

Latvijas Universitāte  
Fizikas un matemātikas fakultāte  
Matemātiskās analīzes katedra

Inese Bula

**HAOSS**

**LEKCIJU KONSPEKTS — 2008**

# SATURS

Kursa prasības	3
Nodaļa Nr.1: Pamatjēdzieni	4
Nodaļa Nr.2: Reālu skaitļu topoloģijas īpašības	8
Nodaļa Nr.3: Periodiski punkti un stabilitātes kopas	15
Nodaļa Nr.4: Šarkovska teorēma	21
Nodaļa Nr.5: Diferencējamība un tās sekas	26
Nodaļa Nr.6: Funkciju parametriskas saimes un bifurkācijas	33
Nodaļa Nr.7: Logistiskās funkcijas uzvedība	41
Nodaļa Nr.8: Kantora kopas un logistiskā funkcija	46
Nodaļa Nr.9: Haotiska funkcija	54
Nodaļa Nr.10: Telts attēlojums	62
Nodaļa Nr.11: Topoloģiskā saistība	69
Nodaļa Nr.12: Periodu dubultojošas kaskādes	77
Nodaļa Nr.13: Simboliskā dinamika	80
Nodaļa Nr.14: Ņūtona metode	96
Nodaļa Nr.15: Kompleksu funkciju dinamika	105

# KURSA PRASĪBAS

## KURSA ANOTĀCIJA

Aizvien vairāk matemātiskajā literatūrā parādās grāmatas, raksti un interneta resursi, kas stāsta par haotiskiem attēlojumiem. Šajā kursā tiek plānots noskaidrot, ko nozīmē jēdziens haotisks attēlojums, un apskatīt dažus haotisku funkciju piemērus.

## REZULTĀTI

Pamatjautājums - jāzina, kas ir haotisks attēlojums. Jāzina haotisku attēlojumu piemēri un jāprot vienkāršākajos gadījumos pierādīt, ka attēlojums ir haotisks. Jāorientējas jēdzienos un problemātikā.

## PRASĪBAS KREDĪTPUNKTU IEGŪŠANAI

1. Jāizpilda semestra laikā uzdotie mājas darbi, laikā līdz eksāmenam jāatrāda visu mājas darbu atrisinājumi rokrakstā (10%).
2. Semestra laikā jāuzraksta divi kontroldarbi vai gala pārbaudījumā jānokārto rakstisks tests (jautājumi un uzdevumi par semestra laikā apgūto), kas arī nosaka gala vērtējumu (90%).

## LITERATŪRA

### Mācību pamatliteratūra

1. R.A.Holmgren, A first course in discrete dynamical systems. Sec. Edition, Springer-Verlag, 2000.
2. C.Robinson, Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC Press, 1995.

### Papildliteratūra

3. K.T.Alligood, T.D.Sauer, J.A.Yorke, CHAOS. An introduction to dynamical systems. Springer-Verlag, 1997.
4. H.O.Peitgen, H.Juergens, D.Saupe, Chaos. Bausteine der Ordnung. Springer-Verlag, 1994.
5. Chaos und Fraktale/mit Einf. von H.Juergens. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, 1989.
6. S.H.Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering. Westview Press, 2001.

### Periodika, interneta resursi

7. CHAOS (starptautisks žurnāls)
8. [http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory)
9. <http://www.math.sunysb.edu/dynamics>

# NODAĻA NR. 1

## Pamatjēdzieni

**Anotācija.** Jēdziens par diskreto dinamisku sistēmu. Iterācijas. Orbītas (ierobežotas, neierobežotas). Piemēri (eksponenciālie un logistiskie populāciju modeļi, laika apstākļu prognozēšana). Fāžu portreti.

Lielākoties šajā kursā mēs apskatīsim reālā mainīgā reālvērtīgas funkcijas, tāpēc pamatjēdzienus vispirmām kārtām izklāstīsim tieši šādām funkcijām.

Diskreto dinamisku sistēmu var raksturot ar funkciju un tās kompozīcijām pašai ar sevi. Tātad, ja  $x_0 \in \mathbf{R}$  ir dots, tad varam apskatīt  $f(x_0)$ ,  $f^2(x_0) = f(f(x_0))$ ,  $f^3(x_0) = f(f(f(x_0)))$ , ...,  $f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$ , ... Un varam jautāt, kāda ir robeža  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)$ ? Kādas īpašības piemīt virknei  $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$ ? Kopu

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

sauc par punkta  $x_0$  orbītu pie funkcijas  $f$ . Viens no mūsu pamatuzdevumiem būs dažādu punktu orbītu izpēte. Ar jēdzienu "funkcijas dinamika" mēs sapratīsim orbītu analīzes secinājumus, mainoties  $x_0$  funkcijas definīcijas apgabala kopā vai apakškopā. Tātad diskreta dinamiska sistēma sastāv no funkcijas un tās iterācijām. Kā redzēsīm turpmāk, dotu punktu iterācijas var uzvesties dažādi: tiekties uz bezgalību (t.i., neierobežoti pieaugt pēc absolūtās vērtības), konverģēt uz kādu punktu, var oscilēt, var pirmās tūkstoš iterācijās uzvesties neprognozējami, bet tad stabilizēties, utt.

Tālāk aplūkosim divus piemērus, kas parādīs, kā ar samērā vienkāršu modeļu palīdzību var veikt prognozēšanu.

**Piemērs 1.1.** Pieņemsim, ka nepieciešams izveidot matemātisko modeli, kas apraksta trušu populācijas lielumu. Pieņemsim, ka empīriskie novērojumi liecina, ka neliela trušu populācija pieaug apmēram par 10%. Apzīmēsim

sākumā apskatāmās populācijas lielumu ar  $x_0$  un pēc  $n$  gadiem ar  $x_n$ . Mūsu uzdevums ir noskaidrot šo skaitli  $x_n$  jebkuram naturālam  $n$ .

Skaidrs, ka

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + 0.1x_0 = 1.1x_0, \\x_2 &= x_1 + 0.1x_1 = 1.1x_1, \\&\dots \\x_{i+1} &= x_i + 0.1x_i = 1.1x_i.\end{aligned}$$

Ja apzīmējam  $x_{i+1} = p(x_i)$ , kur  $p(x) = 1.1x$ , tad

$$\begin{aligned}x_1 &= p(x_0), \\x_2 &= p(x_1) = (p \circ p)(x_0) = p^2(x_0), \\x_3 &= p(x_2) = (p \circ p^2)(x_0) = p^3(x_0), \\&\dots \\x_n &= p^n(x_0).\end{aligned}$$

Tādējādi trušu populācijas lielumu pēc  $n$  gadiem raksturo funkcijas  $p(x) = 1.1x$   $n$ -tā iterācija pašai ar sevi punktā  $x_0$ , proti,  $p^n(x) = (1.1)^n x$ . Ja mēs sākam ar vairāk nekā vienu trusi, tad populācija pieaugs  $n$  gadu laikā un tā turpinās pieaugt. Piemēram, ja sākumā mums ir 8 truši, tad pēc 10 gadiem trušu populācijā būs apmēram 21 trusis, bet pēc 20 gadiem — 54 truši, savukārt pēc 100 gadiem — 110 245 truši. Ja šī populācija dzīvo nelielā (ierobežotā) apgabalā, tad acīmredzami, ka pēdējais skaitlis ir pārāk liels, lai tā tur spētu dzīvot. Skaidrs, ka apskatītais modelis neder populācijas lieluma aprakstam vairāku iemeslu dēļ. Populācijas lielums nevar visu laiku pieaugt kaut vai apdzīvojamās platības ierobežotības dēļ. Jārēķinās arī ar pārtikas krājumiem, slimībām, vecumu.

Modeļus, kurus apraksta funkcija  $p(x) = rx$  un tās iterācijas, sauc par *eksponenciālajiem* modeļiem. Ja  $r > 1$ , tad vienmēr funkcijas iterāciju vērtības kļūs aizvien lielākas un lielākas jebkādiem  $x > 0$ . Šādi modeļi ilgstošai prognozēšanai nav reāli. ■

**Piemērs 1.2.** Daudz reālāks modelis populācijas prognozēšanai ir tāds, kurš izmanto *logistisko funkciju*  $h(x) = rx(1 - x)$ . Modeļos, kas izmanto logistisko funkciju, tiek pieņemts, ka ir kaut kāda absolūtā maksimālā robeža populācijas lielumam un katrs konkrētais populācijas lielums ir minētās robežas kaut kāda daļa. Tādējādi jebkurš populācijas lielums tiek definēts kā skaitlis no vienības intervāla  $[0; 1]$ . Piemēram, 0.4 nozīmē, ka populācija ir sasniegusi 40% no maksimāli iespējamās populācijas. Ja ar  $x_0$  apzīmējam populācijas lielumu sākuma periodā, tad nākamajā laika periodā tā ir  $h(x_0) = rx_0(1 - x_0)$ .

Reizinātājs  $(1 - x)$  atšķir logistiskos modeļus no eksponenciālajiem. Kad  $x$  tuvojas 1, šis reizinātājs tuvojas 0. Varētu teikt tā: kad populācija kļūst liela, tā pieaug lēnāk; sasniedzot noteiktu lielumu, tā sāk samazināties.

Apskatīsim logistiskās funkcijas uzvedību, lai prognozētu trušu populāciju apgabalā, kuras maksimālais trušu populācijas lielums ir 1000 truši. Apskatīsim logistisko funkciju  $h(x) = 1.1x(1 - x)$ . Šajā modelī populācija, kuras lielums ir 100 truši, tiek reprezentēta ar skaitli 0.1. Acīmredzami, ka maksimālā populācija 1000 truši tiek reprezentēta ar  $\frac{1000}{1000} = 1$ , tāpēc  $h(1) = 0$  — sasniedzot maksimālo populācijas līmeni dzīvnieki iet bojā, jo nav barības, ūdens, dzīvesvietas. Ievērosim, piemēram, ja populācija ir savairojusies līdz 900 trušiem (0.9), tad nākamā gada laikā tā strauji samazināsies un paliks tikai 99 truši ( $h(0.9) = 1.1 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.099$ ).

Pieņemsim, ka sākumā ir 8 truši kā iepriekšējā piemērā. Kā izmainīsies populācijas lielums laika gaitā?

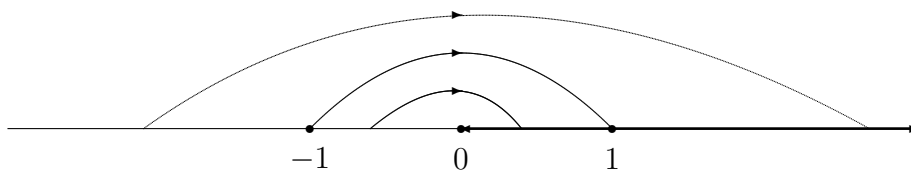
$$\begin{aligned}x_1 &= h(0.008) \approx 0.009, \\x_2 &= h^2(0.008) \approx 0.01, \\x_3 &= h^3(0.008) \approx 0.01, \\x_4 &= h^4(0.008) \approx 0.011, \\x_5 &= h^5(0.008) \approx 0.012, \\x_{10} &= h^{10}(0.008) \approx 0.018, \\x_{20} &= h^{20}(0.008) \approx 0.037, \\x_{100} &= h^{100}(0.008) \approx 0.091.\end{aligned}$$

Vienkārši eksperimenti ar Microsoft Excel parāda, ka populācijas lielums laika gaitā tieksies uz 0.090909, pie tam tas nav atkarīgs no sākotnējās populācijas lieluma. Vai populācijas lielums konverģēs, vai uzvedīsies savādāk, to nosaka logistiskā attēlojuma parametrs  $r$ . ■

Lai grafiski raksturotu sistēmas dinamiku, var izmantot tā saucamos fāžu portretus. *Fāžu portrets* sastāv no diagrammas, kurā uzrādīti iespējamie sistēmas sākuma stāvokļi un ar bultām tiek norādīts, kā šie stāvokļi mainās ar funkcijas iterācijām.

**Piemērs 2.3.** Apskatīsim funkciju  $f(x) = x^2$ . Funkcijas definīcijas apgabals ir visi reālie skaitļi, kurus varam reprezentēt ar taisni plaknē. Funkcijai ir divi nekustīgie punkti: 0 un 1. Tos mēs atzīmēsim ar punktiem uz skaitļu taisnes. Tālāk ievērosim, ka visiem  $0 < x < 1$  funkcijas iterācijas  $f^n(x)$  tiecas uz 0, bet visiem  $x > 1$  funkcijas iterācijas laika gaitā kļūst aizvien lielākas (tiecas uz bezgalību). Šo uzvedību mēs attēlosim, uzzīmējot bultu

no 1 virzienā uz 0 un otru bultu no 1 virzienā uz plus bezgalību.



1.1. zīm.

Kas notiek, ja  $x < 0$ ? Vispirms varam ievērot, ka  $-1$  ar  $f$  pirmo iterāciju kļūst par nekustīgo punktu  $f(-1) = (-1)^2 = 1$ , tāpēc  $f^n(-1) = 1$ ,  $n \geq 1$ . Zīmējumā to mēs parādīsim ar bultu no  $-1$  uz  $1$ . Punkti, kas atrodas starp  $-1$  un  $0$ , ar  $f$  pirmo iterāciju tiek attēloti intervālā  $]0; 1[$  un pēc tam ar nākamajām  $f$  iterācijām tie tiecas uz  $0$ . Līdzīgi punkti, kas ir mazāki par  $-1$ , ar pirmo  $f$  iterāciju tiek attēloti intervālā  $]1; +\infty[$ , bet pēc tam tie ar  $f$  iterācijām tie tiecas uz plus bezgalību. Zīmējumā mēs to attēlosim ar bultu no negatīvajiem skaitļiem uz atbilstošajiem pozitīvajiem skaitļiem. Visu šo informāciju esam apkopojuši 1.1. zīmējumā, kuru tad arī saucam par funkcijas  $f(x) = x^2$  fāžu portretu. ■

# NODAĻA NR. 2

## Reālu skaitļu topoloģijas īpašības

**Anotācija.** Reālu skaitļu topoloģija: vaļējas kopas, nepārtrauktas funkcijas, konverģentas virknes, akumulācijas punkti, slēgtas kopas, blīvas kopas. Pamatdefinīcijas un likumsakarības.

Tā kā šī kursa ietvaros pamatā mēs darbosimies ar reālā mainīgā funkcijām, tad mums noderīgi būs daudzi reālu skaitļu topoloģijas jēdzieni. Viens no dinamikas fundamentālākajiem jautājumiem ir punkta orbītas (punktu virknes)  $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$  īpašību izpēte. Šajā nolūkā ir jāzin tādi jēdzieni kā konverģence, akumulācijas punkts, vaļēja kopa, slēgta kopa, blīva kopa un citi. Šajā nodaļā apskatīsim minētos jēdzienus. Ja lasītājs ir labi pazīstams ar reālu skaitļu topoloģiju, var šo pamatjēdzienu nodaļu izlaist.

**Definīcija 2.1.** Pieņemsim, ka  $U$  ir reālu skaitļu apakškopa. Kopu  $U$  sauc par **vaļēju kopu**, ja jebkuram  $x \in U$  eksistē tāds pozitīvs skaitlis  $\varepsilon > 0$ , ka no nevienādības  $|x - y| < \varepsilon$  seko  $y \in U$ .

Par skaitli  $\varepsilon$  varam domāt kā par attālumu. Piemēram, ja esam izvēlējušies vaļēju kopu  $U$  uz taisnes un punktu  $x \in U$ , tad pēc šīs definīcijas ir jāspēj atrast tādu skaitli  $\varepsilon > 0$ , ka visi punkti, kas atrodas pa kreisi un pa labi no  $x$  riņķa ar centru  $x$  un rādiusu  $\varepsilon$  iekšienē, pieder kopai  $U$ . Var teikt arī tā: visi punkti, kuri nav tālāk par  $\varepsilon$ , pieder kopai  $U$ .

**Definīcija 2.2.** Pieņemsim, ka  $\varepsilon > 0$ . Kopu

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

sauc par punkta  $x$   $\varepsilon$ -apkārtni.

Par punkta  $x$  apkārtnes punktiem varam domāt kā par tādiem punktiem, kas atrodas punktam  $x$  pietiekami tuvu. Ievērosim, ka  $|x - y| < \varepsilon$  tad un



tikai tad, ja  $y \in ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$ . Tātad  $N_\varepsilon(x) = ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$ , un mēs varam  $x$  apkārtņi vizualizēt ar vaļēju intervālu, kura centrs ir  $x$ .

**Apgalvojums 2.1.** Kopa  $U$  ir vaļēja tad un tikai tad, ja katram  $x \in U$  eksistē tāda  $\varepsilon$ -apkārtne, kas pilnībā ietilpst kopā  $U$ :

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad N_\varepsilon(x) \subset U.$$

**Apgalvojums 2.2.** Reāla skaitļa jebkura apkārtne ir vaļēja kopa.

**Piemērs 2.1.**

a) Parādīsim, ka vaļējs intervāls  $]a; b[$  patiešām ir vaļēja kopa.

Pieņemsim, ka  $x \in ]a; b[$ . Lai parādītu, ka  $]a; b[$  ir vaļēja kopa, nepieciešams atrast tādu  $\varepsilon > 0$ , ka no  $|x - y| < \varepsilon$  seko  $y \in ]a; b[$ . Izvēlēsimies  $\varepsilon = \min\{|x - a|, |x - b|\}$  (citiem vārdiem sakot,  $\varepsilon$  ir attālums starp  $x$  un tuvāko intervāla galapunktu). Tā kā  $a < x < b$ , tad  $\varepsilon > 0$ . Ja  $|x - y| < \varepsilon$ , tad

$$|x - y| < \varepsilon \leq |x - a|.$$

Tā kā  $x > a$ , tad no iepriekšējās nevienādības seko, ka

$$-x + a < x - y < x - a.$$

Atrisinot šo nevienādību attiecībā pret  $y$ , iegūsim

$$a < y < 2x - a.$$

Tātad  $a < y$ .

Līdzīgi varam spriest, lai parādītu, ka  $y < b$ . Ja  $|x - y| < \varepsilon$  un  $\varepsilon = \min\{|x - a|, |x - b|\}$ , tad

$$|x - y| < \varepsilon \leq |x - b|.$$

Tā kā  $x < b$ , tad no iepriekšējās nevienādības seko, ka

$$x - b < x - y < b - x.$$

Atrisinot šo nevienādību attiecībā pret  $y$ , iegūsim

$$2x - b < y < b.$$

Tātad  $y < b$ . ■

b) Parādīsim, ka ir kopas, kuras nav vaļējas. Piemēram, racionālo skaitļu kopa nav vaļēja kopa.

Pieņemsim, ka  $x$  ir racionāls skaitlis. Lai cik lielu vai mazu arī mēs neizvēlētos skaitli  $\varepsilon > 0$ , vienmēr eksistēs tāds iracionāls skaitlis  $z$ , kurš atrodas tuvāk:  $|x - z| < \varepsilon$ . Ievērojot Apgalvojumu 2.1, racionālo skaitļu kopa nav vaļēja kopa. ■

Pamatobjekts šī kursa ietvaros ir funkcija. Tālāk uzskaitīsim vairākus ar funkcijām un to nepārtrauktību saistītos jēdzienus un rezultātus bez pierādījumiem.

**Definīcija 2.3.** Trijnieku  $f = (X, Y, G)$ , kur  $G \subseteq X \times Y$ , sauc par *funkciju* (lieto arī vārdu "attēlojums"), ja visiem kopas  $G$  elementiem  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  ir spēkā vienādība  $y = z$ . Kopu  $X$  sauc par funkcijas  $f$  *starta* (jeb *izejas*) kopu,  $Y$  — par  $f$  *finiša* (jeb *ieejas*) kopu, bet  $G$  — par  $f$  *grafiku*.

Ja  $(x, y) \in G$ , tad lieto pierakstu  $f(x) = y$ . Vispārīgs pieraksts  $f : X \rightarrow Y$  norāda, ka  $f$  ir funkcija ar starta kopu  $X$  un finiša kopu  $Y$ . Parasti šādā pierakstā tiek domāts, ka funkcija ir definēta jebkurā kopas  $X$  punktā.

Elementu  $x \in X$  sauc par funkcijas  $f$  *argumentu* vai *neatkarīgo mainīgo*, bet  $y \in Y$  — par *atkarīgo mainīgo*. Šajā situācijā saka arī, ka elementa  $x$  *attēls* ir elements  $y$ , bet elementa  $y$  *pirmtēls* ir elements  $x$ .

Ja  $X = Y$ , tad saka, ka funkcija  $f$  *attēlo kopu  $X$  sevī*.

Par funkcijas  $f : X \rightarrow Y$  *definīcijas apgabalu* (angliski "domain") sauc kopu

$$\text{Dom}(f) = \{x \in X \mid \exists y \in Y ((x, y) \in G)\},$$

par funkcijas  $f : X \rightarrow Y$  *vērtību apgabalu* (angliski "range") sauc kopu

$$\text{Ran}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X ((x, y) \in G)\}.$$

Ja  $X \subset \mathbf{R}$ , tad funkciju  $f : X \rightarrow Y$  sauc par *reālā mainīgā funkciju*; ja  $Y \subset \mathbf{R}$ , tad mēdz teikt, ka  $f : X \rightarrow Y$  ir *reālvērtīga funkcija*.

**Definīcija 2.4.** Funkciju  $f = (X, Y, G)$  sauc par *visur definētu*, ja  $\forall x \in X \exists y \in Y ((x, y) \in G)$ .

**Definīcija 2.5.** Funkciju  $f : X \rightarrow Y$  sauc par *sirjekciju*, ja  $\text{Ran}(f) = Y$ .

**Definīcija 2.6.** Funkciju  $f : X \rightarrow Y$  sauc par *injekciju*, ja dažādiem elementiem  $x_1, x_2 \in X$  atbilst atšķirīgi elementi  $f(x_1), f(x_2) \in Y$ , t.i.,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Definīcija 2.7.** Ja visur definēts attēlojums  $f : X \rightarrow Y$  vienlaicīgi ir gan sirjekcija, gan injekcija, tad to sauc par *bijekciju*.

Piemēram, funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$  ir visur definēta, tā ir gan sirjekcija, gan injekcija, tāpēc bijekcija, bet  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  ir visur definēta, bet nav ne sirjekcija, ne injekcija.

Par nepārtrauktām funkcijām parasti uzskatām tādas, kuru grafiki ir nepārtrauktas līnijas. Bet tomēr vispārīgā gadījumā tā ir ne vienmēr. Piemēram, funkcija  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , kas definēta ar vienādību  $f(z) = 3z + 5$ , ir nepārtraukta funkcija, bet tās grafiks sastāv no atsevišķiem punktiem.

Pieņemsim, ka  $D, C \subset \mathbf{R}$ .

**Definīcija 2.8.** Pieņemsim, ka  $f : D \rightarrow C$  un  $x_0 \in D$ . Funkciju  $f$  sauc par *nepārtrauktu punktā  $x_0$* , ja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Funkciju sauc par nepārtrauktu kopā  $D$ , ja tā ir nepārtraukta jebkurā kopas  $D$  punktā.

Dažkārt nepārtrauktības īpašības izmantošanā var noderēt šāda lemma:

**Lemma 2.1.** Funkcija  $f$  ir nepārtraukta punktā  $p$  tad un tikai tad, ja jebkuriem  $c$  un  $d$ , kuriem izpildās nevienādība  $c < f(p) < d$ , eksistē tāds  $\delta > 0$ , ka

$$\forall x \in \text{Dom} f : x \in ]p - \delta; p + \delta[ \Rightarrow c < f(x) < d.$$

**Teorēma 2.1.** (Starpvērtību teorēma) Pieņemsim, ka  $f$  ir nepārtraukta funkcija intervālā  $[a; b]$ . Ja  $p$  ir skaitlis starp  $f(a)$  un  $f(b)$ , tad

$$\exists c \in [a; b] : f(c) = p.$$

Citiem vārdiem sakot, nepārtraukta funkcija sasniedz jebkuru vērtību starp divām savām vērtībām.

**Definīcija 2.9.** Pieņemsim, ka  $f : D \rightarrow C$  un funkcijas vērtību apgabals  $\text{Ran} f = f(D)$ . Funkciju  $g : f(D) \rightarrow D$  sauc par funkcijas  $f$  *inverso funkciju*, ja visiem  $x \in D$ :  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ . Funkcijas  $f$  inverso funkciju parasti apzīmē ar  $f^{-1}$ .

**Apgalvojums 2.3.** Funkcijai eksistē inversā funkcija tad un tikai tad, ja tā ir injekcija.

**Teorēma 2.2.** Funkcija  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ir nepārtraukta tad un tikai tad, ja jebkurai vaļējai kopai  $U \subset \mathbf{R}$  tās pirmtēls  $f^{-1}(U)$  ir vaļēja kopa.

**Definīcija 2.10.** Funkciju, kura ir nepārtraukta bijekcija un kuras inversā ir nepārtraukta funkcija, sauc par *homeomorfismu*.

Tikpat svarīgas kā vaļējas kopas jēdziens matemātikā nozīmīgs ir slēgtas kopas jēdziens. Lai to definētu, noskaidrosim virknes konverģences un akumulācijas punkta jēdzienus.

**Definīcija 2.11.** Pieņemsim, ka  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ir reālu skaitļu virkne. Saka, ka virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  *konverģē uz  $x$* , ja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall k \geq N : |x - x_k| < \varepsilon.$$

Saka, ka virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  *konverģē uz bezgalību* jeb *diverģē*, ja

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall k \geq N : x_k > M.$$

**Definīcija 2.12.** Pieņemsim, ka  $S$  ir reālu skaitļu apakškopa. Reālu skaitli  $x$  sauc par kopas  $S$  *akumulācijas punktu*, ja jebkura punkta  $x$  apkārtne satur kopas  $S$  punktu, kurš nesakrīt ar  $x$ .

**Apgalvojums 2.4.** Pieņemsim, ka  $S$  ir reālu skaitļu apakškopa. Sekojoši apgalvojumi ir ekvivalenti:

- Punkts  $x$  ir kopas  $S$  akumulācijas punkts.
- Katram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds  $y \in S$ , ka  $0 < |x - y| < \varepsilon$ .
- Eksistē kopas  $S$  punktu virkne, kuras visi elementi ir atšķirīgi no  $x$  un kura konverģē uz  $x$ .

**Piemērs 2.2.** Iracionālais skaitlis  $x = 0.1234567891011121314151617\dots$  ir racionālu skaitļu kopas akumulācijas punkts. Lai to ieraudzītu, definējam racionālu skaitļu virkni:  $x_1 = 0.1$ ,  $x_2 = 0.12$ ,  $x_3 = 0.123$ ,  $x_4 = 0.1234, \dots$ ,  $x_n = 0.1234\dots n, \dots$ . Skaidrs, ka šī virkne konverģē uz  $x$ . Pēc Apgalvojuma 2.4 c) punkts  $x$  ir racionālu skaitļu kopas akumulācijas punkts. ■

**Definīcija 2.13.** Kopu sauc par *slēgtu*, ja tā satur visus savus akumulācijas punktus.

**Piemērs 2.3.**

- Slēgts intervāls  $I = [a; b]$  ir slēgta kopa. Pierādījumu veiksīm no pretējā: parādīsim, ja  $x$  nepieder intervālam  $I$ , tad  $x$  nav kopas  $I$  akumulācijas punkts.

Pieņemsim, ka  $x \notin I$ . Tādā gadījumā  $x < a$  vai  $b < x$ . Ja  $x < a$ , tad  $a - x$  ir pozitīvs skaitlis, varam aplūkot punkta  $x$  apkārti ar rādiusu  $a - x$ :  $U(x) = ]x - (a - x); x + (a - x)[ = ]2x - a; a[$ . Tā kā šī apkārtne nesatur nevienu punktu no intervāla  $[a; b]$ , tad  $x$  nav intervāla  $[a; b]$  akumulācijas punkts. Līdzīgi var pierādīt, ja  $b < x$ , tad  $x$  nav intervāla  $[a; b]$  akumulācijas punkts. ■

b) Racionālu skaitļu kopa nav slēgta, jo Piemērā 2.2 mēs parādījām, ka eksistē tāda racionālu skaitļu virkne, kura konverģē uz iracionālu skaitli. Tādējādi racionālo skaitļu kopa nav ne vaļēja, ne slēgta reālo skaitļu kopā. ■

Ja  $A$  ir reālu skaitļu kopa, tad par kopas  $A$  papildinājumu  $A^C$  reālo skaitļu kopā sauc kopu no visiem tiem reāliem skaitļiem, kuri neietilpst kopā  $A$ . Vaļējas un slēgtas kopas saista sakarība.

**Apgalvojums 2.5.** Kopa ir vaļēja tad un tikai tad, ja tās papildinājums ir slēgta kopa.

**Apgalvojums 2.6.** Pieņemsim, ka  $\{A_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  ir vaļēju kopu kopa. Tad  $\cup A_n$  ir vaļēja kopa. Ja kopa satur vaļējas kopas galīgā skaitā, tad  $\cap A_n$  ir vaļēja.

Pieņemsim, ka  $\{B_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  ir slēgtu kopu kopa. Tad  $\cap B_n$  ir slēgta kopa. Ja kopa satur slēgtas kopas galīgā skaitā, tad  $\cup B_n$  ir slēgta.

Pēdējais svarīgais jēdziens ir blīva kopa.

**Definīcija 2.14.** Pieņemsim, ka  $A$  ir kopas  $B$  apakškopa. Kopu  $A$  sauc par *blīvu* kopā  $B$ , ja jebkurš  $B$  punkts ir  $A$  akumulācijas punkts vai kopas  $A$  punkts (iespējams, izpildās arī abi nosacījumi vienlaikus).

**Apgalvojums 2.7.** Pieņemsim, ka  $A$  ir kopas  $B$  apakškopa. Sekojoši apgalvojumi ir ekvivalenti:

- $A$  ir blīva kopā  $B$ .
- Katram  $x \in B$  un katram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds  $y \in A$ , ka  $|x - y| < \varepsilon$ .
- Katram punktam  $x \in B$  eksistē tāda virkne no kopas  $A$  elementiem, kura konverģē uz  $x$

**Piemērs 2.4.** Racionālo skaitļu kopa ir blīva reālo skaitļu kopā. Lai to parādītu, pietiekami pierādīt, ka jebkurš iracionāls skaitlis ir racionālu skaitļu kopas akumulācijas punkts.

