_i = \rho - r_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Tādā gadījumā nosacījums (I) ir izpildīts, un vajadzīgais apgalvojums seko no Teorēmas 5.1.4. Līdzīgi spriedumi parāda nosacījuma (b) pietiekamību. ■

No ekonomiskā redzes viedokļa var rasties interese izskaitļot ienākumus divos dažādos veidos: no izmaksu sistēmas (5.1.2) un no cenu sistēmas (5.1.2d). Tā kā y_i ir i-tās nozares gala produkcijas daudzums, tad $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i p_i$ ir kopējais ienākums pa visām nozarēm kopā. No otras puses arī $\sum\limits_{j=1}^{n} v_j x_j$ ir kopējais ienākums, jo v_j ir peļņa uz vienu j-tās produkcijas vienību un x_j ir j-tās nozares produkcijas daudzums. Abu summu sakritība seko formāli no sistēmām (5.1.2) un (5.1.2d):

$$\sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) p_i x_j = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j.$$

Pabeidzot iepazīšanos ar daudznozaru ekonomisko modeli, atzīmēsim, ka šo modeli 30-tajos gados izveidojis un izmantojis Amerikas ekonomikas struktūras izpētei V.Ļeontjevs (krievu izcelsmes amerikāņu ekonomists). Šo modeli bieži dēvē arī par *input-output* modeli.

5.2 RAŽOŠANAS PLĀNOŠANAS MODELIS (KANTOROVIČA MODELIS)

Pieņemsim, ka kaut kāds uzņēmums ražo n veida dažādas produkcijas un izmanto k dažāda veida ražošanas resursus. Ērtības labad sanumurēsim visas n produkcijas: $1, 2, ..., n$; kā arī sanumurēsim visus k resursus: $1, 2, ..., k$. Ar a_{ij} apzīmēsim i-tā resursa vienību skaitu, kas nepieciešams j-tās produkcijas vienas vienības ražošanai. Šos tiešo izmaksu koeficientus, starp kuriem daudzi var būt nulles, varam izvietot $k \times n$ matricā:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; ... \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; ... \; a_{2n} \\ ... \\ a_{k1} \; a_{k2} \; ... \; a_{kn} \end{pmatrix}.$$

i-tā resursa patēriņš noteiktā laika periodā (noteiktā plānošanas periodā) ir ierobežots ar b_i vienībām, $i = 1, 2, ..., k$. Noteiktais ierobežoto resursu skaits ļauj uzņēmumam plānošanas perioda laikā dažādos variantos realizēt n produkciju izlaižu daudzumus. Katru no n produkciju izlaidēm, kurai resursu patēriņš nepārsniedz resursu limitus, sauksim par iespējamo realizējamo produkcijas izlaidi. Uzņēmuma vadībai ir jāpieņem lēmums, kuru no visām iespējamajām produkcijas izlaidēm izvēlēties noteiktajā laika periodā. Līdz ar to uzņēmuma vad=ībai patiesībā ir jāatrisina jautājums, kā vislabāk izmantot viņiem esošos resursus. Taču pateikt — izmantot vislabāk - ir par maz, vajadzīgs precīzi formulēt kritēriju, pēc kura varētu noteikt, kāpēc viens resursu izmantošanas variants ir labāks par kādu citu. Kritērija izvēle vispār ir sarežģīta problēma, bet tā ir ekonomiska un sociāla rakstura, ne matemātiska. Matemātiskā izklāstā optimizācijas teorijā nav būtiski, kāda veida kritērijs izvēlēts. Tomēr skaidrākai ekonomiskai interpretācijai izvēlēsimies vienu noteiktu kritēriju, proti, pašu vienkāršāko un dabīgāko, kas nosaka uzņēmuma darbības efektivitāti, t.i., izlaistās produkcijas peļņu (starpību starp kopējo produkcijas vērtību un resursu izmaksām, kas izteiktas piemērotās naudas vienībās).

Tātad viena realizējamā produkcijas izlaide tiek uzskatīta labāka par kādu citu, ja pirmā dod lielāku peļņu nekā otrā. Gala rezultātā uzņēmuma vadībai ir jāpieņem lēmums, kuru no iespējamo realizē jamo produkciju izlaidēm patiešām realizēt, lai saražotās produkcijas daudzums dotu vislielāko peļņu salīdzinājumā ar visām citām iespējamajām realizējamo produkciju izlaidēm. Šādu produkcijas izlaidi sauksim par optimālo izlaidi (pēc peļņas kritērija). Ja tādas eksistē vairākas, tad būtu ieteicams noskaidrot tās visas.

Pāriesim pie matemātiskā modeļa konstrukcijas.

Mums ir dota tiešo izmaksu koeficientu $m \times n$ matrica $A = (a_{ij})$, doti k dažādo resursu ierobežojumi b_1, b_2,..., b_k. Pieņemsim, ka zināma ir arī peļņa c_j, ko uzņēmums iegūst no vienas vienības j-tās produkcijas izlaides, $j = 1, 2, ..., n$. Ar x_j apzīmēsim j-tās produkcijas izlaidi, $j = 1, 2, ..., n$. Tad kopējo uzņēmuma izlaidi varam pierakstīt kā vektoru $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Modeļa pamatā tiek izmantoti **divi linearitātes postulāti**. Pirmais no tiem, tāpat kā Ļeontjeva modelī, ir paslēpts pieņēmumā, ka katra veida resursu izmaksas ir proporcionālas produkcijas izlaidei. Saskaņā ar šo postulātu, j-tās produkcijas x_j vienību ražošanai nepieciešams patērēt $a_{ij}x_j$ vienības i-tā resursa, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n$. Saskaņā ar otru linearitātes postulātu, peļņa ir tieši proporcionāla produkcijas izlaidei, t.i., j-tās produkcijas izlaide x_j dod uzņēmumam peļņu c_jx_j naudas vienību apjomā.

Saskaņā ar resursu izmaksu linearitātes postulātu produkcijas izlaides $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ gadījumā i-tā resursa kopējais patēriņš ir vienāds ar

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = t_i.$$

Izlaide $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ir iespējama, ja visu k veidu resursu patēriņi $t_1, ..., t_k$ nepārsniedz atbilstošos limitus $b_1, ..., b_k$. Pēc ekonomiskā satura X komponentes ir pozitīvas, tāpat a_{ij}, b_j, c_j, $j = 1, ..., n$, $i = 1, ..., k$ ir pozitīvi (vai vismaz nenegatīvi) lielumi.

Līdz ar to iespējamās realizējamās produkcijas izlaide ir tāds vektors $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, kura komponentes apmierina $k + n$ vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \quad \cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Visu iespējamo realizējamo produkciju izlaižu kopu apzīmēsim ar $\mathbf{X}$.

Saskaņā ar otro linearitātes postulātu izlaides X peļņu var izskaitļot šādi:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = CX^T. \tag{5.2.2}$$

Iespējamo realizējamo produkcijas izlaidi $X^* \in \mathbf{X}$ sauksim par **optimālo izlaidi** pēc peļņas maksimuma kritērija, ja jebkurai citai izlaidei $X \in \mathbf{X}$ ir spēkā nevienādība: $CX^{*T} \geq CX^T$.

Visu optimālo izlaižu kopu apzīmēsim ar $\mathbf{X}^*$. Skaidrs, ka $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$.

Optimizācijas uzdevumu tagad varam formulēt pavisam īsi: jāatrod kopa $\mathbf{X}^*$.

Līdz ar to varam sacīt, ka ekonomiskā rakstura uzdevums ir pierakstīts matemātiskā valodā. Matemātiskajā modelī ir pazudusi simbolu konkrētā ekonomiskā jēga. Matemātiskais modelis ir dots, ja dota ir nevienādību sistēma (5.2.1) un dots kritērijs (5.2.2), tā sauktā mērķa funkcija, kuru nepieciešams maksimizēt. Ar šādu uzdevumu atrisināšanu nodarbojas matemātikas nozare, kuru sauc par lineāro programmēšanu.

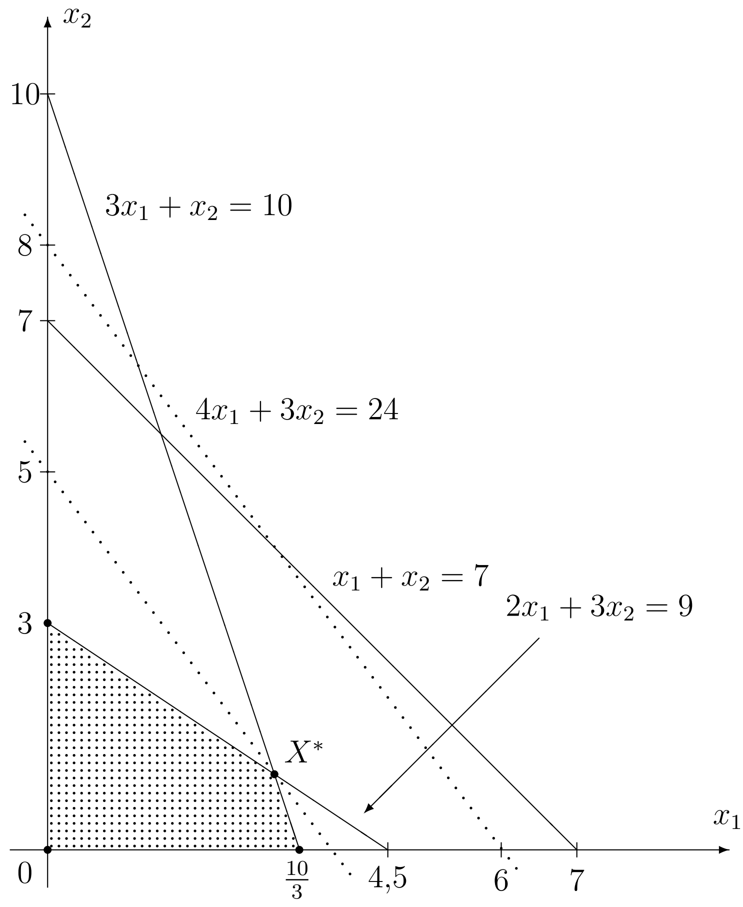
Piemērs 5.2.1. Pieņemsim, ka kaut kāds uzņēmums ražo 2 veidu produkcijas, kuru apjomi mērojami tonnās, pie tam tiek izmantotas triju veidu izejvielas (=resursi) ierobežotā daudzumā, kas arī mērojamas tonnās. Tiešo izmaksu koeficientu matrica ir šāda $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ un izejvielu ierobežojums $B = (10;\ 7;\ 9)$. Zināms, ka pirmā veida produkcijas viena tonna dod 4 naudas vienības lielu peļņu un otrā veida produkcijas viena tonna dod 3 naudas vienības lielu peļņu, t.i., $C = (4;\ 3)$.

Ja ar $X = (x_1, x_2)$ apzīmējam iespējamo realizējamo produkcijas izlaidi, tad koordinātām x_1 un x_2 ir jāapmierina nevienādību sistēma:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Izlaides $X = (x_1, x_2)$ peļņa ir $CX^T = 4x_1 + 3x_2$.

Ir jāatrod tāda izlaide $X = (x_1, x_2)$, kuras koordinātas apmierina nevienādību sistēmu (5.2.3) un kura dotu peļņas funkcijas CX^T maksimālo vērtību. Uzdevuma atrisinājums parādīts 5.2.1.zīmējumā.



5.2.1. zīm.

Plaknes punktu kopa $X = (x_1, x_2)$, kuras koordinātas apmierina sistēmu (5.2.3), ir izliekts daudzstūris. Pēc taišņu $4x_1 + 3x_2 = 0$, $4x_1 + 3x_2 = 1$,..., $4x_1 + 3x_2 = 10$,..., $4x_1 + 3x_2 = 24$,... ģeometriskā novietojuma plaknē var nonākt pie slēdziena, ka optimālais produkcijas izlaides daudzums ir $X^* = (3; 1)$ un līdz ar to optimālā peļņa $CX^{*T} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 15$ naudas vienības. ■

Šādā vienkāršā piemērā nebija grūti noteikt optimālo izlaidi un optimālo peļņu, taču, ja nu uzņēmums ražo kaut vai tikai 5 produkcijas un izmanto tikai 10 dažādus resursus, iegūtā nevienādību sistēma ar Piemērā 5.2.1 apskatītajiem līdzekļiem vairs nebūs atrisināma. Bet šobrīd arī tā nav matemātiska problēma, šādas nevienādību sistēmas ar simpleksa algoritma palīdzību veiksmīgi risina datoru programmas.

Gribētos pievērst lasītāju uzmanību tam apstāklim, ka reizē ar tiešo ražošanas optimās lineārās plānošanas modeli var aplūkot atbilstošo duālo uzdevumu, kuram ir ļoti glīta ekonomiskā interpretācija. Sistēmai (5.2.1) atbilstošā duālā sistēma ir šāda

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{k1}y_k \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{k2}y_k \geq c_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{kn}y_k \geq c_n, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \ldots, y_k \geq 0, \end{cases}$$

atbilstošā duālā mērķa funkcija ir $b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_ky_k$, kurai jānosaka minimums.

Piemēra 5.2.1 turpinājums. Piemērā 5.2.1 apskatītās sistēmas duālā ir

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0, \end{cases}$$

duālā mērķa funkcija ir $10y_1 + 7y_2 + 9y_3$, un jāatrod ir tās minimums. Atbildi uz šo jautājumu dod vektors $Y^* = (\frac{6}{7}; 0; \frac{5}{7})$. ■

Duālā uzdevuma optimālais atrisinājums Y^* ir interpretējams kā resursu cenas, precīzāk, ēnu cenas jeb resursu novērtējums "no uzņēmuma viedokļa". Paskaidrosim to uz iepriekš apskatītā piemēra pamata. Ko nozīmē vektora Y^* trešā komponente $\frac{5}{7}$? Realizējot izlaidi $X^* = (3; 1)$ trešā resursa limits tiek izsmelts pilnībā (6+3=9). Var rasties jautājums, kā izmainīsies optimālā peļņa, ja trešā resursa limits paaugstinātos par vienu vienību, t.i., plānošanas perioda sākumā ir nevis 9 vienības trešā resursa, bet gan 10. Nav nebūt jāmeklē dators, atbildi dod iepriekšējās sistēmas (pie 9 vienībām) duālās sistēmas atrisinājums. Trešā komponente $\frac{5}{7}$ vektorā Y^* parāda, par cik pieaugs vai samazināsies optimālā peļņa, ja trešā resursa limits pieaugs vai samazināsies par vienu vienību. Var sacīt, ka uzņēmumā trešā resursa vienas vienības "ēnu" cena ir $\frac{5}{7}$ naudas vienības: uzņēmumam ir izdevīgi pirkt trešo resursu par zemāku cenu nekā $\frac{5}{7}$ naudas vienības un pārdot par lielāku cenu. Otrā komponente 0 vektorā Y^* parāda, ka uzņēmumam otrā resursa limita palielināšana peļņu nenes.

Atzīmēsim dažus matemātiska rakstura rezultātus (pierādījumus skatīt H.Nikaido grāmatā [1972], lpp. 178-189), kas parāda ciešo saistību starp tiešo un duālo uzdevumu.

TEORĒMA 5.2.1. Pieņemsim, ka$\mathbf{X} = \{\, X \,|\, AX^T \leq B^T,\ X \geq 0\}$, $\mathbf{Y} = \{\, Y \,|\, YA \geq C,\ Y \geq 0\}$ un $\mathbf{X} \neq 0$, $\mathbf{Y} \neq 0$. Tad

a) $YB^T \geq CX^T$ jebkuram $X \in \mathbf{X}$ un $Y \in \mathbf{Y}$;

b) eksistē $E \in \mathbf{X}$ un $D \in \mathbf{Y}$, ka $DB^T = CE^T$.

TEORĒMA 5.2.2.

(a) Ja $\mathbf{X} \neq 0$, tad optimālās plānošanas modelim eksistē galīgs maksimums tad un tikai tad, ja $\mathbf{Y} \neq 0$.

(a) Ja $\mathbf{Y} \neq 0$, tad duālajam optimālās plānošanas modelim eksistē galīgs minimums tad un tikai tad, ja $\mathbf{X} \neq 0$.

Lineārās programmēšanas jautājumus, kas saistīti ar Kantoroviča modeli, var noskaidrot daudzās lineārajai programmēšanai veltītajās grāmatās, piemēram, A.Jaunzems [1981], [1993], D.Kļaviņš [1998], [2003], H.Taha [1985], V.G.Karmanovs [1986], H.Papadimitrijs, K.Staiglics [1985], E.M.Bravermans [1976].

NODAĻA 6

NOSACĪTIE EKSTRĒMU UZDEVUMI EKONOMIKĀ

6.1 UZDEVUMA NOSTĀDNE

Veicot iedzīvotāju grupas izpēti pēc dažāda veida preču pieprasījuma, bieži izmanto sekojošu modeli. Tiek pieņemts, ka katru grupas indivīdu raksturo visu grupas indivīdu kopīga "derīguma funkcija" $f(\mathbf{x})$, kur vektora $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)$ komponentes ir k dažādo preču skaits, kuras patērē indivīdi noteiktā laika vienībā (piemēram, mēneša laikā). Atšķirība starp grupas indivīdiem kā pircējiem izpaužas indivīdu ienākumos noteiktajā laika vienībā. Preču cenas apraksta vektors $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_k)$. Pircējs, kura ienākumi ir N naudas vienības, pērk tādus preču daudzumus, kuri maksimizē derīguma funkciju pie dotajiem ienākumiem N. Citiem vārdiem sakot, preču daudzumus, kurus grib iegādāties pircējs, var noteikt, atrisinot tā saucamo nosacītā ekstrēma uzdevumu

jāatrod funkcijas $f(\mathbf{x})$ maksimums,
ņemot vērā nosacījumu $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k = N$.