Iracionālo skaitli apzīmēsim šādi:  $t = *.t_1t_2t_3t_4\dots$ , kur ar zvaigznīti  $*$  apzīmēta skaitļa  $t$  veselā daļa, bet  $t_1t_2t_3t_4\dots$  ir daļveida daļa. Racionālo

skaitļu virkni definēsim šādi:

$$\begin{aligned}x_1 &= *.t_1 \\x_2 &= *.t_1t_2 \\x_3 &= *.t_1t_2t_3 \\&\dots \\x_n &= *.t_1t_2t_3\dots t_n \\&\dots\end{aligned}$$

Skaidrs, ka šī virkne konverģē uz  $t$ . Pēc Apgalvojuma 2.7. c) racionālo skaitļu kopa ir blīva reālo skaitļu kopā. ■

# NODAĻA NR. 3

## PERIODISKI PUNKTI UN STABILITĀTES KOPAS

**Anotācija.** Dažas nekustīgo punktu teorēmas reālām funkcijām (Brauera teorēmas vienkāršotā versija). Periodiski punkti. Eventuāli nekustīgie punkti un periodiskie punkti. Stabilitātes kopas. Teorēma par atšķirīgu periodisko punktu stabilitātes kopu nešķelšanos. Grafiskā analīze.

Šajā nodaļā mēs noskaidrosim vienkāršākos diskrētas dinamiskas sistēmas uzvedības tipu raksturošanas paņēmienus. Vispirms pieņemsim, ka funkcijas vērtību kopa ir definīcijas apgabala apakškopa. Izņēmumi tiks atrunāti atsevišķi.

**Definīcija 3.1.** Pieņemsim, ka  $f : X \rightarrow X$  ir funkcija, kas definēta kopā  $X$ . Ja  $f(c) = c$ , tad punktu  $c$  sauc par funkcijas  $f$  *nekustīgo punktu*.

Reālā mainīgā funkcijai ir nekustīgais punkts  $c$  tad un tikai tad, ja  $(c, c)$  ir funkcijas grafika punkts. Citiem vārdiem sakot, funkcijai  $f$  ir nekustīgais punkts  $c$  tad un tikai tad, ja tās grafiks krusto taisni  $y = x$  punktā  $(c, c)$ .

Nekustīgie punkti ir vieni no svarīgākajiem punktiem funkcijas dinamikas izpētē. Pirmajā lekcijā mēs aplūkojām funkciju  $f(x) = -x^3$ , kurai ir nekustīgais punkts  $0$ , kurš pievelk visus punktus no vaļēja intervāla  $] -1; 1[$  ar funkcijas iterācijām. Mēs redzēsim, ka daudzās dinamiskajās sistēmās nekustīgie punkti spēlēs līdzīgu lomu. Brauera teorēmas vienkāršotā versija reālvērtīgām funkcijām palīdzēs lokalizēt nekustīgos punktus.

**Teorēma 3.1.** Pieņemsim, ka  $[a; b]$  ir slēgts intervāls un  $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$  ir nepārtraukta funkcija. Tādā gadījumā funkcijai  $f$  eksistē nekustīgais punkts intervālā  $[a; b]$ .

**Pierādījums.** Ja  $f(a) = a$  vai  $f(b) = b$ , tad pierādījums pabeigts. Tāpēc pieņemsim, ka  $a$  un  $b$  nav funkcijas  $f$  nekustīgie punkti.

Definējam intervālā  $[a; b]$  jaunu funkciju  $g(x) = f(x) - x$  — tā ir nepārtraukta funkcija kā nepārtrauktu funkciju starpība. Tā kā  $f(a) \neq a$  un  $f(a) \in [a; b]$ , tad  $f(a) > a$ . Līdzīgi  $f(b) < b$ . Tādā gadījumā

$$g(a) = f(a) - a > 0 \text{ un } g(b) = f(b) - b < 0.$$

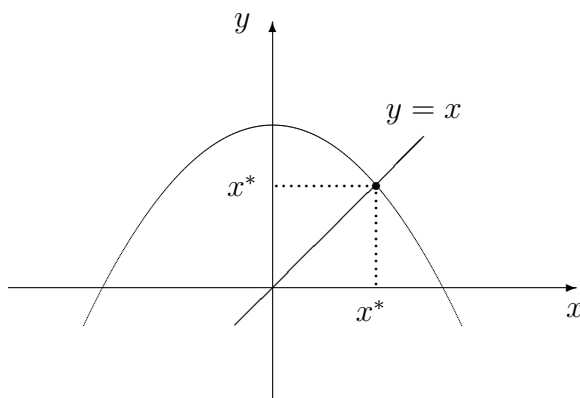
Tā kā  $g$  ir nepārtraukta funkcija, tad pēc nepārtrauktu funkciju īpašībām, precīzāk, pēc starpvērtību teorēmas:

$$\exists c \in [a; b] : g(c) = 0.$$

Bet tas nozīmē, ka  $g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$ . ■

**Piemērs 3.1.** Funkcija  $f(x) = 1 - x^2$  ir nepārtraukta intervālā  $[0; 1]$  un tā šo intervālu attēlo sevī, tāpēc šai funkcijai pēc Teorēmas 3.1 eksistē nekustīgais punkts. Teorēma neko nepasaka, kā atrast nekustīgo punktu.

Reālu funkciju gadījumā fakta konstatēšanu par nekustīgā punkta eksistenci var panākt arī ar grafiskām metodēm: atliek uzzīmēt dotās funkcijas grafiku apskatāmajā intervālā un uzzīmēt taisni  $y = x$ , abu grafiku krustpunkti norāda uz nekustīgajiem punktiem (3.1.zīmējums).



3.1. zīm.

Ja mums ir zināma funkcijas analītiskā izteiksme, tad, pielīdzinot  $x$ -am, varam risināt vienādojumu  $f(x) = x$  un atrast nekustīgos punktus. Diemžēl vispārīgā gadījumā šī vienādojuma atrisināšana var būt problemātiska.

Piemēra sākumā apskatītajai funkcijai nekustīgos punktus var atrast viegli:

$$1 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



Tā kā  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \notin [0; 1]$ , tad funkcijas  $f(x) = 1 - x^2$  vienīgais nekustīgais punkts ir  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0,6 \in [0; 1]$ . ■

**Teorēma 3.2.** Pieņemsim, ka  $[a; b]$  ir slēgts intervāls un  $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$  ir nepārtraukta funkcija. Ja  $[a; b] \subset f([a; b])$ , tad eksistē funkcijai  $f$  nekustīgais punkts intervālā  $[a; b]$ .

**Pierādījums.** Tā kā  $[a; b] \subset f([a; b])$ , tad

$$\exists c, d \in [a; b] : f(c) = a \text{ un } f(d) = b.$$

Ja  $a = c$  vai  $d = b$ , pierādījums pabeigts. Ja nē, tad  $a < c < b$  un  $a < d < b$ . Definējam funkciju  $g(x) = f(x) - x$ , tā ir nepārtraukta funkcija kā nepārtrauktu funkciju starpība. Atliek ievērot, ka

$$g(c) = f(c) - c < 0 \text{ un } g(d) = f(d) - d > 0.$$

Pēc starpvērtību teorēmas seko, ka eksistē tāds  $e$  starp  $c$  un  $d$ , ka  $g(e) = 0$ , tad arī  $f(e) = e$ . ■

Atgādināsim, ka pirmajā lekcijā mēs apskatījām funkciju  $f(x) = -x^3$ , kurai ir nekustīgais punkts 0. Arī punktu 1 un -1 uzvedība liekus vārdus neprasa,  $f$  attēlo 1 par -1 un -1 par 1. Šādus punktus 1 un -1 mēs sauksim par periodiskiem punktiem un kopu  $\{-1, 1\}$  par periodisku orbītu.

**Definīcija 3.2.** Punktu  $x$  sauc par funkcijas  $f$  *periodisku punktu ar periodu  $k$* , ja  $f^k(x) = x$ . Citiem vrdiem, punkts  $x$  ir  $f$  periodisks punkts ar periodu  $k$ , ja tas ir  $f^k$  nekustīgais punkts.

Periodiskam punktam  $x$  ir *pirmperiods  $k_0$* , ja  $f^{k_0}(x) = x$  un  $f^n(x) \neq x$ ,  $0 < n < k_0$ . Tas ir, periodiskam punktam ir pirmperiods  $k_0$ , ja tas atgriežas starta vietā pirmo reizi tieši pēc  $k_0$  funkcijas  $f$  iterācijām.

Kopu no punkta  $x$  visām iterācijām sauc par  $x$  *orbītu*.

Ja  $x$  ir periodisks punkts, tad to un tā iterācijas sauc par *periodisku orbītu* vai periodisku *ciklu*.

Definīciju ilustrēsim ar funkcijas  $f(x) = -x^3$  palīdzību. Punkti 1 un -1 veido periodisku orbītu ar pirmperiodu 2.  $\{-1, 1, 0\}$  ir punktu kopa ar periodu 2, bet kopa  $\{-1, 1\}$  ir punktu kopa ar pirmperiodu 2. 0 ir vienīgais nekustīgais punkts. 0 orbīta ir  $\{0\}$ . Punkta 2 orbīta ir  $\{2, -2^3, 2^9, -2^{27}, \dots\}$ .

Funkcijai var būt vairāki nekustīgie vai periodiskie punkti. Funkcijai  $f(x) = x$  nekustīgs ir jebkurš punkts, kamēr funkcijai  $g(x) = -x$  visi punkti, izņemot 0, ir periodiski punkti ar pirmperiodu 2. Tālāk mēs redzēsim, ka pie

noteiktām  $r$  vērtībām funkcijai  $h(x) = rx(1 - x)$  eksistē periodiski punkti ar jebkuru pirmperiodu.

Ievērosim, ka funkcijai  $h(x) = 4x(1 - x)$  nekustīgais punkts ir 0. Punkts 1 nav nekustīgs, bet  $h(1) = 0$  un tā nākamajā iterācijā tas ir nekustīgs. Arī  $h(\frac{1}{2}) = 1$  un  $h^2(\frac{1}{2}) = 0$ . Var atrast arī citus punktus, kuri nekustīgi pēc noteikta skaita iterācijām.

**Definīcija 3.3.** Punktu  $x$  sauc par funkcijas  $f$  *eventuāli nekustīgo punktu* (*eventually fixed point*), ja

$$\exists N \quad \forall n \geq N \quad f^{n+1}(x) = f^n(x).$$

Punktu  $x$  sauc par funkcijas  $f$  *eventuāli periodisko punktu* (*eventually periodic*) ar periodu  $k$ , ja

$$\exists N \quad \forall n \geq N \quad f^{n+k}(x) = f^n(x).$$

Piemēram, funkcijas  $g(x) = |x - 1|$  punkti 0 un 1 veido periodisku ciklu. Tā kā  $g(2) = 1$ , tad 2 ir eventuāli periodisks. Faktiski jebkurš vesels skaitlis ir eventuāli periodisks.

Funkcijai  $f(x) = -x^3$  ir nekustīgais punkts 0 un periodisks cikls no -1 un 1. Kā raksturot pārējos punktus? Piemēram, punkta  $\frac{1}{2}$  orbīta ir neierobežota virkne  $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^9}; \dots$ . Jāsecina, ka  $\frac{1}{2}$  nav periodisks punkts un nesasniedz 0, bet tikai tai tuvojas tuvāk un tuvāk. Šajā gadījumā mēs teiksim, ka  $\frac{1}{2}$  ir asimptotiski ekvivalents punktam 0.

**Definīcija 3.4.** Pieņemsim, ka  $p$  ir funkcijas  $f$  periodisks punkts ar periodu  $k$ . Punktu  $x$  sauc par *asimptotiski ekvivalentu punktam  $p$*  (*forward asymptotic*), ja virkne  $x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots$  konverģē uz  $p$ . Citiem vārdiem sakot,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p$ .

Par punkta  $p$  *stabilitātes kopu* (*stable set*)  $W^S(p)$  sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem punktiem, kuri ir asimptotiski ekvivalenti punktam  $p$ .

Ja virkne  $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, |f^3(x)|, \dots$  aug neierobežoti, tad  $x$  ir *asimptotiski ekvivalents bezgalībai* (*forward asymptotic to infinity*). *Bezgalības stabilitātes kopa* (*stable set of infinity*)  $W^S(\infty)$  satur visus tos punktus, kuri ir asimptotiski ekvivalenti bezgalībai.

**Piemērs 3.2.** Funkcijai  $f(x) = -x^3$  ir šādas stabilitātes kopas:

0 stabilitātes kopa ir  $W^S(0) = ] - 1; 1[$ ;

bezgalības stabilitātes kopa ir  $W^S(\infty) = ] - \infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$ ;

-1 stabilitātes kopa ir  $W^S(-1) = \{-1\}$ ;

1 stabilitātes kopa ir  $W^S(1) = \{1\}$ .

Bez tam nav jēgas diskutēt par citu punktu stabilitātes kopām, jo funkcijai  $f$  nav citu periodisku punktu. ■

Piemērā mēs taktiski pieņemām, ja punkts ir viena periodiska punkta stabilitātes kopā, tad tas nevar būt cita atšķirīga periodiska punkta stabilitātes kopā. Tā nav nejaušība, bet gan likumsakarība.

**Teorēma 3.3.** Atšķirīgu periodisku punktu stabilitātes kopas nešķēļas, t.i., ja  $p_1$  un  $p_2$  ir periodiski punkti un  $p_1 \neq p_2$ , tad  $W^S(p_1) \cap W^S(p_2) = \emptyset$ .

**Pierādījums.** Pierādījums tiek veikts no pretējā. Pieņemsim, ka  $f$  ir funkcija ar periodiskiem punktiem  $p_1$  un  $p_2$  ar atbilstošiem periodiem  $k_1$  un  $k_2$ . Ms parādīsim, ja  $W^S(p_1) \cap W^S(p_2) \neq \emptyset$ , tad  $p_1 = p_2$ .

Pieņemsim, ka  $x \in W^S(p_1) \cap W^S(p_2)$ . Tad

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_1, N_2 \in \mathbf{N} : \quad \forall n \geq N_1 &\Rightarrow |p_1 - f^{nk_1}(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \\ \forall n \geq N_2 &\Rightarrow |p_2 - f^{nk_2}(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ja  $M \geq \max\{N_1, N_2\}$ , tad jebkuram  $n \geq M$  izpildās abas nevienādības, tāpēc

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= |p_1 - f^{nk_1k_2}(x) + f^{nk_1k_2}(x) - p_2| \leq \\ &\leq |p_1 - f^{nk_1k_2}(x)| + |f^{nk_1k_2}(x) - p_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

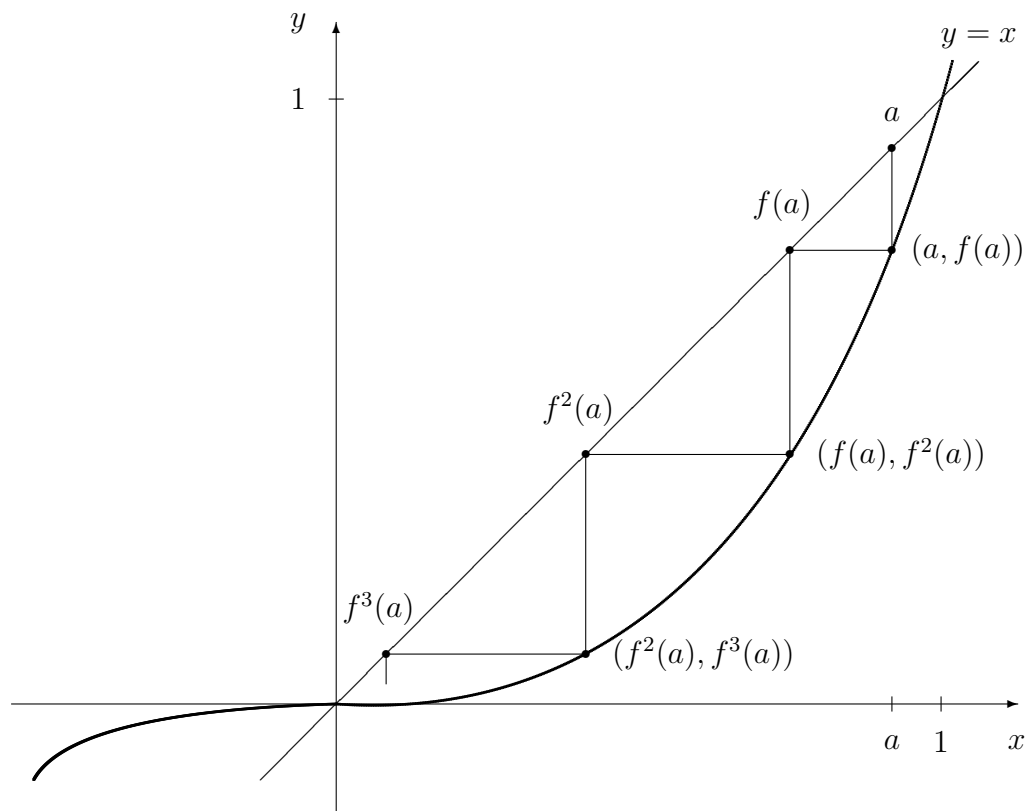
Tā kā mēs esam parādījuši, ka attālums starp  $p_1$  un  $p_2$  ir mazāks par jebkuru  $\epsilon > 0$ , robežgadījumā tas nozīmē, ka  $p_1 = p_2$ . Iegūta pretruna. ■

Tagad, kad esam definējuši periodiskus punktus, eventuāli periodiskus punktus un stabilitātes kopas, mēs varam klasificēt lielāko daļu vienkāršu dinamisku sistēmu. Mūsu pirmā piemēr funkcijas  $f(x) = -x^3$  definīcijas apgabala punkti sadalāmi triju tipu punktos: nekustīgais punkts 0, periodiskie punkti 1 un -1, kā arī 0 un  $\infty$  stabilitātes kopu punkti. Tālāk redzēsīm, ka ne visas sistēmas var tik vienkārši raksturot. Mums vajadzēs jaunus līdzekļus un idejas, lai klasificētu pat tik vienkāršas funkcijas kā  $h(x) = 4x(1-x)$  dinamiku. Viens no vienkāršākajiem līdzekļiem ir atrodams grafiskajā analīzē.

Kā norāda pats vārds, grafiskā analīze izmanto funkcijas grafiku, lai studētu tās dinamiku.

**Piemērs 3.3.** Mēs apskatīsim funkcijas  $f(x) = x^3$  dinamikas izpēti. Uzzīmēsim taisni  $y = x$  tajās pašās koordinātu asīs. Sāksim ar punktu  $a$  (vai  $(a, a)$ ) (skatīt 3.2.zīmējumu). No šī punkta novelkam vertikālu līniju līdz  $f$

grafikam — tas ir punkts  $(a, f(a))$ . Velkam horizontālu līniju līdz  $y = x$ , kas krustojas punktā  $(f(a), f(a))$ . Turpinot šo procesu, atradīsim punktu  $(f(a), f^2(a))$ , utt., redzam, ka  $f^n(a) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .



3.2. zīm.

Var redzēt, ka jebkura punkta no intervāla  $]0; 1[$  iterācijas konverģē uz 0. Var pārliecināties, ka  $W^S(0) = ]-1; 1[$  un  $W^S(\infty) = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ . Protams,  $W^S(1) = \{1\}$  un  $W^S(-1) = \{-1\}$ .

# NODAĻA NR. 4

## ŠARKOVSKA TEORĒMA

**Anotācija.** Teorēma par nepārtrauktu funkciju, kurai eksistē periodisks punkts ar periodu trīs. Šarkovska sakārtojums. Šarkovska teorēma.

Apskatīsim funkciju  $p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ . Viegli redzēt, ka  $p(0) = 1$ ,  $p(1) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2$ ,  $p(2) = -\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{5}{2} \cdot 2 + 1 = 0$ . Tātad  $\{0, 1, 2\}$  ir orbīta ar periodu 3. Ir saprātīgi vaicāt, cik citu periodisku punktu ir funkcijai  $p(x)$  un kādi tiem ir pirmperiodi. Uz šo jautājumu daļēju atbildi dod sekojoša ievēribas cienīga teorēma.

**Teorēma 4.1.** Ja reālā mainīgā nepārtrauktai funkcijai eksistē periodisks punkts ar pirmperiodu trīs, tad tai eksistē periodisks punkts jebkuram pirmperiodam. Tas ir, jebkuram naturālam skaitlim  $n$  eksistē funkcijas periodisks punkts ar pirmperiodu  $n$ .

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka nepārtrauktai funkcijai  $f$  orbīta  $\{a, b, c\}$  ir ar periodu 3. Nemazinot vispārīgumu, pieņemsim, ka  $a < b < c$ . Iespējami divi gadījumi:  $f(a) = b$  vai  $f(a) = c$ . Mēs apskatīsim situāciju  $f(a) = b$ , tad  $f(b) = c$  un  $f(c) = a$ . Situāciju ar  $f(a) = c$  pierāda analogi.

Apzīmēsim  $I_0 = [a; b]$  un  $I_1 = [b; c]$ . No starpvērtību teorēmas seko, ka  $f(I_0) \supset I_1$ ,  $f(I_1) \supset I_0$ . Tā kā  $f(I_1) \supset I_1$ , tad funkcijai  $f$  eksistē nekustīgais punkts intervālā  $I_1$  (pēc Teorēmas 3.2), t.i., funkcijai  $f$  eksistē periodisks punkts ar pirmperiodu 1.

Pieņemsim, ka  $n > 1$ . Mums jāparāda, ka funkcijai  $f$  eksistē periodisks punkts ar pirmperiodu  $n$ . Tā kā punktam  $a$  ir pirmperiods 3, tad gadījums  $n = 3$  ir uzskatāms par dotu un mēs tālāk pieņemsim, ka  $n \neq 3$ . Lai atrastu piemērotus periodiskus punktus priekš  $n$ , mēs izmantosim slēgtu iekļautu intervālu virkni  $I_1 = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$  ar sekojošām īpašībām:

1)  $A_0 = I_1$ ;

- 2)  $f(A_k) = A_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ ;
- 3)  $f^k(A_k) = I_1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ ;
- 4)  $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$ ;
- 5)  $f^n(A_n) = I_1$ .

Vispirms parādīsim, ka no šo kopu eksistences seko, ka kopā  $A_n$  eksistē periodisks punkts ar pirmperiodu  $n$ . Tad pierādīsim, ka šāda intervālu virkne eksistē.

Tā kā  $A_n \subset I_1$ , tad no 5) īpašības  $f^n(A_n) = I_1$  un nekustīgo punktu Teorēmas 3.2 seko, ka funkcijai  $F^n$  eksistē nekustīgais punkts kopā  $A_n$ . Tas ir ekvivalents apgalvojums par funkcijas  $f$  periodiska punkta  $p$  ar periodu  $n$  kopā  $A_n$  eksistenci. Izmantosim pārējās četras īpašības, lai parādītu, ka  $p$  pirmperiods ir  $n$ .

Pieņemsim, ka  $p$  ir periodisks punkts no  $A_n$  ar periodu  $n$ . Tā kā  $A_n \subset I_1$ , tad  $p \in ]b; c[ = I_1$ . Atzīmēsim, ka no 3) īpašības seko, ka punkti

$$f(p), f^2(p), \dots, f^{n-2}(p) \in I_1 = ]b; c[,$$

un no 4) īpašības seko, ka

$$f^{n-1}(p) \in I_0 = ]a; b[.$$

Parādīsim, ka  $p \neq b$  vai  $p \neq c$  no pretējā. Ja  $p = c$ , tad

$$f(p) = f(c) = a \notin I_1.$$

Tā kā  $f^{n-1}(p)$  ir vienīgā punkta  $p$  iterācija starp pirmajām punkta  $p$  iterācijām, kura nepieder intervālam  $I_1$ , tad varētu būt, ka  $n = 2$ . Bet tā ir pretruna ar faktu, ka punkta  $c$  pirmperiods ir 3, tātad  $p \neq c$ . Lai ieraudzītu, ka  $p \neq b$ , ievērosim, ja  $p = b$ , tad  $n = 3$ , jo  $f^2(p) = a$ , kas nepieder  $I_1$ , un vienīgā iterācija no  $p$  pirmajām  $n$  iterācijām, kas nepieder  $I_1$ , ir  $f^{n-1}(p)$ . Tā kā mēs pieņemām, ka  $n \neq 3$ , tad jāsecina, ka  $p \neq b$ . Tātad  $p \in ]b; c[ \subset I_1$ .

Tā kā  $f^{n-1}(p) \in I_0 ]a; b[$ , kas nešķēļas ar  $]b; c[$ , tad  $f^{n-1}(p) \neq p$ , tāpēc  $p$  nav ar pirmperiodu  $n - 1$ . Ja  $p$  pirmperiods būtu mazāks par  $n - 1$ , tad no 3) īpašības un fakta, ka  $p \neq b$ , kā arī  $p \neq c$ , sekotu, ka punkta  $p$  orbīta ir iekļauta intervāla  $]b; c[$  iekšienē, kas ir pretrunā ar 4) īpašību. Tātad punktam  $p$  ir pirmperiods  $n$ . Tāpēc, ja slēgtu kopu virkne ar uzrādītajām prasībām eksistē, tad eksistē punkts  $p$  ar pirmperiodu  $n$ .

Lai pabeigtu pierādījumu, mēs demonstrēsim, ka slēgtu kopu virkne eksistē katram naturālam skaitlim  $n > 1$ . Lai to izdarītu, izmantosim lemmu.

**Lemma 4.1.** Ja  $f([a; b]) \supset [c; d]$  un  $f$  ir nepārtraukta funkcija, tad eksistē tāds intervāls  $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ , ka  $f([\alpha; \beta]) = [c; d]$ .

**Pierādījums.** saskaņā ar teorēmu par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām

$$\exists a_0 \in [a; b] : f(a_0) = c \quad \text{un} \quad \exists b_0 \in [a; b] : f(b_0) = d.$$

Konkrētības labad pieņemsim, ka  $a_0 < b_0$  (ja  $a_0 > b_0$ , pierādījums analogs).  
Atrodam

$$\alpha = \sup\{a_i \in [a_0; b_0] \mid f(a_i) = c\},$$

$$\beta = \inf\{b_i \in [a_0; b_0] \mid f(b_i) = d\}.$$

Pēc teorēmas par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām:

$$f([\alpha; \beta]) \supset [c; d].$$

Jāparāda, ka izpildās iekļāvums arī uz otru pusi. No pretējā pieņemsim, ka

$$\exists \gamma \in [\alpha; \beta] : f(\gamma) < c.$$

Tā kā  $f(\beta) = d$ , tad  $f([\gamma; \beta]) \supset [c; d]$  — tas nozīmē, ka  $\exists a' \in [\gamma; \beta] : f(a') = c$ . Līdz ar to

$$a' \in \{a_i \in [a_0; b_0] \mid f(a_i) = c\} \quad \text{un}$$

$$a' > \alpha = \sup\{a_i \in [a_0; b_0] \mid f(a_i) = c\}.$$

Iegūta pretruna.

Ja  $f(\gamma) > d$ , pierādījums analogs. ■

**Teorēmas 4.1 pierādījuma turpinājums.** Tātad pieņemsim, ka  $n \in \mathbf{N}$  un  $n > 1$ . Apskatīsim slēgto iekļauto intervālu virknes iespējamības eksistenci.

Acīmredzami, ka  $A_0$  mēs varam izvēlēties tā, lai  $A_0 = I_1$  un 1) īpašība ir izpildīta.

Tā kā  $A_0 = I_1$  un  $f(I_1) \supset I_1$ , tas ir, mūsu apzīmējumos  $f(A_0) \supset A_0$ , tad no Lemmas 4.1 seko tādas kopas  $A_1 \subset A_0$  eksistence, ka  $f(A_1) = A_0$ . Tālāk no  $A_1 \subset A_0$  seko, ka  $f(A_1) = A_0 \supset A_1$ . Savukārt no šī iekļāvuma pēc Lemmas 4.1 seko tādas kopas  $A_2 \subset A_1$  eksistence, ka  $f(A_2) = A_1$ . Mēs varam šādi turpināt un definēt  $A_k$  visiem  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ . Katrā gadījumā mēs atradīsim tādu  $A_k \subset A_{k-1}$ , ka  $f(A_k) = A_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ , kā tas ir prasīts 2) īpašībā. Ievērosim, ka  $f(A_k) \supset A_k$  katram  $k$ , tāpēc no Lemmas 4.1 seko, ka šo procedūru intervālu  $A_k$  definēšanā var turpināt nepārtraukti.

Lai demonstrētu 3) īpašību, ievērosim, ka no 2) īpašības seko

$$\begin{aligned} f^2(A_k) &= f(f(A_k)) = f(A_{k-1}) = A_{k-2}, \\ f^3(A_k) &= f(f^2(A_k)) = f(A_{k-2}) = A_{k-3}, \\ &\dots, \\ f^{k-1}(A_k) &= f(f^{k-2}(A_k)) = f(A_{k-(k-2)}) = f(A_2) = A_1, \\ f^k(A_k) &= f(f^{k-1}(A_k)) = f(A_1) = A_0 = I_1, \quad k = 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Lai definētu  $A_{n-1}$  ar 4) īpašību, ievērosim

$$f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(I_1).$$

Tā kā  $f(I_1) \supset I_0$ , mēs zinām, ka  $f^{n-1}(A_{n-2}) \supset I_0$ . Tad pēc Lemmas 4.1 eksistē tāda kopa  $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ , ka  $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$ . Visbeidzot

$$f^n(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f(I_0) \text{ un } f(I_0) \subset I_1 \Rightarrow f^n(A_{n-1}) \supset I_1.$$

Visbeidzot, atkal izmantojot Lemmu 4.1, secinām nepieciešamo 5) īpašību

$$\exists A_n \subset A_{n-1} : f^n(A_n) = I_1. \blacksquare$$

Šī teorēma ir tikai speciālgadījums daudz vispārīgākai teorēmai, kuru 1964.gadā pierādījis A.N.Šarkovskis. Šis interesantais un brīnišķīgais rezultāts ir atkarīgs tikai no funkcijas nepārtrauktības. Bet nozīmīgs ir veselo skaitļu sakārtojums.

**Teorēma 4.2** (Šarkovskis, 1964). Pieņemsim, ka  $f$  ir reālā mainīgā nepārtraukta funkcija un ka funkcijai  $f$  eksistē periodisks punkts ar pirmperiodu  $n$ . Ja  $n \succ m$  Šarkovska sakārtojumā, tad funkcijai  $f$  eksistē arī periodisks punkts ar pirmperiodu  $m$ .

**Definīcija 4.1** (Šarkovska sakārtojums). *Šarkovska sakārtojums* naturāliem skaitļiem ir šāds:

$$\begin{aligned} 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \\ \dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

Relācija  $a \succ b$  dod  $a$  priekšroku pār  $b$ . Kad pieraksta sakārtojumu, tad visi nepāra skaitļi, izņemot 1, tiek sakārtoti augošā secībā, tad seko dubultoti nepāra skaitļi, tad četrkāršoti nepāra skaitļi, utt., sakārtojumu noslēdz divnieka pakāpes dilstošā secībā.



Jebkuru naturālu skaitli var atrast tieši vienu reizi Šarkovska sakārtojumā. Šarkovska teorēmu šeit nepierādīsim, tas iziet ārpus kursa satura.

Ja var parādīt, ka, piemēram, funkcijai nav periodisku punktu ar pirmperiodu 4, tad tas nozīmē, ka nav arī pārējo, kas lielāki par 4 Šarkovska sakārtojumā.