Abstrahējoties no iepriekšējās situācijas, pieņemsim, ka jāatrod funkcijas

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_k)$$

ekstrēms ar nosacījumu, ka mainīgie x_1, x_2,..., x_k nav neatkarīgi, bet tos saista sakarības

$$g_1(\mathbf{x}) = N_1,\ g_2(\mathbf{x}) = N_2, ...,\ g_n(\mathbf{x}) = N_n,$$

kur vienādojumu skaits n ir mazāks par nezināmo skaitu k. Tādu ekstrēmu sauc par **nosacīto ekstrēmu**, funkciju $f(x)$ sauc par **mērķa funkciju**, bet vienādojumus $g_1(\mathbf{x}) = N_1$, $g_2(\mathbf{x}) = N_2$, ..., $g_n(\mathbf{x}) = N_n$ sauc par **saites vienādojumiem**.

6.2 LAGRANŽA NENOTEIKTO REIZINĀTĀJU METODE DIVARGUMENTU FUNKCIJAS GADĪJUMĀ

Iepriekš aprakstīto uzdevumu var risināt ar tā saucamo Lagranža nenoteikto reizinātāju metodi. Apskatīsim vispirms vienkāršāko gadījumu, ja $k = 2$, un pieņemsim, ka saites vienādojums ir formā $g(x_1, x_2) = N$. Formulēto uzdevumu ģeometriski var interpretēt šādi: uz līnijas, kuras vienādojums ir $g(x_1, x_2) = N$, tiek meklēts tāds punkts $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ kurā funkcijas $f(\mathbf{x})$ vērtība būtu ekstremāla (t.i., lielākā vai attiecīgi mazākā) salīdzinājumā ar funkcijas citām vērtībām punkta $\mathbf{a}$ apkārtnes tādos punktos, kuri atrodas uz līnijas, kuru apraksta saites vienādojums. Pieņemsim, ka šā uzdevuma atrisinājums ir formā $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Punkta $\mathbf{a}$ apkārtnē izteiksim no saites vienādojuma mainīgo x_2 kā kaut kādu funkciju no mainīgā x_1

$$x_2 = \phi(x_1), \text{ pie kam } a_2 = \phi(a1).$$

Ievietosim šo funkciju mērķa funkcijā un saites vienādojumā

$$f(x_1, \phi(x_1)); \; g(x_1, \phi(x_1)) = N.$$

Funkcijai $g(x_1, \phi(x_1))$ punkta a_1 apkārtnē ir jābūt konstantei, tāpēc tās atvasinājums šajā punktā ir vienāds ar nulli

$$\frac{dg(a_1, a_2)}{dx_1} = \frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(a_1, a_2)}{\partial x_2}\frac{\partial \phi(a_1)}{dx_1} = 0. \tag{6.2.1}$$

Mainīgais x_1 ir neatkarīgais mainīgais, jo tā izmaiņām netiek uzlikti nekādi ierobežojumi atšķirībā no mainīgā x_2, kuram jāapmierina nosacījums $x_2 = \phi(x_1)$. Tāpēc skaitlim a_1, kurš pēc pieņēmuma ir funkcijas $f(x_1, \phi(x_1))$ ekstrēma punkts, ir jāapmierina nosacījums $\frac{df(a_1, \phi(a_1))}{dx_1} = 0$. Šo pēdējo vienādību var pārrakstīt formā

$$\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}\frac{\partial \phi(a_1)}{dx_1} = 0. \tag{6.2.2}$$

Būtu labi, ja šajā pēdējā vienādībā varētu atbrīvoties no nezināmā reizinātāja $\frac{\partial\phi(a_1)}{dx_1}$. Lai to atrastu, pareizināsim vienādību (6.2.1) ar pagaidām nezināmu skaitli λ un saskaitīsim ar (6.2.2); rezultātā iegūsim

$$\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g(a_1,a_2)}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g(a_1,a_2)}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\phi(a_1)}{dx_1}=0.$$

Redzam, ka pie noteiktas λ izvēles var panākt, ka

$$\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g(a_1,a_2)}{\partial x_2}=0. \tag{6.2.3}$$

Tādā gadījumā ir spēkā vienādība

$$\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g(a_1,a_2)}{\partial x_1}=0. \tag{6.2.4}$$

Nosacījumus (6.2.3), (6.2.4) un $g(x_1,x_2)=N$ var pārformulēt tā: punkts $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ būs sākotnējā uzdevuma atrisinājums, ja eksistē tāds skaitlis λ, ka skaitļi a_1, a_2 un λ ir atrisinājums sistēmai

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0, \tag{6.2.5}$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0, \tag{6.2.6}$$

pie kam skaitļi a_1, a_2 ir saknes vienādojumam

$$g(x_1,x_2)=N. \tag{6.2.7}$$

Vienādojumu sistēma (6.2.5-6.2.7) satur trīs vienādojumus ar trim nezināmajiem x_1, x_2, λ, tāpēc tā ir atrisināma. Tādējādi nosacītā ekstrēma atrašanas uzdevums tiek pārveidots par algebriskas vienādojumu sistēmas atrisināšanu. Tikai jāatceras, ka sistēmas (6.2.5-6.2.7) atrisinājums ir sākotnējā uzdevuma nepieciešamie nosacījumi, bet ne pietiekamie.

Vienādojumu sistēmu (6.2.5-6.2.7) ērti interpretēt sekojošā veidā. Saites vienādojumu varam pierakstīt ekvivalentā formā: $g(\mathbf{x})-N=0$, tad pareizinām to ar koeficientu λ un saskaitām ar mērķa funkciju $f(\mathbf{x})$. Iegūsim funkciju

$$F(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})+\lambda(g(\mathbf{x})-N).$$

Tad sistēma (6.2.5-6.2.7) ir uztverama kā funkcijas $F(\mathbf{x},\lambda)$ parciālie atvasinājumi pēc x_1, x_2, λ, kas pielīdzināti 0, jeb funkcijas $F(\mathbf{x},\lambda)$ stacionāro punktu atrašanas nosacījumi. Funkciju $F(\mathbf{x},\lambda)$ sauc par **Lagranža funkciju**, bet skaitli λ — par **Lagranža nenoteikto reizinātāju**.

6.3 LAGRANŽA NENOTEIKTO REIZINĀTAJU METODE DAUDZARGUMENTU FUNKCIJAS GADĪJUMĀ

Tagad apskatīsim nosacītā ekstrēma uzdevumu vispārīgā gadījumā, proti, mums ir jāatrod mērķa funkcijas

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_k) \tag{6.3.1}$$

ekstrēmi, ja saites vienādojumu

$$g_1(\mathbf{x}) = N_1,\ g_2(\mathbf{x}) = N_2, ...,\ g_n(\mathbf{x}) = N_n \tag{6.3.2}$$

skaits n ir mazāks par nezināmo skaitu k.

Apskatīsim atbilstošo Lagranža funkciju

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - N_j), \tag{6.3.3}$$

kura satur $k + n$ mainīgos: nezināmos mainīgos x_1, x_2, ..., x_k skaitā k un nezināmos koeficientus λ_1, λ_2,..., λ_n skaitā n.

TEORĒMA 6.3.1 (nosacītā ekstrēma nepieciešamie nosacījumi). Apzīmēsim ar $\mathbf{a}$ sistēmas (6.3.1-6.3.2) atrisinājumu. Pieņemsim, ka punkta $\mathbf{a}$ apkārtnē funkciju $g_1(\mathbf{x}), ..., g_n(\mathbf{x})$ parciālie atvasinājumi ir nepārtraukts un jakobiānis

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{6.3.4}$$

punktā $\mathbf{a}$ nav vienāds ar nulli. Tad eksistē tāds n-dimensiju vektors $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_n)$, ka $(k+n)$ vektors $(\mathbf{a}, \lambda')$ ir Lagranža funkcijas stacionārs punkts.

PIEZĪME 1. Teorēmas 6.3.1 apgalvojums nozīmē, ka $(k+n)$-dimensiju vektors $(\mathbf{a}, \lambda')$ ir atrisinājums vienlaicīgi k vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0, \\ \qquad \cdots \\ \frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0 \end{cases} \tag{6.3.5a}$$

un n vienādojumu algebriskai sistēmai:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda_1} = g_1(\mathbf{x}) - N_1 = 0, \\ \quad ... \\ \frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda_n} = g_n(\mathbf{x}) - N_n = 0. \end{cases} \tag{6.3.5b}$$

Tā kā vienādojumu skaits $k + n$ sakrīt ar nezināmo skaitu, tad ir iespējams atrast vektoru $(\mathbf{a}, \lambda')$. Tikai jāatceras, ka Teorēma 6.3.1 dod nepieciešamos nosacījumus eksistences atrašanai.

PIEZĪME 2. Sistēma (6.3.5b) nosaka ierobežojumus par meklējamo x-u kopu. Ja mēs funkcijas $f(\mathbf{x})$ gradientu apzīmējam ar $grad\, f(\mathbf{x})$, tad sistēmu (6.3.5a) vektoru formā var pārrakstīt sekojošā veidā

$$grad\, f(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; grad\, g_j(\mathbf{x}).$$

Atcerēsimies, ka funkcijas gradients ir normāle šīs funkcijas vienādā līmeņa hiperplaknēm. Pēdējo vienādību tad var ģeometriski interpretēt sekojoši: vienādojumu sistēmas (6.3.5a-6.3.5b) nozīmē, ka punkts $\mathbf{a}$ ir pieļaujamais atrisinājums, un mērķa funkcijas gradients šajā punktā ir lineāra kombinācija no normālēm, kas novilktas pret hiperplaknēm $g_j(\mathbf{x}) = N_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Vispārīgā gadījumā ne visi Lagranža funkcijas stacionārie punkti ir meklējamās mērķa funkcijas nosacītie ekstrēmi. Un, ja pat tie visi būtu ekstrēmi, tad kuri ir nosacītie maksimuma punkti un kuri ir nosacītie minimuma punkti? Atbildi dod sekojošā teorēma.

TEORĒMA 6.3.2 (nosacītā ekstrēma pietiekamie nosacījumi). Pieņemsim, ka punkts $\mathbf{a}$ apmierina saites vienādojumus (6.3.2) un ir Lagranža funkcijas (6.3.3) stacionārais punkts. Pieņemsim, ka Lagranža funkcija ir divreiz diferencējama. Ar punkta $\mathbf{a}$ apkārtni sapratīsim tikai tos punkta $\mathbf{a}$ tradicionālajā izpratnē apkārtnes punktus, kuri apmierina saites vienādojumus. Ja Lagranža funkcijas otrās kārtas diferenciālis punkta $\mathbf{a}$ apkārtnē ir stingri pozitīvs (negatīvs), tad punkts $\mathbf{a}$ ir nosacītais minimums (maksimus); ja Lagranža funkcijas otrās kārtas diferenciālis punkta $\mathbf{a}$ apkārtnē maina zīmi, tad ekstrēma nav, bet ja tā vērtība ir 0 dažām punkta $\mathbf{a}$ apkārtnes vērtībām, savukārt citām ir ar vienu un to pašu zīmi, tad jānoskaidro Lagranža funkcijas augstāku kārtu diferenciāļu uzvedība punkta $\mathbf{a}$ apkārtnē.

Tātad Lagranža funkcijas otrās kārtas diferenciāļa zīme stacionārā punkta apkārtnē nosaka, vai šis punkts ir ekstrēms. Lagranža funkcijas otrās kārtas diferenciālis

$$\mathrm{d}^2 F(\mathbf{a}) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial x_i\, \partial x_j} \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j$$

ir kvadrātiskā forma no mainīgajiem $\mathrm{d}x_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Atgādināsim, ka

DEFINĪCIJA 6.3.1. Par **kvadrātisko formu** sauc tādu polinomu, kurš satur tikai otrās pakāpes locekļus.

Piemēram, telpā $\mathbf{R}^k$ kvadrātiskā forma vispārīgā gadījumā pierakstāma šādi

$$b_{11}y_1^2 + b_{12}y_1y_2 + ... + b_{1k}y_1y_k + ... + b_{k1}y_1y_k + ...b_{kk}y_k^2 = \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}y_iy_j,$$

kur b_{ij} (pie tam $b_{ij} = b_{ji}$), $i, j = 1, 2, ..., k$, ir reāli koeficienti.

DEFINĪCIJA 6.3.2. Mainīgo $y_1, ..., y_k$ kvadrātisko formu $\sum\limits_{i,j=1}^{k} b_{ij}y_iy_j$ $(bij = bji)$ sauc par **pozitīvi (negatīvi) definītu kvadrātisko formu**, ja kvadrātiskā forma pieņem tikai pozitīvas (negatīvas) vērtības jebkurām mainīgo vērtībām, kuras vienlaicīgi visas nav 0.

Piemēram, forma $y_1^2+2y_2^2-2y_1y_2$ ir mainīgo y_1, y_2 pozitīvi definīta forma, jo $y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1y_2 = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + y_2^2 = (y_1 - y_2)^2 + y_2^2$.

DEFINĪCIJA 6.3.3. Mainīgo $y_1, ..., y_k$ kvadrātisko formu $\sum\limits_{i,j=1}^{k} b_{ij}y_iy_j$ $(bij = bji)$ sauc par **nedefinītu kvadrātisko formu**, ja kvadrātiskā forma pieņem vērtības ar pretējām zīmēm, mainoties mainīgo vērtībām.

Piemēram, forma $y_1-2y_1y_2$ ir mainīgo y_1, y_2 nedefinīta forma, jo vērtībām $y_1 = y_2 = 1$ tā ir negatīva, bet $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ tā ir pozitīva.

DEFINĪCIJA 6.3.4. Mainīgo $y_1, ..., y_k$ kvadrātisko formu $\sum\limits_{i,j=1}^{k} b_{ij}y_iy_j$ $(bij = bji)$ sauc par **pusdefinītu kvadrātisko formu**, ja kvadrātiskā forma, mainoties mainīgo vērtībām, pieņem gan vērtību 0, gan arī vērtības ar vienu un to pašu zīmi.

Piemēram, kvadrātiskā forma $y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2$ nepieņem negatīvas vērtības, bet visām mainīgo vērtībām $y_1 = -y_2$ kvadrātiskā forma ir vienāda ar 0.

Ņemot vērā Definīcijas 6.3.2-6.3.4, Teorēmas 6.3.2 apgalvojumu var pārformulēt šādā veidā:

ja Lagranža funkcijas otrās kārtas diferenciālis punkta $\mathbf{a}$ apkārtnē ir mainīgo $\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_k$ pozitīvi (negatīvi) definīta kvadrātiskā forma, tad punkts $\mathbf{a}$ ir nosacītais minimuma (maksimuma) punkts; ja tā ir nedefinīta kvadrātiskā forma, tad ekstrēma nav, bet ja tā ir pusdefinīta — tad jautājums paliek atklāts.

Praktiskajos pielietojumos rodas jautājums: kādos gadījumos kvadrātiskā forma ir pozitīvi vai negatīvi definīta? Te var palīdzēt šāds kritērijs:

SILVESTRA KRITĒRIJS. Kvadrātiskā forma $\sum\limits_{i,j=1}^{k} b_{ij}y_iy_j$ $(b_{ij} = b_{ji})$ ir pozitīvi definīta tad un tikai tad, ja

$$\triangle_1 = b_{11} > 0,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \triangle_k = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2k} \\ & & ... & \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Tā ir negatīvi definīta tad un tikai tad, ja

$$\triangle_1 = b_{11} < 0,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \triangle_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0,\ ...$$

$$\triangle_k = (-1)^k \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2k} \\ & & ... & \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Taču pirms sāk pielietot Silvestra kritēriju, vispirms vajadzētu ņemt vērā, ka Lagranža funkcijas otrās kārtas diferenciāļa zīmi vajadzīgs noteikt tikai tajā punkta $\mathbf{a}$ apkārtnes daļā, kuras punkti apmierina saites vienādojumus.

6.4 EKONOMISKĀ INTERPRETĀCIJA

Ja uzdevumu (6.3.1-6.3.2) mēs apskatam kā ekonomiski matemātisku modeli, tad funkciju $f(\mathbf{x})$ var apskatīt kā ekonomiskas sistēmas mērķa funkciju, bet skaitļus $N_1, ..., N_n$ kā izmantojamo resursu ierobežojumus vai kā produkcijas plāna ierobežojumus. Tādā gadījumā Lagranža reizinātājiem — vektoram λ' — var atrast ekonomisku interpretāciju, proti, vektoru λ' var uztvert kā vērtīguma rādītāju ekonomiskās sistēmas katram ierobežojumam, t.i., tam ir tāda pati ekonomiskā jēga kā duālajiem mainīgajiem lineārās programmēšanas uzdevumos. Parliecināsimies par to!

Pieņemsim, ka mērķa funkcijai $f(\mathbf{x})$ tiek meklēts maksimuma punkts. Apzīmēsim ar $L(\mathbf{N})$, $\mathbf{N} = (N_1, ..., N_n)$ maksimizējamās funkcijas vērtību punktā $\mathbf{a}$:

$$L(\mathbf{N}) = f(\mathbf{a}) \tag{6.4.1}$$

(punkts $\mathbf{a}$ ir atkarīgs no $\mathbf{N}$). Ierobežojumu $\mathbf{N}$ izmaiņai par lielumu $\Delta\mathbf{N}$ seko pieļaujamo $\mathbf{x}$-u kopas izmaiņas, tātad būs jauns atrisinājums $a + \Delta\mathbf{a}$ uzdevumam (6.3.1-6.3.2) un jauna vērtība maksimizējamajai funkcijai. Par j-tā resursa derīguma rādītāju dabīgi uzskatīt lielumu $\frac{\partial L(\mathbf{N})}{\partial N_j}$, jo tas parāda, kā izmainņās mērķa funkcijas optimālā vērtība, izmainoties j-tajam ierobežojumam. Šis lielums, ievērojot (6.4.1), ir pierakstāms formā:

$$\frac{\partial L(\mathbf{N})}{\partial N_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial N_j} \tag{6.4.2}$$

(tiek pieņemts, ka visi parciālie atvasinājumi eksistē). Šī izteiksme satur reizinātājus $\frac{\partial a_i}{\partial N_j}$, kurus tieši izskaitļot ir sarežģīti, tāpēc pamēģināsim no tiem atbrīvoties.

Izskaitļosim parciālos atvasinājumus $\frac{\partial g_t(\mathbf{a})}{\partial N_j}$ no vienādojuma (6.3.2), ņemot vērā, ka vektora $\mathbf{a}$ koordinātas ir parametra N_j funkcijas un $\frac{\partial N_t}{\partial N_j} = \begin{cases} 0, & t \neq j, \\ 1, & t = j. \end{cases}$.
Iegūsim, ka

$$\frac{\partial g_t(\mathbf{a})}{\partial N_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_t(\mathbf{a})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial N_j} = \begin{cases} 0, & t \neq j, \\ 1, & t = j. \end{cases} \tag{6.4.3}$$

Pareizināsim t-to vienādību izteiksmē (6.4.3) ar skaitli λ'_t — Lagranža t-to reizinātāju — un saskaitīsim visus reizinājumus; pārnesot visus saskaitāmos uz kreiso pusi, iegūsim

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_t \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_t(\mathbf{a})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial N_j} \right) - \lambda'_j = 0. \tag{6.4.4}$$

Pieskaitīsim vienādībai (6.4.4) sakarību (6.4.2):

$$\frac{\partial L(\mathbf{N})}{\partial N_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial N_j} + \sum_{t=1}^{n} \lambda'_t \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_t(\mathbf{a})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial N_j} \right) - \lambda'_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{t=1}^{n} \lambda'_t \frac{\partial g_t(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial N_j} - \lambda'_j$$

Lagranža reizinātāji apmierina nosacījumus

$$\frac{\partial f\mathbf{a})}{\partial x_m} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j \mathbf{a})}{\partial x_m} = 0, \ m = 1, 2, ..., n,$$

tāpēc iegūsim

$$\frac{\partial L\mathbf{N})}{\partial N_j} = -\lambda'_j. \tag{6.4.5}$$

Tādējādi Lagranža reizinātājs parāda ekonomiskās sistēmas atbilstošā resursa vērtīgumu, t.i., parāda, par cik pirmajā tuvinājumā pieaug (samazinās) mērķa funkcijas vērtība, ja j-tais resurss pieaug (samazinās) par vienu vienību.

Atgriezīsimies atpakaļ pie sākumā formulētās problēmas par preču pieprasījuma izpēti, kurā ir jāatrod

mērķa funkcijas $f(\mathbf{x})$ maksimums (6.4.6)

ar saites vienādojumu $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i = N.$ (6.4.7)

Šim uzdevumam atbilstošā Lagranža funkcija ir pierakstāma formā

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i - N \right).$$

Lagranža funkcijas stacionārajos punktos izpildās vienādības

$$F_{a_i}(\mathbf{a}, \lambda) = \tfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \lambda c_i = 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$
$$F_{a_i}(\mathbf{a}, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - N = 0,$$

t.i., $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = -\lambda c_i$, $i = 1, 2, ..., m$, jeb

$$grad\ f(\mathbf{a}) = -\lambda c. \qquad (6.4.8)$$

Ģeometriski sakarība (6.4.8) kopā ar ierobežojumiem (6.4.7) nozīmē, ka punktā **a** hiperplakne (6.4.7) ir pieskare tādai hiperplaknei, kura iet caur punktu **a** un kura ir funkcijas $f(\mathbf{x})$ vienādā līmeņa virsma.

Ja mēs pētam indivīdu grupu ar dažādiem ienākumiem un tādā laika periodā, kurā izmainās dažas cenas, tad var iegūt daudzus atšķirīgus preču komplektus — vektorus **a**, kuri ir uzdevuma (6.4.6-6.4.7) atrisinājums dažādiem λ un vektoriem c. Pie tam, katram vektoram **a** atbilstošais vektors **c** rādīs funkcijas $f(\mathbf{x})$ gradienta virzienu punktā **a**. Pēc šiem datiem var ar zināmu precizitāti noteikt funkciju $f(\mathbf{x})$. Ja funkcija $f(\mathbf{x})$ ir zināma, tad ir iespējams prognozēt apskatāmās iedzīvotāju grupas kopīgo pieprasījumu pēc kādas noteiktas preces, mainoties preču cenām vai mainoties apskatāmās grupas ienākumiem. Tomēr jāatzīmē, ka pircēju reakcija ne vienmēr var būt acīmredzami saprotama. Par pieprasījuma normālo reakciju sauc tādu situāciju, ja pieprasījums pēc preces pieaug, pazeminoties preces cenai, un otrādi, kad pieprasījums pēc preces samazinās, palielinoties preces cenai. Taču iespējama arī pieprasījuma anomāla reakcija — kā piemēru šādai situācijai var minēt "Islandes paradoksu", kad, palielinot kartupeļu cenu, pieprasījums pēc kartupeļiem pieauga, bet pieprasījums pēc gaļas samazinājās, kaut arī gaļas cena netika izmainīta. Ekonomiski šo paradoksu var skaidrot sekojoši: ja pieprasījums pēc kartupeļiem kristos, tad iedzīvotāji paliktu neēduši, jo par uz kartupeļu rēķina ieekonomētajiem līdzekļiem nevar nopirkt tādu daudzumu dārgākās gaļas, lai būtu paēdis. Tāpēc iedzīvotāji samazināja gaļas lietošanu un par ieekonomētajiem līdzekļiem pirka vairāk kartupeļus.

NODAĻA 7

MAKROEKONOMISKIE MODEĻI LATVIJĀ

7.1 STARPNOZARU BILANCES MATEMĀTISKAIS MODELIS

Šajā nodaļā ietvertais mācību materiāls izvēlēts no L.Frolovas grāmatas *Matematiskā modelēšana ekonomikā un menedžmentā* (2.mācību pamatliteratūra). Grāmata sniedz plašu ieskatu ļoti daudzos matemātiskās modelēšanas aspektos un parāda daudzus matemātiskos modeļus, kas lietojami ekonomikas pētīšanā. Šajā nodaļā tiks nepilnīgi atspoguļots L.Frolovas grāmatas 6.nodaļas "Makroekonomiskie modeļi Latvijā" saturs. Ja vēlaties apgūt plašāk šo materiālu, ieteicams iepazīties ar visu grāmatu.

Starpnozaru bilances sastādīšanas pamatā ir 5.nodaļā aplūkotais V.Ļeontjeva modelis. Tikai mēs 5.nodaļā aplūkojām šo modeli vairāk teorētiski, L.Frolovas grāmatā aplūkoti praktiskie rēķināšanas aspekti saistībā ar Latvijas ekonomiku.

Starpnozaru bilancē tiek veidoti trīs kvadranti (skatīt 7.1.1.zīmējums).

Starppatēriņš Kopā	Iekšzemes kopprodukts Kopā	Saražots Kopā
Pievienotā vērtība Kopā		
Saražots Kopā		

7.1.1. zīm.

Pirmajā kvadrantā tiek attēlota *starppatēriņa* veidošana, t.i., ražošanas patēriņa veidošana pašās tautsaimniecības nozarēs. Šī kvadranta rindās tiek parādītas nozares, kuras ražo produkciju vai sniedz pakalpojumus, bet kolonnās — nozares, kuras patērē saražoto produkciju vai sniegtos pakalpojumus. Turklāt nozaru-ražotāju un nozaru-patērētāju skaits ir vienāds, tāpat kā vienādi ir to nosaukumi pirmā kvadranta rindās un kolonnās (t.i., ražotāji un patērētāji ir vieni un tie paši, tie var mainīties savstarpēji ar šīm lomām). Tādējādi katra šī kvadranta rinda parāda, kurām tautsaimniecības nozarēm atbilstoša nozare realizē savu produkciju, bet pēdējā kolonnā var redzēt tās kopējo starppatēriņu. Savukārt katra šī kvadranta kolonna parāda, kādu nozaru produkciju patērē atbilstošā nozare, un pēdējā rindā var redzēt tās kopējo starppatēriņu. Tātad var secināt, ka pirmā kvadranta rindas parāda saražotās produkcijas sadalījumu pa nozarēm-patērētājām, bet kolonnas — saražotās produkcijas veidošanu uz nozaru-ražotāju rēķina.

Otrajā kvadrantā tiek attēlota *iekšzemes kopprodukta* (saīsināti IKP) veidošana, t.i., tā sastāvdaļas — galīgais patēriņš (privātais un valsts patēriņš), kopējā pamatkapitāla veidošana, krājumu izmaiņas, eksports un imports. IKP sastāvdaļu nosaukumi tiek parādīti šī kvadranta kolonnās, bet rindu nosaukumi sakrīt ar pirmā kvadranta rindu nosaukumiem. Tas liecina par to, ka otrā kvadranta rindas parāda saražotās produkcijas sadalījumu pēc gala patēriņa sastāvdaļām, bet kolonnas — katras gala patēriņa sastāvdaļas veidošanu uz nozaru-ražotāju rēķina. Pēdējā ailē var redzēt IKP pa nozarēm-ražotājām un pēdējā rindā — katras IKP sastāvdaļas kopējo daudzumu.

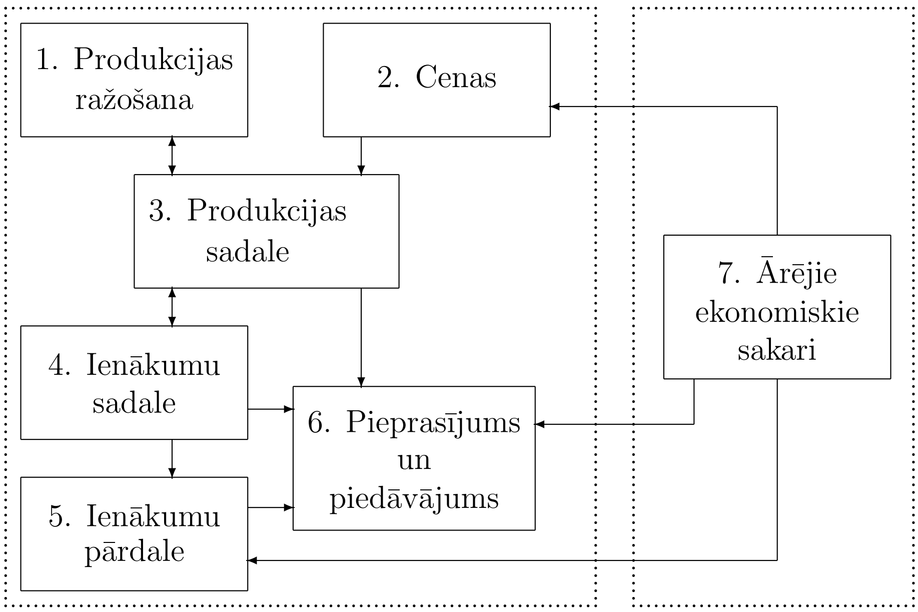
Trešajā kvadrantā tiek attēlota *pievienotās vērtības* veidošana, t.i., tās sastāvdaļas — darba samaksa, sociālās nodrošināšanas pieskaitīumi, tīrā peļņa, pamatkapitāla patēriņš, u.c. 7.1.1.zīmējumā ir redzams, ka kolonnu nosaukumi sakrīt ar pirmā kvadranta kolonnu nosaukumiem, bet rindās tiek ierakstīti pievienotās vērtības sastāvdaļu nosaukumi. Tas liecina par to, ka trešā kvadranta kolonnas parāda pievienotās vērtības veidošanu nozarēs-patērētrājās un rindas — katras pievienotās vērtības sastāvdaļas sadalījumu pa nozarēm-patērētājām. Pēdējā kolonnā var redzēt katras pievienotās vērtības sastāvdaļas kopējo daudzumu, pēdējā rindā — pievienotās vērtības kopējo daudzumu pa nozarēm-patērētājām.

7.2 EKONOMETRISKAIS MAKROMODELIS

Šis ekonometriskais makromodelis ticis izstrādāts kopā ar dāņu kolēģiem. Ekonomikas ministrija šo modeli izmanto tautsaimniecības ekonomiskā stāvokļa analīzei un prognozēšanai.

Ekonometriskā makromodeļa struktūra ietver septiņus blokus:
1. Produkcijas ražošana,
2. Cenas,
3. Produkcijas sadale,
4. Ienākumu sadale,
5. Ienākumu pārdale,
6. Pieprasījums un piedāvājums,
7. Ārējie ekonomiskie sakari.

Bloku savstarpējā saistība parādīta 7.2.1.zīmējumā.



7.2.1. zīm.

Katrs no septiņiem blokiem ir rekurento sakarību sistēma atbilstoši tā funkcijai ekonometriskajā makromodelī. Tāda rekurento sakarību sistēma ietver sevī trenda modeļus, vienfaktora un daudzfaktora regresijas vienādojumus, bilanču vienādības. Rekurento sakarību sistēmas sastāvu pa blokiem nosaka atbilstošā modelējamā procesa ekonomiskais saturs, kā arīto ietekmējošie faktori.

1.bloks — *Produkcijas ražošana* — paredzēts, lai modelētu ražošanas un pakalpojumu apjoma rādītājus atbilstoši pieņemtajai makromodeļa agrekācijas pakāpei. modelī tiek iekļautas galvenās sakarības, kuras nosaka ekonomikas funkcionēšanas gala rezultātu. Par noteicošajiem faktoriem tiek izmantoti nodarbināto skaits, ražošanas pamatfondu lielums un tehnikas progress.

2.blokā — *Cenas* — tiek modelēta cenu indeksu dinamika dažāda veida produkcijai: patēriņa priekšmetiem, pārtikas un nepārtikas precēm, elektroenerģijai, kurināmajam, izejmateriāliem, tiek ņemti vērā mazumtirdzniecības un vairumtirdzniecības cenu indeksi, cenu izmaiņas eksporta un importa produkcijai, kā arī vidējā nozaru cenu indeksu dinamika. Tiek noteikts inflācijas līmenis. Par galvenajiem faktoriem tiek uzskatīti — produkcijas pašizmaksa, maksātspējīgais pieprasījums un piedāvājums, atsevišķu produkcijas veidu deficīts, peļņas un atsevišķu nodokļu veidu likmes, u.c.

3.blokā — *Produkcijas sadale* — tiek atspoguļots produkcijas izlietojums patēriņam, uzkrāšanai un eksportam, kā arī gala patēriņa apjoms un struktūra (kopā ar produkcijas importu). 3.blokā patēriņu ražošanas sfērā raksturo produkcijas patēriņa apjoms pa nozarēm un atsevišķu produkciju grupu griezumā, kas tiek modelēts, balstoties uz starpnozaru bilanču tiešo izmaksu koeficientiem, koriģējot tos attiecīgajam laika periodam atbilstoši materiālietilpības izmaiņām un cenu dinamikai. Privātais patēriņš tiek modelēts atkarībā no iedzīvotāju naudas ienākumiem, atskaitot no tiem nodokļus un obligātos maksājumus. Valsts patēriņš izteikts atkarībā no valsts iestāžu finansēšanas apjoma. Kopējā pamatkapitāla veidošanai jeb uzkrāšanas vajadzībām izlietoto produkciju (kapitālajam remontam, atjaunošanai, pamatfondu pieaugumam, rezervēm) nosaka celtniecības jaudas, nodarbināto skaits celtniecībā, investīciju apjomi.

4.bloks — *Ienākumu sadale* — tika paredzēts, lai noteiktu kopējos uzņēmumu, organizāciju un iedzīvotāju ienākumus no produkcijas un pakalpojumu realizācijas, kā arī šo ienākumu izlietošanu par ražošanas materiālajām izmaksām, maksājot darba algas, sociālo nodokli, prēmijas un citas naudas izmaksas, netiešo (pievienotās vērtības un akcīzes) nodokli, kredīta un kredīta procentus, amortizācijas atskaitījumus.

5.bloks — *Ienākumu pārdale* — tika paredzēts, lai nodrošinātu finanšu-kredīta noformēšanas procesu un izmantošanas virzienus. 5.blokā ir atspoguļoti valsts, vietējo un sociālās apdrošināšanas budžeti, to ieņēmumi un izdevumi, uzņēmumu un orgznizāciju (to skaitā banku, kredīta un citu iestāžu) tīrais ienākums, tā sadale dažādu fondu veidošanai, tiešo nodokļu samaksai, procentu un dividenžu izmaksām, investīcijām. Galvenie šā bloka noteicošie faktori ir tiešo nodokļu likmes, uzņēmumu, organizāciju, nozaru tīrais ienākums.

6.blokā — *Pieprasījums un piedāvājums* — tiek veikta makroekonomiskās sabalansētības novērtēšana, salīdzinot kopējā pieprasījuma un kopējā piedāvājuma lielumu patēriņa un uzkrāšanas sfērā. Tiek vērtēta arī strukturālā sabalansētība pa nozarēm un atsevišķiem gala produkcijas elementiem.

7.bloks — *Ārējie ekonomiskie sakari* — ir domāts eksporta un importa darbības modelēšanai un to ietekmes novērtēšanai. 7.blokā paredzēts izteikt preču starpvalstu plūsmu atkarībā no iekšzemes ražošanas apjomiem, iekšzemes un ārējām produkcijascenām un citiem faktoriem. Tiek apskatītas sarī galvenās naudas, finanšu un kredīta resursu plūsmas ar ārvalstīm, to saldo, noteikti galvenie ārējās tirdzniecības un maksātspējas bilances rādītāji.

Pēc LMD laika posmam līdz 2010.gadam ir izstrādāti divi prognožu varianti — pesimistiskais, lēnākās izaugsmes variants (1.variants) un optimistiskais, dinamiskais variants (2.variants). 1.variants modelē situāciju, kad saglabāsies iepriekšējo gadu attīstības tendences un proporcijas, bet 2.variants — labvēlīgāku attīstības scenāriju: lielākas investīcijas un līdz ar to straujāku ražošanas un eksporta pieaugumu.