Piemēram, var uzzīmēt funkcijas

$$h(x) = 3,2x(1 - x)$$

grafiku, konstruēt šīs funkcijas otrās un ceturtais iterācijas grafikus un ieraudzīt, ka  $h^4(x)$  nav jaunu nekustīgo punktu, ir tikai tie paši, kas  $h(x)$  un  $h^2(x)$ , tātad šai funkcijai ir tikai periodiski punkti ar pirmperiodu 1 un 2. Ka tas ir tā, ļaujām pārbaudīt pašam lasītājam.

# NODAĻA NR. 5

## DIFERENCĒJAMĪBA UN TĀS SEKAS

**Anotācija.** Funkcijas atvasinājums. Vidējās vērtības teorēma (Lagranža teorēma). Teorēmas par funkcijas atvasinājuma periodiskajā punktā ietekmi uz stabilitātes kopu. Pievelkoši un atgrūdoši periodiskie (nekustīgie) punkti.

Daudzos gadījumos mēs bez īpašas atsaukšanās uz šo faktu, izmantojam funkcijas, kuras ir diferencējamas. Šajā nodaļā mēs noskaidrosim, kā funkcijas atvasinājums ietekmē tās dinamiku. Vispirms atgādināsim lasītājam, kas ir diferencējama vienanargumenta reālā mainīgā funkcija.

**Definīcija 5.1.** Pieņemsim, ka  $I$  ir intervāls,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $a \in I$ . Funkciju  $f$  sauc par *diferencējamu punktā*  $a$ , ja eksistē robeža

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Saka arī, ka funkcija ir *atvasināma punktā*  $a$ , ja eksistē iepriekš minētā robeža. Robežu apzīmē ar  $f'(a)$  un šo skaitli sauc par funkcijas  $f$  atvasinājumu punktā  $a$ .

Funkcija ir diferencējama kādā kopā, ja tā ir diferencējama jebkurā šīs kopas punktā.

Matemātiskās analīzes pamatkursā tika parādīts, ka diferencējama funkcija punktā  $a$  ir arī nepārtraukta šajā punktā. Ļoti svarīgs rezultāts, ko mēs lietošim vairākkārtīgi tālāk, ir vidējās vērtības teorēma jeb Lagranža teorēma.

**Teorēma 5.1** (Vidējās vērtības jeb Lagranža teorēma). Ja funkcija  $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$  ir diferencējama intervālā  $[a; b]$ , tad

$$\exists c \in [a; b] : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Izmantojot šo rezultātu, var pierādīt stiprāku rezultātu kā nekustīgo punktu Teorēmas 3.1 un 3.2.

**Teorēma 5.2.** Pieņemsim, ka  $I$  ir slēgts intervāls,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  ir diferencējama funkcija,  $f(I) \subset I$  un visiem  $x \in I$  izpildās  $|f'(x)| < 1$ . Tad funkcijai  $f$  eksistē viens vienīgs nekustīgais punkts intervālā  $I$ . Pie tam  $\forall x, y \in I$  ( $x \neq y$ ) :  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , t.i., funkcija ir stingri neizstiepjoša.

**Pierādījums.** Funkcija  $f$  ir diferencējama intervālā  $I$ , tāpēc tā ir nepārtraukta intervālā  $I$ . Pēc teorēmas nosacījumiem  $f : I \rightarrow I$ , tāpēc, ievērojot nekustīgo punktu Teorēmu 3.1, funkcijai  $f$  eksistē nekustīgais punkts intervālā  $I$ .

Vispirms pierādīsim, ka  $f$  ir stingri neizstiepjoša funkcija, nekustīgā punkta unitāte sekos no šīs īpašības.

Izvēlamies patvaļīgus punktus  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$ ,  $x < y$ . Pēc Vidējās vērtības teorēmas

$$\exists c \in [x; y] : f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Protams, vienādība izpildīsies arī tad, ja apskatīsim abas vienādības puses ar moduļiem. Tā kā  $c \in [x; y] \subset I$ , tad  $|f'(c)| < 1$ , tāpēc  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ .

Pieņemsim, ka  $p_1$  un  $p_2$  ir divi atšķirīgi nekustīgie punkti, tad pēc tikko pierādītā

$$|p_1 - p_2| = |f(p_1) - f(p_2)| < |p_1 - p_2|.$$

Iegūtā pretruna noslēdz pierādījumu. ■

Vispārīgā gadījumā teorēma nav spēkā vaļējā intervālā.

Pieņemot, ka funkcija ir diferencējama, mēs varam izdarīt vairākus specifiskus apgalvojumus par funkcijas dinamiku. Ja funkcija ir diferencējama un atvasinājums arī ir nepārtraukta funkcija, mēs iegūsim tālāku informāciju par funkcijas dinamiku. Šos vispārējos izteikumus ilustrēsim ar dažiem vienkāršiem piemēriem.

**Piemērs 5.1.**

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

Atrisinot  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x$ , atradīsim funkcijas vienīgo nekustīgo punktu  $x = 3$ . Funkcijas atvasinājums visiem  $x$  ir  $f'(x) = \frac{1}{2}$ . Tātad, ja  $x \neq 3$ , tad pēc vidējās vērtības teorēmas atradīsies tāds  $c_1$  starp  $x$  un 3:

$$|f(x) - f(3)| = |f'(c_1)| |x - 3| = \frac{1}{2} |x - 3|.$$

Apskatām  $f$  iterācijas punktā  $x$ , varam tālāk novērtēt:

$$\begin{aligned} \exists c_2 \quad |f^2(x) - f^2(3)| &= |f'(c_2)| |f(x) - f(3)| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}|x - 3|\right) = \frac{1}{2^2}|x - 3|, \\ \exists c_3 \quad |f^3(x) - f^3(3)| &= |f'(c_3)| |f^2(x) - f^2(3)| = \frac{1}{2^3}|x - 3|, \dots \text{utt.} \\ \text{galarezultātā} \quad |f^n(x) - f^n(3)| &= \frac{1}{2^n}|x - 3| \quad \text{jeb} \end{aligned}$$

$$|f^n(x) - 3| = \frac{1}{2^n}|x - 3| \quad -$$

seko, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 3$ . Tāpēc  $x \in W^S(3)$  jeb  $W^S(3) = \mathbf{R}$ .

b)  $r(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ .

Atkal 3 ir vienīgais nekustīgais punkts, bet  $r'(x) = -\frac{1}{2}$ . Līdzīgi kā a) gadījumā,  $W^S(3) = \mathbf{R}$ . Ievērosim atšķirību atvasinājuma zīmē. Veicot grafisko analīzi, var redzēt, ka a) gadījumā  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 3$  no vienas puses (ja  $x > 3$ , tad no labās, ja  $x < 3$ , tad no kreisās), bet b) gadījumā  $x$ -a iterācijas oscilē no 3 vienas puses uz otru.

c)  $g(x) = 2x - 3$ .

Atkal 3 ir vienīgais nekustīgais punkts, bet  $g'(x) = 2 > 1$ . No Vidējās vērtības teorēmas seko šādu  $c_1, c_2, \dots, c_n$  eksistence, ka

$$\begin{aligned} |g(x) - g(3)| &= |g'(c_1)| |x - 3| = 2|x - 3|, \\ |g^2(x) - g^2(3)| &= |g'(c_2)| |g(x) - g(3)| = 2(2|x - 3|) = 2^2|x - 3|, \\ &\dots \\ |g^n(x) - g^n(3)| &= 2^n|x - 3|. \end{aligned}$$

Secinām, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$ , t.i.,  $x \in W^S(\infty)$  jeb  $W^S(\infty) = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$ .

c)  $k(x) = -2x + 9$ .

Šajā gadījumā nekustīgais punkts ir tas pats 3, bet atvasinājums ir  $-3$  — negatīvs un pēc moduļa lielāks par 1. Tāpat kā c) gadījumā  $W^S(\infty) = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$ . Atšķiras iterāciju uzvedība, tās oscilē no 3 vienas puses uz otru un kļūst pēc absolūtās vērtības aizvien lielākas. ■

**Teorēma 5.3.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama funkcija,  $p$  ir  $f$  nekustīgais punkts,  $f'$  ir nepārtraukta funkcija.

Ja  $|f'(p)| < 1$ , tad eksistē tāds vaļējs intervāls  $U$ , kurš satur nekustīgo punktu  $p$ , ka visiem  $x \in U$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ , t.i.,  $U \subset W^S(p)$ .

Ja  $|f'(p)| > 1$ , tad eksistē tāds vaļējs intervāls  $U$ , kurš satur nekustīgo punktu  $p$  un kura visi punkti (izņemot  $p$ ) pamet intervālu ar  $f$  iterācijām.

Vispirms izdarīsim dažas piezīmes.

Mēs gribam izmantot faktu, ka  $f'$  ir nepārtraukta funkcija. Dotā teorēma ir patiesa arī gadījumā, kad  $f'$  nav nepārtraukta funkcija. Ir grūti atrast tādas diferencējamas funkcijas, kurām atvasinājums nav nepārtraukta funkcija, bet tomēr tādas eksistē. Tās funkcijas, kuras ir diferencējamas un kuru atvasinājumi ir nepārtrauktas funkcijas, apzīmē ar  $C^1$ .

Otrkārt, ja  $|f'(p)| > 1$ , tad vispārīgā gadījumā nav spēkā, ka punkts ar  $f$  iterācijām iziet ārpus intervāla, kurš satur  $p$ . Logistiskās funkcijas piemērs parādīs situāciju, kad punkta iterācijas atgriežas atpakaļ atkal un atkal.

Treškārt, ir patiesi, ja atvasinājums ir negatīvs vaļējā intervālā, tad  $x$  un  $f(x)$  atrodas dažādās  $p$  pusēs. Ja atvasinājums ir lielāks par 0, tad  $x$  un  $f(x)$  ir vienā  $p$  pusē.

Tagad mēs pierādīsim pārfrazētu iepriekšējo teorēmu.

**Teorēma 5.3'.** Pieņemsim, ka  $f \in C^1$ ,  $p$  ir  $f$  nekustīgais punkts.

Ja  $|f'(p)| < 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtnē, kura ietilpst punkta  $p$  stabilitātes kopā.

Ja  $|f'(p)| > 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtnē, kuras visi punkti, izņemot  $p$ , atstāj šo apkārtni ar funkcijas  $f$  iterācijām.

**Pierādījums.** Pirmā gadījuma pierādījuma stratēģija ir atrast tādu  $0 < \lambda < 1$  un  $\delta > 0$ , ka

$$\forall x \in ]p - \delta; p + \delta[: \quad |f'(x)| < \lambda.$$

Tad, lietojot Vidējās vērtības teorēmu, var parādīt, ka  $]p - \delta; p + \delta[ \subset W^S(p)$ .

Skaitli  $\lambda$  izvēsimies šādi:

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + |f'(p)|),$$

tad  $|f'(p)| < \lambda < 1$ .

Lai atrastu  $\delta$ , izmantosim  $f'$  nepārtrauktību. Tā kā absolūtās vērtības funkcija un  $f'$  ir nepārtrauktas funkcijas, tad to kompozīcija  $|f'(x)|$  ir nepārtraukta funkcija. Tad pēc Lemmas 2.10

$$\exists \delta > 0 \forall x \in ]p - \delta; p + \delta[: \quad |f'(x)| < \lambda.$$

Atliek parādīt, ka  $f^n(x)$  konverģē uz  $p$  visiem  $x \in ]p - \delta; p + \delta[$ .

Pieņemsim, ka  $x \in ]p - \delta; p + \delta[$ ,  $x \neq p$ . Pēc Vidējās vērtības teorēmas eksistē tāds  $c$  starp  $x$  un  $p$ , ka

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)| |x - p|.$$

Tā kā  $c \in ]p - \delta; p + \delta[$ , tad  $|f(x) - p| < \lambda |x - p|$ . Tā kā punkta  $f(x)$  attālums no  $p$  ir mazāks par  $x$  attālumu no  $p$ , tad  $f(x) \in ]p - \delta; p + \delta[$ , un mēs varam apskatīt nākošo iterāciju  $|f^2(x) - p| < \lambda^2 |x - p|$ . Turpinot tālāk, iegūsim, ka

$$|f^n(x) - p| < \lambda^n |x - p|.$$

Tā kā  $\lambda < 1$ , tad  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ , tāpēc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - p| = 0 \text{ un } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

Gadījumam  $|f'(p)| > 1$  ir līdzīgs pierādījums. ■

Nekustīgie punkti, kuru atvasinājums pēc absolūtās vērtības nav vienāds ar 1, ir pietiekoši svarīgi un tiem ir savs nosaukums — tos sauc par *hiperboliskajiem nekustīgajiem punktiem* (*hyperbolic fixed points*). Nekustīgos punktus, kuru atvasinājums pēc absolūtās vērtības ir stingri mazāks par 1, sauc par *sateku* vai *pievelkošiem nekustīgajiem punktiem* (*attracting fixed points*). Nekustīgos punktus, kuru atvasinājums pēc absolūtās vērtības ir stingri lielāks par 1, sauc par *avotu* vai *atgrūdošiem nekustīgajiem punktiem* (*repelling fixed points*). Ja nekustīgajā punktā atvasinājums ir 1 vai  $-1$ , tad šo nekustīgo punktu sauc par *nehiperbolisku* vai *neitrālu nekustīgo punktu* (*nonhyperbolic or neutral fixed point*).

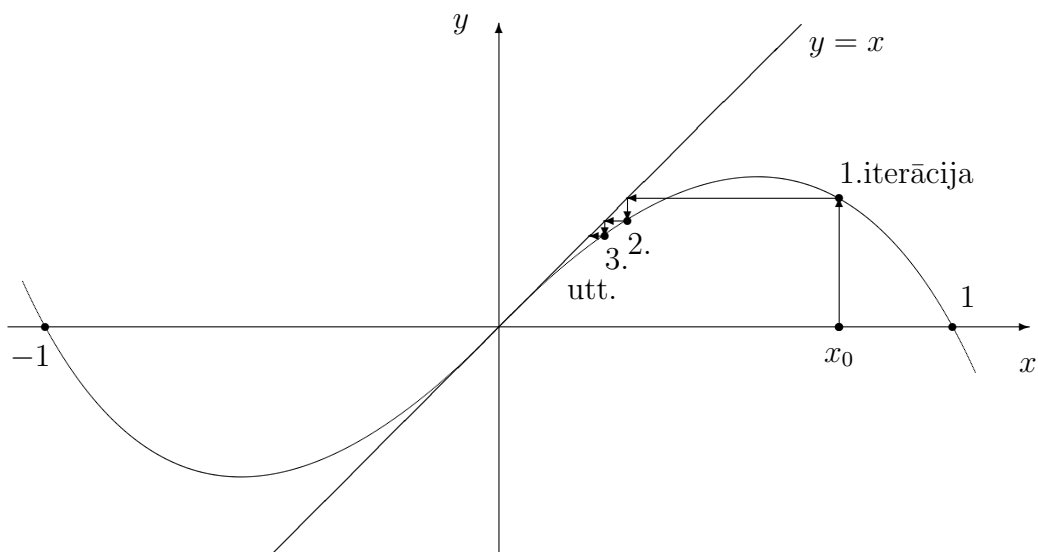
Iepriekšējā teorēma attiecas uz hiperbolisku nekustīgo punktu apkārtnes punktu uzvedību. Nākošajā piemērā mēs redzēsim, ka uzvedība nepavisam nav pareģojama neitrāla nekustīgā punkta tuvumā. Mēs apskatīsim trīs funkcijas, kurām visām 0 ir neitrālais nekustīgais punkts, bet kurām punkta 0 apkārtne ir atšķirīga pārējo punktu dinamika.

### Piemērs 5.2.

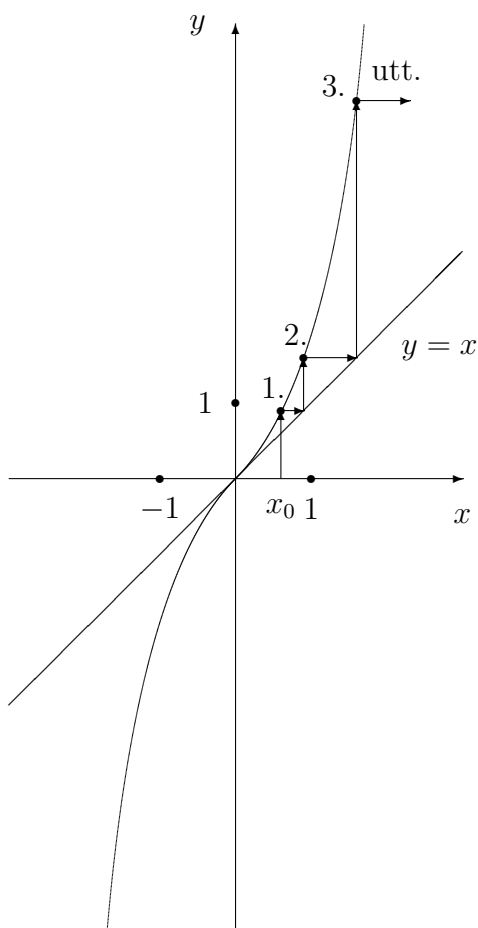
a)  $g(x) = x - x^3$ . 0 ir  $g$  nekustīgais punkts,  $g'(0) = 1$ . Grafiskā analīze parāda, ka  $] - 1; 1[ \subset W^S(0)$  (skatīt 5.1.zīmējumu).

b)  $r(x) = x + x^3$ . 0 ir  $p$  nekustīgais punkts un  $p'(0) = 1$ . Bet šajā gadījumā  $W^S(0) = 0$  un  $W^S(\infty) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$  (skatīt 5.2.zīmējumu).

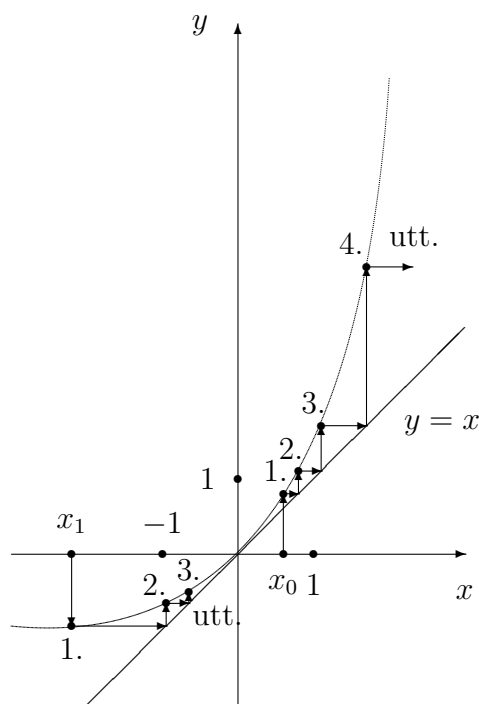
c)  $k(x) = e^x - 1$ . Arī šeit 0 ir  $k$  nekustīgais punkts un  $k''(0) = e^0 = 1$ , bet  $W^S(0) = ] - \infty; 0]$  un  $W^S(\infty) = ]0; \infty[$  (skatīt 5.3.zīmējumu). ■



5.1. zīm.



5.2. zīm.



5.3. zīm.

Atcerēsimies, ka  $p$  ir periodisks punkts ar periodu  $k$  funkcijai  $f$ , ja  $p$  ir  $f^k$  nekustīgais punkts. Šī fakta gaismā sekojošā definīcija par hiperboliskiem periodiskiem punktiem ir acīmredzams turpinājums hiperbolisku nekustīgo punktu definīcijai.

**Definīcija 5.2.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama funkcija un  $p$  ir funkcijas  $f$  periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$ .

Ja  $|(f^k)'(p)| \neq 1$ , tad  $p$  sauc par *hiperbolisku periodisku punktu*.

Ja  $|(f^k)'(p)| = 1$ , tad  $p$  sauc par *nehiperbolisku vai neitrālu periodisku punktu*.

Pēc analogijas ar Teorēmu 5.3' var pierādīt tādu pašu rezultātu par periodiskiem punktiem, precīzāk:

**Teorēma 5.4.** Pieņemsim, ka  $f \in C^1$ ,  $p$  ir  $f$  periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$ .

Ja  $|(f^k)'(p)| < 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtne, kura ietilpst punkta  $p$  stabilitātes kopā.

Ja  $|(f^k)'(p)| > 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtne, kuras visi punkti, izņemot  $p$ , atstāj šo apkārtni ar funkcijas  $f^k$  iterācijām.

Tātad šī teorēma saka, ja  $p$  ir  $f$  periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$  un  $f^k$  atvasinājums punktā  $p$  pēc absolūtās vērtības ir  $< 1$ , tad punkti, kas atrodas pietiekami tuvu punktam  $p$ , tiecas uz  $p$  ar  $f^k$  iterācijām. No otras puses, ja  $p$  ir  $f$  periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$  un  $f^k$  atvasinājums punktā  $p$  pēc absolūtās vērtības ir  $> 1$ , tad punkti, kas atrodas pietiekami tuvu punktam  $p$ , iet prom no  $p$  ar  $f^k$  iterācijām. Tas liek nosaukt šos periodiskos punktus līpašos vārdos.

**Definīcija 5.3.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama funkcija un  $p$  ir funkcijas  $f$  periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$ .

Ja  $|(f^k)'(p)| < 1$ , tad  $p$  sauc par  *$f$  pievelkošu periodisku punktu*.

Ja  $|(f^k)'(p)| > 1$ , tad  $p$  sauc par  *$f$  atgrūdošu periodisku punktu*.

Arī Piemērs 5.2 liek precizēt terminoloģiju par nehiperboliskiem nekustīgajiem punktiem. Proti, ja nehiperboliskais nekustīgais punkts pievelk tuvas apkārtnes punktus, tad šādu punktu sauksim par *vāji pievelkošu nekustīgo punktu* (piemēram, funkcijai  $g$  no Piemēra 5.2 punkts 0 ir vāji pievelkošs nekustīgais punkts). Ja nehiperboliskais nekustīgais punkts atgrūž tuvas apkārtnes punktus, tad šādu punktu sauksim par *vāji atgrūdošu nekustīgo punktu* (piemēram, funkcijai  $r$  no Piemēra 5.2 punkts 0 ir vāji atgrūdošs nekustīgais punkts).



# NODAĻA NR. 6

## FUNKCIJU PARAMETRISKAS SAIMES UN BIFURKĀCIJAS

**Anotācija.** Parametrisku funkciju saimes. Lineāras, eksponenciālas, kvadrātiskas parametriskas funkciju saimes. Bifurkācijas, to veidi. Bifurkāciju diagramma.

Ar jēdzienu "funkciju saime" mēs sapratīsim tādu funkciju kopu, kurām visām ir kopīgs viens vispārīgs tips. Piemēram, apskatīsim *lineāru funkciju saimi* formā  $f_m(x) = mx$ , kur  $m$  var mainīties reālajā skaitļu kopā. Mainīgo  $m$  sauc par *parametru*. Funkciju saimi, kura tiek reprezentēta ar  $f_m(x) = mx$ , sauc par parametrisku saimi. Parametru parasti pieraksta kā indeksu pie funkcijas vārda.

Mēs interesēsimies par funkciju dinamiku, mainoties to parametriem. Ilustrācijai apskatīsim piemēru.

**Piemērs 6.1.** Apskatīsim lineāro funkciju saimi  $f_m(x) = mx$ .

Visām  $m$  vērtībām, izņemot 1, vienīgais nekustīgais punkts ir 0.

Ja  $m < -1$ , tad 0 ir hiperbolisks avots (atgrūdošs nekustīgais punkts) un visi citi punkti pieder bezgalības stabilitātes kopai.

Ja  $m = -1$ , tad visi punkti, izņemot 0, ir periodiski punkti ar pirmperiodu 2.

Ja  $-1 < m < 1$ , tad 0 ir sateka (pievelkošs nekustīgais punkts) un  $W^S(0) = \mathbf{R}$ .

Ja  $m = 1$ , tad visi punkti ir nekustīgie punkti.

Ja  $m > 1$ , tad 0 ir avots (atgrūdošs nekustīgais punkts) un visi citi punkti pieder bezgalības stabilitātes kopai. ■

Ievērosim, ka saimes  $f_m(x) = mx$  dinamika ir nemainīga lielos parametra vērtības intervālos. Dažām parametra vērtībām (proti, -1 un 1) dinamikas

izmaiņas ir pēkšņas, pēc tam atkal paliek konstantas lielākā intervālā. Šīs pēkšņās dinamikas izmaiņas mēs nosauksim par bifurkācijām. Atzīmēsim, ka 0 ir arī nekustīgais punkts, ja  $m = 1$  vai  $-1$ , pie tam  $|f'(0)| = 1$ . Nehiperbolisku nekustīgo punktu klātbūtne pie parametriskajām vērtībām, pie kurām notiek bifurkācija, ir tipiska situācija.

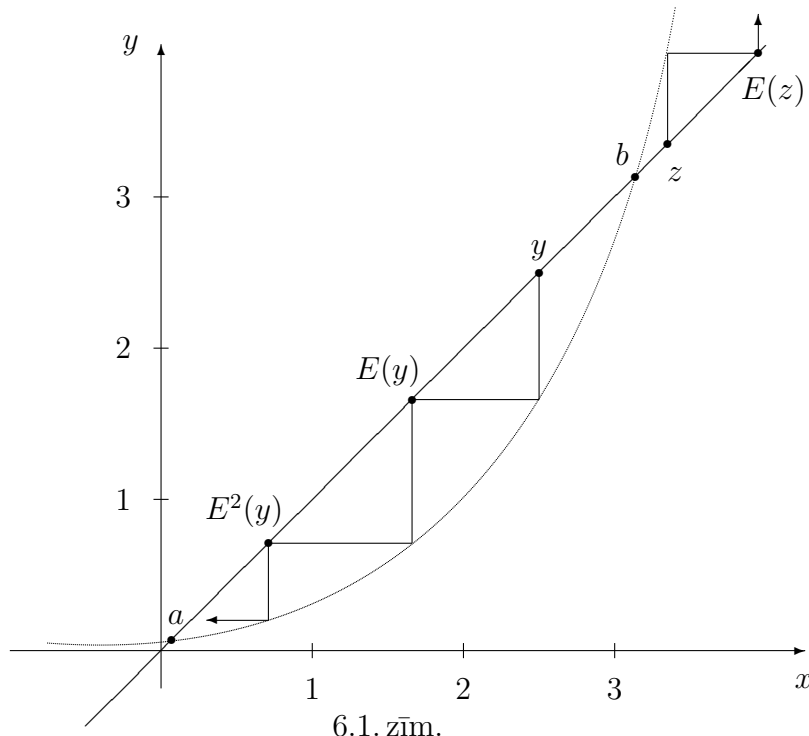
**Definīcija 6.1.** Pieņemsim, ka  $f_c(x)$  ir funkciju parametriska saime. Punktu  $c_0$  sauc par funkciju saimes *bifurkācijas punktu*, ja

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall a, b: \quad c_0 - \epsilon < a < c_0 \text{ un } c_0 < b < c_0 + \epsilon$$

funkciju  $f_a(x)$  dinamika ir atšķirīga no funkciju  $f_b(x)$  dinamikas. Citiem vārdiem sakot, funkciju dinamika izmainās, kad parametra vērtība iziet caur punktu  $c_0$ .

Jēdziens "funkciju dinamika" definīcijā netiek paskaidrots. Ar to mēs sapratīsim, ka funkciju saimei parādās vai pazūd nekustīgie vai periodiskie punkti, tie no avota kļūst par sateku vai otrādi, utt. Ne vienmēr var tik vienkārši konstatēt bifurkāciju punktus kā Piemērā 6.1. Pirms apskatīsim sarežģītākus gadījumus, sāksim ar dažiem vienkāršākiem piemēriem.

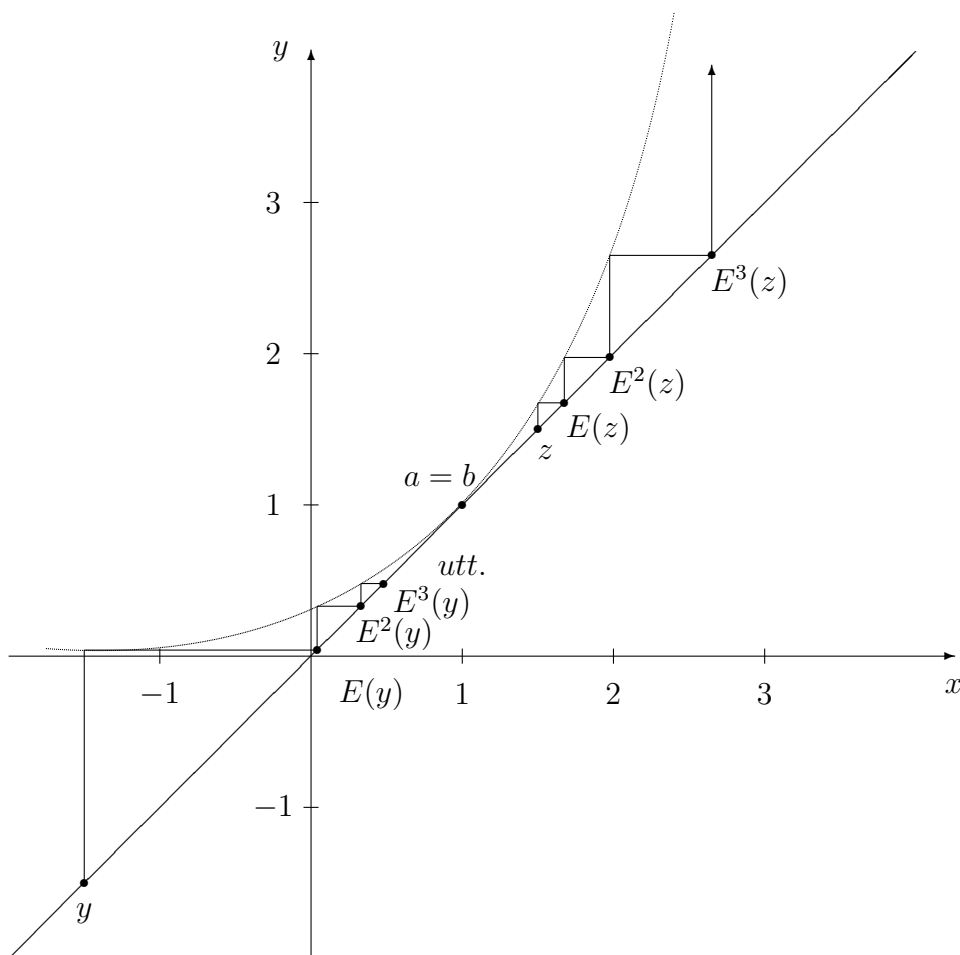
### Piemērs 6.2.



Apskatīsim saimi  $E_c(x) = e^{x+c}$  ar grafiskās analīzes palīdzību.  $c$  izmaiņa funkcijas  $y = e^x$  grafiku bīda pa labi un pa kreisi, tādējādi iespējami trīs gadījumi.  $E_c(x)$  ar  $y = x$  krustojas divos punktos, vienā punktā (tad tas ir pieskaršanās punkts) un nav krustpunktu.