Abi varianti paredz tautsaimniecības pakāpenisku izaugsmi. 2.variantā tiek prognozēti augstāki investīciju un IKP pieaugumu tempi nekā 1.variantā. Būtiskākās pieauguma tempu atšķirības prognozētas apskatāmā perioda pirmajā pusē, bet beigu posmā tās izlīdzināsies.

L.Frolovas grāmatā doti arī konkrēti skaitliski piemēri, kas parāda, piemēram, Latvijas IKP prognozi līdz 2010.gadam. Grāmatā dots makromodeļu komplekss Latvijas ekonomikas attīstības alternatīvo variantu izstrādāšanai un prognozēšanai. Šeit atrodamās idejas ļauj veikt praktiskus aprēķinus un veikt analīzi dažādām prognozēm.

NODAĻA 8

LINEĀRI DIFERENČU VIENĀDOJUMI UN TO LIETOJUMS EKONOMIKĀ

8.1 PAMATJĒDZIENI

Paragrāfu sāksim ar piemēru, kurā tiks apskatīts modelis, kura likumsakarības apraksta diferenču vienādojums.

Piemērs 8.1.1 (S.Goldbergs [1968]). Šajā piemērā izpētīsim tautas ienākumus un to izmaiņas laikā. Tautas ienākumus apskatāmajā periodā nosaka trīs lielumi:
(1) patērētāju izdevumi (tā saucamo patēriņa labumu pirkšana),
(2) privātās investīcijas (kapitāla ieguldīšana ražošanā, piemēram, jaunu darba mašīnu pirkšana produkcijas paaugstināšanai),
(3) valdības izdevumi.
Izmantosim sekojošu apzīmējumu sistēmu:

Y_t - tautas ienākumi,
C_t - patērētāju izdevumi,
I_t - privātās investīcijas,
G_t - valdības izdevumi.

Indekss t apzīmē mūs interesējošo laika periodu, kurā tiek noteikta mainīgā vērtība. Mēs pieņemsim, ka vienādi lieliem laika periodiem (teiksim, gadiem) ir zināmi dati, tādējādi t vērtība mainās: 1, 2, 3,..., apzīmējot pirmo, otro, trešo, utt. laika periodu. Izveidotajā apzīmējumu sistēmā doto situāciju apraksta vienādojums:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \tag{8.1.1}$$

Par katru labās vienādības puses lielumu izdarīsim dažus pieņēmumus (P.A.Samulsona pieņēmumi):

(I) izdevumi par patēriņa labumiem (patvaļīgā laika periodā) ir proporcionāli iepriekšējā laika perioda tautas ienākumiem;

(II) patvaļīga laika periodā privātās investīcijas ir proporcionālas patēriņa pieaugumam starp esošo un iepriekšējo laika periodu (tā saucamais paātrināšanas princips);

(III) valdības izdevumi visos laika periodos ir vienādi.

Mūsu uzdevums ir izanalizēt tautas ienākumu uzvedību, ja šie trīs iepriekš minētie pieņēmumi ir izpildīti. Mēs gribēsim vispirms šos pieņēmumus pierakstīt matemātiski, iegūstot vienu vienīgu vienādojumu — diferenču vienādojumu, kas raksturos tautas ienākumus ar funkciju, kas atkarīga no laika.

Ar $\alpha > 0$ apzīmēsim pieņēmuma (I) proporcionalitātes koeficientu, to sauc par patēriņa izmaiņas koeficientu. Līdz ar to (I) varam pierakstīt vienādojuma formā

$$C_t = \alpha Y_{t-1}. \tag{8.1.2}$$

Ar $\beta > 0$ apzīmēsim pieņēmuma (II) proporcionalitātes koeficientu, to sauc par paātrināšanas koeficientu. Līdz ar to (II) varam pierakstīt vienādojuma formā

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}). \tag{8.1.3}$$

(Ja patēriņš samazinās, tad $C_t - C_{t-1} < 0$ un arī $I_t < 0$. To var interpretēt kā atteikšanos no investīciju mērķiem sagatavotās pirkšanas; tāda situācija, piemēram, ir gadījumā, ja nolietotas darba mašīnas netiek aizstātas ar jaunām.)

Tā kā (III) pieņēmumā ir sacīts, ka valdības izdevumi visos laika periodos ir vienādi, tad mēs varam ienākumu vienības tā izvēlēties, lai valdības izdevumi būtu 1 vienību lieli. Tad

$$G_t = 1. \tag{8.1.4}$$

Savietojot vienādojumus (8.1.1-8.1.4), iegūsim diferenču vienādojumu

$$\begin{aligned} &Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(C_t - C_{t-1}) + 1 = \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha Y_{t-1} + \alpha Y_{t-2}) + 1 \text{ jeb} \\ &Y_t = \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + 1. \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Šis diferenču vienādojums satur divus parametrus: α — patēriņa izmaiņas koeficientu un β — paātrināšanas koeficientu.

t	Y_t $\alpha = 0,5;\ \beta = 1$	Y_t $\alpha = 0,8;\ \beta = 2$
1	2,00	2,00
2	3,00	3,00
3	3,00	5,00
4	2,50	8,20
5	2,00	12,68
6	1,75	18,31
7	1,75	24,66
8	1,87	30,89
9	1,99	35,68
10	2,05	37,21
11	2,05	33,22
12	2,03	21,19

tabula 8.1.1

Pieņemsim, ka $Y_1 = 2$ un $Y_2 = 3$, un apskatīsim divus speciālgadījumus. Ja $\alpha = 0,5$ un $\beta = 1$, vienādojums (8.1.5) pieņem veidu

$$Y_t = Y_{t-1} - 0,5Y_{t-2} + 1.$$

Ņemot $t = 3$ un izmantojot sākumvērtības, iegūsim: $Y_3 = 3$, utt. Ja $\alpha = 0,8$ un $\beta = 2$, tad $Y_3 = 5$, utt. Rezultāti (līdz $t = 12$) apkopoti tabulā 8.1.1. Abos gadījumos tautas ienākumiem ir oscilējoša uzvedība, pie kam otrajā gadījumā oscilācija ir lielāka. Tomēr virkne no 12 elementiem nav pietiekoši pārliecinošs arguments. Vai nevarētu tā gadīties, ka vienā vai pat abos gadījumos pēc kaut kāda noteikta laika perioda ienākumu funkcija neoscilē, bet monotoni dilst vai aug? Kā mainīsies ienākumi, ja $\alpha = 0,4$ un $\beta = 1$? Kā ienākumi ir atkarīgi no sākumvērtībām Y_1 un Y_2? Lai atbildētu uz šiem jautājumiem, vajadzētu precīzāk papētīt diferenču vienādojumu (8.1.5). Šajā nolūkā iepazīsimies ar diferenču vienādojumu teoriju. ■

Apskatīsim funkciju $Y = Y(x)$, kas definēta kopā $D \subset \mathbf{R}$.

DEFINĪCIJA 8.1.1. Par funkijas Y **pirmās kārtas diferenci** sauc funkciju $\Delta_h Y$, kas definēta sekojoši $\Delta_h Y(x) = Y(x+h) - Y(x)$, $\forall x \in D$, kur $x + h \in D$. Δ sauc par diferenču operatoru, h par diferences intervālu.

DEFINĪCIJA 8.1.2. Par funkijas Y **n-tās kārtas diferenci** sauc funkciju $\Delta_h^n Y$, kas definēta šādi

$$\Delta_h^n Y(x) = \Delta_n^{n-1} Y(x+h) - \Delta_h^{n-1} Y(x),\ \forall x \in D,\ \text{ kur } x+h \in D,\ n = 2, 3, \dots .$$

DEFINĪCIJA 8.1.3. Par **parastu diferenču vienādojumu** sauc sakarību starp neatkarīgu mainīgo x, funkciju $Y(x)$ un vienu vai vairākām funkcijas Y diferencēm.

Diferenču vienādojumu varam pierakstīt divējādi: datētā formā un diferenču formā. Taču principā viegli var pāriet no viena veida uz otru, tādēļ atkarībā no problēmas nostādnes tiek lietoti abi pieraksta veidi.

Datētajā formā kopā ar novērojumiem (datiem) tiek norādīts novērojuma laiks (datu iegūšanas datums). Piemēram, ja mainīgais Y nozīmē tautas ienākumus, tad ar Y_{1999} vai $Y(1999)$ tiek saprasti tautas ienākumi 1999. gadā. Vispārīgā gadījumā ar Y_t vai $Y(t)$ tiek apzīmēta mainīgā Y novērotā vērtība laika periodā t. Ja par kādu mainīgo ir izdarīti novērojumi n laika periodos, tad varam ņemt $t = 0$ sākuma periodā un ļaut t mainīties no 1 līdz $n-1$ ($h = 1$). Apskatot parastos diferenču vienādojumus, laiks tiek sadalīts vienāda garuma periodos, tāpēc nākamie divi diferenču vienādojumi ir uzskatāmi par identiskiem:

$$Y_t = Y_{t-n} + k \text{ visiem } t, \tag{8.1.6}$$

$$Y_{t+n} = Y_t + k \text{ visiem } t. \tag{8.1.7}$$

Šeit tiek ņemts vērā, ka starp $t-n$ un t, kā arī starp t un $t+n$ ir tieši n laika periodi. Abu vienādojumu identitāti varam paskaidrot ar skaitlisku piemēru. Pieņemsim, ka $n = 3$ un $k = 6$. Tad $t = 3$ vienādojums (8.1.6) pierakstāms formā

$$Y_3 = Y_0 + 6. \tag{8.1.8}$$

Saglabājot n un k vērtības un ejot trīs periodus atpakaļ tā, ka vienādojumā (8.1.7) $t = 0$, iegūsim $Y_3 = Y_0 + 6$, kas ir identisks vienādojums ar (8.1.8).

Kaut arī turpmāk diferenču formu mēs neizmantosim, tomēr īsumā mazliet ar to iepazīsimies. Diferenču formā novērojumi ir uzrādīti ne tikai kā dati, bet ir arī norādītas pirmās un augstākas kārtas diferences. Apzīmēsim pirmās kārtas diferenci ar ΔY_t, tā ir vienāda ar $Y_{t+1} - Y_t$ (t.i., diferences intervāls $h = 1$). Šādā veidā var sastādīt pirmās kārtas diferenču sistēmu no datētiem novērojumiem:

$$\begin{aligned}
&Y_{t+1} - Y_t = \Delta Y_t,\\
&Y_{t+2} - Y_{t+1} = \Delta Y_{t+1},\\
&\quad\ldots\\
&Y_{t+n} - Y_{t+n-1} = \Delta Y_{t+n-1}.
\end{aligned}$$

Otrās un trešās kārtas diferences iegūstamas sekojošā veidā:

$$\begin{array}{ll}
\text{otrās kārtas diferences} & \text{trešās kārtas diferences}\\
\Delta Y_{t+1} - \Delta Y_t = \Delta^2 Y_t, & \Delta^2 Y_{t+1} - \Delta^2 Y_t = \Delta^3 Y_t,\\
\Delta Yt+2 - \Delta Y_{t+1} = \Delta^2 Y_{t+1}, & \Delta^2 Y_{t+2} - \Delta^2 Y_{t+1} = \Delta^3 Y_{t+1},\\
\quad\ldots & \quad\ldots\\
\Delta Y_{t+n} - \Delta Y_{t+n-1} = \Delta^2 Y_{t+n-1}. & \Delta^2 Y_{t+n} - \Delta^2 Y_{t+n-1} = \Delta^3 Y_{t+n-1}.
\end{array}$$

Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 Y_t = \Delta Y_{t+1} - \Delta Y_t = Y_{t+2} - 2Y_{t+1} + Y_t \text{ (2.kārta) un}\\
&\Delta^3 Y_t = \Delta^2 Y_{t+1} - \Delta^2 Y_t = Y_{t+3} - 3Y_{t+2} + 3Y_{t+1} - Y_t \text{ (3.kārta).}
\end{aligned}$$

n-tās kārtas diferenci laikā t varam pierakstīt kā

$$\Delta^n Y_t = \Delta^{n-1} Y_{t+1} - \Delta^{n-1} Y_t.$$

Izejot no šīs definīcijas, mēs varam iegūt vienu citu svarīgu sakarību. Vienādību $\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t$ varam pierakstīt arī kā $Y_{t+1} = Y_t + \Delta Y_t$, analoģiski $Y_{t+2} = Y_{t+1} + \Delta Y_{t+1}$. Izsakot tālāk šo pēdējo vienādību, iegūsim

$$\begin{aligned}
&Y_{t+2} = Y_t + \Delta Y_t + \Delta Y_{t+1} = Y_t + \Delta Y_t + Y_{t+2} - Y_{t+1} =\\
&= Y_t + \Delta Y_t + Y_{t+1} + \Delta Y_{t+1} - (Y_t + \Delta Y_t) =\\
&= Y_t + \Delta Y_t + (Y_{t+1} - Y_t) + (\Delta Y_{t+1} - \Delta Y_t) =\\
&= Y_t + \Delta Y_t + \Delta Y_t + \Delta^2 Y_t = Y_t + 2\Delta Y_t + \Delta^2 Y_t.
\end{aligned}$$

Līdzīgā veidā varam izteikt Y_3

$$\begin{aligned}
&Y_{t+3} = Y_{(t+1)+2} = Y_{t+1} + 2\Delta Y_{t+1} + \Delta Y_{t+1} =\\
&= (Y_t + \Delta Y_t) + (2Y_{t+2} - 2Y_{t+1}) + (\Delta^2 Y_{t+1} - \Delta^2 Y_t + \Delta^2 Y_t) =\\
&= (Y_t + \Delta Y_t) + ((2Y_t + 4\Delta Y_t + 2\Delta^2 Y_t) - (2Y_t + 2\Delta Y_t)) + (\Delta^3 Y_t + \Delta^2 Y_t) =\\
&= Y_t + 3\Delta Y_t + 3\Delta^2 Y_t + \Delta^3 Y_t.
\end{aligned}$$

Visbeidzot iegūsim vispārīgu sakarību

$$Y_{t+n} = C_0^n \Delta^0 Y_t + C_1^n \Delta^1 Y_t + C_2^n \Delta^2 Y_t + \ldots + C_n^n \Delta^n Y_t, \tag{8.1.9}$$

kur $\Delta^0 Y_t = Y_t$ un $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ — binomiālie koeficienti.

No (8.1.9) varam secināt, ka diferenču vienādojums formā

$$\phi(t, Y_t, \Delta Y_t, \Delta^2 Y_t, ..., \Delta^n Y_t) = 0$$

ir identisks ar vienādojumu formā

$$\psi(t, Y_t, Y_{t+1}, ..., Y_{t+n}) = 0. \tag{8.1.10}$$

Ievērojot (8.1.6) un (8.1.7), varam sacīt, ka (8.1.10) ir līdzvērtīgs pierakstam $\chi(t, Y_t, Y_{t-1}, ..., Y_{t-n}) = 0$.

DEFINĪCIJA 8.1.4. Diferenču vienādojumu sauc par **lineāru** (pār kopu $S \subset \mathbf{N} \cup \{0\}$), ja vienādojumu var pierakstīt formā

$$f_n(t)Y_{t+n} + f_{n-1}(t)T_{t+n-1} + ... + f_1(t)Y_{t+1} + f_0(t)Y_t = g(t), \tag{8.1.11}$$

kur f_n, $f_{n-1}, ..., f_1$, f_0, g ir neatkarīga mainīgā $t \in S$ funkcijas, kuras nevar izteikt ar Y_t.

Ja $\forall t \in S:\ g(t) = 0$, tad vienādojumu (8.1.11) sauc par **lineāru homogēnu diferenču vienādojumu**.

Ja $g(t) \neq 0$ kaut vienai $t \in S$ vērtībai, tad vienādojumu (8.1.11) sauc par **lineāru nehomogēnu diferenču vienādojumu**.

Ja f_n, $f_{n-1}, ..., f_1$, f_0 ir konstantas funkcijas, tad vienādojumu (8.1.11) sauc par **lineāru diferenču vienādojumu ar konstantiem koeficientiem**.

Lineāram diferenču vienādojumam (8.1.11) ir n-tā kārta, ja funkcijas f_n un f_0 ir atšķirīgas no 0 visiem $t \in S$.

Diferenču vienādojumi ar konstantiem koeficientiem ir aplūkoti daudzās mācību grāmatās. Tieši ar šāda samērā vienkārša veida diferenču vienādojumiem sastopamies daudzos ekonomiskajos modeļos.

8.2 DIFERENČU VIENĀDOJUMA ATRISINĀŠANA

Diferenču vienādojumu, tādu kā (8.1.11), var atrisināt, ja ir doti n sākuma nosacījumi. Kā sākuma nosacījumi iespaido atrisinājumu?

Sāksim ar pirmās kārtas diferenču vienādojumu, piemēram,

$$Y_t = 4Y_{t-1} + 2. \tag{8.2.1}$$

Ja mēs zinām Y_t vērtību laika punktā $t = 0$, t.i., zinām Y_0, tad varam aprēķināt Y_t jebkurā laika momentā t. Pieņemsim, ka

$$Y_0 = 2, \tag{8.2.2}$$

izmantojot (8.2.1), varam izskaitļot Y_1 : $Y_1 = 4 \cdot 2 + 2 = 10$. Un tā turpinot varam izskaitļot Y_2, Y_3, utt. Nosacījumu (8.2.2) sauc par **sākuma nosacījumu**, kurš kopā ar vienādojumu (8.2.1) veido diferenču vienādojumu sistēmu:

$$Y_t = 4Y_{t-1} + 2,\ Y_0 = 2. \tag{8.2.3}$$

Ja mums ir otrās kārtas diferenču vienādojums

$$Y_t = 2Y_{t-1} - Y_t - 2 + 3, \tag{8.2.4}$$

tad ir nepieciešami divi sākumnosacījumi, lai aprēķinātu Y_t vērtības pie $t = 2, 3, ...$ Ja, piemēram,

$$Y_0 = 4 \text{ un } Y_1 = 3 \tag{8.2.5}$$

ir dotie sākumnosacījumi, tad varam izskaitļot:

$$Y_2 = 2 \cdot 3 - 4 + 3 = 5,\ Y_3 = 2 \cdot 5 - 3 + 3 = 10,\ \text{utt.}$$

Tātad, ja mums ir n-tās kārtas diferenču vienādojums un ir doti n sākuma nosacījumi, tad mēs varam soli pa solim izskaitļot visas nepieciešamās Y_t vērtības jebkuram t.