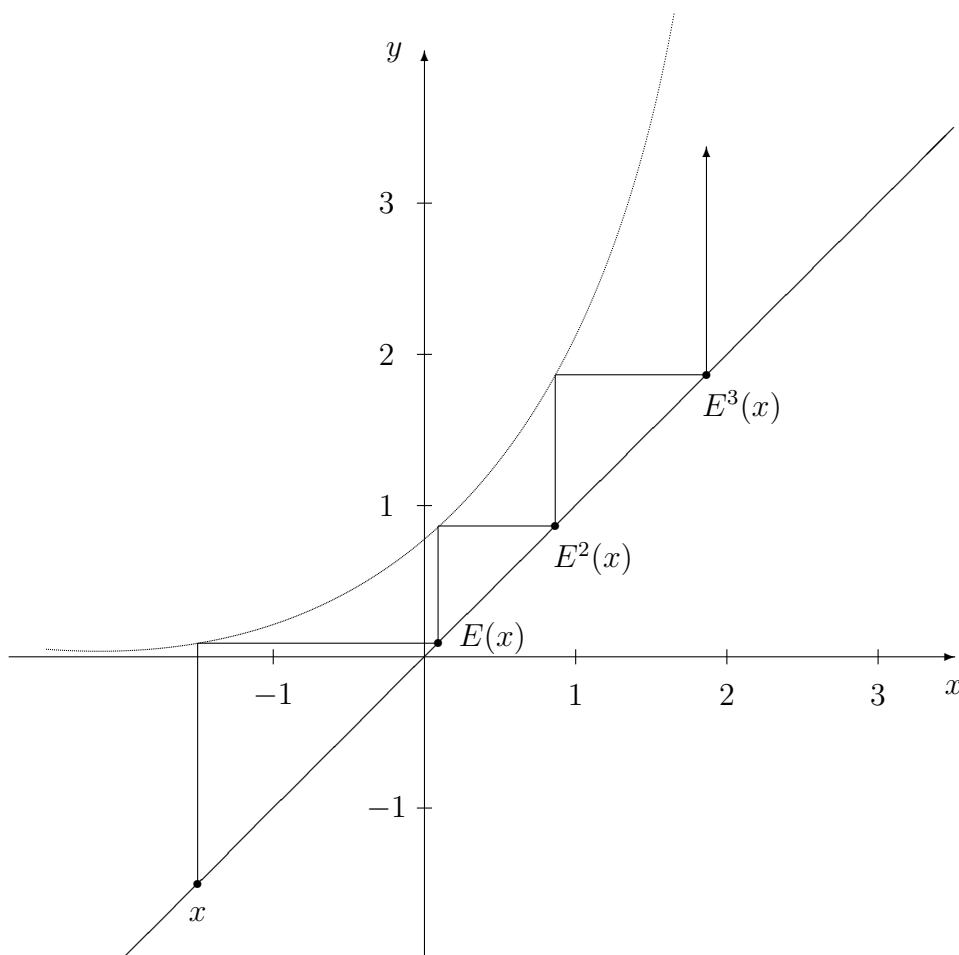
Ja  $c < -1$ , tad  $E_c(x)$  un  $y = x$  krustojas divos punktos  $a$  un  $b$  ( $a$  abscisa mazāka par  $b$  abscisu) — tie ir nekustīgie punkti.  $0 < E'(a) < 1$  un  $E'(b) > 1$ . No 6.1.zīmējuma redzams, ka  $a$  ir hiperbolisks satekas nekustīgais punkts (punkta  $a$  kreisās puses punktu grafisko analīzi lasītājam jāveic pašam!) un  $b$  ir hiperbolisks avota nekustīgais punkts.  $W^S(a) = ]-\infty; b[$ ,  $W^S(\infty) = ]b; +\infty[$ ,  $W^S(b) = \{b\}$ .

Ja  $c = -1$ , tad ir viens krustpunkts  $x = 1$ . Tas nav hiperbolisks, jo  $E'_{-1}(1) = 1$ . 6.2.zīmējuma grafiskā analīze parāda, ka  $W^S(1) = ]-\infty; 1]$  un  $W^S(\infty) = ]1; +\infty[$ .



6.2. zīm.

Ja  $c > -1$ , tad  $E(x)$  un  $y = x$  grafiki nekrustojas, nav nekustīgā punkta. Tā kā  $E(x)$  ir nepārtraukta funkcija, tad pēc Šarkovska teorēmas seko, ka  $E(x)$  nav periodisku punktu šīm parametra  $c$  vērtībām.

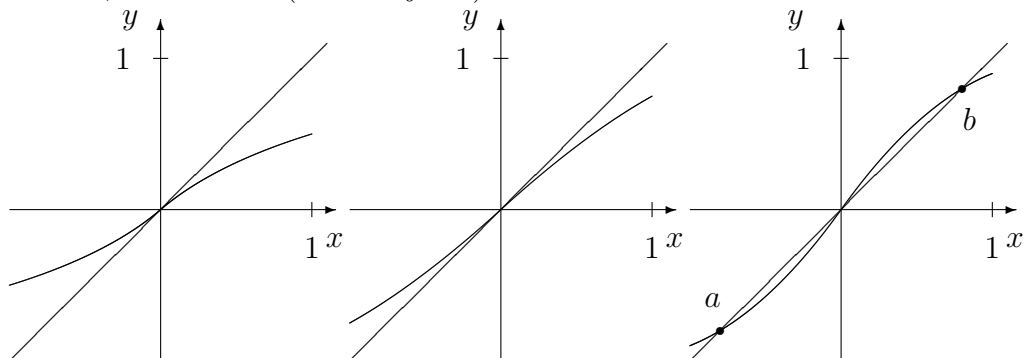


6.3. zīm.

6.3.zīmējuma grafiskā analīze rāda, ka  $W^S(\infty) = \mathbf{R}$ . ■

Pirmkārt, ievērosim, ka, parametram  $c$  pieaugot un tuvojoties vērtībai  $-1$ , nekustīgie punkti  $a$  un  $b$  pakāpeniski tuvojas viens otram. Kad  $c = 1$ , nekustīgie punkti saiet kopā vienā fiksētā punktā, pēc tam tie pazūd pavisam. Šādu bifurkāciju tipu sauc par *sedla–mezgla bifurkāciju* (*saddle-node bifurcation*). Otrkārt, bifurkācijas momentā nekustīgais punkts nav hiperbolisks. Tas ir cits bifurkācijām kopīgs raksturojums.

**Piemērs 6.3.** Apskatīsim funkciju saimi  $A_k(x) = k \operatorname{arctg} x$  parametra vērtībām, kas tuvas 1 (6.4.zīmējums).



6.3. zīm.

Ja  $0 < k < 1$ , tad funkcijai ir viens pievelkošs nekustīgais punkts 0 un visi reālie skaitļi ir 0 stabilitātes kopā.

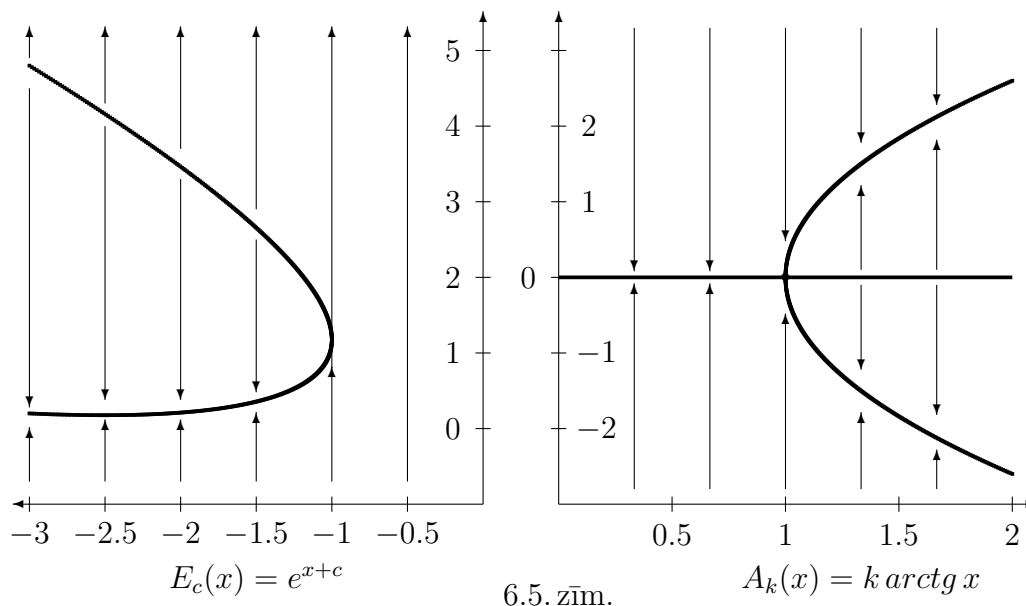
Ja  $k = 1$ , tad 0 ir nekustīgais punkts, bet  $A'_1(0) = 1$ . Grafiskā analīze rāda, ka 0 ir vāji pievelkoša un visi reālie skaitļi ir 0 stabilitātes kopā.

Ja  $k > 1$ , tad 0 ir atgrūdošs nekustīgais punkts ( $A'_k(0) = k > 1$ ), bet ir divi citi nekustīgie punkti, kuri abi ir pievelkoši. Ja tos apzīmē ar  $a$  un  $b$ ,  $a < 0 < b$ , tad  $W^S(a) = ]-\infty; 0[$ ,  $W^S(b) = ]0; +\infty[$ ,  $W^S(0) = \{0\}$ . ■

Bifurkāciju tipu, kāds novērojams parametriskas saimes  $A_k(x) = k \operatorname{arctg} x$  gadījumā pie  $k = 1$ , sauc par *garās dakšas bifurkāciju (pitchfork bifurcation)*. Šāda bifurkācija veidojas tad, ja pievelkošs periodisks (tātad arī nekustīgais) punkts "pārvēršas" par atgrūdošu periodisku punktu un abās pusēs no tā parādās divi jauni pievelkoši periodiski punkti ar to pašu periodu kā sākuma punktam, vai, ja atgrūdošs periodisks punkts "pārvēršas" par pievelkošu periodisku punktu un abās pusēs no tā parādās divi jauni atgrūdoši periodiski punkti ar to pašu periodu kā sākuma punktam.

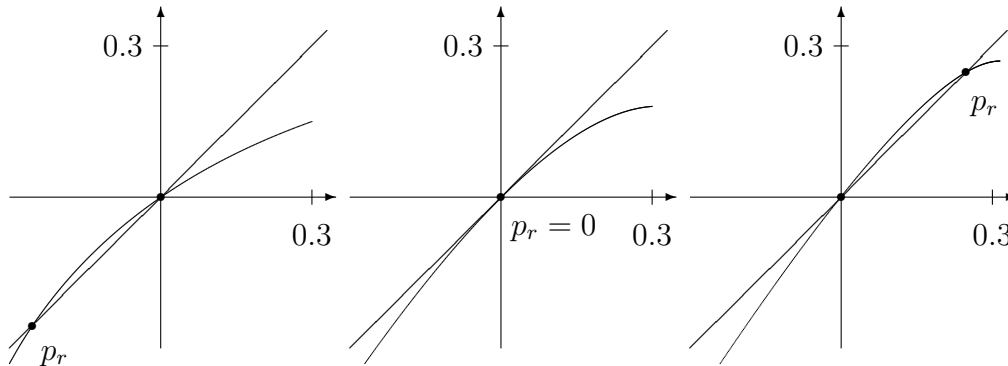
**Definīcija 6.2.** *Bifurkāciju diagramma* ir funkcijas periodisko punktu grafiks, kas uzzīmēts kā funkcija no parametra.

Parasti periodiskos punktus atliek uz vertikālās ass, bet parametra vērtības atliek uz horizontālās ass. Mēs apzīmēsim nekustīgos punktus ar biežākām līnijām, bet periodiskos punktus, kuri nav nekustīgie punkti, ar vēl biežākām līnijām. Vertikālās bultas tiek zīmējumam pievienotas, lai norādītu, kuri punkti ir pievelkoši vai atgrūdoši. Bifurkāciju diagrammas funkciju saimēm  $E_c(x) = e^{x+c}$  un  $A_k(x) = k \operatorname{arctg} x$  ir parādītas 6.5.zīmējumā.



Aplūkosim vēl vienu īpašu piemēru.

**Piemērs 6.4.** Šajā piemērā apskatīsim logistisko attēlojumu saimi  $h_r(x) = rx(1-x)$ , kur  $r$  — parametrs. Pie parametra vērtības  $r = 1$  veidojas vēl viena cita veida bifurkācija — *transkritiskā bifurkācija (transcritical bifurcation)*.



Ja  $0 < r < 1$ , tad funkcijai  $h$  ir divi nekustīgie punkti (6.6.zīmējuma pirmā skice). Nekustīgos punktus varam atrast no vienādojuma  $rx(1-x) = x$ , tie ir  $x = 0$  un  $x = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$ . Funkcijas atvasinājums ir  $h'_r(x) = r - 2rx$ , tāpēc  $h'_r(0) = r < 1$  un  $h'_r(\frac{r-1}{r}) = 2 - r > 1$ . Tādējādi 0 ir pievelkoša, bet otrs nekustīgais punkts ir atgrūdošs.

Ja  $r = 1$ , abi nekustīgie punkti saplūst par vienu nekustīgo punktu

0. Ar grafiskās analīzes palīdzību var pārlicināties, ka šis nehiperboliskais nekustīgais punkts pievelk skaitļus, kas lielāki par 0, un atgrūž skaitļus, kas mazāki par 0.

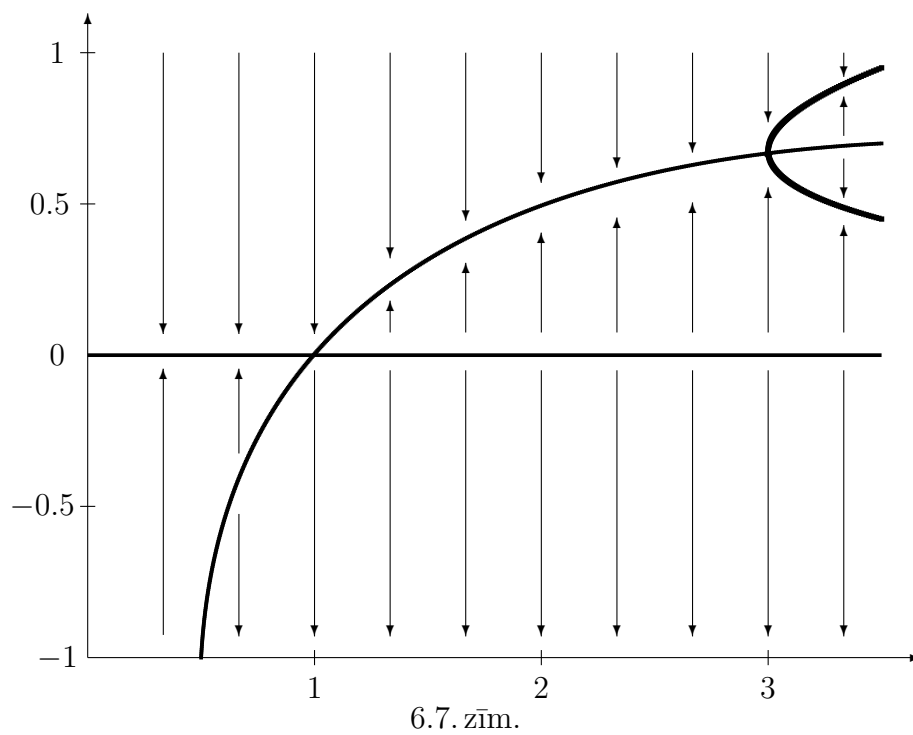
Ja  $1 < r < 3$ , redzams, ka 0 kļūst par atgrūdošu nekustīgo punktu, bet ir cits lielāks par 0 pievelkošs nekustīgais punkts.

Turpinot tālāk apskatīt logistisko attēlojumu saimi, ieraudzīsim, ka jauna bifurkācija veidojas pie  $r = 3$ .

Iepriekš noskaidrojām, ka funkcijai  $h_r$  ir atgrūdošs nekustīgais punkts 0 un pievelkošs nekustīgais punkts  $p_r > 0$ , ja  $1 < r < 3$ . Funkcijas  $h_r^2$  grafiks rāda, ka funkcijai  $h_r$  nav citu periodisku punktu, kamēr  $1 < r < 3$ . Ja  $r = 3$ , tad  $p_r = \frac{r-1}{r} = \frac{2}{3}$  un ir vāji pievelkošs. Tas nav hiperbolisks, jo  $h_3'(\frac{2}{3}) = -1$ . Ja  $r > 3$ , tad nekustīgais punkts ir atgrūdošs. Grafiskā analīze pie  $r = 3.1$  liecina, ka punkti no intervāla  $]0; 1[$  tiek pievilkti orbītai ar periodu 2. Kā tas tā varēja notikt?

Lai to saprastu, jāapskata funkcijas  $h_r^2$  grafiks nekustīgā punkta  $p_r = \frac{r-1}{r}$  apkārtņē parametra vērtībām, kas tuvas 3. Iesakām lasītājam pašam uzzīmēt funkcijas  $h_r^2$  grafiku skices pie parametra vērtībām  $r = 2.9$ ,  $r = 3$  un  $r = 3.1$ .

Atzīmēsim, ka, parametra vērtībām ejot caur 3, vērtība  $(h_r^2(p_r))'$  mainās: tā no mazākas par 1 kļūst par lielāku kā 1. Tātad nekustīgais punkts mainās no pievelkoša par atgrūdošu. Funkcijas  $h_r$  nepārtrauktība nosaka, ka jāparādās pievelkošai orbītai ar periodu 2. Šādu bifurkāciju tipu sauc par *periodu-dubultojošu bifurkāciju* (*period-doubling bifurcation*). Logistiskā attēlojumu saimes bifurkāciju diagramma parametra vērtībām  $0 < r \leq 3.3$  dota 6.7.zīmējumā nākamajā lapaspusē. ■





# NODAĻA NR. 7

## LOGISTISKĀS FUNKCIJAS UZVEDĪBA

**Anotācija.** Pārskats par logistiskās funkcijas uzvedību, parametram mazākam par 4. Logistiskās funkcijas uzvedība, parametram lielākam par 4.

Atgriezīsimies pie logistiskās funkciju parametriskās saimes

$$h_r(x) = rx(1 - x), \quad r > 0$$

dinamikas pētījumiem. Šī funkciju saime ir pieņemams modelis populācijas pieauguma raksturošanai.

$h_r$  ir parabola ar zariem uz leju, kura  $x$  asi krusto punktos 0 un 1, parabolas virsotne ir punktā  $(\frac{1}{2}; \frac{r}{4})$ . Risinot vienādojumu  $rx(1 - x) = x$ , atrodam, ka  $h_r$  nekustīgie punkti ir 0 un  $p_r = \frac{r-1}{r}$ . Arī 1 un  $\frac{1}{r}$  ir eventuāli nekustīgie punkti, jo  $h_r(1) = 0$  un  $h_r(\frac{1}{r}) = p_r$ .

Tālāk atzīmēsim būtiskākos funkcijas  $h_r$  uzvedības momentus, mainoties parametram  $r$ .

Ja  $0 < r < 1$ , tad  $p_r < 0$  un, tā kā  $h'_r(x) = r - 2rx$ , tad  $h'_r(p_r) = r - 2r\frac{r-1}{r} = 2 - r > 1$ , t.i.,  $p_r$  ir atgrūdošs nekustīgais punkts, bet  $h'_r(0) = r < 1$ , t.i., 0 ir pievelkošs nekustīgais punkts. Šie secinājumi un grafiskā analīze parāda, ka

$$W^S(0) = ]p_r; \frac{1}{r}[, \quad W^S(p_r) = \{p_r; \frac{1}{r}\}, \quad W^S(\infty) = ] - \infty; p_r[ \cup ] \frac{1}{r}; +\infty[.$$

Ja  $r = 1$ , veidojas transkritiskā bifurkācija;  $p_1 = 0$  un nav hiperbolisks nekustīgais punkts. Varam pārlicināties, ka

$$W^S(0) = [0; 1], \quad W^S(\infty) = ] - \infty; 0[ \cup ] 1; +\infty[.$$

Vispārīgā gadījumā, ja  $\mathbf{r} \geq \mathbf{1}$ , tad

$$W^S(\infty) \supset ] - \infty; 0[ \cup ] 1; +\infty[.$$

Ja  $\mathbf{1} < \mathbf{r} < \mathbf{3}$ , tad 0 ir atgrūdošs nekustīgais punkts un  $p_r$  ir pievelkošs nekustīgais punkts,

$$W^S(0) = \{0; 1\} \text{ un } W^S(p_r) = ]0; 1[.$$

Pie  $\mathbf{r} = \mathbf{3}$  veidojas periodu dubultojoša bifurkācija,  $p_r$  ir tikai vāji pievelkošs, bet nekustīgais punkts 0 ir joprojām atgrūdošs. Stabilitātes kopas ir

$$W^S(0) = \{0; 1\} \text{ un } W^S(p_r) = ]0; 1[.$$

Ja  $\mathbf{3} < \mathbf{r} < \mathbf{3,4}$ , tad abi nekustīgie punkti 0 un  $p_r$  ir atgrūdoši. Atzīmēsim, ka  $W^S(0) = \{0, 1\}$ , bet  $W^S(p_r)$  satur bezgalīgu skaitu punktu. Taču tagad ir jauni pievilksnās punkti (periodiskie punkti), daudzi no  $]0; 1[$  punktiem ir tālāk asimptotiski vienam no šīs orbītas punktiem.

Ja  $\mathbf{r} \approx \mathbf{3,45}$ , tad veidojas cita periodu dubultojoša bifurkācija un ar periodu divi pievelkoša orbīta sašķeļas ar periodu 4 pievelkošā orbītā un ar periodu 2 atgrūdošā orbītā.

Intervālā  $\mathbf{3,44} < \mathbf{r} \leq \mathbf{4}$  izmaiņas notiek ļoti strauji. Šeit ir atrodama arī orbīta ar periodu 3 ( $r > 3,6$ ), tāpēc pēc Šarkovska teorēmas ir zināms, ka pie šādas parametra vērtības funkcijai eksistē visu kārtu periodiskie punkti.

Tā kā parametra vērtībām  $3,4 < r \leq 4$  funkciju dinamika ir sarežģīta, mēs vispirms apskatīsim situāciju, kad  $r > 4$ .

Tātad pieņemsim tālāk, ka  $\mathbf{r} > \mathbf{4}$ . Tad (skatīt 7.1. zīmējumu)

$$h_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{4} > 1, \quad h_r(1) = 0, \quad h_r(0) = 0.$$

Pēc starpvērtību teorēmas (Lagranža teorēmas) seko, ka

$$\exists x_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ un } \exists x_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] : \quad h_r(x_0) = h_r(x_1) = 1.$$

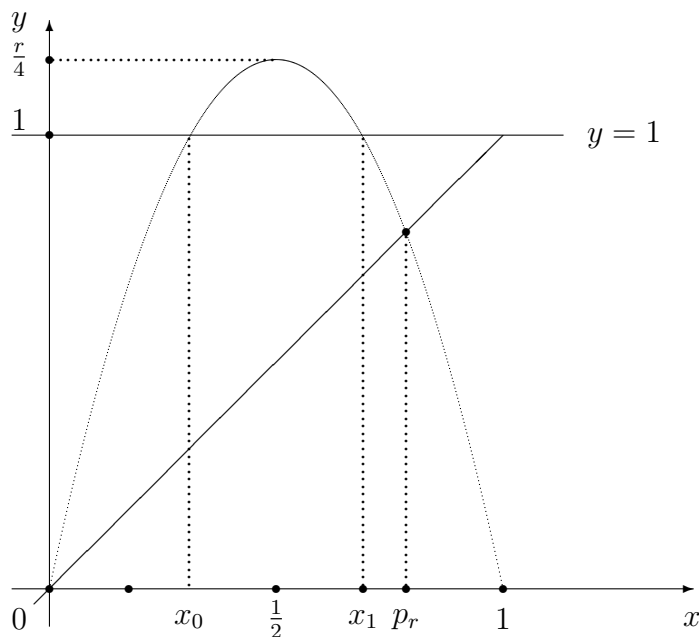
Tad arī  $h_r^2(x_0) = h_r^2(x_1) = 0$ , abi šie punkti  $x_0$  un  $x_1$  ir eventuāli nekustīgi 0 punktam. Varam precīzi izrēķināt šo punktu vērtības, atrisinot vienādojumu  $h_r(x) = 1$ , proti, atrisinot vienādojumu

$$rx - rx^2 = 1 \text{ jeb } rx^2 - rx + 1 = 0.$$

Kvadrātvienādojuma saknes ir

$$x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \text{ un } x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}.$$

Var secināt, ka ir bezgalīgi daudz punktu, kuri ir eventuāli nekustīgi punkti (punktam 0) un bezgalīgi daudz eventuāli nekustīgo punktu punktam  $p_r$ .



7.1. zīm.

Katram  $n \in \mathbf{N}$  definēsim kopu

$$\Lambda_n = \{x \mid h^n(x) \in [0; 1]\}.$$

Mūsu mērķis ir aprakstīt kopu

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

t.i., kopu no tiem punktiem, kuri paliek intervālā  $[0; 1]$  pie jebkuras funkcijas  $h_r$  iterācijas. Lai to izdarītu, precizēsim informāciju par kopām  $\Lambda_n$ . Nākošais apgalvojums būs pirmais solis, lai raksturotu kopā  $\Lambda$  ietilpstošos punktus.

**Apgalvojums 7.1.** Ja  $h(x) = rx(1-x)$ ,  $r > 4$ , tad sekojoši apgalvojumi ir patiesi:

a) Intervāls

$$\left] \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right[$$

ir to reālo skaitļu  $x$  kopa, kuriem  $h(x) \notin [0; 1]$ .

Apzīmēsim

$$\Lambda_1 = \left[ 0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right] \cup \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; 1 \right].$$

b) Jebkuram  $n \in \mathbf{N}$  kopa  $\Lambda_n$  sastāv no  $2^n$  disjunktām slēgtām intervāliem.

c) Ja  $I$  ir viens no  $2^n$  slēgtajiem kopas  $\Lambda_n$  intervāliem, tad  $h^n : I \rightarrow [0; 1]$  ir injekcija un surjekcija.

**Pierādījums.** Vispirms atzīmēsim, ja  $h(x) \in [0; 1]$ , tad pirmtēls  $x \in [0; 1]$ , tāpēc jebkuram  $n$ :  $\Lambda_n \subset [0; 1]$ .

a) pierādījuma gadījumā skatīt iepriekšējo 7.1.zīmējumu. No tā redzams, ka to punktu  $x \in [0; 1]$  kopa, kuri  $h(x) \notin [0; 1]$ , satur tieši tos punktus, kuriem  $h(x) > 1$ . Bet tie ir punkti, kuri atrodas starp vienādojuma  $h(x) = 1$  saknēm, iepriekš jau atradām, ka tas ir intervāls  $\left] \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right[$ .

b) un c) pierādījumus veiks ar matemātiskās indukcijas palīdzību.

**n = 1.** No a) pierādījuma redzams, ka  $\Lambda_1$  satur  $2^1$  disjunktus slēgtus intervālus. Tāpat redzams (skat. 7.1.zīmējumu), ka

$$h(0) = h(1) = 0 \text{ un } h\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) = 1.$$

Tātad  $\Lambda_1$  divu intervālu galapunkti tiek attēloti par 0 un 1. Pēc nepārtrauktības un starpvērtību teorēmas seko, ja  $I$  ir viens no  $\Lambda_1$  intervāliem, tad  $h : I \rightarrow [0; 1]$  ir surjekcija. Lai pārbaudītu, ka  $h$  ir injekcija  $\Lambda_1$  intervālos, mēs atzīmēsim, ka  $h$  ir stingri monotona funkcija šajos intervālos, jo

$$h'(x) = (rx - rx^2)' = r - 2rx = r(1 - 2x),$$

atvasinājums ir pozitīvs, ja  $x < \frac{1}{2}$ , un atvasinājums ir negatīvs, ja  $x > \frac{1}{2}$ .

**n = k.** Pieņemsim, ka  $\Lambda_k$  satur  $2^k$  disjunktus slēgtus intervālus. Un, ja  $[a; b]$  ir viens no  $\Lambda_k$  atbilstošajiem intervāliem, tad  $h^k : [a; b] \rightarrow [0; 1]$  ir injekcija un surjekcija, kā arī  $(h^k)'(x) < 0$  visiem  $x \in [a; b]$  vai  $(h^k)'(x) > 0$  visiem  $x \in [a; b]$ .

**n = k + 1.** Apskatīsim  $\Lambda_{k+1}$ . Acīmredzami, ka  $\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k$ .

Pieņemsim, ka  $[a; b]$  ir viens no  $2^k$  kopas  $\Lambda_k$  intervāliem. Zināms, ka

$$(h^k)'(x) < 0 \text{ visiem } x \in [a; b] \text{ vai } (h^k)'(x) > 0 \text{ visiem } x \in [a; b].$$

Pirmajā gadījumā  $h^k$  ir stingri augoša funkcija intervālā  $[a; b]$ , otrajā tā ir stingri dilstoša šajā intervālā. Mēs apskatīsim gadījumu, kad  $(h^k)'(x) > 0$  visiem  $x \in [a; b]$  (ja atvasinājums negatīvs, pierādījums analogisks). Tā kā  $h^k$  ir stingri augoša funkcija, tā ir nepārtraukta funkcija un  $h^k([a; b]) = [0; 1]$ , tad pēc starpvērtību teorēmas  $\exists! x_2, x_3$  tādi, ka

- 1)  $a < x_2 < x_3 < b$ ,
- 2)  $h^k([a; x_2]) = [0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}]$ ,
- 3)  $h^k(x_2; x_3] = [\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}]$ ,
- 4)  $h^k(x_3; b] = [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}; 1]$ .

Pirmais nosacījums nozīmē, ka intervāli  $[a; x_2]$  un  $[x_3; b]$  ir disjunktī. Pārējie trīs nosacījumi nozīmē, ka

$$\begin{aligned} h^{k+1}([a; x_2]) &= [0; 1], \\ h^{k+1}(x) &> 1, \forall x \in ]x_2; x_3[, \\ h^{k+1}([x_3; b]) &= [0; 1]. \end{aligned}$$

Tātad intervāla  $[a; b]$  punkti, kas ir arī  $\Lambda_{k+1}$  punkti, satur divus disjunktus slēgtus intervālus  $[a; x_2]$  un  $[x_3; b]$ .