Teiksim, mēs gribētu izskaitļot sistēmā (8.2.4), (8.2.5) Y_t vērtību pie $t = 245$. Ja izmantojam metodi "soli pa solim", tad mums nepieciešams izskaitļot vairāk nekā 240 vērtības. Tas, protams, nav ērti. Tāpēc ir izstrādāta cita rēķināšanas metode. Mēs atradīsim tādu funkciju $u(t)$, kurā ievietojot atbilstošo t vērtību, uzreiz varēsim izskaitļot Y_t vērtību, t.i., $Y_t = u(t)$. Šo funkciju $u(t)$ mēs sauksim par diferenču vienādojuma ar sākumnosacījumiem atrisinājumu, ja tā apmierina sākumnosacījumus un apmierina pašu diferenču vienādojumu.

DEFINĪCIJA 8.2.1. Funkciju $u(t)$ sauc par diferenču vienādojuma $F(t, Y_t, Y_{t+1}, ..., Y_{t+n}) = 0$ **atrisinājumu** (kopā S), ja $\forall t \in S : F(t, u(t), u(t+1), ..., u(t+n)) = 0$.

Jāatzīmē, ka diferenču vienādojums izsaka atrisinājuma funkcijas uzvedību tikai argumentiem $t \in S$.

Piemērs 8.2.1. Otrās kārtas lineāra diferenču vienādojuma ar konstantiem koeficientiem

$$Y_{t+2} - 3Y_{t+1} + 2Y_t = 0,\ t = 0, 1, 2, ... , \tag{9.2.6}$$

atrisinājums ir funkcija $Y_t = C_1\, 2^t + C_2$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas reālas konstantes. Pārliecināsimies par to!

$$\begin{aligned} &C_1\, 2^{t+2} + C_2 - 3(C_1\, 2^{t+1} + C_2) + 2(C_1\, 2^t + C_2) = \\ &= 4C_1\, 2^t + C_2 - 6C_1\, 2^t - 3C_2 + 2C_1\, 2^t + 2C_2 = 0. \end{aligned}$$

Ja mēs zinām, ka vienādojuma (8.2.6) atrisinājums ir tāds, ka $Y_0 = 1$ un $Y_1 = 6$, tad mēs iegūsim atrisinājuma funkciju ar divām noteiktām konstantēm:

$$\begin{aligned} Y_0 &= C_1\, 2^0 + C_2 = C_1 + C_2 = 1, \\ Y_1 &= C_1\, 2^1 + C_2 = 2C_1 + C_2 = 6, \end{aligned}$$

seko, ka $C_1 = 5$ un $C_2 = 1$, tātad atrisinājums ir $Y_t = 5 \cdot 2^t + 1$. ■

DEFINĪCIJA 8.2.2. Par diferenču vienādojuma $F(t, Y_t, Y_{t+1}, ..., Y_{t+n}) = 0$ **vispārīgo atrisinājumu** (kopā S) sauc funkciju $Y = u(t, C_1, C_2, ..., C_n)$, kura apmierina sekojošus nosacījumus:
1) jebkurām konstanšu C_1, $C_2, ...,$ C_n vērtībām šī funkcija ir dotā diferenču vienādojuma atrisinājums;
2) jebkuram atrisinājumam $v(t)$ eksistē tādas konstantes C_1', $C_2', ...,$ C_n', ka $v(t) = u(t, C_1', C_2', ..., C_n')$.

Tātad pirmās kārtas diferenču vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir formā $Y = u(t, C)$, otrās kārtas — $Y = u(t, C_1, C_2)$, utt.

DEFINĪCIJA 8.2.3. Ja diferenču vienādojuma $F(t, Y_t, Y_{t+1}, ..., Y_{t+n}) = 0$ vispārīgā atrisinājuma $Y = u(t, C_1, C_2, ..., C_n)$ konstantēm C_1, $C_2, ...,$ C_n tiek piešķirtas konkrētas skaitliskas vērtības, tad iegūto funkciju sauc par dotā diferenču vienādojuma **partikulāro atrisinājumu**.

TEORĒMA 9.2.1 (EKSISTENCES UN UNITĀTES). Lineāram diferenču vienādojumam

$$f_0(t)Y_{t+n} + f_1(t)Y_{t+n-1} + ... + f_{t-1}(t)Y_{t+1} + f_n(t)Y_t = g(t), \tag{8.2.7}$$

$t \in S$ (S sastāv vienam pēc otra sekojošiem veseliem skaitļiem), eksistē viens vienīgs atrisinājums Y, ja ir zināmas n vienai pēc otras sekojošas atrisinājuma Y vērtības (t.i., doti n sākumnosacījumi).

Pierādījums. Pieņemsim, ka t (kopā S) mainās veselajos skaitļos, sākot no mazākās vērtības a (a nenegatīvs vesels skaitlis). Pieņemsim, ka n zināmās Y vērtības ir Y_a, Y_{a+1},..., Y_{a+n-1}. Mēs pierādīsim ar indukciju, ka Y vērtība jebkuram $a \leq t$ ir viennozīmīgi noteikta, un tādējādi pierādīsim atrisinājuma unitāti.

Ar dotajām Y vērtībām vērtība Y_{a+n} ir viennozīmīgi noteikta, jo, ievietojot vienādojumā (8.2.7) $t = a$, iegūsim:

$$f_0(a)Y_{a+n} = g(a) - f_1(a)Y_{a+n-1} - ... - f_{n-1}(a)Y_{a+1} - f_n(a)Y_a,$$

dalot šo vienādojumu ar $f_0(a)$ ($\neq 0$), iegūsim sakarību, kas nosaka Y_{a+n} vērtību.

Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka Y vērtības visām t vērtībām līdz Y_{a+j} ir zināmas, pie kam $j \geq n$.

Induktīvā pāreja: parādīsim, ka nākamā Y vērtība Y_{a+j+1} ir viennozīmīgi noteikta. Ievietosim (8.2.7) $t = t_1 = a + j + 1 - n$:

$$f_0(t_1)Y_{a+j+1} = g(t_1) - f_1(t_1)Y_{a+j} - f_2(t_1)Y_{a+j-1} - ... - f_{n-1}(t_1)Y_{a+j_n+2} - f_n(t_1)Y_{a+j_n+1}.$$

Pēc induktīvā pieņēmuma vienādojuma labajā pusē esošās Y vērtības ir zināmas. $f_0(t_1) \neq 0$, jo f_0 kopā S nekad nav 0, tāpēc pēdējā vienādojuma abas puses varam izdalīt ar $f_0(t_1)$. Iegūtā sakarība ļauj noteikt Y_{a+j+1} vērtību. Indukcija pabeigta.

Ja Y_a vietā ir dota vērtība Y_m ($m > a$), tad mēs varam vispirms vienu pēc otras izsacīt vērtības Y_{m-1}, Y_{m-2}, ..., Y_{a-1} un Y_a un pēc tam veikt pierādījumu kā sākumā. Ka tā tas patiešām ir iespējams, atkal varam pierādīt ar indukciju. Mēs parādīsim, kā var izteikt Y_{m-1}, un atlikušo pierādījuma daļu lasītājs var izvest pats. Pierakstīsim diferenču vienādojumu (8.2.7) t vērtībai $m - 1$:

$$f_n(m-1)Y_{m-1} = g(m-1) - f_0(m-1)Y_{m-1+n} - ... - f_{n-1}(m-1)Y_m.$$

Tā kā Y_m, Y_{m+1}, ..., Y_{m+n-1} ir dotās Y vērtības, tad labā vienādojuma puse ir zināma. Tā kā f_n kopā S nekad nav vienāds ar 0, tad varam abas vienādojuma puses dalīt ar $f_n(m-1)$ un līdz ar to Y_{m-1} vērtība ir noteikta. ■

Apskatīsim vēlreiz n-tās kārtas lineāru diferenču vienādojumu (8.1.11)

$$f_n(t)Y_{t+n} + f_{n-1}(t)T_{t+n-1} + ... + f_1(t)Y_{t+1} + f_0(t)Y_t = g(t)$$

un tam atbilstošo homogēno vienādojumu

$$f_n(t)Y_{t+n} + f_{n-1}(t)T_{t+n-1} + ... + f_1(t)Y_{t+1} + f_0(t)Y_t = 0. \qquad (8.2.8)$$

Lineāru diferenču vienādojumu atrisinājumiem ir dažas kopīgas īpašības.

TEORĒMA 8.2.2. Ja homogēnajam vienādojumam (8.2.8) ir atrisinājumi Y_t^1, Y_t^2, tad šī vienādojuma atrisinājums ir arī $Y_t = Y_t^1 + Y_t^2$.

TEORĒMA 8.2.3. Ja homogēnajam vienādojumam (8.2.8) ir atrisinājums Y_t^1, tad šī vienādojuma atrisinājums ir arī $Y_t = AY_t^1$ ar jebkuru patvaļīgu reālu konstanti A.

TEORĒMA 8.2.4. Ja $\overline{Y}_t$ ir patvaļīgs nehomogēnā diferenču vienādojuma (8.1.11) partikulārais atrisinājums un Y_t^* ir atbilstošā homogēnā vienādojuma (8.2.8) vispārīgais atrisinājums, tad $Y_t = \overline{Y}_t + Y_t^*$ ir nehomog=enā vienādojuma (8.1.11) vispārīgais atrisinājums.

Šīs teorēmas nav grūti pierādīt, tāpēc mēs parādīsim tikai pēdējās teorēmas pierādījumu, pārējo divu - atstāsim lasītāja ziņā.

Pierādījums teorēmai 8.2.4.

Pieņemsim, ka $\overline{Y}_t$ ir patvaļīgs nehomogēnā diferenču vienādojuma (8.1.11) partikulārais atrisinājums un Y_t^* ir atbilstošā homogēnā vienādojuma (8.2.8) vispārīgais atrisinājums. Lai funkcija izskatā $Y_t = \overline{Y}_t + Y_t^*$ būtu nehomogēnā vienādojuma (8.1.11) vispārīgais atrisinājums, atliek šo funkciju ievietot vienādojumā (8.1.11) un pārbaudīt, vai izpildās identitāte:

$$\begin{aligned} & f_n(t)\,(\overline{Y}_{t+n} + Y_{t+n}^*) + f_{n-1}(t)\,(\overline{Y}_{t+n-1} + Y_{t+n-1}^*) + ... + f_0(t)\,(\overline{Y}_t + Y_t^*) = \\ & = [f_n(t)\,\overline{Y}_{t+n} + f_{n-1}(t)\,\overline{Y}_{t+n-1} + ... + f_0(t)\,\overline{Y}_t] + \\ & \qquad + [f_n(t)\,Y_{t+n}^* + f_{n-1}(t)\,Y_{t+n-1}^* + ... + f_0(t)\,Y_t^* = \\ & = g(t) + 0 = g(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Augstāk minētās teorēmas norāda veidu, kā praktiski jārīkojas, lai atrastu lineāra diferenču vienādojuma vispārīgo atrisinājumu:

1.solis — jāatrod kaut kāds vienādojuma (8.1.11) partikulārais atrisinājums $\overline{Y}_t$,

2.solis — jāatrod homogēnā vienādojuma (8.2.8) vispārīgais atrisinājums, t.i., jāatrod n viens pēc otra sekojoši neatkarīgi partikulārie atrisinājumi Y_t^1, $Y_t^2, ..., Y_t^n$, kuri kopā ar patvaļīgām konstantēm C_1, $C_2, ..., C_n \in \mathbf{R}$ veido funkciju $C_1Y_t^1 + C_2Y_t^2 + ... + C_nY_t^n$, kura pēc Teorēmām 8.2.2 un 8.2.3 ir (8.2.8) vispārīgais atrisinājums,

3.solis — no Teorēmas 8.2.4 seko, ka funkcija $Y_t = \overline{Y}_t + C_1Y_t^1 + C_2Y_t^2 + ... + C_nY_t^n$ ir (8.1.11) vispārīgais atrisinājums.

8.3 PIRMĀS KĀRTAS LINEĀRI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

Par pirmās kārtas lineāru diferenču vienādojumu sauc:

$$f_1(t)Y_{t+1} + f_0(t)Y_t = g(t), \quad t \in S, \tag{8.3.1}$$

pie kam funkcijas f_0 un f_1 jebkurai $t \in S$ vērtībai nav 0. Izdalot vienādojuma (8.3.1) abas puses ar $f_1(t)$, mēs iegūsim:

$$Y_{t+1} + \frac{f_0(t)}{f_1(t)}Y_t = \frac{g(t)}{f_1(t)}, \quad t \in S.$$

Apzīmējot $A(t) = \frac{f_0(t)}{f_1(t)}$, diferenču vienādojumu (8.3.1) varam pārrakstīt formā:

$$Y_{t+1} = A(t)Y_t + B(t), \quad t \in S. \tag{8.3.2}$$

8.3.1 PIRMĀS KĀRTAS LINEĀRI HOMOGĒNI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

Atbilstošais pirmās kārtas lineārais homogēnais diferenču vienādojums ir

$$Y_{t+1} = A(t)Y_t, \quad t \in S. \tag{8.3.1.1}$$

Pieņemsim, ka definīcijas kopa ir $S = 0, 1, 2, ...$ Pieņemsim, ka funkcija Y, ja $t = 0$, pieņem vērtību C. Tad mēs varam funkcijas vērtības Y_t izrēķināt šādi:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = A(0)C,\ Y_2 = A(1)Y_1, ...,\ Y_t = A(t-1)Y_{t-1}, ..., \text{ jeb}\\
&Y_t = A(t-1)Y_{t-1} = A(t-1)A(t-2)Y_{t-2} = ... =\\
&= A(t-1)A(t-2)...A(2)A(1)A(0)C = C\textstyle\prod_{i=0}^{t-1} A(i), \quad t = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}$$

Funkcija

$$Yt = C\prod_{i=0}^{t-1} A(i), \quad t = 0, 1, 2, ...,$$

ir lineārā homogēnā diferenču vienādojuma (8.3.1.1) vispārīgais atrisinājums, jo, ievietojot šo funkciju vienādojumā (8.3.1.1), iegūsim identitāti.

Praktiskajos pielietojumos nozīmīgu lomu spēlē lineāru homogēnu 1.kārtas diferenču vienādojumu speciālgadījums — vienādojumi ar konstantiem koeficientiem:

$$Y_t = \beta Y_{t-1},\ \beta \in \mathbf{R}. \tag{8.3.1.2}$$

Piemēram, 1.kārtas lineārs homogēns diferenču vienādojums ar konstantu koeficientu un sākumnosacījumu ir

$$Y_t = 2Y_{t-1},\ Y_0 = 3. \tag{8.3.1.3}$$

Varam izskaitļot Y_t vērtības:

$$\begin{aligned} &Y_1 = 2 \cdot 3 = 6,\\ &Y_2 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12,\\ &Y_3 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24,\\ &\quad \ldots \end{aligned} \tag{8.3.1.4}$$

Acīmredzami, ka

$$Y_t = 2Y_{t-1} = 2^t \cdot 3 \tag{8.3.1.5}$$

ir vienādojuma (8.3.1.3) atrisinājums, kurš apmierina ne tikai vienādojumu, bet arī sākumnosacījumu: ja $t = 0$, tad $Y_0 = 2^0 \cdot 3 = 3$, kā arī, ja (8.3.1.5) apskatām pie $t-1$, iegūsim $Y_{t-1} = 2 \cdot Y_{t-2} = 2^{t-1} \cdot 3$, kuru, savietojot ar (8.3.1.3) diferenču vienādojumu, iegūsim $Y_t = 2 \cdot 2^{t-1} \cdot 3 = 2^t \cdot 3$, kas ir identiska formula ar (8.3.1.5). Vienkāršu vienādojumu gadījumā atrisinājumu var iegūt, mainīgā vērtību nosakot no Y_t vērtībām, kā to mēs izdarījām, izskaitļojot (8.3.1.4). Tomēr derīgi būtu parādīt vispārīgu formālu risināšanas paņēmienu. Apskatot (8.3.1.4) vērtības, redzam, ka vienādojuma $Y_t = \beta Y_{t-1}$ vispārīgais atrisinājums pieņem formu $Y_t = K^t$. Savietojot $Y_t = K^t$ ar (8.3.1.1), iegūsim

$$K^t = \beta K^{t-1} \text{ jeb} \tag{8.3.1.6}$$

$$K^{t-1}(K - \beta) = 0 \text{ vai } \beta = K.$$

(8.3.1.6) sauc par **palīgvienādojumu** vai **raksturīgo vienādojumu**. Ja $K = \beta$, tad $Y_t = \beta^t$ der par atrisinājumu. $t = 0$: $Y_0 = 1$, jāsecina, ka sākumnosacījums $Y_0 = \alpha$ (vispārīgā gadījumā $\alpha \neq 1$) nav apmierināts, kaut arī pats diferenču vienādojums ir apmierināts (jo $Y_{t-1} = \beta^{t-1}$, tādējādi $Y_t = \beta Y_{t-1} = \beta^t$). Pieņemsim, ka

$$Y_t = A\beta^t \tag{8.3.1.7}$$

ir vispārīgais diferenču vienādojuma (8.3.1.2) atrisinājums un noskaidrosim, kāda vērtība jāpieņem A, lai būtu apmierināts sākumnosacījums. Ja $t = 0$, tad iegūsim $Y_0 = A\beta^0 = A \cdot 1 = A$ un tam ir jābūt vienādam ar α. Līdz ar to esam atraduši vienādojuma (8.3.1.2) ar sākumnosacījumu $Y_0 = \alpha$ atrisinājumu:

$$Y_t = \alpha\beta^t, \tag{8.3.1.8}$$

kurš ir diferenču vienādojuma (8.3.1.2) partikulārais atrisinājums.

Tālāk noskaidrosim pirmās kārtas homogēnu diferenču vienādojumu atrisinājumu uzvedību.

Mēs tikām diferenču vienādojuma vispārīgo atrisinājumu pierakstīuši formā $Y_t = AK^t$, kur A un K ir dotas konstantes. Ja $t = 0$, pirmā Y_t vērtība ir A. Jautājums ir sekojošs: kāds izskatīsies Y_t pie dažādām A un K vērtībām? Apskatīsim vairākus gadījumus.

(1) Ja $K = 1$ un A ir patvaļīga konstante, tad $Y_t = A$ visos laika periodos t.

(2) $K > 1$ un A ir patvaļīga konstante. Šajā gadījumā ir jārunā par ļoti strauju Y attīstību, pie tam, ja $A > 0$, tad Y_t pieaug pozitīvā virzienā, ja $A < 0$, Y_t pieaug negatīvā virzienā. "Eksplozija" ir jo lielāka, jo lielāka ir K vērtība.

(3) $K < -1$ un A ir patvaļīga konstante. Ja K ir negatīvs un mazāks par -1, tad laika tecējumā Y_t ir ar oscilējošu un "eksplozīvu" raksturu.

(4) $-1 < K < 1$ un A ir patvaļīga konstante. Šeit iespējami divi apakšgadījumi. (a) Ja $K > 0$, tad Y_t vērtības, pieaugot t vērtībai, tiecas uz 0. (b) Ja $K < 0$, arī tad, pieaugot t vērtībai, Y_t vērtība tiecas uz 0, bet ar oscilējošu kustību.

(5) $K = -1$ un A ir patvaļīga konstante, tad iegūsim Y_t vērtību funkciju, kura oscilē ap 0 ar novirzi A.

8.3.2 PIRMĀS KĀRTAS LINEĀRI NEHOMOGĒNI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

Apskatīsim diferenču vienādojumu ar sākumnosacījumu

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta,\ Y_0 = \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbf{R}. \tag{9.3.2.1}$$

Rīkosimies līdzīgi, kā iepriekšs, nosakot homogēnā vienādojuma atrisinājumu. No vienādojuma (8.3.2.1) varam izrēķināt:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \alpha\gamma + \beta,\\
&Y_2 = \alpha(\alpha\gamma + \beta) + \beta = \alpha^2\gamma + \alpha\beta + \beta,\\
&Y_3 = \alpha(\alpha^2\gamma + \alpha\beta + \beta) + \beta = \alpha^3\gamma + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta,\\
&\quad ...\\
&Y_n = \alpha^n\gamma + (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + ... + \alpha + 1) \cdot \beta = \alpha^n\gamma + \beta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i.
\end{aligned}$$

Izmantojot ğeometriskās progresijas summas definīciju, varam pierakstīt:

$$Y_n = \alpha^n\gamma + \beta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha},\ \alpha \neq 1.$$

No šejienes seko, ka

$$Y_t = \alpha^t\gamma + \beta\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha},\ \alpha \neq 1,$$

ir (8.3.2.1) partikulārais atrisinājums. Ja $\alpha = 1$, tad (8.3.2.1) ir formā

$$Y_t = Y_{t-1} + \beta,\ Y_0 = \gamma,$$

partikulārais atrisinājums ir

$$Y_t = \gamma + \beta t.$$

TEORĒMA 8.3.2.1. Diferenču vienādojuma ar sākumnosacījumu (8.3.2.1) atrisinājums ir

$$Y_t = \begin{cases} \alpha^t\gamma + \beta\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1,\\ \gamma + \beta t, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{8.3.2.2}$$

Pierādījums. Gadījumā, ja $\alpha \neq 1$, pierādīsim, ka atrisinājums (8.3.2.2) apmierina vienādojumu un sākumnosacījumu (8.3.2.1). Ņemsim $t = 0$ atrisinājumā (8.3.2.2) un izskaitļosim:

$$Y_0 = \alpha^0\gamma + \beta\frac{1-\alpha^0}{1-\alpha} = \gamma = Y_0 -$$

sākuma nosacījums ir apmierināts. Tagad ir jāparāda, ka (8.3.2.2) mēs iegūsim arī tad, ja

$$Y_{t-1} = \alpha^{t-1}\gamma + \beta\frac{1-\alpha^{t-1}}{1-\alpha}$$

ievietosim diferenču vienādojuma izteiksmē (8.3.2.1):

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha(\alpha^{t-1}\gamma + \beta\tfrac{1-\alpha^{t-1}}{1-\alpha}) + \beta = \alpha^t\gamma + \beta\tfrac{\alpha-\alpha^t}{1-\alpha} + \beta = \\ &= \alpha^t\gamma + \beta\left(\tfrac{\alpha-\alpha^t}{1-\alpha} + 1\right) = \alpha^t\gamma + \beta\tfrac{\alpha-\alpha^t+1-\alpha}{1-\alpha} = \alpha^t\gamma + \beta\tfrac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \end{aligned}$$

un esam nonākuši atkal pie (8.3.2.2).

Gadījumā, ja $\alpha = 1$, pierādījums tiek veikts analoģiskā veidā. ∎

SEKAS 8.3.2.1. Diferenču vienādojuma $Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta,\ \alpha,\ \beta, \in \mathbf{R}$ (bez sākumnosacījuma) vispārīgais atrisinājums ir

$$Y_t = \begin{cases} \alpha^t C + \beta\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1,\ C \in \mathbf{R} \\ C + \beta t, & \alpha = 1,\ C \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Tālāk analizēsim pirmās kārtas nehomogēnu diferenču vienādojumu atrisinājumu uzvedību laika gaitā. Šim nolūkam pierakstīsim vispārīgo atrisinājumu sekojošā veidā:

$$Y_t = \alpha^t C + \beta\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} = \alpha^t C + \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\alpha}\alpha^t = \frac{\beta}{1-\alpha} + \left(C - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^t.$$

Pēdējo pierakstu mēs varam pie dotām α, β un C vērtībām vienkāršot, apzīmējot $\delta_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ un $\delta_1 = C - \frac{\beta}{1-\alpha}$. Līdz ar to atrisinājumu varam pierakstīt formā:

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1\alpha^t. \qquad (8.3.2.3)$$

Tagad ir skaidri redzams, ka laika gaitā Y_t ir atkarīgs no konstantes α:

(1) $\alpha > 1$, pieaugot t vērtībai, pieaug α^t; Y_t tiecas uz plus bezgalību, ja $\delta_1 > 0$, un tiecas uz mīnus bezgalību, ja $\delta_1 < 0$;

(2) $0 < \alpha < 1$, pieaugot t vērtībai, α^t tiecas uz 0, tāpēc Y_t vērtība tiecas uz δ_0;

(3) $-1 < \alpha < 0$, pieaugot t vērtībai, α^t oscilējoši tiecas uz 0, tāpēc Y_t arī oscilējoši tiecas uz δ_0;

(4) ja $\alpha < -1$, tad, pieaugot t vērtībai, α^t vērtība pēc moduļa pieaug, tā ir oscilējoša, tāda pati uzvedība ir arī Y_t.

Kas notiek, ja $\alpha = 1$ vai -1, ieteicams lasītājam izdomāt pašam.

8.4 OTRĀS KĀRTAS LINEĀRI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

Otrās kārtas lineārs diferenču vienādojums ir

$$f_2(t)Y_{t+2} + f_1(t)Y_{t+1} + f_0(t)Y_t = g(t),\ t \in S \subset \mathbf{N} \cup \{0\},$$

pie kam funkcijas $f_2(t)$ un $f_0(t)$ kopā S ir atšķirīgas no 0. Ja $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ ir konstantes, tad, izdalot vienādojumu ar $f_2(t)$ un apzīmējot

$$a_1 = \frac{f_1(t)}{f_2(t)},\ a_2 = \frac{f_0(t)}{f_2(t)},\ r_t = \frac{g(t)}{f_2(t)},$$

iegūsim otrās kārtas lineāru diferenču vienādojumu ar konstantiem koeficientiem:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = r_t,\ a_2 \neq 0. \tag{8.4.1}$$

Atbilstošais homogēnais diferenču vienādojums ir:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0\ a_2 \neq 0. \tag{8.4.2}$$

8.4.1 OTRĀS KĀRTAS LINEĀRI HOMOGĒNI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

Kādi nosacījumi jāapmierina homogēnā vienādojuma (8.4.2) partikulārajiem atrisinājumiem, lai to lineārā kombinācija ar patvaļīgām konstantēm būtu (8.4.2) vispārīgais atrisinājums?

Pamēģināsim rast atbildi.

Saka, ka divu vienādojumu sistēmai ar nezināmajiem x un y un konstantēm a, b, c, d, e, f :

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f \end{cases} \tag{8.4.1.1}$$

par atrisinājumu der (x_0, y_0), ja abi vienādojumi gadījumā, kad $x = x_0$ un $y = y_0$, ir identitātes.

TEORĒMA 8.4.1.1 (KRĀMERA TEORĒMA). Vienādojumu sistēmai (8.4.1.1) eksistē viens vienīgs atrisinājums tad un tikai tad, ja $ad - bc \neq 0$.

Pierādījums.
$\Rightarrow$ Pieņemsim, ka x_0 un y_0 ir sistēmas (8.4.1.1) vienīgais atrisinājums:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = e, \\ cx_0 + dy_0 = f \end{cases}$$

x_0 un y_0 varam no šejienes izsacīt sekojošā veidā:

$$x_0 = \frac{de - bf}{ad - bc},\ y_0 = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Tā kā tas ir sistēmas vienīgais atrisinājums, tad $ad - bc \neq 0$.

$\Leftarrow$ Pieņemsim, ka $ad - bc \neq 0$. Tad no sistēmas (8.4.1.1) atrisinājuma x_0 un y_0 vērtības varam izteikt sekojošā veidā:

$$x_0 = \frac{de - bf}{ad - bc},\ y_0 = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Tā kā saucējs nav vienāds ar 0, tad atrisinājums ir noteikts viennozīmīgi. Varam pārliecināties, ka tas patiešām ir atrisinājums:

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{de - bf}{ad - bc} + b \cdot \dfrac{af - ce}{ad - bc} = e, \\ c \cdot \dfrac{de - bf}{ad - bc} + d \cdot \dfrac{af - ce}{ad - bc} = f, \end{cases} \quad \text{jeb}$$

$$\begin{cases} \dfrac{ade - abf + abf - bce}{ad - bc} = \dfrac{e(ad - bc)}{ad - bc} = e, \\ \dfrac{cde - bcf + adf - cde}{ad - bc} = \dfrac{f(ad - bc)}{ad - bc} = f. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Atbildi uz paragrāfa sākumā uzstādīto jautājumu dod teorēma:

TEORĒMA 8.4.1.2. Pieņemsim, ka $y^{(1)}$ un $y^{(2)}$ ir homogēnā diferenču vienādojuma (8.4.2) atrisinājumi. Apzīmēsim $Y := C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes. Ja

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(1)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(1)} \end{vmatrix} = y_0^{(1)} y_1^{(2)} - y_0^{(2)} y_1^{(1)} \neq 0, \tag{8.4.1.2}$$

tad Y ir (8.4.2) vispārīgais atrisinājums.

Pierādījums. Pēc Teorēmām 8.2.2 un 8.2.3 Y ir viens no (8.4.2) atrisinājumiem. Ja y ir patvaļīgs (8.4.2) atrisinājums, tad jāatrod ir tādas konstantes C_1 un C_2, lai Y un y būtu identiski. Unitātes teorēmas dēļ ir pietiekami identitāti pierādīt pie vērtībām $t = 0$ un $t = 1$.

Ja $t = 0$, tad $Y_0 = C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)}$, ja $t = 1$, tad $Y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)}$, un C_1 un C_2 vērtības nosaka vienādojumu sistēma:

$$\begin{cases} C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)} = y_0, \\ C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} = y_1. \end{cases}$$

No Krāmera teorēmas seko, ka šai vienādojumu sistēmai eksistē viens vienīgs atrisinājums tikai tajā gadījumā, ja $y_0^{(1)} y_1^{(2)} - y_0^{(2)} y_1^{(1)} \neq 0$. ∎

DEFINĪCIJA 8.4.1.1. Homogēna diferenču vienādojuma (8.4.2) divus atrisinājumus $y^{(1)}$ un $y^{(2)}$ sauc par vienādojuma (8.4.2) **fundamentālo atrisinājumu sistēmu**, ja šie atrisinājumi apmierina nosacījumu (8.4.1.2).

Izmantojot jauno jēdzienu, Teorēmu 8.4.1.2 varam pārformulēt sekojoši: vienādojuma (8.4.2) vispārīgo atrisinājumu veido vienādojuma (8.4.2) fundamentālās atrisinājumu sistēmas lineāra kombinācija ar patvaļīgām konstantēm C_1 un C_2.

TEORĒMA 8.4.1.3. Ja y^* ir nehomogēnā vienādojuma (8.4.1) partikulārais atrisinājums un $y^{(1)}$ un $y^{(2)}$ ir homogēnā vienādojuma (8.4.2) fundamentālā atrisinājumu sistēma, tad (8.4.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + y^*,$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

Pierādījums. No Teorēmas 8.2.4 seko, ka y ir viens no (8.4.1) atrisinājumiem. Pierādījums tam, ka y ir patiešām vispārīgais atrisinājums, ir analoģisks Teorēmā 8.4.1.2 izmantotajam. Atšķirība ir tāda, ka konstantēm C_1 un C_2 jāapmierina vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)} = y_0 - y_0^*, \\ C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} = y_1 - y_1^*. \end{cases}$$

Tā kā $y^{(1)}$ un $y^{(2)}$ veido fundamentālu atrisinājumu sistēmu, tad šai vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums jebkurām y_0 un y_1 vērtībām. ∎

Tagad mēģināsim noskaidrot, kā atrast vispārīgo atrisinājumu homogēnam otrās kārtas diferenču vienādojumam. Pēc Teorēmas 8.4.1.2 tas nozīmē atrast (8.4.2) fundamentālo atrisinājumu sistēmu.

Diferenču vienādojuma atrisinājuma noskaidrošana gadījumā, kad $y_t = m^t$, kur $m \neq 0$ ir patvaļīgi izvēlēta konstante, ir samērā vienkārša. Ievietojam šo izmēģinājuma atrisinājumu diferenču vienādojumā (8.4.2), izdalām ar m^t un iegūsim vienādojumu

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0. \tag{8.4.1.3}$$

Šo kvadrātvienādojumu sauc par diferenču vienādojuma **raksturīgo vienādojumu**. $y^t = m^t$ ir diferenču vienādojuma (8.4.2) atrisinājums, ja m ir skaitlis, kas apmierina raksturīgo vienādojumu. Raksturīgais vienādojums ir kvadrātvienādojums un tāpēc tam ir divas saknes, teiksim m_1 un m_2, pie tam tās nav vienādas ar 0, jo $a_2 \neq 0$ pēc lineāra diferenču vienādojuma definīcijas. Šīs raksturīgā vienādojuma saknes dod divus vienādojuma (8.4.2) atrisinājumus:

$$y_t^{(1)} = m_1^t,\ y_t^{(2)} = m_2^t. \tag{8.4.1.4}$$

Jāšķiro trīs gadījumi:
(I) saknes m_1 un m_2 ir reāli skaitļi, un tās ir atšķirīgas;
(II) saknes m_1 un m_2 ir reāli skaitļi, bet tās ir vienādas;
(III) saknes m_1 un m_2 ir kompleksi skaitļi.

(I) **Reālas un atšķirīgas raksturīgā vienādojuma saknes**

Šajā gadījumā atrisinājumi (8.4.1.4) veido fundamentālu atrisinājumu sistēmu, jo determinanta

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(1)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \tag{8.4.1.5}$$

vērtība ir atšķirīga no 0 (saknes m_1 un m_2 ir atšķirīgas). Līdz ar to šajā gadījumā homogēnā diferenču vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir formā

$$Y_t = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t.$$

(II) **Reālas un vienādas raksturīgā vienādojuma saknes**

Šajā gadījumā atrisinājumi (8.4.1.4) neveido fundamentālu atrisin=ajumu sistēmu. Paturot vienu atrisinājumu $y^{(1)}$, mums ir jānosaka jauna funkcija

$y^{(2)}$, kura kopā ar $y^{(1)}$ veidotu fundamentālu atrisinājumu sistēmu. Piemēram, par tādu otro atrisinājumu der $y_t^{(2)} = tm_1^t$, jo

$$t_{t+2}^{(2)} + a_1 y_{t+1}^{(2)} + a_2 y_t^{(2)} = (t+2)m_1^{t+2} + a_1(t+1)m_1^{t+1} + a_2 tm_1^t =$$

$$= tm_1^t(m_1^2 + a_1 m_1 + a_2) + m_1^{t+1}(2m_1 + a_1) = 0.$$

Summa pirmajās iekavās ir vienāda ar 0, jo m_1 ir raksturīgā vienādojuma sakne. Arī otrajās iekavās esošā summa $2m_1 + a_1$ ir vienāda ar 0, jo pēc Vjeta teorēmas kvadrātiska vienādojuma $m_1^2 + a_1 m_1 + a_2 = 0$ sakņu summa ir vienāda ar $-a_1$.