Ja  $x \in [a; x_2]$ , tad  $h^k(x) \in [0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}]$  un  $h'(h(x)) > 0$ . Pēc induktīvā pieņēmuma  $(h^k)'(x) > 0$ , mēs varam secināt

$$(h^{k+1})'(x) = h'(h^k(x)) \cdot (h^k)'(x) > 0, \forall x \in [a; x_2].$$

Līdzīgi argumenti demonstrē, ka

$$(h^{k+1})'(x) < 0, \forall x \in [x_3; b].$$

tā kā  $[a; b]$  ir patvaļīgs  $\Lambda_k$  intervāls, tad iegūsim, ka kopā  $\Lambda_{k+1}$  ir divreiz vairāk intervālu nekā  $\Lambda_k$ , t.i.,  $\Lambda_{k+1}$  satur  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$  disjunktus slēgtus intervālus. Tālāk mēs parādījam, ja  $I$  ir viens no  $\Lambda_{k+1}$  intervāliem, tad  $h^{k+1} : I \rightarrow [0; 1]$  ir surjekcija (pēc (2) un (4)),  $h^{k+1}$  ir injekcija, jo atvasinājums ir stingri lielāks vai stingri mazāks par 0 visiem  $x \in I$ . ■

# NODAĻA NR. 8

## KANTORA KOPAS UN LOGISTISKĀ FUNKCIJA

**Anotācija.** Kantora kopa. Vidējās alfa daļas Kantora kopas konstrukcija (secinājums, ka tā ir Kantora kopa). Tās izveidošanās pie logistiskās funkcijas iterācijām.

Mūsu mērķis ir aprakstīt kopu

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Iepriekšējās nodaļas apgalvojuma pierādījumā mēs redzējām, ka  $\Lambda_{k+1}$  tiek izveidota, izņemot no  $\Lambda_k$  vidus vaļēju intervālu. Ar topoloģiju iepazīnušies studenti sacītu, ka šī konstrukcija ir līdzīgi organizēta kā Kantora kopās.

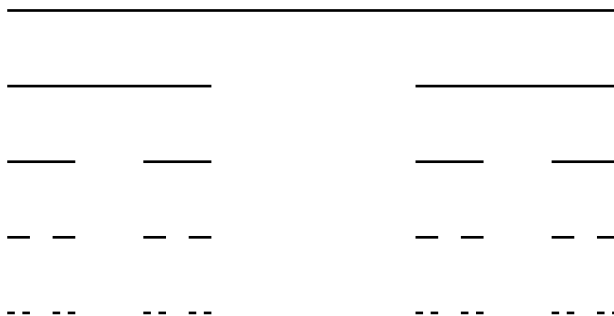
**Definīcija 8.1.** Netukšu kopu sauc par *Kantora kopu*, ja izpildās sekojoši nosacījumi:

- tā ir slēgta un ierobežota (reālo skaitļu kopas ar šādu nosacījumu sauc par kompaktām);
- kopa nesatur intervālus (kopas ar šādu raksturu sauc par galīgi nesakarīgām kopām (*totally disconnected*));
- jebkurš kopas punkts ir tās akumulācijas punkts (ja kopa ir slēgta, tad šādu kopu sauc par perfektu kopu).

**Piemērs 8.1.** Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopas konstrukcija.

Kantora kopas parasti konstruē iteratīvā procesā. Sāksim ar intervālu  $[0; 1]$ , no kura vidus izņemsim vaļēju kopu  $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$ . Nākošajā solī mēs izņemsim vidējo trešdaļu no atlikušajiem 2 intervāliem, t.i., izslēgsim intervālus  $]\frac{1}{9}; \frac{2}{9}[$  un  $]\frac{7}{9}; \frac{8}{9}[$ . Šo procesu turpināsim, izslēdzot vidējo trešdaļu no atlikušajiem intervāliem katrā solī (8.1.zīmējumā parādīti Kantora vidējās trešdaļas kopas

konstrukcijas pirmie četri soļi). Atlikušo kopu sauc par *Kantora vidējās trešdaļas kopu*.



8.1. zīm.

Ja  $0 < \alpha < 1$ , tad mēs varam konstruēt līdzīgas kopas, kuras sauc par Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopām, kuras iegūst no intervāla vidus (centra) izslēdzot ārā intervālu garumā  $\alpha$ -daļa no visa intervāla. Piemēram, Kantora vidējās  $\frac{1}{5}$ -daļas kopas gadījumā no intervāliem katrā solī izslēdz vidējo  $\frac{1}{5}$  daļu no katra intervāla.

Precīzāk,  $\Gamma_0 = [0; 1]$ .

$\Gamma_1$  definēsim kā divus slēgtus intervālus ar vienādiem garumiem, no  $\Gamma_0$  centra izslēdzot ārā vaļēju intervālu  $\alpha$ -daļas garumā.

$\Gamma_2$  definēsim kā 4 slēgtus intervālus ar vienādiem garumiem, kas iegūti, izslēdzot vaļējus intervālus  $\alpha$ -daļas garumā no  $\Gamma_1$  intervāla vidus.

Šo procedūru turpināsim induktīvi.  $\Gamma_n$  ir kopa no slēgtiem intervāliem ar vienādiem garumiem, kas izveidota no  $\Gamma_{n-1}$  intervāliem izslēdzot no to vidus  $\alpha$ -daļas garuma vaļējus intervālus. Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopa ir kopa  $\Gamma = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ .

Skaidrs, ka  $\Gamma$  nav tukša kopa, jo izņemto vaļējo intervālu galapunkti pieder kopai  $\Gamma$ . ■

**Lemma 8.1.** Ja  $\Gamma_n$  ir definēta kā piemērā 8.1, tad eksistē  $2^n$  slēgti intervāli, kuri ietilpst kopā  $\Gamma_n$  un katra intervāla garums ir

$$\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n.$$

Tātad kopējais  $\Gamma_n$  intervālu garums ir  $(1-\alpha)^n$ , kas tiecas uz 0, ja  $n \rightarrow \infty$ .

**Pierādījums.** Mēs sāksim ar intervālu garumā 1 un turpināsim ar matemātisko indukciju.

Pirmajā solī mēs izvēlēsimies caurumu ar garumu  $\alpha$  un atstāsim  $2 = 2^1$  slēgtus intervālus ar kopējo garumu  $1 - \alpha$ . Katra atsevišķā intervāla garums ir  $\frac{1-\alpha}{2}$ .

Pieņemsim, ka kopā  $\Gamma_k$  ir  $2^k$  slēgti intervāli, kuru katra garums ir  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^k$  ar kopējo garumu  $(1 - \alpha)^k$ .

Mēs pierādīsim, ka kopā  $\Gamma_{k+1}$  ir tieši  $2^{k+1}$  slēgti intervāli, kura katra garums ir  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{k+1}$  un kopējais garums ir  $(1 - \alpha)^{k+1}$ . Atzīmēsim, ka katrā laika momentā mēs izslēdzam vidējo  $\alpha$ -daļu no slēgtā intervāla, mēs sadalām katru intervālu 2 slēgtos intervālos. Tā no  $\Gamma_k$  veidojas  $\Gamma_{k+1}$ , dubultojot intervālu skaitu, tāpēc  $\Gamma_{k+1}$  intervālu skaits ir  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ . Pēc pieņēmuma katrs  $\Gamma_k$  intervāla garums ir  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^k$ . Tā kā mēs izslēdzam vidējo  $\alpha$ -daļu no katra  $\Gamma_k$  intervāla, veidojot  $\Gamma_{k+1}$ , tad no  $\Gamma_k$  katra intervāla kopā  $\Gamma_{k+1}$  paliek

$$\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^k - \alpha \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^k = \frac{(1-\alpha)^{k+1}}{2^k}.$$

Šis garums tiek sadalīts 2 intervālos, tāpēc katra intervāla garums ir

$$\frac{1}{2} \frac{(1-\alpha)^{k+1}}{2^k} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{k+1}.$$

Visbeidzot,  $\Gamma_{k+1}$  intervālu skaits ir  $2^{k+1}$ , tad kopējais garums intervāliem ir

$$2^{k+1} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{k+1} = (1-\alpha)^{k+1}.$$

Tā kā  $0 < \alpha < 1$ , tad  $(1 - \alpha)^n \rightarrow 0$ , ja  $n \rightarrow \infty$ . ■

Tagad mēs varam parādīt, kāpēc šīs kopas nosauktas par Kantora kopām.

**Apgalvojums 8.1.** Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopa ir Kantora kopa.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $\Gamma$  ir Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopa. Tā kā  $\forall n : 0 \in \Gamma_n$ , tad  $\Gamma \neq \emptyset$ .

Mūsu uzdevums ir pierādīt, ka Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopai  $\Gamma$  piemīt Kantora kopas definīcijā minētās trīs īpašības:

- tā ir slēgta un ierobežota;
- kopa nesatur intervālus;
- jebkurš kopas punkts ir tās akumulācijas punkts.

a) Tā kā  $\Gamma$  ir slēgtu intervālu šķēlums, tad  $\Gamma$  ir slēgta kopa. Tā kā  $\Gamma \subset [0; 1]$ , tad  $\Gamma$  ir arī ierobežota kopa.



b) Ja  $\Gamma$  saturētu vaļēju intervālu  $]x; y[$  ar garumu  $|y - x| \neq 0$ , tad katrā  $\Gamma$  konstrukcijas solī šis intervāls ir jāsatur vienā no paliekošajiem slēgtajiem intervāliem. Pēc iepriekšējās Lemmas 8.1 seko, ka pēc  $n$  soļiem jebkura šāda intervāla garums ir  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n$ , un mēs varam atrast tādu  $n_0$ , ka

$$\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{n_0} < |y - x|.$$

Tas ir, jebkura  $\Gamma_{n_0}$  slēgtā intervāla garums ir mazāks par  $]x; y[$  garumu. Tātad  $]x; y[$  nevar tikt saturēts kopā  $\Gamma_{n_0}$ , līdz ar to arī  $]x; y[$  neietilpst kopā  $\Gamma$  — šī kopa nesatur intervālus.

c) Pieņemsim, ka  $x \in \Gamma$  un  $N_\varepsilon(x) = ]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$  ir punkta  $x$  patvaļīga vaļēja  $\varepsilon$ -apkārtnē. Mums ir jāpierāda, ka eksistē tāds punkts kopā  $\Gamma$ , kurš nesakrīt ar  $x$  un kurš arī pieder  $N_\varepsilon(x)$ .

Ievērosim, ja  $a$  ir galapunkts vienam no kopas  $\Gamma_n$ ,  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , intervāliem, tad  $a \in \Gamma$ . Katrā Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopas konstrukcijas solī  $x$  pieder vienam no paliekošajiem slēgtajiem intervāliem. Tas ir, jebkuram  $n$  eksistē tāds intervāls kopā  $\Gamma_n$ , kas satur  $x$ . Izvēlēsimies  $n$  tik lielu, lai  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n < \varepsilon$ .  $x$  pieder vienam no slēgtajiem  $\Gamma_n$  intervāliem, pieņemsim, ka tas ir intervāls  $I_n$ . Pēc Lemmas 8.1  $I_n$  garums ir  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n$ . Tā kā  $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n < \varepsilon$ , tad  $I_n$  galapunkti pieder punkta  $x$   $\varepsilon$ -apkārtnē  $N_\varepsilon(x)$ . Abi galapunkti nevar sakrist ar  $x$ , tātad ir vismaz vēl viens punkts bez  $x$ , kurš pieder  $N_\varepsilon(x)$ . ■

Apgalvojumā netiek izmantots fakts, ka Kantora vidējās  $\alpha$ -daļas kopas konstrukcijā no intervāliem tiek izslēgta tieši vidusdaļa. Fakts, ka kopīgais garums visiem intervāliem tiecas uz 0, seko no novērojuma, ka, ja mēs izslēdzam  $\alpha$  daļu no kopīgā garuma katrā posmā, tad garums samazinās par  $1 - \alpha$  un kopīgais garums, kas paliek intervālos pēc  $n$  soļiem, ir  $(1 - \alpha)^n$ . Faktiski, ja katrā solī mēs izņemam vaļēju intervālu, kura garums ir  $\alpha \times$  garums no katra slēgtā intervāla un mēs izņemam šo intervālu tādā veidā, ka vaļējā intervāla galapunktinesakrīt ar slēgto intervālu galapunktiem, tad mēs iegūsim Kantora kopu. Var pierādīt faktu, ja reālā taisnes apakškopa ir slēgta, ierobežota, nesatur vaļējus intervālus un ir perfekta, tad tā ir homeomorfa ar Kantora vidējās trešdaļas kopu.

Mēs turpināsim tālāk pētījumus par logistisko funkciju parametriskās saimes dinamiku. mēs pierādīsim, ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ , tad to punktu kopa, kuri ar  $h_r$  iterācijām paliek intervālā  $[0; 1]$ , ir kantora kopa. Tālāk parādīsim, ka tieši šajā kopā funkcija ir haotiska. Šis fakts ir patiess visiem  $r > 4$ , bet to ir grūtāk pierādīt (pierādījumu var atrast, piemēram Robinsona grāmatā).

Iepriekš vienojāmos par apzīmējumu sistēmu:

$$\Lambda_n = \{x \mid h^n(x) \in [0; 1]\}, \quad \Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Lai argumentētu, ka  $\Lambda$  ir Kantora kopa, pierādīsim vispirms lemmu.

**Lemma 8.2.** Ja  $r > 2 + \sqrt{5}$  un  $h(x) = rx(1-x)$ , tad eksistē tāds  $\lambda > 1$ , ka

$$\forall x \in \Lambda_1 : |h'(x)| > \lambda.$$

Kopas  $\Lambda_n$  jebkura intervāla garums ir mazāks par  $(\frac{1}{\lambda})^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Pierādījums.** Apzīmēsim  $\Lambda_1 = \Lambda_{11} \cup \Lambda_{12}$ , kur

$$\Lambda_{11} = \left[0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right], \quad \Lambda_{12} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; 1\right].$$

Tad  $\forall x \in \Lambda_{11}$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= r(1-2x) \geq r \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right)\right) = r \left(1 - 1 + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) = \\ &= \sqrt{r^2 - 4r} > \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2 - 4(2 + \sqrt{5})} = 1. \end{aligned}$$

Līdzīgi  $\forall x \in \Lambda_{12}$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= r(1-2x) \leq r \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right)\right) = r \left(1 - 1 - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) = \\ &= -\sqrt{r^2 - 4r} < -\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2 - 4(2 + \sqrt{5})} = -1. \end{aligned}$$

Tātad  $\forall x \in \Lambda_1 : |h'(x)| > 1$ . Pie tam varam precizēt, ka

$$\forall r > 2 + \sqrt{5} \quad \exists \lambda : 1 < \lambda < \sqrt{r^2 - 4r} \quad \forall x \in \Lambda_1 : |h'(x)| > \lambda > 1.$$

Prasīto nosacījumu par kopas intervālu garumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc iterāciju skaita  $n$ .

Ievērosim, ka  $n = 1$  izpildās vienādības  $h(0) = h(1) = 0$  un  $h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) = h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) = 1$ .

Apskatīsim vispirms intervālu  $\Lambda_{11}$ . Varam izmantot Lagranža teorēmu:

$$\exists c \in \left]0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right[ : h'(c) = \frac{h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right) - h(0)}{\text{interv. garums}} = \frac{1}{\text{in. garums}},$$

t.i., interv.garums =  $\frac{1}{|h'(c)|}$ . Tā kā  $|h'(c)| > \Lambda$ , tad intervāla  $\Lambda_{11}$  garums  $< \frac{1}{\Lambda}$ .

Tādu pašu argumentu dēļ kā iepriekš, var parādīt, ka intervāla  $\Lambda_{12}$  garums  $< \frac{1}{\Lambda}$ .

Induktīvais pieņēmums  $n = k$ : kopas  $\Lambda_k$  jebkura intervāla garums ir  $< \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^k$  un  $|(h^k)'(x)| > \Lambda^k$ .

Induktīvā pāreja  $n = k + 1$ . Izvēlamies kopas  $\Lambda_{k+1}$  vienu patvaļīgu intervālu  $I = [a; b]$ . Tad viena no vērtībām  $h^{k+1}(a)$  un  $h^{k+1}(b)$  ir 0, otra 1. Pēc Lagranža teorēmas

$$\exists c_1 \in ]a; b[ : |(h^{k+1})'(c)| = \left| \frac{h^{k+1}(b) - h^{k+1}(a)}{b - a} \right| = \frac{1}{|b - a|},$$

iegūsim, ka

$$|b - a| = \frac{1}{|(h^{k+1})'(c)|}.$$

Izmantojot funkciju kompozīcijas atvasināšanas likumu, varam secināt, ka

$$(h^{k+1})'(c) = (h \circ h^k)'(c) = h'(h^k(c)) \cdot (h^k)'(c) > \Lambda \cdot \Lambda^k = \Lambda^{k+1},$$

tāpēc

$$|b - a| < \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^{k+1}. \blacksquare$$

**Teorēma 8.1.** Ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ , tad kopa  $\Lambda = \cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$  ir Kantora kopa.

**Pierādījums.** Tā kā 0 ir funkcijas  $h$  nekustīgais punkts, tad  $0 \in \Lambda$ , t.i.  $\Lambda$  nav tukša kopa. Lai pierādītu, ka  $\Lambda$  ir Kantora kopa, ir nepieciešams parādīt, ka izpildās visi trīs Kantora kopas definīcijas nosacījumi.

a)  $\Lambda$  ir slēgta kopa, jo tā ir slēgtu kopu šķēlums, tā ir arī ierobežota kopa, jo  $\Lambda \subset [0; 1]$ .

b) Ja  $\lambda$  saturētu vaļēju intervālu  $]a; b[$  ar garumu  $|b - a|$ , tad šis intervāls tiktu ietverts kādā no kopas  $\Lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , intervāliem. Pēc Lemmas 8.2 seko, ka eksistē tāds  $\lambda > 1$ , ka  $\lambda_n$  intervālu garumi ir mazāki par  $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$ . Tā kā mēs varam atrast tādu  $n_0$ , ka

$$|x - y| > \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n_0},$$

tad no šīs nevienādības seko, ka  $]x; y[$  nevar ietilpt nevienā kopas  $\Lambda_{n_0}$  intervālā. Tātad  $\Lambda$  nesatur vaļējus intervālus.

c) Visbeidzot pieņemsim, ka  $x$  ir kopas  $\Lambda$  punkts un ka brīvi fiksētam  $\delta > 0$  punkta  $x$   $\delta$ -apkārtne ir  $N_\delta(x) = ]x - \delta; x + \delta[$ . Ja  $a$  ir viens no kopas  $\Lambda_n$  intervāla galapunktiem, tad  $a \in \Lambda$ , jo  $h^{n+1}(a) = 0$ . Jebkuram  $n$  vienam no  $\Lambda_n$  intervāliem ir jāsaturs  $x$ . Pēc Lemmas 8.2 seko tāda  $\lambda > 1$  eksistence, ka kopas  $\Lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jebkura intervāla garums ir mazāks par  $(\frac{1}{\lambda})^n$ , tāpēc varam izvēlēties tādu  $n_0$ , ka  $(\frac{1}{\lambda})^{n_0} < \delta$ . Tā kā  $x$  pieder kādam kopas  $\Lambda_{n_0}$  intervālam, tad šis intervāls ir tik mazs, ka pilnībā ietilpst kopā  $N_\delta(x)$ . Tad arī abi intervāla galapunkti ietilpst apkārtņē  $N_\delta(x)$  un vismaz viens no tiem nesakrīt ar pašu punktu  $x$ . līdz ar to esam pierādījuši, ka jebkurš kopas  $\Lambda$  punkts ir tās akumulācijas punkts. ■

Kaut arī mēs zinām kopas  $\Lambda$  vārdu — Kantora kopa — mēs tomēr ļoti maz zinām par  $h$  dinamiku šajā kopā. Dinamikas izpēti sāksim ar piezīmi, ka punkti, kas sākumā atrodas tuvu, bet tomēr ārpus  $\Lambda$ , ir bezgalības stabilitātes kopā un iet prom no kpas  $\Lambda$  ar funkcijas  $h$  iterācijām. Kopām ar šādu īpašību ir savs nosaukums — hiperboliski atgrūdošas kopas.

**Definīcija 8.2.** Kopu  $\Omega$  no funkcijas  $f$  definīcijas apgabala sauc par *hiperboliski atgrūdošu kopu* (*hyperbolic repelling set*), ja  $\Omega$  ir slēgta, ierobežota kopa,  $f(\Omega) = \Omega$  un eksistē tāds  $N > 0$ , ka visiem  $x \in \Omega$  un visiem  $n \geq N$ :  $|(f^n)'(x)| > 1$ .

Kopu  $\Omega$  no funkcijas  $f$  definīcijas apgabala sauc par *hiperboliski pievelkošu kopu* (*hyperbolic attracting set*), ja  $\Omega$  ir slēgta, ierobežota kopa,  $f(\Omega) = \Omega$  un eksistē tāds  $N > 0$ , ka visiem  $x \in \Omega$  un visiem  $n \geq N$ :  $|(f^n)'(x)| < 1$ .

Lasītājs var mēģināt patstāvīgi pierādīt, ka  $\Lambda$  ir hiperboliski atgrūdoša kopa funkcijai  $h(x) = rx(1-x)$ , ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ . Cits piemērs hiperboliski atgrūdošai kopai ir atgrūdošu periodisku punktu orbīta. Līdzīgi, pievelkošu periodisku punktu orbīta ir piemērs hiperboliskai pievelkošai kopai. Vispārīgi runājot, punkti, kas atrodas tuvu, bet nav hiperboliski atgrūdošā kopā, pārvietojas prom no kopas ar funkcijas iterācijām. Punkti, kas atrodas tuvu, bet nav hiperboliski pievelkošā kopā, ir šīs hiperboliskās kopas stabilitātes kopa.

Tā mēs varam vispārināt stabilitātes kopas jēdzienu, sakot, ka  $x$  ir  $\Omega$  stabilitātes kopā, ja attālums no  $f^n(x)$  līdz  $\Omega$  tiecas uz 0, pieaugot  $n$ . Tā kā hiperboliski atgrūdoša kopa ir slēgta un ierobežota (tātad kompakta), mēs varam apskatīt attālumu no punkta līdz kopai kā mazāko attālumu no punkta līdz tuvākajam kopas punktam. Tas ir, attālums no  $x$  līda  $\Omega$  ir mazākā iespējamā starpība  $|y-x|$ ,  $y$  mainoties pa kopu  $\Omega$ . Ja mēs apzīmējam

attālumu no  $f^n(x)$  līdz kopai  $\Omega$  ar  $d[f^n(x), \Omega]$ , tad  $\Omega$  stabilitātes kopu mēs varam definēt šādi:

$$W^S(\Omega) = \{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d[f^n(x), \Omega] = 0\}$$

Punktu, kas atrodas tuvu hiperboliskajām kopām, uzvedību var raksturot ar šādu teorēmu:

**Teorēma 8.2.** Pieņemsim, ka  $\Omega$  ir hiperboliski atgrūdoša kopa funkcijai  $f$ . Tad eksistē tāda vaļēja kopa  $U \supset \Omega$ , ka visiem tādiem  $x$ , kas  $x \in U$ , bet  $x \notin \Omega$ , eksistē tāda iterācija  $n$ , ka  $f^n(x) \notin U$ .

Ja  $\Omega$  ir hiperboliski pievelkoša kopa funkcijai  $f$ , tad eksistē tāda vaļēja kopa  $U \supset \Omega$ , ka jebkurš kops  $U$  punkts pieder kops  $\Omega$  stabilitātes kopai.

Teorēmas pierādījums ir līdzīgs Teorēmas 5.3' pierādījumam. Lasītājs var pamēģināt to atkārtot.

# NODAĻA NR. 9

## HAOTISKA FUNKCIJA

**Anotācija.** Topoloģiskās transitivitātes un jūtīguma pret sākuma nosacījumiem definīcijas. Haotiskas funkcijas definīcija. Teorēma par nepārtrauktas funkcijas haotismu. Logistiskā funkcija ( $r > 2 + \sqrt{5}$ ) kā haotiskas funkcijas piemērs.

Šajā nodaļā mēs centīsimies noskaidrot, kāda ir logistiskā attēlojuma uzvedība (lasi: dinamika) kopā  $\Lambda$ . Šim jautājumam ir jēga, jo  $h : \Lambda \rightarrow \Lambda$ , tātad mēs varam apskatīt  $\Lambda$  punktu orbītas pie attēlojuma  $h$ . Skaidrs, ka  $\Lambda$  ir dīvaina kopa. Mēs zinām, ka tā satur  $\Lambda_n$  jebkura intervāla galapunktus, jo šie punkti ir eventuāli nekustīgie punkti (punktam 0). Mēs zinām, ka tā satur arī citus punktus — katrs  $\Lambda_n$  intervāls satur  $h$  periodisku punktu ar periodu  $n$  (jo katrā šādā intervālā funkcija  $h^n$  ir surjekcija un injekcija, tās grafiks krustojas ar taisni  $y = x$ , šis krustpunkts ir  $h^n$  nekustīgais punkts jeb  $h$  periodisks punkts ar periodu  $n$ ). Periodiskie punkti nav eventuāli nekustīgie punkti, tāpēc tie nav kopas  $\Lambda_m$  intervālu galapunkti jebkuram  $m$ . Tātad, ko mēs varam pateikt par  $h$  dinamiku kopā  $\Lambda$ ?

**Teorēma 9.1.** Ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ , tad  $h = rx(1 - x)$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $\Lambda$ .

**Pierādījums.** Mums ir jāpierāda, ka

$$\forall x \in \Lambda \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in \Lambda - h \text{ periodisks punkts} : |x - y| < \varepsilon.$$

Izvēlamies brīvi  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$ . Izmantosim Lemmu 8.2, kas apgalvo, ka eksistē tāds skaitlis  $\lambda > 1$ , ka jebkura intervāla no kopas  $\Lambda_n$  garums ir stingri mazāks par  $(\frac{1}{\lambda})^n$ . Atrodam tādu  $n_0$ , ka  $(\frac{1}{\lambda})^{n_0} < \varepsilon$ . Tad kopā  $\Lambda_{n_0}$  eksistē tāds intervāls, kurš satur punktu  $x$ . Pie tam šis kopas  $\Lambda_{n_0}$  intervāls pēc konstrukcijas satur divus kopas  $\Lambda_{n_0+1}$  intervālus, kurā katrā ir pa vienam  $h$

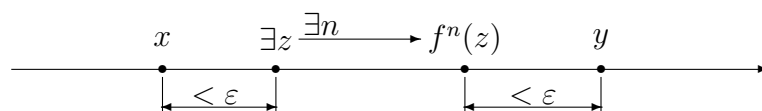
periodiskam punktam ar periodu  $n_0 + 1$  un vismaz viens no tiem nesakrīt ar  $x$ , tas arī ir meklētais punkts  $y$ . Tad  $|x - y| < \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n_0} < \varepsilon$  ■

Tālāk mēs parādīsim, ka  $\Lambda$  ir labi samiksēta ar attēlojuma  $h$  iterācijām.

**Definīcija 9.1.** Funkciju  $f : D \rightarrow D$  sauc par *topoloģiski transitīvu* (*topologically transitive*) kopā  $D \subset \mathbf{R}$ , ja jebkurām divām vaļējām kopām  $u, V$ , kuras šķēļas ar  $D$ , eksistē tāds punkts  $z \in U \cap D$  un tāda iterācija  $n \in \mathbf{N}$ , ka  $f^n(z) \in V$ . Vai ekvivalentā formā:  $f : D \rightarrow D$  ir topoloģiski transitīva funkcija kopā  $D \subset \mathbf{R}$ , ja

$$\forall x, y \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in D \quad \exists n \in \mathbf{N} : \quad |z - x| < \varepsilon \ \& \ |f^n(z) - y| < \varepsilon.$$

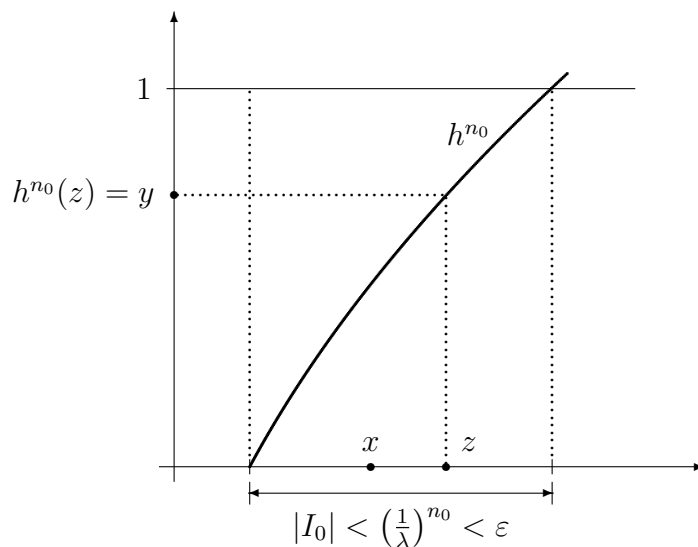
Ikdienišķiem vārdiem runājot, funkcijas topoloģiskā transitivitāte nozīmē, ka jebkurā punkta  $x$  apkārtnē ir atrodams tāds punkts  $z$ , kurš ar noteiktu funkcijas iterāciju aizceļo uz patvaļīga punkta  $y$  apkārtni (9.1.zīmējums).



9.1. zīm.

**Teorēma 9.2.** Ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ , tad  $h = rx(1 - x)$  ir topoloģiski transitīva kopā  $\Lambda$ .

**Pierādījums.**



9.2. zīm.

Izvēlēsimies  $x, y \in \Lambda$  brīvi un fiksēsim  $\varepsilon > 0$ . Parādīsim, ka

$$\exists z \in \Lambda : |x - z| < \varepsilon \text{ un } \exists n \in \mathbf{N} : h^n(z) = y.$$

No Lemmas 8.2 zināms, ka eksistē tāda konstante  $\lambda > 1$ , ka kopas  $\Lambda_n$  jebkura intervāls garums ir mazāks par  $(\frac{1}{\lambda})^n$ . Izvēlēsimies  $n_0$  tā, lai  $(\frac{1}{\lambda})^{n_0} < \varepsilon$ . Tā kā  $x \in \Lambda$ , tad no Apgalvojuma 7.1 c) ir zināms, ka eksistē tāds intervāls  $I_{n_0}$  kopā  $\Lambda_{n_0}$ , ka  $x \in I_{n_0}$  un  $h^{n_0} : I_{n_0} \rightarrow [0; 1]$  ir injekcija un surjekcija.  $n_0$  ir izvēlēts tā, ka intervāla  $I_{n_0}$  garums ir mazāks par  $(\frac{1}{\lambda})^{n_0} < \varepsilon$ , tātad attālums no  $x$ , kas ir  $I_{n_0}$  punkts, līdz jebkuram  $I_{n_0}$  punktam ir mazāks par  $\varepsilon$ . Tā kā  $h^{n_0} : I_{n_0} \rightarrow [0; 1]$  ir injekcija un surjekcija un  $y \in [0; 1]$ , tad  $\exists z \in I_{n_0} : h^{n_0}(z) = y$  (skatīt 9.2.zīmējumu). Skaidrs, ka  $z \in \Lambda$ , jo tas ir punkta  $y \in \Lambda$  pirmtēls. ■

Atzīmēsim vēl vienu rezultātu, kas raksturo topoloģiski transitīvas funkcijas invariances kopas lielumu.

**Teorēma 9.3.** Ja  $f : D \rightarrow D$ , kur  $D \subset \mathbf{R}$ , ir topoloģiski transitīva kopā  $D$ , tad  $D$  ir bezgalīga kopa vai  $D$  sastāv no viena periodiska punkta orbītas.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $D$  satur tikai galīgu skaitu punktu un  $f : D \rightarrow D$  ir topoloģiski transitīva funkcija. Izvēlēsimies punktu kopā  $D$  un apzīmēsim to ar  $x_0$ . Mēs parādīsim, ka  $x_0$  ir periodisks un ka katrs  $D$  punkts ir  $x_0$  orbītas punkts.

Pieņemsim, ka  $\varepsilon > 0$  ir tāds, ka attālums starp jebkuriem diviem  $D$  punktiem ir lielāks vai vienāds ar  $\varepsilon$ , t.i., ja  $z, y \in D$  un  $z \neq y$ , tad  $|z - y| \geq \varepsilon$ . Šāds  $\varepsilon$  eksistē, jo  $D$  ir galīga kopa. Pieņemsim, ka  $y \in D$ . Tā kā  $f$  ir topoloģiski transitīva funkcija, tad

$$\exists z \in D \quad \exists m \in \mathbf{N} : |x_0 - z| < \varepsilon \ \& \ |f^m(z) - y| < \varepsilon.$$

Bet  $\varepsilon$  ir mazākais attālums starp diviem atšķirīgiem kopas  $D$  punktiem, tāpēc no  $|x_0 - z| < \varepsilon$  seko, ka  $z = x_0$ , un no  $|f^m(z) - y| < \varepsilon$  seko, ka  $f^m(z) = y$ . Ievērojot abas vienādības, esam ieguvuši, ka  $f^m(x_0) = f^m(z) = y$ . Tātad jebkurš  $D$  punkts ir  $x_0$  orbītas punkts. Izvēlēsimies  $y_0 \in D$ , kurš ir atšķirīgs no  $x_0$ . Līdzīgi kā iepriekš var parādīt, ka eksistē tāda  $f$  iterācija  $n$ , ka  $f^n(y_0) = x_0$ . Tā kā mēs jau zinām, ka eksistē tāda  $f$  iterācija  $m$ , ka  $f^m(x_0) = y_0$ , tad skaidrs, ka

$$f^{n+m}(x_0) = f^n(y_0) = x_0$$

un tātad  $x_0$  ir periodisks punkts ar periodu  $n + m$ .

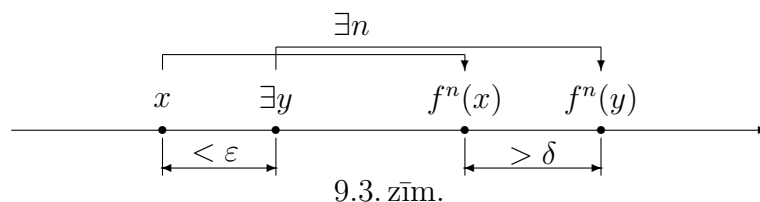


Pretējā gadījumā, ja  $D$  nesatur viena periodiska punkta orbītu un  $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$ , tad  $D$  ir bezgalīga kopa. ■

**Definīcija 9.2.** Funkciju  $f : D \rightarrow D$  sauc par *jūtīgi atkarīgu no sākuma nosacījumiem* (*sensitive dependence on initial conditions*) kopā  $D \subset \mathbf{R}$ , ja

$$\exists \delta > 0 \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists y \in D \exists n \in \mathbf{N} : |x - y| < \varepsilon \& |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Ilustrācija Definīcijai 9.2 dota 9.3.zīmējumā.



Praktiski izsakoties, no jūtīguma pret sākumnosacījumiem seko, ja mēs lietojam modeli funkcijas iterācijas ilgu laiku (piemēram, tādus modeļos kā populācijas pieaugums, laika apstākļu prognozēšana vai ekonomiskie rādītāji) un ja funkcija ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem, tad jebkura kļūda sākuma nosacījumu mērījumos rezultātā var dot lielu atšķirību starp matemātiski plānoto uzvedību un patieso sistēmas uzvedību. Tā kā visi fizikālie mēraparāti iekļauj kļūdu, šis nosacījums stingri ierobežo modeļa derīgumu.

**Teorēma 9.4.** Ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ , tad  $h = rx(1 - x)$  ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem kopā  $\Lambda$ , t.i.,

$$\forall x \in \Lambda \forall \varepsilon > 0 \exists y \in \Lambda \exists n \in \mathbf{N} : |x - y| < \varepsilon \& |h^n(x) - h^n(y)| > \frac{1}{2}.$$

**Pierādījums.** Ievērojiet, teorēmas formulējumā ir pateikts, ka Definīcijā 9.2 minētā konstante ir  $\delta = \frac{1}{2}$ ! Tāpēc tālāk brīvi izvēlēsimies  $x \in \Lambda$  un  $\varepsilon > 0$ . Līdzīgi kā iepriekšējās Teorēmas 9.2 pierādījumā izmantosim Lemmu 8.2, un, izlaižot dažas atkārtotošās detaļas, varam sacīt: eksistē tāds  $n$  un tāds intervāls  $I_n$  kopā  $\Lambda_n$ , ka  $x \in I_n$  un attālums no  $x$  līdz jebkuram intervāla  $I_n$  punktam ir mazāks par  $\varepsilon$ ; pie tam funkcija  $h^n : I_n \rightarrow [0; 1]$  ir injekcija un surjekcija. Tad

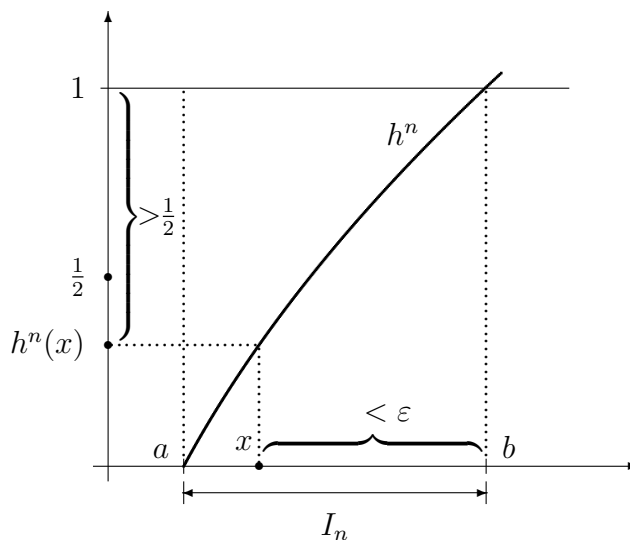
$$\exists a, b \in I_n : h^n(a) = 0 \text{ un } h^n(b) = 1.$$

Punkti  $a$  un  $b$  ir eventuāli nekustīgie punkti punktam 0, tāpēc tie pieder kopai  $\lambda$ . Tā kā  $h^n(x) \in \Lambda$  un  $\frac{1}{2} \notin \Lambda$ , tad

$$h^n(x) \in [0; \frac{1}{2}[ \text{ vai } h^n(x) \in ]\frac{1}{2}; 1].$$

Ja  $h^n(x) \in [0; \frac{1}{2}[$ , tad (skatīt 9.4.zīmējumu)

$$b \in \Lambda, \quad |x - b| < \varepsilon, \quad |h^n(x) - h^n(b)| = |h^n(x) - 1| > \frac{1}{2}.$$



9.4. zīm.

Ja  $h^n(x) \in ]\frac{1}{2}; 1]$ , tad

$$a \in \Lambda, \quad |a - x| < \varepsilon, \quad |h^n(x) - h^n(a)| = |h^n(x)| > \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Mēs esam pierādījuši ļoti būtiskas īpašības, kas piemīt funkcijai  $h$  ( $r > 2 + \sqrt{5}$ ) kopā  $\Lambda$ . Funkcijas ar šādām īpašībām sauc speciālā vārdā — par haotiskām. Precīzāk, formulēsīm *R.Devaney* 1989.gadā doto definīciju:

**Definīcija 9.3.** Funkciju  $f : D \rightarrow D$ , kur  $D \subset \mathbf{R}$ , sauc par *haotisku* (*chaotic*) kopā  $D$ , ja

- $f$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $D$ ;
- $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$ ;
- $f$  ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem kopā  $D$ .

Dažkārt par haotisku sauc arī tādu funkciju  $f : D \rightarrow D$ , kura ir tikai jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem. Arī nepārtrauktu funkciju gadījumā ir novērojamas zināmas likumsakarības starp minētajām trim īpašībām. Bet pirms to precizējam, pierakstīsim no Teorēmām 9.1, 9.2, 9.4 iegūto secinājumu:

**Teorēma 9.5.** Ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ , tad  $h = rx(1 - x)$  ir haotiska funkcija kopā  $\Lambda$ .

Funkcija  $h = rx(1 - x)$  ir haotiska arī citām  $r$  vērtībām, kas lielākas par 4. Bet to pierādīt ir daudz grūtāk (vienu no iespējamajiem pierādījumiem var atrast *C. Robinson* grāmatā). Gadījumu ar  $r = 4$  mēs apskatīsim mazliet vēlāk, izmantojot citu pierādījuma tehniku.

Nepārtrauktai funkcijai, lai pierādītu, ka tā ir haotiska, nav obligāti jāpārbauda visu triju īpašību izpildīšanās. Izrādās, nepārtraukta invarianta funkcija, ja tā ir topoloģiski transitīva un tās periodiskie punkti ir blīvi invariances kopā, tad tā ir arī jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem, tātad ir haotiska.

**Teorēma 9.6.** Pieņemsim, ka  $D$  ir bezgalīga reālo skaitļu apakškopa un  $f : D \rightarrow D$  ir nepārtraukta funkcija. Ja  $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$  un  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$ , tad  $f$  ir haotiska kopā  $D$ .

**Pierādījums.** Tātad atliek pierādīt, ka pie dotajiem teorēmas nosacījumiem funkcija  $f$  ir arī jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem. Vispirms pierādīsim:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists q \in D - f \text{ periodisks punkts} \quad \forall i : |x - f^i(q)| \geq 4\delta.$$

Atzīmēsim, ka bezgalīgas kopas blīva apakškopa ir bezgalīga kopa. Tā kā  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$ , tad funkcijai  $f$  ir bezgalīgi daudz periodisko punktu un tāpēc mēs varam izvēlēties divus tādus periodiskus punktus  $q_1$  un  $q_2$ , ka  $f^n(q_1) \neq f^m(q_2)$  jebkuriem  $n$  un  $m$ . Tas ir,  $q_1$  un  $q_2$  ir periodiski punkti no dažādām orbitām. pieņemsim, ka  $\delta$  ir lielākais no skaitļiem, kurš apmierina nevienādību

$$\forall n, m : \quad \delta \leq \frac{1}{8} |f^n(q_1) - f^m(q_2)|.$$

Skaidrs, ka  $\delta > 0$ , jo  $q_1$  un  $q_2$  ir atšķirīgi periodiskie punkti. Un tā kā ir tikai galīgs skaits punktu formā  $f^n(q_1)$  un  $f^m(q_2)$ , tad ir tikai galīgs skaits attālumu  $|f^n(q_1) - f^m(q_2)|$ , tāpēc starp tiem var atrast mazāko. Ja  $x \in D$ , tad, izmantojot trīsstūra nevienādību, iegūsim

$$\forall m, n \quad \delta \leq \frac{1}{8} |f^n(q_1) - f^m(q_2)| \leq \frac{1}{8} (|f^n(q_1) - x| + |x - f^m(q_2)|)$$

$$\text{jeb } 8\delta \leq |f^n(q_1) - x| + |x - f^m(q_2)|.$$

Varam secināt, vai nu  $|f^n(q_1) - x| \geq 4\delta$  visiem  $n$ , vai arī  $|x - f^m(q_2)| \geq 4\delta$  visiem  $m$ . Rezultātā secinām, ka eksistē tāds periodisks punkts  $q$ , ka  $|x - f^i(q)| \geq 4\delta$  visiem  $i$ .

Fiksēsim  $\delta$ , kurš iegūts pēc iepriekš aprakstītā kritērija. Tas ir, izvēlēsimies  $\delta > 0$  tā, ka jebkuram  $D$  punktam eksistē periodisks punkts, kura orbītas jebkurš punkts atrodas tālāk par  $4\delta$ . Pieņemsim, ka  $x$  ir patvaļīgs kopas  $D$  punkts un  $\varepsilon$  ir tāds, ka  $0 < \varepsilon < \delta$ . Fiksēsim tādu periodisku punktu  $q$ , ka  $|x - f^i(q)| \geq 4\delta$  visiem  $i$ . Izmantojot šo  $q$ , pierādīsim, ka

$$\exists w \in D : |w - z| < \varepsilon \text{ un } \exists n : |f^n(x) - f^n(w)| > \delta.$$

Tas arī nozīmēs, ka funkcija  $f$  ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem. Ievērojiet, ka esam izdarījuši ierobežojumu uz  $\varepsilon$  izvēli:  $\varepsilon < \delta$ , jo ir daudz grūtāk atrast  $w$  tieši tad, kad  $\varepsilon$  kļūst mazs.

Izdarīsim dažas piezīmes.

1. Tā kā  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$ , tad mēs varam izvēlēties vienu tādu, kura attālums no līdz  $x$  ir mazāks par  $\varepsilon$ . Fiksēsim vienu šādu periodisku punktu  $p$ . Apzīmēsim ar  $k$  punkta  $p$  periodu.

2. Eksistē tāds  $\mu > 0$ , ka  $\mu \leq \delta$ . No funkcijas  $f$  nepārtrauktības seko: ja  $z \in D : |z - q| < \mu$ , tad  $|f^i(z) - f^i(q)| < \delta$  visiem tādiem  $i$ , ka  $0 \leq i \leq k$ .

3. Eksistē tāds  $y \in D$  un tāds naturāls skaitlis  $m$ , ka  $|x - y| < \varepsilon$  un  $|f^m(y) - q| < \mu$ , kur  $\mu$  izvēlēts kā 2.piezīmē. Tās ir tiešas sekas no  $f$  topoloģiskās transitivitātes. Ievērosim, ka kopā ar 2.piezīmi punkta  $y$  un skaitļa  $m$  izvēle seko no fakta, ka  $|f^{m+1}(y) - f^i(q)| = |f^i(f^m(y)) - f^i(q)| \leq \delta$  visiem  $i$  starp 0 un  $k$ .

4. Ja  $m$  ir izvēlēts tā kā 3.piezīmē, tad eksistē tāds  $n$ , ka  $m \leq n \leq m + k$  un  $k$  dalās ar  $n$ . Citiem vārdiem sakot,  $n = ak$ , kur  $a$  ir mazākais veselais skaitlis, kurš lielāks vai vienāds ar  $\frac{m}{k}$ .

Ja  $m$  un  $y$  izvēlēti kā 3.piezīmē un  $n$  kā 4.piezīmē,  $\delta$  izvēlēts kā iepriekš aprakstīts, tad no trīsstūra nevienādības seko, ka

$$4\delta \leq |x - f^{n-m}(q)| \leq |x - f^n(p)| + |f^n(p) - f^n(y)| + |f^n(y) - f^{n-m}(q)|.$$

Izmantojot faktu, ka  $p$  ir periodisks punkts ar periodu  $k$  un  $k$  dalās ar  $n$ , mēs iegūsim

$$4\delta \leq |x - p| + |f^n(p) - f^n(y)| + |f^{n-m}(f^m(y)) - f^{n-m}(q)|. \quad (9.1)$$

No 1.piezīmeszināms, ka  $|x - p| < \delta$ . Arī  $x$  ir izvēlēts pēc 4.piezīmes tā, ka  $n - m$  ir starp 0 un  $k$ . No 3.piezīmes zināms, ka  $|f^{n-m}(f^m(y)) - f^{n-m}(q)| < \delta$ .

Tad nevienādība (9.1) pierakstāma kā

$$4\delta \leq \delta + |f^n(p) - f^n(y)| + \delta$$

$$\text{jeb } 2\delta \leq |f^n(p) - f^n(y)|.$$

Izmantojot trīsstūra nevienādību, iegūsim

$$2\delta \leq |f^n(p) - f^n(y)| \leq |f^n(p) - f^n(x)| + |f^n(x) - f^n(y)|.$$

No šejienes seko, ka

$$|f^n(p) - f^n(x)| > \delta \text{ vai } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Tā kā  $p$  un  $y$  ir izvēlēti, ievērojot 1. un 3.piezīmi:  $|p - x| < \varepsilon$  un  $|y - x| < \varepsilon$ , tad mēs esam atraduši tādu punktu  $w \in D$  (vai nu  $p$  vai  $y$ ), ka  $|w - x| < \varepsilon$ , un eksistē tāds  $n$ , ka  $|f^n(x) - f^n(w)| > \delta$ . ■

# NODAĻA NR. 10

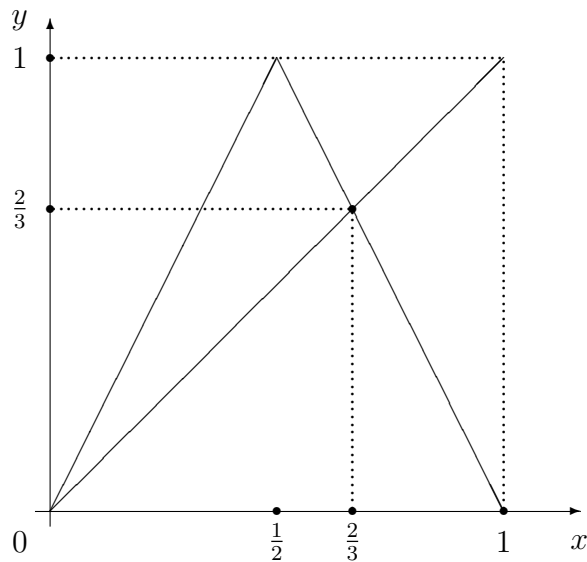
## TELTS ATTĒLOJUMS

**Anotācija.** Telts attēlojums intervālā  $[0; 1]$  - vēl viens haotiskas funkcijas piemērs. Haotiska attēlojuma īpašību pārbaude (nekustīgo punktu blīvums, jūtīga atkarība no sākuma nosacījumiem, topoloģiskā transitivitāte).

Šajā nodaļā apskatīsim vienu konkrētu haotisku attēlojumu - telts attēlojumu (*tent map*).

**Definīcija 10.1.** Par *telts attēlojumu* sauc tādu attēlojumu  $T : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , kurš definēts ar sakarību:

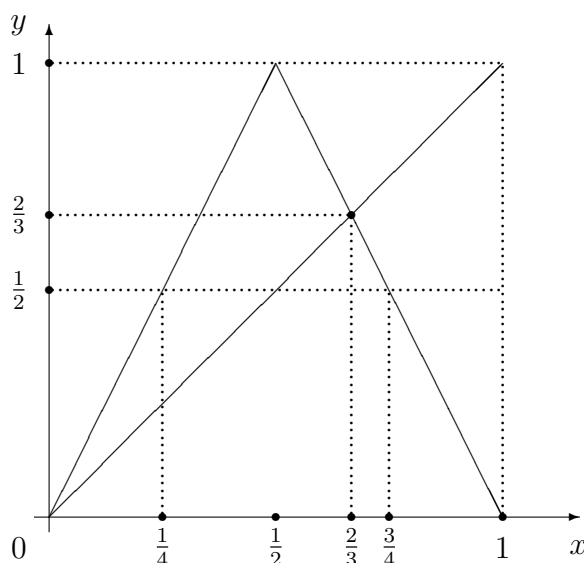
$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & x \in ]\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$



10.1. zīm.

10.1.zīmējumā labi redzams, ka telts attēlojums attēlo vienības intervālu sevī, ka tam ir divi nekustīgie punkti:  $x_1 = 0$  un otru var atrast no vienādības  $2 - 2x = x$ , tātad otrs nekustīgais punkts ir  $x_2 = \frac{2}{3}$ .

Lai uzzīmētu telts attēlojuma otrās iterācijas grafiku, varam spriest šādi (skatīt 10.2.zīmējumu): kamēr pirmās iterācijas vērtības ir intervālā  $[0; \frac{1}{2}]$ , tikmēr darbojas funkcija  $2x$ .

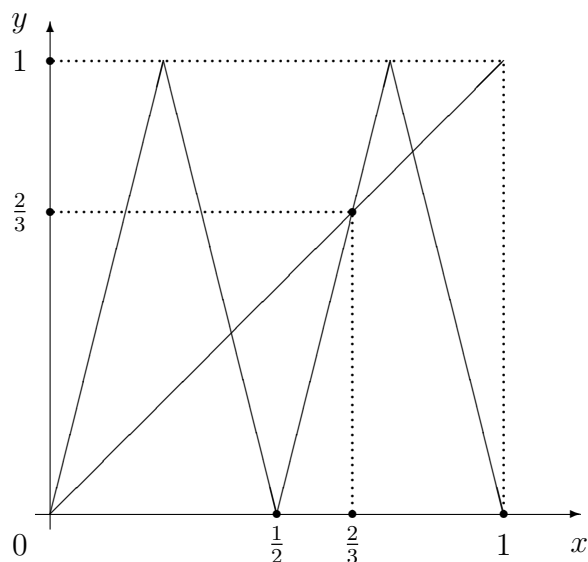


10.2. zīm.

Tādi ir divi definīcijas apgabali, kuros funkcijas vērtības nav lielākas par  $\frac{1}{2}$ . Tā kā  $2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ , tad intervālā  $[0; \frac{1}{4}]$  telts attēlojuma otrās iterācijas analītiskā izteiksme ir  $2 \cdot 2x = 4x$ . Tā kā  $2 - 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ , tad intervālā  $[\frac{3}{4}; 1]$  telts attēlojuma otrās iterācijas analītiskā izteiksme ir  $2 \cdot (2 - 2x) = 4 - 4x$ . Ievērojot telts attēlojuma definīciju, intervālā  $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$  telts attēlojuma otrās iterācijas analītiskā izteiksme ir  $2 - 2 \cdot 2x = 2 - 4x$ , bet intervālā  $[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$  telts attēlojuma otrās iterācijas analītiskā izteiksme ir  $2 - 2 \cdot (2 - 2x) = -2 + 4x$ , tātad (funkcija ir nepārtraukta, tāpēc vispār nav būtiski, kā tiek ieskaitīti intervālu galapunkti, svarīgi tikai, lai tie piederētu tieši vienam intervālam)

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [0; \frac{1}{4}], \\ 2 - 4x, & x \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}], \\ -2 + 4x, & x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}], \\ 4 - 4x, & x \in [\frac{3}{4}; 1]. \end{cases}$$

Telts attēlojuma otrās iterācijas  $T^2$  grafiks ir parādīts 10.3.zīmējumā.



10.3. zīm.

No 10.3.zīmējuma redzams, ka otrajai iterācijai ir parādījušies divi jauni nekustīgie punkti - tie ir telts attēlojuma periodiskie punkti ar pirmsperiodu 2. Lai atrastu to koordinātas, atrisinām vienādojumus:

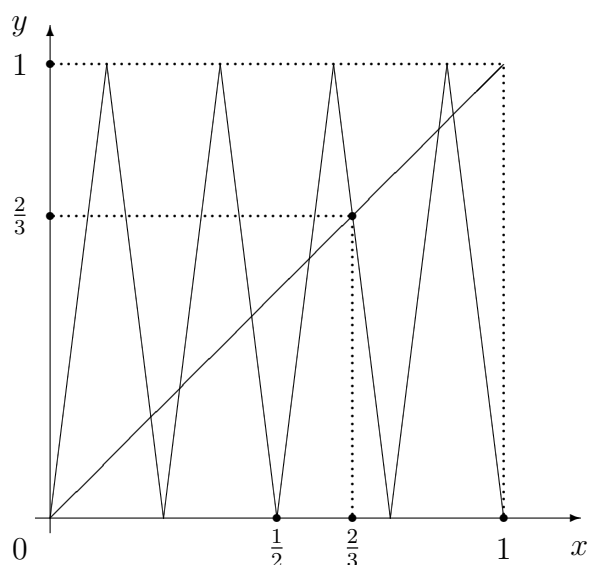
$$\begin{aligned} 2 - 4x &= x \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{2}{5}, \\ 4 - 4x &= x \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Līdzīgā veidā varam spriest un atrast telts attēlojuma trešās iterācijas analītisko izteiksmi:

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x, & x \in [0; \frac{1}{8}], \\ 2 - 8x, & x \in ]\frac{1}{8}; \frac{1}{4}], \\ -2 + 8x, & x \in ]\frac{1}{4}; \frac{3}{8}], \\ 4 - 8x, & x \in ]\frac{3}{8}; \frac{1}{2}], \\ -4 + 8x, & x \in ]\frac{1}{2}; \frac{5}{8}], \\ 6 - 8x, & x \in ]\frac{5}{8}; \frac{3}{4}], \\ -6 + 8x, & x \in ]\frac{3}{4}; \frac{7}{8}], \\ 8 - 8x, & x \in ]\frac{7}{8}; 1]. \end{cases}$$

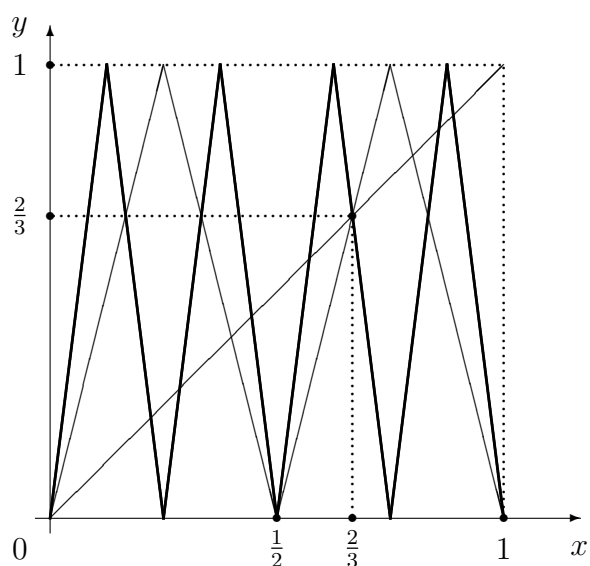
Telts attēlojuma trešās iterācijas  $T^3$  grafiks ir parādīts 10.4.zīmējumā.





10.4. zīm.

Redzam, ka trešajai iterācijai kopumā ir 8 nekustīgie punkti, no kuriem divi ir īstie telts attēlojuma nekustīgie punkti, bet pārējie seši ir telts attēlojuma periodiskie punkti ar pirmsperiodu 3. Tie patiešām nesakrīt ar otrās iterācijas nekustīgajiem punktiem, to var ieraudzīt 10.5.zīmējumā, kur uzzīmētas vienās koordinātās gan otrās, gan trešās iterācijas grafiki.



10.5. zīm.

Šādi mēs varētu turpināt un atrast ceturtais, piektās, ...,  $n$ -tās kārtas

iterācijas funkciju analītiskās funkcijas, un uzzīmēt atbilstošos grafikus. Dažkārt literatūrā telts attēlojumu sauc arī par zāģa zobu funkciju. Skatoties iterāciju grafikos kļūst skaidrs, kāpēc radies šāds nosaukums. Acīmredzot, katrā nākamajā iterācijā "telšu" skaits dubultojas un nogriežņa garums, uz kura tā ir uzcelta, ir uz pusi mazāks kā iepriekšējā iterācijā. Precīzāk var pat pateikt, ka visiem veseliem skaitļiem  $k$  starp 0 un  $2^n - 1$  telts attēlojuma  $n$ -tā iterācija

$$T^n : \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \rightarrow [0; 1]$$

ir sirjekcija un lineārs attēlojums. Ievērojot iepriekš minētās  $n$ -tās iterācijas īpašības, var pierādīt haotiska attēlojuma definīcijā prasītos nosacījumus.

**Apgalvojums 10.1.** Telts attēlojuma periodisko punktu kopa ir blīva intervālā  $[0; 1]$ .

**Pierādījums.** Mums ir jāpierāda, ka

$$\forall x \in [0; 1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in [0; 1] - T \text{ periodisks punkts} : |x - y| < \varepsilon.$$

Brīvi fiksējam  $x \in [0; 1]$  un  $\varepsilon > 0$ . Atrodam tādu  $n \in \mathbf{N}$ , lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , tad eksistē tāds  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , ka  $x \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$  — šajā intervālā telts attēlojuma  $n$ -tā iterācija  $T^n$  ir sirjekcija un lineārs attēlojums. Tas nozīmē, ka  $T^n$  grafiks šajā intervālā krustojas ar taisni  $y = x$ . Šis krustpunkts ir  $T^n$  nekustīgais punkts un līdz ar to tas ir paša telts attēlojuma periodisks punkts ar periodu  $n$ . Līdz ar to arī esam atraduši tādu  $T$  periodisko punktu  $y$ , ka

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \blacksquare$$

**Apgalvojums 10.2.** Telts attēlojums intervālā  $[0; 1]$  ir topoloģiski transitīvs.

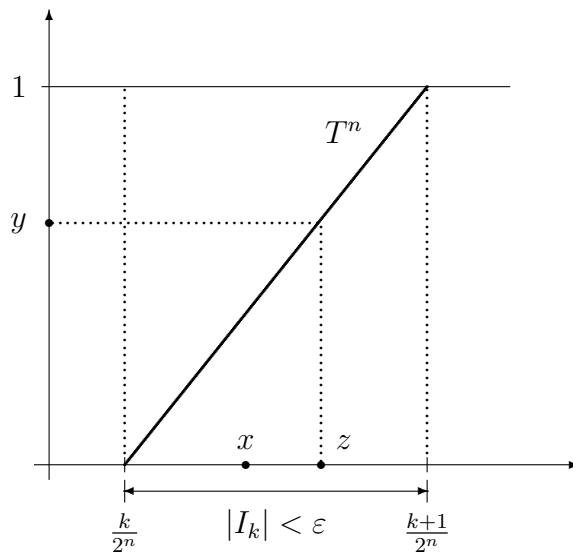
**Pierādījums.** Mums ir jāpierāda, ka

$$\forall x, y \in [0; 1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in [0; 1] \exists n \in \mathbf{N} : |z - x| < \varepsilon \ \& \ |T^n(z) - y| < \varepsilon.$$

Mēs pierādīsim pat vairāk:  $T^n(z) = y$ .

Fiksējam brīvi  $x, y \in [0; 1]$  un  $\varepsilon > 0$ . Atradīsim tādu  $n \in \mathbf{N}$ , lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Tad eksistē tāds  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , ka  $x \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] = I_k$ . Attēlojums  $T^n : I_k \rightarrow [0; 1]$  ir sirjekcija un lineārs attēlojums, tāpēc eksistē tāds  $z \in I_k$ , ka  $T^n(z) = y$ . 10.6.zīmējumā redzama atbilstošā situācija ar augošu funkciju.

Minētais  $y$  ir definīcijā prasītais.