Atrisinājumi veido fundamentālu atrisinājumu sistēmu, jo

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(1)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & m_1 \end{vmatrix} = m_1,$$

pie kam m_1 ir no 0 atšķirīgs lielums (diferenču vienādojuma raksturīgā vienādojuma saknes nav 0). Līdz ar to (8.4.2) vispārīgais atrisinājums ir formā

$$Y_t = C_1 m_1^t + C_2 tm_1^t.$$

(III) **Kompleksas raksturīgā vienādojuma saknes**

Vispirms ievērosim, ka kvadrātiska vienādojuma kompleksās saknes vienmēr veido kompleksi saistīto sakņu pāri. Tādējādi, ja m_1 un m_2 ir raksturīgā vienādojuma kompleksas saknes, tad $m_1 \neq m_2$ un, ievērojot (8.4.1.5), atrisinājumi $y_t^{(1)} = m_1^t$ un $y_t^{(2)} = m_2^t$ veido fundamentālu atrisinājumu sistēmu. Līdz ar to $Y_t = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t$ ir homogēnā vienādojuma (8.4.2) vispārīgais atrisinājums. Tomēr ar šādu atrisinājumu var rasties problēmas, jo tas ir komplekss skaitlis. Ja konstantes C_1 un C_2 tiek izvēlētas kā kompleksi saistīts pāris, tad var panākt, ka Y_t ir reāls skaitlis. Lai to pamatotu, visus kompleksos skaitļus apskatīsim trigonometriskajā formā. Raksturīgā vienādojuma saknes ir kompleksi saistītas, tāpēc to trigonometriskā forma ir

$$m_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ m_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Pieņemsim, ka C_1 un C_2 ir kompleksi saistīts skaitļu pāris:

$$C_1 = a(\cos B + i\sin B),\ C_2 = a(\cos B - i\sin B).$$

Pēc Muavra kāpināšanas formulas iegūsim, ka:

$$m_1^t = r^t(\cos t\theta + i\sin t\theta),\ m_2^t = r^t(\cos t\theta - i\sin t\theta).$$

Ņemot vērā komplekso skaitļu reizināšanas likumus, atrisinājumu Y_t varam pierakstīt vienkāršākā veidā

$$\begin{aligned}&Y_t = C_1 m_1^t + C_2 t m_1^t = \\&= ar^t(\cos(t\theta + B) + i\sin(t\theta + B)) + ar^t(\cos(t\theta + B) - i\sin(t\theta + B)) = \\&= 2ar^t \cos(t\theta + B).\end{aligned}$$

Pārveidojumu rezultātā esam ieguvuši reālu skaitli.

r un θ vērtības varam noteikt pēc formulām, kas saista komplekso skaitļu algebrisko formu ar trigonometrisko, proti, $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, kur $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ un $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

Konstantes a un B aizvieto C_1 un C_2. Ja apzīmējam $2a$ ar A, tad vispārīgo atrisinājumu vienādojumam (8.4.2) varam pierakstīt

$$Y_t = Ar^t \cos(t\theta + B), A \text{ un } B \text{ patvaļīgas konstantes.}$$

8.4.2 OTRĀS KĀRTAS LINEĀRI NEHOMOGĒNI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

Mēģināsim noskaidrot jautājumu par partikulāro atrisinājumu atrašanu nehomogēnam otrās kārtas diferenču vienādojumam. Ir vairākas metodes, ar kuru palīdzību var atrast partikulāros atrisinājumus. Viena no labākajām metodēm ir tā saucamā nenoteikto koeficientu metode. Mēs šo metodi nodemonstrēsim ar vairāku piemēru palīdzību.

Piemēri 8.4.2.1.

(a) Apskatīsim vienādojumu

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 3^t$$

un meklēsim tā partikulāro atrisinājumu formā $y_t^* = A3^t$, kur A ir pagaidām nezināma konstante. Noteiksim A vērtību, izmantojot doto vienādojumu:

$$y_{t+2}^* - 3y_{t+1}^* + 2y_t^* = A3^{t+2} - 3A3^{t+1} + 2A3^t = A3^t(9 - 9 + 2) = 2A3^t.$$

Tāpēc $A = \frac{1}{2}$, un par patrikulāro atrisinājumu der izteiksme $y_t^* = \frac{1}{2} \cdot 3^t$. Tā kā apskatāmā vienādojuma raksturīgais vienādojums ir $m^2 - 3m + 2 = 0$, kura saknes ir $m_1 = 1$ un $m_2 = 2$, tad vispārīgais atrisinājums dotajam vienādojumam ir

$$y_t = C_1 + C_2 2^t + \frac{3^t}{2}, \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

(b) Mēģināsim atrast vienādojuma

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = a^t,$$

kur a kaut kāda konstante, partikulāro atrisinājumu. Tāpat kā (a) gadījumā, atrisinājumu meklēsim formā $y_t^* = Aa^t$. Iegūsim

$$y_{t+2}^* - 3y_{t+1}^* + 2y_t^* = Aa^{t+2} - 3Aa^{t+1} + 2Aa^t = Aa^t(a^2 - 3a + 2) = Aa^t(a-1)(a_2).$$

No šejienes seko, ka

$$A(a-1)(a-2) = 1,$$

un mēs varam A vērtību izskaitļot, ja vien a nav 1 vai 2, t.i., ja a nav raksturīgā vienādojuma sakne. Ja a nav 1 vai 2, tad

$$y_t^* = \frac{a^t}{(a-1)(a-2)}$$

ir dotā vienādojuma partikulārais atrisinājums. Ja tomēr $a = 1$ vai $a = 2$, tad šādā veidā partikulāro atrisinājumu nevaram noteikt. Tādā gadījumā jārīkojas ar citu izmēģinājuma atrisinājumu, konkrēti šajā gadījumā varam pamēģināt funkciju $y_t^* = Ata^t$. Konkretizējot situāciju, pieņemsim, ka $a = 1$, tad vienādojums ir

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 1,$$

un partikulārā atrisinājuma veids $y_t^* = At$. No šejienes seko, ka

$$y_{t+2}^* - 3y_{t+1}^* + 2y_t^* = A(t+2) - 3A(t+1) + 2At = -A;$$

ja ņemam $A = -1$, partikulārais atrisinājums ir $y_t^* = -t$. Tātad gadījumā, ja $a = 1$, vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y_t = C_1 + C_2 2^t - t.$$

(c) Diferenču vienādojumam

$$8y_{t+2} - 6y_{t+1} + y_t = 5 \sin \frac{t\pi}{2}$$

partikulāro atrisinājumu meklēsim formā

$$y_t^* = A\sin\frac{t\pi}{2} + B\cos\frac{t\pi}{2},$$

kur A un B ir konstanti koeficienti, kuri mums jāprecizē ar nenoteikto koeficientu metodi. Ievietojot izmēģinājuma atrisinājumu dotajā vienādojumā, iegūsim:

$$\begin{aligned}&8y_{t+2}^* - 6y_{t+1}^* + y_t^* = \\ &= 8(A\sin\tfrac{(t+2)\pi}{2} + B\cos\tfrac{(t+2)\pi}{2}) - 6(A\sin\tfrac{(t+1)\pi}{2} + B\cos\tfrac{(t+1)\pi}{2}) + \\ &\qquad + (A\sin\tfrac{t\pi}{2} + B\cos\tfrac{t\pi}{2}).\end{aligned}$$

Izmantojot redukcijas formulas

$$\begin{aligned}&\sin\tfrac{(t+2)\pi}{2} = \sin(\tfrac{t\pi}{2} + \pi) = -\sin\tfrac{t\pi}{2}, \quad \cos\tfrac{(t+2)\pi}{2} = \cos(\tfrac{t\pi}{2} + \pi) = -\cos\tfrac{t\pi}{2}, \\ &\sin\tfrac{(t+1)\pi}{2} = \sin(\tfrac{t\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = \cos\tfrac{t\pi}{2}, \qquad \cos\tfrac{(t+1)\pi}{2} = \cos(\tfrac{t\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin\tfrac{t\pi}{2},\end{aligned}$$

iegūsim vienkāršāku vienādību

$$8y_{t+2}^* - 6y_{t+1}^* + y_t^* = (-7A + 6B)\sin\frac{t\pi}{2} + (-6A - 7A)\cos\frac{t\pi}{2}.$$

Konstantēm A un B jāapmierina vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} -7A + 6B = 5, \\ -6A - 7B = 0, \end{cases}$$

no kurienes varam iegūt, ka $A = -\frac{7}{17}$, $B = \frac{6}{17}$. Tādējādi

$$y_t^* = \frac{1}{17}\left(-7\sin\frac{t\pi}{2} + 6\cos\frac{t\pi}{2}\right)$$

ir apskatāmā vienādojuma partikulārais atrisinājums.

Homogēnā vienādojuma

$$8y_{t+2} - 6y_{t+1} + y_t = 0$$

raksturīgā vienādojuma $8m^2 - 6m + 1 = 0$ saknes ir $\frac{1}{2}$ un $\frac{1}{4}$, tāpēc sākumā dotā diferenču vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^t + \frac{1}{17}\left(-7\sin\frac{t\pi}{2} + 6\cos\frac{t\pi}{2}\right). \blacksquare$$

No šiem piemēriem vajadzētu būt skaidram, ka partikulārais atrisinājums nehomogēnajam vienādojumam (8.4.1) bieži vien ir līdzīgā formā kā funkcija r. Nenoteikto koeficientu metodi ar panākumiem var lietot tādos gadījumos, ja funkcija r ir lineāra kombinācija no funkciju a^t, $\sin bt$, $\cos bt$, t^n summām un reizinājumiem, kur a un b reālas konstantes un n nenegatīvs vesels skaitlis. Tabulā 8.4.2.1 doti partikulāro atrisinājumu veidi pie noteiktām r funkcijām.

r_t	y_t^* veids
a^t	Aa^t
$\sin bt$ vai $\cos bt$	$A\sin bt + B\cos bt$
t^n	$A_0 + A_1t + A_2t^2 + ... + A_nt^n$
t^na^t	$a^t(A_0 + A_1t + A_2t^2 + ... + A_nt^n)$
$a^t\sin bt$ vai $a^t\cos bt$	$a^t(A\sin bt + B\cos bt)$

tabula 8.4.2.1

Ja izmēģinājuma funkcija y^* satur funkciju, kura ir homogēnā vienādojuma atrisinājums, tad šo y^* vajag vispirms pareizināt ar t. Ja tā joprojām satur homogēnā vienādojuma atrisinājumu, tad vajag pareizināt vēlreiz ar t. Konstantie koeficienti vienmēr jānosaka tā, lai partikulārais atrisinājums apmierinātu visas t vērtības.

8.4.3 OTRĀS KĀRTAS DIFERENČU VIENĀDOJUMU ATRISINĀJUMU UZVEDĪBA

Mēs zinām, kā var atras otrās kārtas diferenču vienādojuma atrisinājumus. Taču diferenču vienādojumu pielietojumos ar to ir par maz: nepieciešams izpētīt, kā uzvedas atrisinājuma funkcija laika gaitā.

Ja mums ir zināmas divas sākumvērtības y_0 un y_1, tad mēs varam noteikt precīzi patvaļīgās konstantes diferenču vienādojuma atrisinājumā, un atrisinājumu varam uztvert kā virkni $(y_t)_{t\in\mathbf{N}}$.

Apskatīsim homogēna diferenču vienādojuma atrisinājuma uzvedību pēc raksturīgā vienādojuma sakņu dažādības.

(I) **Raksturīgais vienādojums ar reālām un atšķirīgām saknēm**

Pieņemsim, ka m_1 ir sakne, kas pēc moduļa ir lielākā no abām: $|m_1| > |m_2|$. Tad atrisinājumu virkne $(C_1m_1^t + C_2m_2^t)_{t\in\mathbf{N}}$ ir ar tādu pašu konverģences veidu kā virknei $(C_1m_1^t)_{t\in\mathbf{N}}$, ja $C_1 \neq 0$.

Pierādījums. Atrisinājuma virknes vispārīgo elementu varam pierakstīt formā

$$C_1m_1^t + C_2m_2^t = m_1^t \left[C_1 + C_2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^t \right];$$

kvadrātiekavās esošā summa tiecas uz C_1, ja t tiecas uz bezgalību, jo $-1 < \frac{m_2}{m_1} < 1$. Un

$$\frac{C_1m_1^t}{C_1m_1^t + C_2m_2^t} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^t} \to_{t\to\infty} \frac{C_1}{C_1} = 1,$$

t.i., virknes $(C_1m_1^t + C_2m_2^t)_{t\in\mathbf{N}}$, $(C_1m_1^t)_{t\in\mathbf{N}}$ konverğē vienādi. Tātad atrisinājuma uzvedība šajā gadījumā ir atkarīga no virknes $(C_1m_1^t)_{t\in\mathbf{N}}$ uzvedības. Šī virkne ir ğeometriskā progresija, tā konverğē, ja $|m_1| \leq 1$, un diverğē, ja $|m_1| > 1$. ■

Ja $C_1 = 0$, tad atrisinājumu virkne $(C_2m_2^t)_{t\in\mathbf{N}}$ ir ğeometriskās progresijas virkne un tā uzvedas kā augstāk aprakstīts. Nosacījums $C_1 = 0$ nozīmē, ka atrisinājums pie $t = 0$ pieņem vērtību C_2 un pie $t = 1$ vērtību C_2m_2.

(II) **Raksturīgais vienādojums ar reālām un vienādām saknēm**

Atrisinājuma virkne ir $((C_1 + C_2t)m_1^t)_{t\in\mathbf{N}}$. Tā ir diverğenta, ja $|m_1| > 1$ (un C_1 un C_2 vienlaicīgi nav 0); tā joprojām ir diverğenta, ja $|m_1| = 1$ (un $C_2 \neq 0$). Ja $|m_1| < 1$, tad virkne $(tm_1^t)_{t\in\mathbf{N}}$ konverğē uz 0, t.i., atrisinājuma virkne ir konverğenta.

(III) **Raksturīgais vienādojums ar kompleksām saknēm**

Atrisinājuma virkne ir $(Ar^t \cos(t\theta + B))_{t\in\mathbf{N}}$, un mēs pieņemsim, ka $A \neq 0$. Funkcija $\cos(t\theta + B)$ ir periodiska (ar periodu $\frac{2\pi}{\theta}$), un tās vērtības ir starp -1 un 1. Virkne $(\cos(t\theta + B))_{t\in\mathbf{N}}$ ir galīgi oscilējoša. Ja reizinātājs r^t ir vienāds ar 1, tad šo oscilāciju nosaka tikai kosinuss; ja r^t ir lielāks vai mazāks par 1, oscilācija palielinās vai samazinās. Piemēram,

$$\begin{aligned}
&\left(\cos \tfrac{t\pi}{2}\right)_{t\in\mathbf{N}} = 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...,\\
&\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^t \cos \tfrac{t\pi}{2}\right)_{t\in\mathbf{N}} = 1, 0, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{16}, 0, -\tfrac{1}{64}, ...,\\
&\left(2^t \cos \tfrac{t\pi}{2}\right)_{t\in\mathbf{N}} = 1, 0, -4, 0, 16, 0, -64, 0, ...
\end{aligned}$$

Vispārīgi var pierādīt, ka atrisinājuma virkne konverğē uz 0, ja $0 < r < 1$, un diverğē, ja $r \geq 1$. Virkne ir vienmēr oscilējoša, ja tā satur kosinusa funkciju.

No iepriekš apskatītajiem trim gadījumiem izriet sekojoša teorēma (komplekso sakņu gadījumā $|m_1| = |m_2| = r$)

TEORĒMA 8.4.3.1. Pieņemsim, ka m_1, m_2 ir otrās kārtas homogēna diferenču vienādojuma saknes. Apzīmēsim $\rho = \max\{|m_1|, |m_2|\}$. Nosacījums $\rho < 1$ ir nepieciešams un pietiekams, lai atrisinājuma virkne jebkurām sākumvērtībām konverģētu uz 0.

Mēs esam aprakstījuši homogēnu otrās kārtas diferenču vienādojumu atrisinājumu uzvedību laikā. Nehomogēnu vienādojumu atrisinājumu uzvedības pētīšana ir daudz sarežģītāka, jo veidojas situācijas, kad atbilstošā homogēnā vienādojuma atrisinājums konverģē, bet nehomogēnā vienādojuma labās puses loceklis dod nekonverģentu vispārīgo atrisinājumu. Piemēram, vienādojuma

$$8y_{t+2} - 6y_{t+1} + y_t = 0$$

atrisinājums $Y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^t$ ir konverģents, bet nehomogēnā vienādojuma

$$8y_{t+2} - 6y_{t+1} + y_t = 2^t$$

vispārīgais atrisinājums $y_t = Y_t + \frac{2^t}{21}$ ir diverģents.

Sākot apskatīt diferenču vienādojumus, mēs iepazināmies ar tautas ienākumu modeli (Piemērs 8.1.1.), kuru apraksta otrās kārtas diferenču vienādojums

$$Y_t = \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + 1,\ t = 2, 3, 4, ...,$$

kur ar Y_t apzīmēti tautas ienākumi laika periodā t un α un β ir proporcionalitātes koeficienti.

Aplūkosim tos divus speciālgadījumus, kurus sākām apskatīt diferenču kursa ievadā (tabula 8.1.1) pie sākumvērtībām $Y_0 = 2$ un $Y_1 = 3$: 1) $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$ un 2) $\alpha = 0,8$, $\beta = 2$.

1) gadījumā diferenču vienādojums ir formā

$$Y_{t+2} - Y_{t+1} + \frac{1}{2}Y_t = 1.$$

Atbilstošā raksturīgā vienādojuma $m^2 - m + \frac{1}{2} = 0$ saknes ir $m_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $m2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Lai pierakstītu šos kompleksos skaitļus trigonometriskā formā, izmantojam sakarības

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tādējādi $\theta = \frac{\pi}{4}$, un sakņu trigonometriskā forma ir

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Homogēnā vienādojuma atrisinājums līdz ar to ir

$$Y_t = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \cos\left(\frac{t\pi}{4} + B\right).$$

Nehomogēnā vienādojuma partikulārā atrisinājuma atrašana nesagādā nekādas grūtības: par izmēģinājuma atrisinājumu ņemam $y_t^* = C = const$; lai šis atrisinājums derētu, jābūt $C = 2$. Vispārīgais atrisinājums nehomogēnajam vienādojumam tad ir

$$Y_t = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \cos\left(\frac{t\pi}{4} + B\right) + 2.$$

Izmantojot sākumnosacījumus, varam noteikt A un B vērtības

$$\begin{array}{ll} t = 0: & A\cos B = 0, \\ t = 1: & A\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = 1, \end{array}$$

pirmais vienādojums ir spēkā, ja $B = \frac{\pi}{2}$; tā kā $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, tad no otrā vienādojuma iegūsim, ka $A = -2$. Līdz ar to nehomogēnā vienādojuma partikulārais atrisinājums, kurš apmierina sākumnosacījumus, ir

$$Y_t = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \cos\left(\frac{t\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + 2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \sin\frac{t\pi}{4} + 2.$$

Atrisinājumā ietilpstošais sinuss padara Y par oscilējošu funkciju laikā. Tā kā $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, tad, t tiecoties uz bezgalību, atrisinājuma labās puses pirmais reizinātājs tuvojas 0. Gala rezultātā virkne konverģē uz konstanti 2.