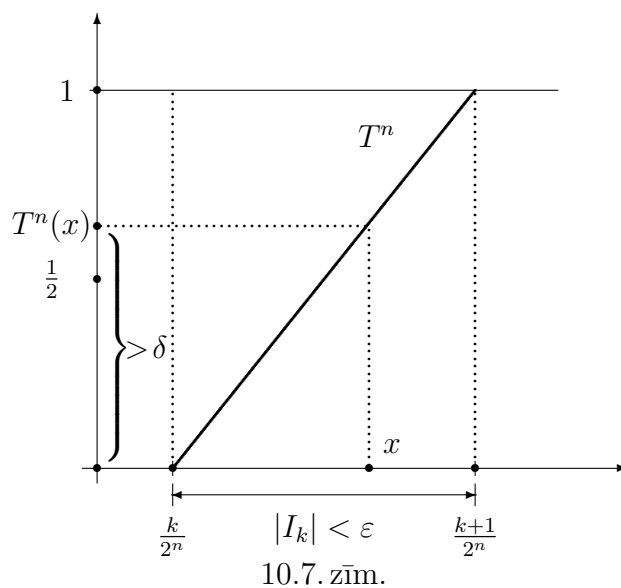


**Apgalvojums 10.3.** Telts attēlojums intervālā  $[0; 1]$  ir jūtīgi atkarīgs no sākuma nosacījumiem.

**Pierādījums.** Mums ir jāpierāda, ka

$$\exists \delta > 0 \forall x \in [0; 1] \exists \varepsilon > 0 \exists y \in [0; 1] \exists n \in \mathbf{N} : |x - y| < \varepsilon \ \& \ |T^n(x) - T^n(y)| > \delta.$$

Mēs konkrētajā gadījumā pierādīsim, ka  $\delta$  lomā der jebkurš skaitlis no intervāla  $]0; \frac{1}{2}[$ .



Brīvi fiksējam  $x \in [0; 1]$  un  $\varepsilon > 0$ . Atrodam tādu  $n \in \mathbf{N}$ , lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Tad eksistē tāds  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , ka  $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] = I_k$  un jebkuram  $y$  no šī intervāla  $I_k$  izpildās nevienādība  $|x - y| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Attēlojums  $T^n : I_k \rightarrow [0; 1]$  ir surjekcija un lineārs attēlojums. Pie tam viena no vērtībām  $T^n(\frac{k}{2^n})$ ,  $T^n(\frac{k+1}{2^n})$  ir 0, otra 1.

Ja  $T^n(x) \in [0; \frac{1}{2}]$ , tad  $y$  lomā izvēlamies to intervāla galapunktu, kura  $T^n$  attēls ir 1.

Ja  $T^n(x) \in ]\frac{1}{2}; 1]$ , tad  $y$  lomā izvēlamies to intervāla galapunktu, kura  $T^n$  attēls ir 0. Šī situācija ilustrēta 10.7.zīmējumā (šeit  $y = \frac{k}{2^k}$ ).

Abos gadījumos

$$|T^n(x) - T^n(y)| \geq \frac{1}{2} > \delta. \blacksquare$$

No Apgalvojumiem 10.1, 10.2 un 10.3 seko, ka

**Teorēma 10.1.** Telts attēlojums ir haotisks attēlojums intervālā  $[0; 1]$ .

Ņemot vērā Teorēmu 9.6, lai konstatētu, ka  $T$  ir haotisks attēlojums, varējām arī nepierādīt telts attēlojuma jutīgo atkarību no sākuma nosacījumiem, jo telts attēlojums ir nepārtraukts attēlojums un intervāls  $[0; 1]$  ir bezgalīga kopa.

Telts attēlojumu var vispārināt un apskatīt parametrisku attēlojumu saimes, piemēram, ja telts attēlojuma definīcijā visas trīs konstantes 2 aizstājam ar parametru  $a > 0$ :

$$T_a(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0; \frac{1}{2}], \\ a - ax, & x \in ]\frac{1}{2}; 1], \end{cases}$$

tad var novērot līdzīgu dinamiku kā parametriskās logistikās attēlojumu saimes gadījumā. Var izmainīt arī telts virsotnes atrašanās vietu un apskatīt atbilstošo parametrisko funkciju saimi, virsotnei pārvietojoties no zemākas vietas uz augstāku.

# NODAĻA NR. 11

## TOPOLOĢISKĀ SAISTĪBA

**Anotācija.** Topoloģiskās saistības starp funkcijām definīcija. Teorēma par topoloģiskās saistības īpašībām. Logistiskā attēlojuma  $h(x) = 4x(1 - x)$ ,  $x \in [0; 1]$ , topoloģiskā saistība ar telts attēlojumu.

Mēs turpināsim mūsu logistiskās funkcijas pētījumus, parādot, ka  $h(x) = 4x(1 - x)$  ir haotiska funkcija visā intervālā  $[0; 1]$ . Pēc definīcijas to ir grūti izdarīt. Tāpēc mēs parādīsim, ka  $h$  dinamika intervālā  $[0; 1]$  ir tāda pati kā telts attēlojuma dinamika intervālā  $[0; 1]$ . Matemātiski izsakoties, mēs teiksim, ka  $h$  intervālā  $[0; 1]$  ir topoloģiski saistīta ar telts attēlojumu intervālā  $[0; 1]$ .

**Definīcija 11.1.** Pieņemsim, ka  $f : D \rightarrow D$  un  $g : E \rightarrow E$  ir funkcijas. Funkciju  $f$  sauc par *topoloģiski saistītu* ar  $g$  (*topologically conjugate*), ja eksistē tāds homeomorfisms  $\tau : D \rightarrow E$ , ka  $\tau \circ f = g \circ \tau$ . Šajā gadījumā  $\tau$  sauc par *topoloģisko saiti* (*topological conjugacy*).

(Atgādināsim, ka homeomorfisms  $\tau : D \rightarrow E$  nozīmē tādu nepārtrauktu attēlojumu, kurš ir surjekcija un injekcija un tam eksistē nepārtraukts inverssais attēlojums.)

Mēs reprezentēsim šo attiecību ar komutativitātes diagrammu.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ E & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

Ja mēs sakām, ka diagramma ir komutatīva, ar to sapratīsim: ja startējam ar kopas  $D$  elementu un tālāk sekojam bultām diagrammā, tad beigās atgriezīsimies pie tā paša elementa neatkarīgi no maršruta izvēles. Piemēram, pieņemsim, ka  $x \in D$  ir izvēlēts no diagrammas augšējā kreisā stūra. Sekojot bultām no augšējā kreisā stūra kopā ar  $f$  nonāksim kopā  $D$  pie elementa  $f(x) \in D$ , tad lejup  $\tau(f(x)) \in E$ . Ejot vispirms uz leju, sekojot bultai, vispirms nonāktu pie  $\tau(x) \in E$  un pēc tam ar  $G$  pie  $g(\tau(x)) \in E$ . Tā kā diagramma ir komutatīva, mēs esam dabūjuši to pašu elementu, zinām, ka  $\tau(f(x)) = g(\tau(x))$ . Aprakstīto situāciju var reprezentēt ar citu detalizētāku diagrammu.

$$\begin{array}{ccc} x \in D & \xrightarrow{f} & f(x) \in D \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \tau(x) \in E & \xrightarrow{g} & \tau(f(x)) = g(\tau(x)) \in E \end{array}$$

$\tau$  ir homomorfisms, tāpēc mēs zinām, ka  $\tau^{-1}$  ir definēts un

$$\tau^{-1}(\tau(f(x))) = f(x).$$

Tā kā  $\tau$  komutē ar  $f$  un  $g$ , mēs varam  $g(\tau(x))$  aizvietot ar  $\tau(f(x))$  un iegūt

$$\tau^{-1}(g(\tau(x))) = f(x).$$

Šīs sakarības arī var reprezentēt ar komutatīvitātes diagrammu:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \tau \downarrow & & \uparrow \tau^{-1} \\ E & \xrightarrow{g} & E \end{array} \quad \text{vai} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) = \tau^{-1}(g(\tau(x))) \\ \tau \downarrow & & \uparrow \tau^{-1} \\ \tau(x) & \xrightarrow{g} & g(\tau(x)) \end{array}$$

Līdzīgi, ja  $e$  ir  $E$  elements, tad

$$\tau(f(\tau^{-1}(e))) = g(e)$$

vai ar komutativitātes diagrammu tas izskatītos šādi:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f} & D \\
 \uparrow \tau^{-1} & & \downarrow \tau \\
 E & \xrightarrow{g} & E
 \end{array}
 \quad \text{vai} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \tau^{-1}(e) & \xrightarrow{f} & f(\tau^{-1}(e)) \\
 \uparrow \tau^{-1} & & \downarrow \tau \\
 e & \xrightarrow{g} & g(e)
 \end{array}$$

Atgriežoties pie homeomorfisma definīcijas, mēs teicām, ka  $\tau : D \rightarrow E$  ir homeomorfisms tad un tikai tad, ja  $\tau$  ir nepārtraukts, injektīvs, surjektīvs attēlojums un tam eksistē nepārtraukts inversais attēlojums. Atzīmēsim, ja  $D$  un  $E$  ir homeomorfas kopas (t.i., eksistē homeomorfisms no kopas  $D$  kopā  $E$ ), tad  $D$  un  $E$  topoloģijas ir vienādas. Precizēsim šo izteikumu ar šādu apgalvojumu:

**Apgalvojums 11.1.** Pieņemsim, ka  $D, E$  ir reālu skaitļu apakškopas un  $\varphi : D \rightarrow E$  ir homeomorfisms, tad

- kopa  $U \subset D$  ir vaļēja tad un tikai tad, ja kopa  $\varphi(U)$  ir vaļēja kopā  $E$ ;
- virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  no  $D$  elementiem konverģē uz  $x \in D$  tad un tikai tad, ja virkne  $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$  konverģē uz  $\varphi(x) \in E$ ;
- kopa  $F \subset D$  ir slēgta tad un tikai tad, ja kopa  $\varphi(F)$  ir slēgta kopā  $E$ ;
- kopa  $A$  ir blīva kopā  $D$  tad un tikai tad, ja kopa  $\varphi(A)$  ir blīva kopā  $E$ .

Šī apgalvojuma pierādījums tiek dots topoloģijasursos (pierāda, izmantojot definīcijas (skat nodaļu nr.2.)).

Ja funkcijas kopās  $D$  un  $E$  ir topoloģiski saistītas, tad homeomorfisma eksistence no kopas  $D$  kopā  $E$  garantē, ka telpu topoloģijas ir identiskas. Savukārt nosacījums  $\tau \circ f = g \circ \tau$  garantē, ka funkciju dinamika ir tāda pati. Precīzāk to demonstrē nākamā teorēma:

**Teorēma 11.1.** Pieņemsim, ka  $D, E$  ir reālu skaitļu apakškopas un  $f : D \rightarrow D, g : E \rightarrow E$  ir funkcijas, un  $\varphi : D \rightarrow E$  ir topoloģiskā saite starp  $f$  un  $g$ . Tad:

- $\tau^{-1} : E \rightarrow D$  ir topoloģiskā saite;
- $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$  visiem naturāliem skaitļiem  $n$ ;
- $p$  ir  $f$  periodisks punkts tad un tikai tad, ja  $\tau(p)$  ir  $g$  periodisks punkts; pie tam  $p$  un  $\tau(p)$  pirmsperiodi ir vienādi;
- Ja  $p$  ir  $f$  periodisks punkts ar stabilitātes kopu  $W^S(p)$ , tad  $\tau(p)$  stabilitātes kopa ir  $\tau(W^S(p))$ ;

- e)  $f$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $D$  tad un tikai tad, ja  $g$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $E$ ;  
 f)  $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$  tad un tikai tad, ja  $g$  ir topoloģiski transitīva kopā  $E$ ;  
 g)  $f$  ir haotiska kopā  $D$  tad un tikai tad, ja  $g$  ir haotiska kopā  $E$ .

Pirms mēs sākam teorēmas pierādīšanu, ievērosim, ka daudzi teorēmas secinājumi ir ieraugāmi komutatīvitātes diagrammās un seko no topoloģiskās saistības. Piemēram, teorēmas apgalvojuma c) pierādījums. Pieņemsim, ka  $p$  ir  $f$  periodisks punkts ar pirmsperiodu  $k$ . Mums ir jāpierāda, ka  $\tau(p)$  ir funkcijas  $g$  periodisks punkts ar pirmsperiodu  $k$ . Lai saprastu pierādījumu, apskatīsim diagrammu:

$$\begin{array}{ccc}
 p \in D & \xrightarrow{f^k} & f^k(p) = p \in D \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
 \tau(p) \in E & \xrightarrow{g^k} & g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \in E
 \end{array}$$

No b) daļas mēs zinām, ka šī diagramma komutē, tātad

$$g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) = \tau(p),$$

līdz ar to esam parādījuši, ka  $\tau(p)$  ir periodisks punkts ar periodu  $k$ . Atliek parādīt, ka  $\tau(p)$  pirmsperiods ir  $k$ . Ja  $0 < n < k$ , tad  $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) \neq \tau(p)$ , jo  $\tau$  ir injekcija un  $f^n(p) \neq p$ , ja  $0 < n < k$ . Tātad  $\tau(p)$  ir  $g$  periodisks punkts ar pirmsperiodu  $k$ .

### Teorēmas 11.1 pierādījums.

a) Ir jāpierāda, ka  $\tau^{-1} \circ g = f \circ \tau^{-1}$  - seko no definīcijām.

b) Lai pierādītu, ka  $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ , mums jāaplūko komutatīvitātes diagramma, kas sastāv no  $n$  kvadrātiem.

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{f} & \dots & \xrightarrow{f} & D \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & & & \downarrow \tau \\
 E & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{g} & \dots & \xrightarrow{g} & E
 \end{array}$$



Tā kā katrs kvadrāts komutē, tad komutē visa diagramma. Tad iegūsim to pašu rezultātu, ejot pa diagrammas otru pusi attiecīgajā virzienā, un vajadzīgais apgalvojums sekos.

Pierādījumu precīzāk var izdarīt ar matemātiskās indukcijas palīdzību. Apgalvojums  $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$  ir patiess, ja  $n = 1$ , jo  $\tau$  ir topoloģiskā saite. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess gadījumam  $n$ , un pierādīsim, ka tas ir patiess  $n + 1$  gadījumam:

$$\tau \circ f^{n+1} = (\tau \circ f^n) \circ f = (g^n \circ \tau) \circ f = g^n \circ (\tau \circ f) = g^n \circ (g \circ \tau) = g^{n+1} \circ \tau.$$

c) Fakts, ka attēlojums  $\tau$  attēlo  $f$  periodiskus punktus par  $g$  periodiskiem punktiem tika parādīts diskusijā pirms šī pierādījuma. Tā kā  $\tau^{-1}$  ir topoloģiskā saite, tie paši argumenti demonstrē, ja  $q$  ir  $g$  periodisks punkts ar pirmsperiodu  $k$ , tad  $\tau^{-1}(q)$  ir  $f$  periodisks punkts ar pirmsperiodu  $k$ .

d) Pieņemsim, ka  $p$  ir  $f$  periodisks punkts ar pirmsperiodu  $k$ , un pieņemsim, ka  $x \in W^S(p)$ . Tad pēc stabilitātes kopas  $W^S(p)$  definīcijas

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N : \quad |f^{kn}(x) - p| < \delta.$$

Mums jāparāda, ka

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq M : \quad |g^{kn}(\tau(x)) - \tau(p)| < \varepsilon.$$

Fiksējam brīvi  $\varepsilon > 0$ . Tā kā  $\tau$  ir nepārtraukts attēlojums, tad

$$\exists \delta > 0 \quad \forall y : \quad |y - p| < \delta \Rightarrow |\tau(y) - \tau(p)| < \varepsilon.$$

Izvēlamies  $M$  tā, ja  $n \geq M$ , tad  $|f^{kn}(x) - p| < \delta$ . No nepārtrauktības seko, ka

$$|\tau(f^{kn}(X)) - \tau(p)| = |g^{kn}(\tau(x)) - \tau(p)| < \varepsilon,$$

ja  $n \geq M$ ; līdz ar to d) ir pierādīts.

e) Periodisko punktu blīvums ar topoloģisko saistību seko no iepriekšējā Apgalvojuma 11.1 d).

f) Pieņemsim, ka  $f : D \rightarrow D$  ir topoloģiski transitīvs. Jāparāda, ka  $g : E \rightarrow E$  ir topoloģiski transitīvs, proti

$$\forall x, y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in E : |z - x| < \varepsilon \text{ un } \exists n \in \mathbf{N} : |g^n(z) - y| < \varepsilon.$$

Apskatīsim divus kopas  $D$  elementus  $x' = \tau^{-1}(x)$  un  $y' = \tau^{-1}(y)$ . Tā kā  $\tau$  ir nepārtraukts, tad

$$\exists \delta_x : |w - x'| < \delta_x \Rightarrow |\tau(w) - \tau(x')| = |\tau(w) - x| < \varepsilon. \quad (11.1)$$

Līdzīgi

$$\exists \delta_y : |w - y'| < \delta_y \Rightarrow |\tau(w) - \tau(y')| = |\tau(w) - y| < \varepsilon. \quad (11.2)$$

Izvēlamies  $\delta \leq \min\{\delta_x, \delta_y\}$ . Tā kā  $f$  ir topoloģiski transitīva funkcija, tad

$$\exists z' \in D : |x' - z'| < \delta \text{ un } \exists n \in \mathbf{N} : |f^n(z') - y'| < \delta.$$

Pieņemsim, ka  $z = \tau(z')$ . Tā kā  $|x' - z'| < \delta \leq \delta_x$ , tad no (11.1) seko, ka

$$|z - x| = |\tau(z') - \tau(x')| < \varepsilon.$$

Līdzīgi no (11.2) seko, ka

$$|g^n(z) - y| = |\tau(f^n(z')) - \tau(y')| < \varepsilon,$$

jo  $|f^n(z') - y'| < \delta \leq \delta_y$ . Seko, ka  $g$  ir topoloģiski transitīva kopā  $E$ .

Tā kā  $\tau^{-1}$  ir tooloģiskā saite no  $g$  uz  $f$ , tad līdzīgi spriedumu kā iepriekš s pierāda apgalvojumu uz otru pusi.

g) Ja  $f$  un  $g$  ir nepārtrauktas funkcijas, tad šis apgalvojums seko no e) un f), un Teorēmas 9.6. Vispārīgais gadījums prasa citus matemātikas līdzekļus, kurus šeit mēs nedemonstrēsim. ■

Atzīmēsim, ka vispārīgā gadījumā jūtīga atkarība no sākuma nosacījumiem nav saglabājama ar topoloģisko saiti. Taču, ja  $f$  un  $g$  definīcijas apgabali ir slēgti un ierobežoti (kompaktas kopas), tad jūtīga atkarība no sākuma nosacījumiem saglabājas ar topoloģisko saiti.

Lai demonstrētu, ka jūtīga atkarība no sākuma nosacījumiem ne vienmēr saglabājas ar topoloģisko saiti, apskatīsim funkcijas:

$$\begin{aligned} f : ]0; 1[ \rightarrow ]0; 1[ \quad f(x) &= x^2, \\ g : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[ \quad g(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Vispirms secināsim, ka  $f$  nav jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem, proti, pierādīsim negāciju:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in ]0; 1[ \exists \varepsilon > 0 \forall y \in D \forall n \in \mathbf{N} : |x - y| \geq \varepsilon \text{ vai } |f^n(x) - f^n(y)| \leq \delta.$$

Ievērosim, ka  $f(x) = x^2$ ,  $f^2(x) = (x^2)^2 = x^4$ , ...,  $f^n(x) = x^{2^n}$ .

Brīvi fiksē  $\delta > 0$ ,  $x = \frac{1}{4}$  un izvēlas  $0 < \varepsilon < \min\{\delta; \frac{1}{4}\}$ , fiksē brīvi  $y \in D$ . Tad  $|x - y| \geq \varepsilon$  vai  $|x - y| < \varepsilon$ . Ja  $|x - y| < \varepsilon$ , tad tas nozīmē, ka

$$|\frac{1}{4} - y| < \varepsilon < \frac{1}{4} \Rightarrow y < \frac{1}{2}.$$

Ievērojot šo novērtējumu un  $x = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ , varam secināt, ka

$$\begin{aligned} |x^{2^n} - y^{2^n}| &= |x - y| |x^{2^n-1} + \dots + y^{2^n-1}| < \varepsilon (|x^{2^n-1}| + \dots + |y^{2^n-1}|) < \\ &< \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} \cdot 2^n < \varepsilon \cdot 1 < \delta. \end{aligned}$$

Funkcija  $g$  ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem, proti,

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \forall x \in ]1; +\infty[ \forall \varepsilon > 0 \exists y \in ]1; +\infty[ \exists n \in \mathbf{N} : \\ |x - y| < \varepsilon \ \& \ |f^n(x) - f^n(y)| > \delta. \end{aligned}$$

$\delta$  lomā var ņemt jebkuru pozitīvu skaitli, pieņemsim, ka esam tādu  $\delta > 0$  fiksējuši. Izvēlamies  $x \in ]1; +\infty[$  un  $\varepsilon > 0$  brīvi. Izvēlamies  $y = x + \frac{\varepsilon}{2}$  un  $n > \log_2 \frac{\delta}{\varepsilon} + 1$ . Tad pēc konstrukcijas  $|x - y| < \varepsilon$  un

$$\begin{aligned} |g^n(x) - g^n(y)| &= |x^{2^n} - y^{2^n}| = |x - y| |x^{2^n-1} + \dots + y^{2^n-1}| = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} |x^{2^n-1} + \dots + y^{2^n-1}| \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 \cdot 2^n = \varepsilon \cdot 2^{n-1} > \varepsilon \cdot 2^{\log_2 \frac{\delta}{\varepsilon} + 1 - 1} = \varepsilon \cdot \frac{\delta}{\varepsilon} = \delta. \end{aligned}$$

Attēlojums  $\tau : ]0; 1[ \rightarrow ]1; +\infty[$ , kas definēts ar izteiksmi  $\tau(x) = \frac{1}{x}$ , ir nepārtraukta funkcija intervālā  $]0; 1[$ , tā ir injekcija un surjekcija, kā arī tā ir dilstoša funkcija, tāpēc tai eksistē inversā funkcija  $\tau^{-1}(x) = x$ , kas arī ir nepārtraukta funkcija. Tātad  $\tau$  ir homeomorfisms. Viegli pārlicināties, ka izpildās komutativitātes īpašība:

$$\tau \circ f = \tau(f(x)) = \tau(x^2) = \frac{1}{x^2} = g \circ \tau = g(\tau(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Atliek secināt, ka topoloģiskās saites eksistence negarantē jūtīgas atkarības no sākumnosacījumiem pārņemšanu no vienas funkcijas uz otru.

Bet Teorēmas 11.1 pēdējais apgalvojums saka, ja zinām, ka attēlojums ir haotisks, tad topoloģiskās saites eksistence ar otru attēlojumu ļauj secināt, ka šis otrs attēlojums ir haotisks. Mēs to izmantosim, lai pierādītu svarīgu apgalvojumu par logistisko attēlojumu.

**Teorēma 11.2.** Funkcija  $h_4(x) = 4x(1 - x)$  ir haotiska intervālā  $[0; 1]$ .

**Pierādījums.** Pierādījums seko no fakta, ka logistiskais attēlojums  $h_4(x) = 4x(1 - x)$  intervālā  $[0; 1]$  ir topoloģiski saistīts ar telts attēlojumu

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & x \in ]\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Par topoloģisko saiti  $\tau : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  kalpo attēlojums

$$\tau(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2}x.$$

Skaidrs, ka tā ir nepārtraukta funkcija, kas attēlo intervālu  $[0; 1]$  sevī. Tā kā  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$  un  $\sin 0 = 0$ , tad tā ir surjektīva. Šī funkcija ir stingri augoša, jo

$$\tau'(x) = 2 \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}x \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \sin \pi x > 0, \quad x \in [0; 1],$$

tāpēc tā ir arī injektīva un tai eksistē inversā funkcija  $y = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ , kura ir nepārtraukta funkcija. Atliek pārlicināties par komutatīvitātes  $\tau \circ T = h \circ \tau$  izpildi:

$$\begin{aligned} (h \circ \tau)(x) &= h(\tau(x)) = h(\sin^2 \frac{\pi}{2}x) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2}x \cdot (1 - \sin^2 \frac{\pi}{2}x) = \\ &= 4 \sin^2 \frac{\pi}{2}x \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2}x = \sin^2 \pi x, \end{aligned}$$

$$(\tau \circ T)(x) = \tau(T(x)) = \begin{cases} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cdot 2x \right) = \sin^2 \pi x, & x \in [0; \frac{1}{2}], \\ \sin^2 \frac{\pi}{2}(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2 \pi x, & x \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Tā kā telts attēlojums ir haotisks, tad pēc Teorēmas 11.1 g) arī logistiskais attēlojums  $4x(1 - x)$  ir haotisks intervālā  $[0; 1]$ . ■

# NODAĻA NR. 12

## PERIODU DUBULTOJOŠAS KASKĀDES

**Anotācija.** Logistiskā attēlojuma izpēte pie parametra vērtībām starp 3 un 4. Fatū teorēma. Periodu dubultojošas kaskādes. Feigenbauma konstante.

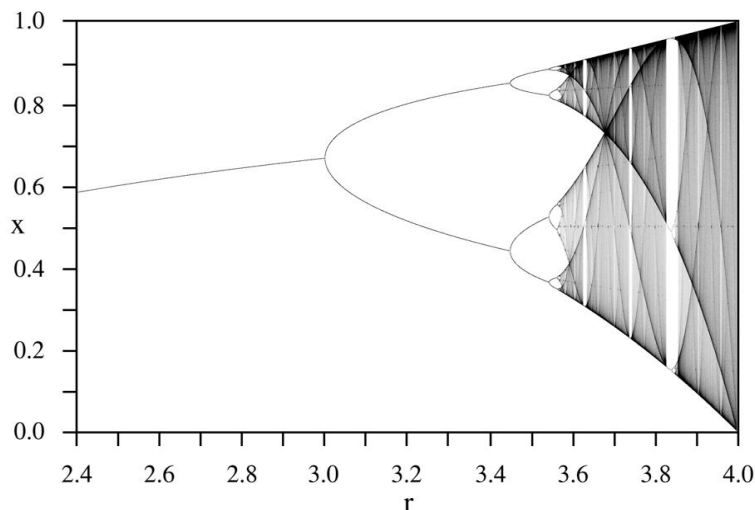
Lai analizētu logistisko funkciju  $h_r(x) = rx(1-x)$  uzvedību, parametram  $r$  mainoties no 3 līdz 4, var izmantot *Pieere Fatou* teorēmu.

**Fatū teorēma.** Ja kvadrātiskam polinomam  $f(x) = ax^2 + bx + c$  eksistē pievelkoša periodiska orbīta, tad polinoma kritiskais punkts  $-\frac{b}{2a}$  atrodas kādā no orbītas punktu stabilitātes kopām.

$x_0$  ir diferencējamas funkcijas  $f$  kritiskais punkts, ja  $f'(x_0) = 0$ . Ievērosim, ka teorēma neapgalvo, ka katrā pievelkoša periodiska punkta stabilitātes kopā eksistē kritiskais punkts. Tā kā ir tikai viens kritiskais punkts, tad tāda situācija nav iespējama. Teorēma apgalvo, ka kritiskais punkts pieder vienai no pievelkošo periodisko punktu stabilitātes kopām. Triviāls secinājums no Fatū teorēmas — kvadrātiskajam polinomam eksistē ne vairāk kā viena pievelkoša periodiska orbīta.

Logistiskās funkcijas  $h_r(x) = rx(1-x)$  kritiskais punkts ir  $\frac{1}{2}$ . Tātad, ja logistiskajai funkcijai  $h_r$  pie fiksētas  $r$  vērtības eksistē pievelkoša periodiska orbīta, tad varam apgalvot, ka kritiskais punkts atrodas orbītas stabilitātes kopā. Šo īpašību izmantosim, lai uzzīmētu logistiskās funkcijas  $h_r$  bifurkāciju diagrammu. Patrametru  $r$  atliek uz horizontālās ass, bet logistiskās funkcijas iterāciju vērtības  $h_r^n(x)$ ,  $n$  mainoties, piemēram, no 100 līdz 400, attēlo uz vertikālās ass. Piemēram, ja  $r = 3.5$ , tad kā attēlu iegūsim četrus punktus  $(3.5; 0.50088)$ ,  $(3.5; 0.875)$ ,  $(3.5; 0.38282)$ ,  $(3.5; 0.82694)$ ; tātad pievelkošo orbītu veido četri punkti. Bet, ja  $r = 3.8$ , tad  $h_r^{100}(\frac{1}{2}) = 0.71817$ ,  $h_r^{101}(\frac{1}{2}) =$

0.76913,  $h_r^{102}(\frac{1}{2}) = 0.67475$ , utt., zīmējumā tiek atlikti punkti  $(3.8; 0.71817)$ ,  $(3.8; 0.76913)$ , utt. tiek atrasti un zīmējumā attēloti visi punkti  $(3.8; h_r^{100}(\frac{1}{2}))$ ,  $(3.8; h_r^{101}(\frac{1}{2}))$ ,  $(3.8; h_r^{102}(\frac{1}{2}))$ , ...,  $(3.8; h_r^{400}(\frac{1}{2}))$ . Šeit nekādu likumsakarību neizdosies ieraudzīt. Parametra vērtība  $r$  tiek mainīta ar pietiekoši mazu soli. Rezultātā iegūsim šādu 12.1.zīmējumu:



12.1.zīmējums

Tā kā pievelkošā periodiskā orbīta pievelk kritisko punktu, tad šāda bifurkāciju diagramma ilustrē pievelkošās orbītas atrašanos.

12.1.zīmējumā redzama arī logistikās funkcijas uzvedība pie parametra vērtībām  $2 < r < 3$ . Šeit var novērot, ka pēc 100 iterācijām notiek kritiskā punkta iterāciju konverģence uz pievelkošo nekustīgo punktu  $p_r = \frac{r-1}{r}$ . Kad parametra vērtība ir  $r = 3$ , tad parādās periodu dubultojošā bifurkācija, proti, parametra vērtībām, kas pārsniedz 3, kritiskā punkta orbīta tiek pievilktā pie periodiskas orbītas, kuras periods ir 2. Savukārt pie parametra vērtības, kas nedaudz mazāka par 3.5, parādās vēl viena periodu dubultojoša bifurkācija. Šajā punktā periodiska orbīta ar periodu divi sadalās pievelkošā periodiskā orbītā ar periodu četri; tālāk tā sadalās pievelkošā periodiskā orbītā ar periodu astoņi, utt., sadalīšanās process turpinās bezgalīgi, to sauc par periodu dubultojušu kaskādi. Viens no interesantākajiem kaskādes veidošanās aspektiem ir īpašība, ka attālumu attiecības starp secīgām parametru vērtībām, pie kurām veidojas bifurkācija, konverģē uz noteiktu vērtību,

kuru sauc par *Feigenbauma konstanti*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta,$$

šeit ar  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , apzīmēti bifurkāciju punkti. 1978.gadā *Mitchell Feigenbaum* noskaidroja, ka šī konstante ir tāda pati dažādām atšķirīgām funkciju saimēm, kuras iet caur periodu dubultojošu bifurkāciju virkni. Feigenbauma konstantes vērtība ir  $\delta = 4.669201609\dots$

Precizējot logistiskā attēlojuma bifurkāciju punktus, varam tuvināti noteikt Feigenbauma konstantes vērtību.