2) gadījumu $\alpha = 0,8$ un $\beta = 2$ varam iztirzāt līdzīgi. Nehomogēnais vienādojums pieņem veidu $Y_{t+2} - 2,4Y_{t+1} + 1,6Y_t = 1$, tā raksturīgais vienādojums ir $m^2 - 2,4m + 1,6 = 0$, kura saknes ir kompleksie skaitļi $m_1 = 1,2 + 0,4i$ un $m_2 = 1,2 - 0,4i$. Komplekso sakņu dēļ vispārīgais atrisinājums būs oscilējoša virkne. Modulis r ir $r = \sqrt{(1,2)^2 + (0,4)^2} = \sqrt{1,6} > 1$, tāpēc oscilācija ir neierobežota un kopumā atrisinājums laikā diverģē.

8.5 n-tās KĀRTAS LINEĀRI DIFERENČU VIENĀDOJUMI AR KONSTANTIEM KOEFICIENTIEM

n-tās kārtas diferenču vienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + ... + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = r_t$$

teorija ir speciālgadījuma $n = 2$ paplašinājums.

Homogēnajam vienādojumam

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + ... + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0$$

atbilstošais raksturīgais vienādojums ir

$$m^n + a_1 m^{n-1} + ... + a_{n-1} m + a_n = 0,$$

tas ir n-tās pakāpes polinoms un tam ir tieši n saknes, kuras apzīmēsim ar $m_1, m_2, ..., m_n$. Šīs saknes var būt gan reāli, gan kompleksi skaitļi, pie kam saknes var būt daudzkārtīgas. Atrisinājuma **fundamentālo atrisinājumu sistēmu** veido tādi n atrisinājumi $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$, kuriem n-tās kārtas determinanta

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & ... & y_0^{(n)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & ... & y_1^{(n)} \\ & & ... & \\ y_{n-1}^{(1)} & y_{n-1}^{(2)} & ... & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

vērtība nav vienāda ar 0. Šādu fundamentālo atrisinājumu sistēmu iegūsim, ja:

(1) katrai reālai saknei, kura nav vairākkārtīga, atbilstošo atrisinājumu pierakstīsim formā $C_1 m^t$, kas satur vienu patvaļīgu konstanti C_1;

(2) ja reālā sakne m ir ar kārtu p, tad atrisinājums ir

$$(C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + ... + C_p t^{p-1}) m^t,$$

kas satur skaitā p patvaļīgas konstantes;

(3) katram nevairākkārtīgam komplekso sakņu pārim ar moduli r un amplitūdu θ atrisinājums ir:

$$A r^t \cos(t\theta + B),$$

kas satur divas patvaļīgas konstantes A un B;
(4) ja komplekso sakņu pāri ir ar kārtu p, tad atrisinājums ir:

$$r^t[A_1\cos(t\theta+B_1)+A_2tcos(t\theta+B_2)+...+A_pt^{p-1}\cos(t\theta+B_p)],$$

kas satur skaitā $2p$ patvaļīgas konstantes.

Šo atrisinājumu summa satur n patvaļīgas konstantes, un tā ir homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums.

Ar nenoteikto koeficientu metodes palīdzību var atrast nehomogēno vienādojumu partikulāros atrisinājumus. Nehomogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir homogēnā vienādojuma vispārīgā atrisinājuma un nehomogēnā vienādojuma partikulārā atrisinājuma summa. Ja ir doti n sākumnosacījumi, tad patvaļīgās n konstantes var noteikt precīzi un atrast nehomogēna vienādojuma partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus.

Atrisinājuma konverğence ir atkarīga, līdzīgi kā otrās kārtas vienādojumos, no vairākiem lielumiem, bet ir spēkā:

TEORĒMA 8.5.1. Homogēnā vienādojuma atrisinājums jebkurām sākumvērtībām konverğē uz 0 tad un tikai tad, ja raksturīgā vienādojuma maksimālais saknes modulis ir mazāks par 1.

Raksturīgā vienādojuma sakņu atrašana daudzos gadījumos ir sarežğīta un bieži vien prasa analītiskus pētījumus.

Citu veidu diferenču vienādojumus, kas nav lineāri, šī kursa ietvaros mēs neapskatīsim.

8.6 EKONOMISKA RAKSTURA PIEMĒRI

8.6.1 PIEDĀVĀJUMA-PIEPRASĪJUMA CIKLI

Tautsaimniecības statistikas dati ļoti bieži tiek savākti noteiktā laika periodā, tie veido virkni. Tas nav nekas pārsteidzošs, ka pēc šiem datiem veidotie matemātiskie modeļi ir rekursīvi. Bez tam biži modeļu veidošanā tiek izmantota linearitātes ideja, jo ar lineāriem modeļiem ir vienkāršāk strādāt (tie ir tehniski rēķināmāki). Mēs apskatīsim tipisku piemēru. Lai gūtu konkrētāku priekšstatu, pieņemsim, ka mēs apskatām cūkgaļas ražošanu.

Šajā modelī ir sekojoši mainīgie lielumi:
t — laiks (cūku audzēšanas periods, apmēram 14 mēneši),
p_t — gaļas cena laika periodā t,

N_t — pieprasījuma daudzums laika periodā t,
A_t — piedāvājuma daudzums laika periodā t.

Modelī ir divas darbojošās personas: ražotājs un pircējs. Piedāvājums un pieprasījums tiek stingri nosacīti ar cenas palīdzību, pieprasījums un cena laika periodā t reaģē viens uz otru bez kavēšanās, šie lielumi ir savstarpējā lineārā atkarībā: $N_t = \alpha + ap_t$, $a \neq 0$. Arī piedāvājums ir lineāri atkarīgs no cenas. Bet tā kā nepieciešams laiks cūku audzēšanai, tad ražotājs nevar piedāvājumu noteikt pēc patreizējā laika perioda cenas, viņš orientējas pēc iepriekšējā laika perioda: $A_t = \beta + bp_{t-1}$, $b \neq 0$. Pieprasījuma daudzumu ietekmē tā paša laika perioda t piedāvājuma daudzums. Ja gadījumā piedāvājums A_t ļoti stipri pārsniedz acumirklīgo pieprasījumu N_t, tad ražotājam jāveic cenu izmaiņas tā, lai pieprasījumu palielinātu. Ja ir otrādāk, proti, ja piedāvājums ir ļoti mazs, bet pieprasījums krietni lielāks, tad ražotājs var paaugstināt preces cenu. Tirgus cena p_t tādējādi svārstās tā, lai starp pieprasījumu un piedāvājumu izveidotos līdzsvars: $A_t = N_t$ jeb $\beta + bp_{t-1} = \alpha + ap_t$, t.i.,

$$p_t = \frac{b}{a}p_{t-1} + \frac{\beta - \alpha}{a}. \tag{8.6.1.1}$$

Savietojot $p_t = \frac{N_t - \alpha}{a}$ ar (8.6.1.1), iegūsim:

$$\frac{N_t - \alpha}{a} = \frac{b}{a}\frac{N_{t-1} - \alpha}{A} + \frac{\beta - \alpha}{a} \text{ jeb } N_t = \frac{b}{a}N_{t-1} + (\beta - \frac{b}{a}\alpha).$$

Līdzīgi, savietojot $p_t = \frac{A_{t+1} - \beta}{b}$ ar (8.6.1.1), iegūsim

$$A_{t+1} = \frac{b}{a}A_t + (\beta - \frac{b}{a}\alpha).$$

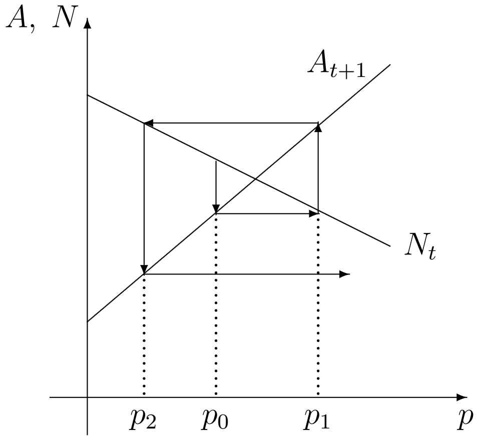
Ievērojot līdzsvara nosacījumu, nav nekāds brīnums, ka piedāvājumu un pieprasījumu apraksta viens un tas pats rekursijas vienādojums. $\frac{b}{a}$, $\beta - \frac{b}{a}\alpha$ un $\frac{\beta-\alpha}{a}$ ir konstanti koeficienti, pie tam $\frac{b}{a} \neq 1$, jo ekonomiski saturīgi ir pieņemt, ka $a < 0$ (cenai pieaugot, pieprasījums samazinās) un $b > 0$ (cenai pieaugot, piedāvājums palielinās). Iegūtajiem pirmās kārtas diferenču vienādojumiem eksistē atrisinājumi, kas atkarīgi no sākumvērtībām p_0, A_0, N_0:

$$p_t = \left(\frac{b}{a}\right)^t p_0 + \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^t}{1 - \frac{b}{a}}\,\frac{\beta - \alpha}{a},$$

$$N_t = \left(\frac{b}{a}\right)^t N_0 + \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^t}{1 - \frac{b}{a}}\,(\beta - \frac{b}{a}\alpha),$$

$$A_t = \left(\frac{b}{a}\right)^t A_0 + \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^t}{1-\frac{b}{a}}(\beta - \frac{b}{a}\alpha).$$

No atrisinājumiem redzams, ka cenu, pieprasījuma un piedāvājuma svārstības laikā nosaka attiecība $\frac{b}{a}$. Vispārīga situācija, ja $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$ (nav stabilitātes), attēlota zīmējumā 8.6.1.1.



8.6.1.1. zīm.

8.6.2 HIKSA IENĀKUMU MODELIS

Likumsakarības starp tautas ienākumiem Y, patēriņu C un investīcijām I izsaka pieņēmumi:

(α) laika periodā t ienākumi ir vienādi ar Šī perioda patēriņu un investīcijām, t.i., $Y_t = C_t + I_t$;

(β) patēriņš ir divu iepriekšējo laika periodu ienākumu lineāra funkcija, t.i., $C_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + B$, kur b_1, b_2, B ir konstantes;

(γ) investīcijas katrā no laika periodiem tiek palielinātas par noteiktu lielumu h, t.i., $I_{t+1} = I_t + h$ jeb $I_t = I_0 + th$.

Savietojot kopā šos trīs pieņēmumus, rezultātā iegūsim otrās kārtas lineāru diferenču vienādojumu:

$$Y_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + B + I_0 + th,$$

kas standartformā pārrakstāms kā otrās kārtas nehomogēns diferenču vienādojums:

$$Y_{k+2} - b_1 Y_{k+1} - b_2 Y_k = kh + A, \text{ kur } A = B + I0 + 2h.$$

Apskatīsim speciālgadījumu ar konstantēm $b_1 = 1$ un $b_2 = -\frac{1}{4}$; tad jāizpēta vienādojums

$$Y_{k+2} - Y_{k+1} + Y_k = kh + A.$$

Šī diferenču vienādojuma raksturīgā vienādojuma $m^2 - m + \frac{1}{4} = 0$ saknes ir reālas, bet sakrītošas: $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$, tāpēc atbilstošā homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinās ir formā $C_1(\frac{1}{2})^k + C_2(\frac{1}{2})^k k$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. Speciālgadījuma partikulāro atrisinājumu meklēsim formā $y_k^* = A_0 + A_1 k$. Iegūsim, ka $A_1 = 4h$ un $A_0 = 4A - 16h$. Līdz ar to speciālgadījuma diferenču vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$Y_k = C_1(\frac{1}{2})^k + C_2(\frac{1}{2})^k k + 4(A - 4h) + 4hk.$$

Raksturīgā vienādojuma saknes gan ir mazākas par 1, bet, tā kā vienādojuma labajā pusē ir izteiksme $kh + A$, kas nav konstante un kas dod partikulāro atrisinājumu ar laikā mainīgu k, tad galarezultātā esam ieguvuši diverģējošu atrisinājuma virkni. Varam secināt, ka šajā speciālgadījumā ($b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{4}$) tautas ienākumi laika gaitā neierobežoti palielinās. Gadījumā, ja investīcijas visos laika periodos būtu konstantas, tad atrisinājums būtu stabils. Tas nozīmētu, ka ienākumu līmenis tiektos uz noteiktu konstanti.

8.6.3 METCLERA PREČU UZKRĀŠANAS MODELIS

Iepriekšējos paragrāfos aplūkotie modeļi balstījās uz pirmās un otrās kārtas lineāriem diferenču vienādojumiem ar konstantiem koeficientiem. Tagad apskatīsim situāciju, kuras uzvedība izsakāma ar trešās kārtas diferenču vienādojumu.

Modeļa apraksts ir sekojošs.

Uzņēmumā tiek saražoti patēriņa labumi ar divkāršu izlietošanas mērķi: pirmkārt, pārdošanai, otrkārt, noteikta preču daudzuma uzkrāšanai.

Modelī lietosim sekojošus apzīmējumus:

U_t — laika periodā t pārdošanai saražoto preču daudzums,

S_t — laika periodā t glabāšanai saražoto preču daudzums,

Y_t — laika perioda t kopīgais ienākums,

C_t — laika periodā t pārdotais preču daudzums.

Tiek pieņemts, ka uzņēmums katrā laika periodā veic konstantu investīciju I_0.

Tādējādi laika periodā t saražotā kopīgais ienākums izsakāms ar vienādību:

$$Y_t = U_t + S_t + I_0.$$

Uzņēmums katra perioda sākumā plāno pārdot noteiktu daudzumu produkcijas, kura tiks saražota šajā periodā. Tiek pieņemts, ka uzņēmums pārdošanas plānu veido ne tikai pēc iepriekšējā laika periodā pārdotā, bet arī pēc iepriekšējo divu laika periodu patēriņa izmaiņas, t.i.,

$$U_t = C_{t-1} + p(C_{t-1} - C_{t-2})$$

(ja $p \geq 0$, tad tiek sagaidīts, ka patēriņa izmaiņas būs tādas pašas kā iepriekš). Tiek pieņemts, ka pārdošana vienā patvaļīgā periodā nepārsniedz šī paša laika perioda b-to daļu no kopīgajiem ienākumiem, $0 < b < 1$, t.i.,

$$C_t = bY_t.$$

Ievērojot iepriekšējos pieņēmumus, savietojot tos, iegūsim:

$$U_t = b(1+p)Y_{t-1} - bpY_{t-2}.$$

Uzkrājamās produkcijas daudzums tiek plānots katra perioda sākumā. Tiek pieņemts, ka uzņēmums izvēlas noteiktu uzvedību starp uzkrājamo preču daudzumu un pārdošanai paredzamo. Ja pieņemam, ka uzņēmuma uzvedību var izteikt ar konstanti k, $0 < k < 1$, tad lielums $Q'_t = kU_t$ izsaka vēlamo uzkrājumu daudzumu periodā t. Pieņemsim, ka Q_{t-1} ir uzkrāto preču daudzums $t-1$ perioda beigās, tad tāds tas ir arī t-tā perioda sākumā, tāpēc ir spēkā

$$S_t = Q'_t - Q_{t-1} \text{ vai } S_t = kU_t - Q_{t-1}.$$

Q_{t-1} ir tieši vienāds ar vēlamo uzkrājumu stāvokli $t-1$ periodā mīnus negaidītās izmaiņas uzkrājumu stāvoklī $t-1$ perioda laikā, kuras izsakāmas ar starpību starp realizēto pārdošanu C_{t-1} un plānoto pārdošanu U_{t-1} šajā periodā, t.i.,

$$Q_{t-1} = Q'_{t-1} - (C_{t-1} - U_{t-1}).$$

Ievērojot iepriekšējos pieņēmumus, iegūsim

$$Q_{t-1} = kU_{t-1} - (bY_{t-1} - U_{t-1}) = -bY_{t-1} + b(k+1)(1+p)Y_{t-2} - bp(k+1)Y_{t-3}.$$

Tad

$$S_t = kU_t - Q_{t-1} = b(k(1+p)+1)Y_{t-1} - b(kp+(k+1)(1+p))Y_{t-2} + bp(k+1)Y_{t-3}.$$

Galarezultātā mēs esam ieguvuši trešās kārtas diferenču vienādojumu, kurš apraksta modelī apskatītā uzņēmuma kopīgos ienākumus

$$Y_t = U_t+S_t+I_0 = b((1+p)(1+k)+1)Y_{t-1}-b(1+k)(1+2p)Y_{t-2}+bp(1+k)Y_{t-3}+I_0.$$

Atrast šī vienādojuma vispārīgo atrisinājumu nav vienkāršs uzdevums, jāprot atrast trešās kārtas vienādojuma saknes. Pat stabilitātes nosacījumu atrašana prasa zināmas pūles (skatīt, piemēram, H.Rommelfangera 1986.gada grāmatu, 102-103. lpp).

Apskatītais preču uzkrāšanas modelis ir mūs novedis pie diezgan nepārskatāma trešās kārtas diferenču vienādojuma ar konstantiem koeficientiem. Tas liek izdarīt secinājumu, ka tikai dažos gadījumos diferenču vienādojumi, kuru kārta augstāka par divi, būs ērts līdzeklis situācijas izpētē. Pārsvarā gadījumu šie diferenču vienādojumi prasīs lielu matemātisko piepūli.