$n$	$\mu_n$	$\mu_n - \mu_{n-1}$	$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$
0	3	-	-
1	3.44944...	0.449499...	-
2	3.544094...	0.094592...	4.752027...
3	3.564407...	0.020313...	4.656673...
4	3.568759...	0.0043532...	4.667509...
5	3.569692...	0.00093219...	4.668576...
6	3.569891...	0.00019964...	4.669354...

Kā redzams no šīs tabulas, tad  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 3.57\dots$  12.1.zīmējumā redzams, ka pie šīs parametra vērtības bifurkāciju diagrammā veidojas "logs". Tādi "logi" ir redzami vairāki. Kāpēc tādi veidojas, literatūrā pamatojums nav atrodams.

# NODAĻA NR. 13

## SIMBOLISKĀ DINAMIKA

**Anotācija.** Divu simbolu telpas jēdziens. Metrisku telpu labās īpašības. Lemma par simbolu telpas punktu tuvumu. Nobīdes attēlojums, tā īpašības: nepārtrauktība, periodisko punktu blīvums, blīvas orbītas eksistence. Nobīdes attēlojums kā haotisks attēlojums - sekas no teorēmas par nepārtrauktas funkcijas haotismu metriskā telpā. Sakarības starp simbolu telpu un vienības intervāla Kantora kopu. Topoloģiskā saistība starp nobīdes attēlojumu un logistisko funkciju.

Ar jēdzienu "simboliskā dinamika" matemātikā vispārīgi saprot dinamisku sistēmu modelēšanu ar telpām, kuras veido abstraktu simbolu bezgalīgas virknes. Katrs simbols reprezentē sistēmas stāvokli. Nobīdes operators reprezentē dinamiku. Simbolisko dinamiku pirmais izveidoja *Emil Artin* 1924.gadā, studējot biliardu.

Šajā nodaļā mēs noskaidrosim, kas ir simbolu telpa. Parādīsim, ka tā ir metriska telpa. Nākamajā nodaļā ar simboliskās dinamikas palīdzību atradīsim, ka logistikajam attēlojumam,  $r > 2 + \sqrt{5}$ , kopā  $\Lambda$  eksistē tāds punkts, kura orbīta ir blīva kopā  $\Lambda$ . Bet sāksim visu pēc kārtas.

**Definīcija 13.1.** Kopu no visām bezgalīgajām virknēm, kas sastāv no 0 un 1, sauc par *0 un 1 virkņu telpu* jeb *0 un 1 simbolu telpu* un apzīmē ar  $\Sigma_2$ . Tātad

$$\Sigma_2 = \{ s_0 s_1 s_2 \dots \mid \forall i \in \mathbf{N} \cup \{0\} : s_i = 0 \text{ vai } 1 \}.$$

$\Sigma_2$  elementus — virknes — sauksim arī par  $\Sigma_2$  punktiem.

Attāluma jēdziens, kas parasti tiek izmantots starp reālās taisnes punktiem, tiek lietots arī simbolu telpā.



**Definīcija 13.2.** Pieņemsim, ka  $s = s_0s_1s_2\dots$  un  $t = t_0t_1t_2\dots$ . Mēs apzīmēsim attālumu starp  $s$  un  $t$  ar  $d(s, t)$  un definēsim ar vienādību

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Tā kā  $|s_i - t_i|$  ir 0 vai 1, tad

$$0 \leq d(s, t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Tātad simbolu telpā attālums starp diviem elementiem ir skaitlis starp 0 un 2. Skaidrs, ka

$$d(s, t) = 0 \Leftrightarrow s = t.$$

Šī attāluma funkcija ir tikai viens no metrikas piemēriem. Vispārīgā gadījumā metrika tiek definēta:

**Definīcija 13.3.** Pieņemsim, ka  $X$  ir kopa un  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  ir funkcija no kopas  $X$  sakārtoto pāru kopas reālo skaitļu kopā. Ja jebkuriem  $x, y, z \in X$  izpildās sekojošie trīs nosacījumi, tad  $d$  sauc par *metriku* kopā  $X$ :

- 1)  $d(x, y) \geq 0$  un  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$  — simetrijas īpašība,
- 3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  — trīsstūra nevienādība.

Pāri  $(X, d)$  sauc par *metrisku telpu*.

Reālos skaitļos metrika starp diviem punktiem — starpības modulis. Skaidrs, ka  $|x - y| \geq 0$  jebkuriem  $x, y \in \mathbf{R}$ , un  $|x - y| = |y - x|$ . Jebkuriem  $x, y, z \in \mathbf{R}$  izpildās trīsstūra nevienādība  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ , jo:

tā kā  $-|a| \leq a \leq |a|$  un  $-|b| \leq b \leq |b|$ , tad  $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$  jeb  $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ , tas ir,  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Tad  $|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$ .

**Apgalvojums 13.1.**  $(\Sigma_2, d)$  ir metriskā telpa.

**Pierādījums.** Par pirmo divu metrikas īpašību izpildi pārlicinājāmajies iepriekš. Trešā īpašība izpildās tāpēc, ka reālajos skaitļos moduļa metrika apmierina trīsstūra nevienādību, tātad jebkuriem  $s, t, z \in \Sigma_2$ :

$$\begin{aligned} d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - z_i + z_i - t_i|}{2^i} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - z_i| + |z_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - z_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z_i - t_i|}{2^i} = d(s, z) + d(z, t). \blacksquare \end{aligned}$$

Reālo skaitļu kopā visas topoloģiskās īpašības un nepārtrauktība ir bāzētas uz attāluma jēdzienu. Ja mēs kopā esam definējuši metriku, tad mēs varam aprakstīt kopas topoloģiju. Nākošajā definīcijā uzskaitīsim tos jēdzienus, kas mums ir jau zināmi reālo skaitļu kopas gadījumā. Studentiem, kas pazīstami ar metriskām un topoloģiskām telpām tas būs atkārtojums.

**Definīcija 13.4.** Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa.

a) Kopu  $U \subset X$  sauc par *vaļēju*, ja

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U.$$

b) Fiksējam  $\varepsilon > 0$  un  $x \in X$ . Kopu

$$N_\varepsilon = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

sauc par *punkta  $x$   $\varepsilon$ -apkārtni*.

c) Pieņemsim, ka  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ir kopas  $X$  elementu virkne. *Virkne konverģē uz  $x \in X$* , ja

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall k \geq N : \quad d(x, x_k) < \varepsilon.$$

d) Pieņemsim, ka  $S \subset X$ . Punktu  $x \in X$  sauc par kopas  $S$  *akumulācijas punktu* (jeb robežpunktu), ja jebkura punkta  $x$   $\varepsilon$ -apkārtnē satur kopas  $S$  punktu, kurš nesakrīt ar  $x$ .

e)  $X$  apakškopa ir *slēgta*, ja tā satur visus savus akumulācijas punktus.

f) Pieņemsim, ka  $B \subset X$ ,  $A \subset B$ . Kopa  $A$  ir *blīva* kopā  $B$ , ja jebkura punkta  $x \in B$  jebkura  $\varepsilon$ -apkārtnē satur punktu no  $A$ , kurš nesakrīt ar  $x$ .

g) Pieņemsim, ka  $(Y, d_2)$  ir metriska telpa. Funkciju  $f : X \rightarrow Y$  sauc par *nepārtrauktu punktā  $x_0 \in X$* , ja

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Funkciju sauc par *nepārtrauktu kopā  $X$* , ja tā ir nepārtraukta jebkurā kopas punktā.

Visi topoloģiskie fakti, kurus mēs apskatījām kursa sākumā reālo skaitļu gadījumā, ir patiesi arī daudz vispārīgākajā metriskā telpu gadījumā.

**Apgalvojums 13.2.**

a) Kopa  $U$  ir vaļēja tad un tikai tad, ja  $\forall x \in U \quad \exists N_\varepsilon(x) : \quad N_\varepsilon(x) \subset U$ .

b) Punkta apkārtne metriskā telpā ir vaļēja kopa, t.i., ja  $X$  ir metriska telpa,  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ , tad  $N_\varepsilon(x)$  ir vaļēja kopa.

c) Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa,  $x \in X$  un  $S \subset X$ . Sekojoši apgalvojumi ir ekvivalenti:

i)  $x$  ir  $S$  akumulācijas punkts;

ii)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in S : \quad 0 < d(x, y) < \varepsilon$ ;

iii) ja  $U$  ir vaļēja kopa un  $x \in U$ , tad  $U \cap S$  satur vismaz vienu tādu punktu, kas nesakrīt ar  $x$ ;

iv) eksistē kopas  $S$  tādu punktu, kas atšķirīgi no  $x$ , virkne, kura konverģē uz  $x$ .

d) Vaļējas kopas papildinājums ir slēgta kopa un otrādi — slēgtas kopas papildinājums ir vaļēja kopa.

e) Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa,  $B \subset X$  un  $A \subset B$ . Sekojoši apgalvojumi ir ekvivalenti:

i)  $A$  ir blīva kopā  $B$ ;

ii)  $\forall b \in B \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad d(a, b) < \varepsilon$ ;

iii)  $\forall b \in B \quad \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ;

iv) katrā  $X$  vaļējā kopā, kurai ir netukšs šķēlums ar kopu  $B$ , atrodas vismaz viens kopas  $A$  elements.

f) Pieņemsim, ka  $X, Y$  ir metriskas telpas,  $f : X \rightarrow Y$  ir nepārtraukta funkcija,  $U \subset Y$  ir vaļēja kopa, tad arī  $f^{-1}(U) \subset X$  ir vaļēja kopa.

Izrādās, divu virkņu tuvumu telpā  $(\Sigma_2, d)$  nosaka tas fakts, cik daudz sakrīt virkņu simboli, svarīgi ir tieši, cik simboli sakrīt virkņu sākumā.

**Lemma 13.1.** Pieņemsim, ka  $s, t \in \Sigma_2$ . Ja pirmie  $n + 1$  simboli virknēs  $s$  un  $t$  ir vienādi, tad  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ . No otras puses, ja  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ , tad virknēs  $s$  un  $t$  pirmie  $n$  simboli ir vienādi.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka esam brīvi fiksējuši telpā  $\Sigma_2$  divas tādas virknes  $s = s_0s_1s_2\dots$  un  $t = t_0t_1t_2\dots$ , ka  $s_i = t_i$  visiem  $i = 0, 1, \dots, n$ . Tad

$$\begin{aligned} d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \\ &= 0 + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

No otras puses, ja  $j < n$  un  $s_j \neq t_j$ , tad

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^n}.$$

Tas nozīmē, ja  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ , tad  $s_j = t_j$  jebkuram  $j < n$ , t.i., pirmie  $n$  simboli virknēs  $s$  un  $t$  sakrīt. ■

Simbolu telpas ilustrācijai apskatīsim dažus piemērus.

**Piemērs 13.1.** Attālums starp divām virknēm  $s$  un  $t$  no simbolu telpas  $\Sigma_2$ , kurās sakrīt tikai pirmais (t.i., 0-tais) simbols, ir 1:

$$d(s, t) = 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Bet, ievērojiet, ja pirmais (t.i., 0-tais) simbols virknēs ir atšķirīgs, bet visi pārējie simboli virknēs sakrīt, arī tad attālums starp virknēm ir 1:

$$d(s, t) = \frac{1}{2^0} + 0 = 1.$$

Ja virknēs  $s$  un  $t$  sakrīt pirmie divi simboli, tad

$$d(s, t) = 0 + 0 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Bet, ja virknēs atšķirīgi ir tikai pirmie divi simboli, tad

$$d(s, t) = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + 0 = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

**Piemērs 13.2.**  $S$  ir to  $\Sigma_2$  virkņu kopa, kuras sākas ar 011. Tad kopa  $S$  ir slēgta.

**Pierādījums.** Ir jāpierāda, ka visi  $S$  akumulācijas punkti pieder kopai  $S$ .

Izvēlamies  $s \in \Sigma_2$  - kopas  $S$  akumulācijas punktu. Tad jebkura punkta  $s$  apkārtnē  $N(s)$  satur  $S$  punktu, kurš nesakrīt ar  $s$ . Izvēlēsimies  $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$ . No iepriekš teiktā pēc akumulācijas punkta definīcijas seko, ka

$$\exists s^* \in N_{\frac{1}{2^3}}(s) \cap S \text{ un } s^* \neq s.$$

No apkārtnes definīcijas seko, ka  $d(s^*, s) < \frac{1}{2^3}$ , no Lemmas 13.1 savukārt seko, ka tad virknēs  $s$  un  $s^*$  jāsakrīt pirmajiem trim simboliem. Tā kā  $s^*$  ir no kopas  $S$ , tad  $s^* = 011\dots$ , tad arī  $s = 011\dots$ , t.i.,  $s \in S$ . ■

**Piemērs 13.3.** Kopa no visām tām  $\Sigma_2$  virknēm, kas beidzas ar bezgalīgi daudziem 1, ir blīva simbolu telpā  $\Sigma_2$ . Tas ir, kopa

$$A = \{s_0s_1s_2\dots \in \Sigma_2 \mid \exists N \in \mathbf{N} \forall i \geq N : s_i = 1\}$$

ir blīva kopā  $\Sigma_2$ .

**Pierādījums.** Fiksējam brīvi  $t \in \Sigma_2$  un  $\varepsilon > 0$ . Ir jāpierāda, ka

$$\exists s \in A \cap N_\varepsilon(t), \text{ t.i., } \exists s \in A : d(s, t) < \varepsilon.$$

Izvēlamies  $n$  tik lielu, lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Meklētais  $s$  ir tāds  $\Sigma_2$  punkts, kura pirmie  $n + 1$  simboli sakrīt ar  $t$  pirmajiem  $n + 1$  simboliem, bet visi pārējie ir 1. Tad  $s \in A$  pēc konstrukcijas un no Lemmas 13.1 seko, ka  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . ■

Zinot pamatjēdzienus par  $\Sigma_2$ , varam interesēties par noteikta attēlojuma uzvedību šajā simbolu telpā. Šis īpašais attēlojums ir ļoti vienkāršas dabas — tas jebkurai virknei no  $\Sigma_2$  "noēd" pirmo simbolu, precīzāk:

**Definīcija 13.5.** Attēlojumu  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , kas definēts šādi:

$$\forall s = s_0s_1s_2\dots \in \Sigma_2 \quad \sigma(s_0s_1s_2\dots) = s_1s_2s_3\dots$$

sauc par *nobīdes attēlojumu* (*shift map*).

Tālāk noskaidrosim, kādas īpašības piemīt šim attēlojumam.

**Apgalvojums 13.3.** Nobīdes attēlojumam  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  piemīt šādas īpašības:

- a) nobīdes attēlojums ir nepārtraukts;
- b) nobīdes attēlojuma periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $\Sigma_2$ ;
- c) nobīdes attēlojumam ir  $2^n$  periodiski punkti ar periodu  $n$ ;
- d) nobīdes attēlojuma eventuālo periodisko punktu kopa, kuri nav periodiski punkti, ir blīva kopā  $\Sigma_2$ ;
- e) eksistē tāds punkts kopā  $\Sigma_2$ , kura orbīta ir blīva kopā  $\Sigma_2$ , t.i., eksistē tāds  $s^* \in \Sigma_2$ , ka kopa

$$\{s^*, \sigma(s^*), \sigma^2(s^*), \sigma^3(s^*), \dots\}$$

ir blīva kopā  $\Sigma_2$ ;

- f) punktu, kuri nav ne periodiski, ne eventuāli periodiski, kopa ir blīva kopā  $\Sigma_2$ .

**Pierādījums.**

a) Fiksējam brīvi  $s \in \Sigma_2$  un  $\varepsilon > 0$ . Jāparāda, ka

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in \Sigma_2 : \quad d(s, t) < \delta \Rightarrow d(\sigma(s), \sigma(t)) < \varepsilon.$$

Izvēlamies  $n$  tik lielu, lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$  un izvēlamies  $\delta = \frac{1}{2^{n+2}}$ . Ja  $d(s, t) < \delta$ , tad no Lemmas 13.1 mēs zinām, ka  $s$  un  $t$  pirmie  $n + 2$  simboli sakrīt. Tad  $\sigma(s)$  un  $\sigma(t)$  sakrīt  $n + 1$  pirmie simboli un tādēļ

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

b) Pieņemsim, ka  $s = s_0s_1s_2\dots$  ir  $\sigma$  periodisks punkts ar periodu  $k$ . Tad

$$\sigma^n(\sigma^k(s)) = \sigma^n(s).$$

Tā kā  $\sigma^n(s)$  "aizmirst" punkta  $s$  pirmos  $n$  simbolus, redzams, ka

$$\sigma^n(\sigma^k(s_0s_1s_2\dots)) = s_{n+k}s_{n+k+1}s_{n+k+2}\dots = s_ns_{n+1}s_{n+2}\dots = \sigma^n(s_0s_1s_2\dots)$$

un jebkuram  $n$ :  $s_{n+k} = s_n$ . No šejienes seko, ka  $s$  ir periodisks punkts ar periodu  $k$  tad un tikai tad, ja  $s$  ir virkne, kurā atkārtojas  $k$  simboli  $s_0s_1\dots s_{k-1}$  bezgalīgi daudzas reizes.

Lai parādītu, ka  $\sigma$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $\Sigma_2$ , nepieciešams parādīt, ka jebkuram  $t \in \Sigma_2$  jebkuram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds  $\sigma$  periodisks punkts, kurš pieder punkta  $t$   $\varepsilon$ -apkārtni  $N_\varepsilon(t)$ . No iepriekšējās diskusijas mēs redzējām, ka tas nozīmē atrast virkni kopā  $N_\varepsilon(t)$ , kura ir veidota, atkārtojot pirmos  $k$  simbolus virknē bezgalīgi daudzas reizes.

Ja  $t = t_0t_1t_2\dots$  un  $\varepsilon > 0$  izvēlēti brīvi, tad  $n$  izvēlamies tā, ka  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ .  $s$  izvēlamies šādu:

$$s = t_0t_1t_2\dots t_nt_0t_1t_2\dots t_nt_0t_1t_2\dots t_n\dots$$

Tā kā virknēs  $s$  un  $t$  sakrīt pirmie  $n + 1$  simboli, tad pēc Lemmas 13.1 seko, ka  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Tad  $s \in N_\varepsilon(t)$  un  $s$  ir periodisks punkts pēc konstrukcijas.

c) Tā kā  $s$  ir periodisks punkts ar periodu  $n$  tad un tikai tad, ja  $s$  ir virkne, kurā atkārtojas  $n$  simboli  $s_0s_1\dots s_{n-1}$  bezgalīgi daudzas reizes, tad, lai noskaidrotu, cik daudz var būt atšķirīgu periodisko punktu ar periodu  $n$ , nepieciešams uzzināt, cik daudz atšķirīgas virknes  $s_0s_1\dots s_{n-1}$  var izveidot ar diviem simboliem 0 un 1. Piemēram, perioda 1 gadījumā ir jāatkāro viena

simbola virkne bezgalīgi daudzas reizes. Tā kā ir tikai divi simboli, tad ir tikai divi nekustīgie punkti nobīdes attēlojumam, proti, virknes 000... un 111.... Perioda 2 gadījumā ir jāatkāro divu simbolu virkne bezgalīgi daudzas reizes. Tā kā ir tikai divi simboli, tad var izveidot  $2^2$  dažādas virknes no 2 simboliem garumā 2, proti, 00, 01, 10, 11, tātad nobīdes attēlojumam ir četri periodiski punkti ar periodu 2. Vispārīgā gadījumā var izveidot  $2^n$  dažādas virknes no 2 simboliem garumā  $n$ , tāpēc nobīdes attēlojumam ir  $2^n$  periodiski punkti ar periodu  $n$ .

d) Patiesībā var pierādīt pat vēl spēcīgāku apgalvojumu: jebkura periodiskā punkta eventuāli periodiskie punkti veido blīvu kopu kopā  $\Sigma_2$ . Pierādījums, piemēram, par eventuāli periodisko punktu nekustīgajam punktam 111... kopas blīvumu ir apskatītais Piemērs 13.3. Veicot atbilstošas korekcijas, var pierādīt: ja  $s_0s_1\dots s_{n-1}s_0s_1\dots s_{n-1}s_0s_1\dots s_{n-1}\dots$  ir nobīdes attēlojuma periodisks punkts ar periodu  $n$ , tad kopa

$$\{t_0t_1t_2\dots \in \Sigma_2 \mid \exists N \in \mathbf{N} \forall k \geq N : t_{k \cdot n} = s_0, t_{k \cdot n + 1} = s_1, \dots, t_{k \cdot n + n - 1} = s_{n-1}\}$$

ir blīva kopā  $\Sigma_2$ .

e) Virkne, kura sākas ar

$$0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 101\ 110\ 111$$

un tad tālāk iekļauj visus iespējamus 0 un 1 blokus ar 4 simboliem (tādu ir  $2^4 = 16$ ), tad 5 simboliem (tādu ir  $2^5 = 32$ ), tad tālāk 6 simboliem, utt., sauc par *Morses virkni* (*Morse sequence*). Tātad

$$s^* = 0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 101\ 110\ 111\ 0000\ 0001\ 0010\ \dots$$

Jāparāda, ka šīs virknes  $s^*$  orbīta pie nobīdes attēlojuma ir blīva kopā  $\Sigma_2$ .

Fiksējam brīvi  $t \in \Sigma_2$  un  $\varepsilon > 0$ . Jāparāda, ka

$$\exists s \in \{s^*, \sigma(s^*), \sigma^2(s^*), \dots\} : d(s, t) < \varepsilon.$$

Izvēlamies  $n$  tik lielu, lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . No  $s^*$  konstrukcijas seko, ka eksistēs tāda  $\sigma$  iterācija  $m$ , ka  $\sigma^m(s^*)$  pirmie  $n + 1$  simboli sakrītīs ar virknes  $t \in \Sigma_2$  pirmajiem  $n + 1$  simboliem (t.i., tā kā  $s^*$  satur atbilstošo  $n + 1$  simbolu bloku no 0 un 1, tad būs tāda iterācija  $m$ , kas "noēdīs"  $s^*$  sākumā esošos nevajadzīgos simbolus), tad pēc Lemmas 13.1:

$$d(\sigma^m(s^*), t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

f) Tā kā neperiodisko punktu kopa iekļauj kā apakškopu Morses virknes orbītu, tad f) tieši seko no e). ■

Apgalvojums 13.3 dod līdzekļus, ar kuriem var raksturot nobīdes attēlojuma  $\sigma$  uzvedību simbolu telpā  $\Sigma_2$ . Tālāk parādīsim, ka no b) un e) seko, ka  $\sigma$  ir topoloģiski transitīvs attēlojums. Topoloģiskās transitivitātes definīcija metriskā telpā ir analogiska reālo skaitļu gadījumam.

**Definīcija 13.6.** Pieņemsim, ka  $D$  ir metriskas telpas  $(X, d)$  apakškopa. Attēlojumu  $f : D \rightarrow D$  sauc par *topoloģiski transitīvu kopā  $D$* , ja

$$\forall x, y \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in D \quad \exists n \in \mathbf{N} : \quad d(x, z) < \varepsilon \ \& \ d(f^n(z), y) < \varepsilon.$$

**Apgalvojums 13.4.** Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa,  $D \subset X$  un  $f : D \rightarrow D$ . Ja  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$  un eksistē tāds punkts, kura orbīta ir blīva kopā  $D$ , tad  $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$ .

**Pierādījums.** Tātad mums ir dots, ka  $f : D \rightarrow D$ ,  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$  un eksistē punkts ar blīvu orbītu, t.i., eksistē tāds punkts  $x_0 \in D$ , ka jebkura vaļēja kopa, kurai ir netukšs šķēlums ar  $D$ , satur punktu izskatā  $f^k(x_0)$ .

Pierādījumu sāksim ar diviem novērojumiem. Vispirms, ja  $D$  ir galīga kopa, tad  $D$  sastāv no viena punkta periodiskas orbītas. Ja  $D$  ir galīga kopa, tad  $f$  ir topoloģiski transitīvs kopā  $D$ . Otrkārt, ja  $D$  ir bezgalīga kopa, tad neeksistē tāds punkts ar blīvu orbītu, kurš būtu periodisks. Tas ir, ja  $x_0$  ir periodisks punkts vai eventuāli periodisks punkts, tad  $x_0$  orbīta nav blīva kopā  $D$ . Tas seko no fakta, ka galīga apakškopa bezgalīgai kopai nevar būt blīva kopa.

Tagad pierādīsim, ka  $f$  ir topoloģiski transitīvs attēlojums kopā  $D$ . Pieņemsim, ka  $U$  un  $V$  ir vaļējas kopas, kurām ir netukšs šķēlums ar  $D$ . Mums jāparāda, ka

$$\exists x \in U \cap D \text{ un } \exists n \in \mathbf{N} : f^n(x) \in V.$$

Ievērojot iepriekšējos novērojumus, mums ir jāapskata tikai gadījums, ja  $D$  ir bezgalīga kopa. Pēc apgalvojuma nosacījumiem eksistē tāds punkts  $x_0$  kopā  $D$ , kura orbīta ir blīva kopā  $D$ . Izvēlas  $k$  tādu, lai  $f^k(x_0) \in U$ . Lai pabeigtu pierādījumu, pietiekami parādīt, ka

$$\exists m \in \mathbf{N} \quad m > k : \quad f^m(x_0) \in V.$$

Šādā gadījumā varētu ņemt  $x = f^k(x_0)$  un  $n = m - k$ . Tad  $x \in U$  un punkts

$$f^n(x) = f^{m-k}(x) = f^{m-k}(f^k(x_0)) = f^m(x_0) \in V.$$



Lai pierādītu tāda  $m$  eksistenci, ir pietiekoši parādīt, ka ir bezgalīgi daudz punkta  $x_0$  iterāciju kopā  $V$ . Šādā gadījumā, tā kā ir tikai galīgi daudz naturālo skaitļu, kas mazāki vai vienādi ar  $k$ , tad ir bezgalīgi daudz iterāciju formā  $f^m(x_0)$ , kur  $m > k$ . Mēs izmantosim pierādījumu no pretējā, lai parādītu, ka eksistē bezgalīgi daudz punkta  $x_0$  iterāciju kopā  $V$ .

Pieņemsim, ka  $V$  satur tikai galīgu skaitu  $x_0$  iterāciju un  $p$  ir periodisks punkts no  $V$ . Tāds  $p$  eksistē, jo  $f$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $D$ . No otrā novērojuma seko, ka  $p$  neietilpst punkta  $x_0$  orbītai. Tātad, ja  $f^j(x_0)$  ir viena no punkta  $x_0$  iterācijām, kura pieder kopai  $V$ , tad

$$d(f^j(x_0), p) > 0.$$

Tā kā ir tikai galīgs skaits  $x_0$  iterāciju, kas pieder  $V$ , tad var atrast to iterāciju, kura atrodas vistuvāk, šo attālumu apzīmēsim ar  $\varepsilon$ . Tad  $N_\varepsilon(p)$  ir vaļēja kopa un tai ir netukšs šķēlums ar  $D$ . Tā kā  $V$  un  $N_\varepsilon(p)$  ir vaļējas kopas, tad  $V \cap N_\varepsilon(p)$  ir vaļēja kopa un satur  $p$ , tad to šķēlums ar  $D$  arī nav tukša kopa. Tā kā  $x_0$  orbīta ir blīva kopā  $D$ , tad

$$\exists i : f^i(x_0) \in V \cap N_\varepsilon(p).$$

No šejienes seko, ka  $f^i(x_0) \in V$  un no  $\varepsilon$  definīcijas seko, ka

$$d(f^i(x_0), p) \geq \varepsilon.$$

Bet no tā seko, ka  $f^i(x_0) \notin N_\varepsilon(p)$ , tad arī

$$f^i(x_0) \notin V \cap N_\varepsilon(p).$$

Iegūta pretruna. Tā kā mēs pieņēmām, ka  $V$  satur tikai galīgu skaitu  $x_0$  iterāciju, tad atliek secināt — pieņēmums izdarīts aplam, t.i.,  $V$  satur bezgalīgi daudz punkta  $x_0$  iterāciju. ■

9.nodaļā reālu skaitļu kopu gadījumā mēs pierādījām teorēmu, kas apgalvoja, ka bezgalīgas kopas gadījumā, ja nepārtraukts attēlojums, kas ir invariants šajā kopā, ir topoloģiski transitīvs un tā periodisko punktu kopa ir blīva, tad šis attēlojums ir haotisks. Pirms formulējam atbilstošo metriskās telpas analogu, precizēsim nepieciešamās definīcijas metriskās telpās.

**Definīcija 13.7.** Pieņemsim, ka  $D$  ir metriskas telpas  $(X, d)$  apakškopa. Attēlojumu  $f : D \rightarrow D$  sauc par *jūtīgi atkarīgu no sākuma nosacījumiem kopā  $D$* , ja

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in D \quad \exists n \in \mathbf{N} : d(x, y) < \varepsilon \ \& \ d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

**Definīcija 13.8.** Pieņemsim, ka  $D$  ir metriskas telpas  $(X, d)$  apakškopa. Attēlojumu  $f : D \rightarrow D$  sauc par *haotisku kopā*  $D$ , ja

- a)  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$ ;
- b)  $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$ ;
- c)  $f$  ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem kopā  $D$ .

Kā redzams, tad daudzi metrisku telpu jēdzieni ir pilnīgi analogiski reālo skaitļu jēdzieniem. Iepriekšējās definīcijas pilnībā sakrīt ar reālo skaitļu gadījumu, modulis  $|\cdot|$  aizvietots ar  $d(\cdot, \cdot)$ . Bet tas ir pilnīgi dabīgi, jo viens no metrikas pamatpiemēriem ir moduļa metrika reālo skaitļu kopā.

**Teorēma 13.1.** Pieņemsim, ka  $D$  ir bezgalīga metriskas telpas  $(X, d)$  apakškopa un  $f : D \rightarrow D$  ir nepārtraukta funkcija. Ja  $f$  ir topoloģiski transitīva kopā  $D$  un  $f$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $D$ , tad  $f$  ir haotiska kopā  $D$ .

Teorēmas pierādījums ir pilnīgi analogisks reālo skaitļu gadījuma Teorēmai 9.6.

No iepriekš minētās teorēmas seko, ka nobīdes attēlojums ir haotisks simbolu telpā  $\Sigma_2$ , un var secināt, ka tas ir jūtīgi atkarīgs no sākuma nosacījumiem. Faktiski var pierādīt, ka jebkurā punkta apkārtnē eksistē tāds punkts un tāda šī punkta iterācija, ka tā atrodas attālumā 2 no pirmā punkta tās pašas iterācijas. Tas vispār ir īpašs izņēmuma piemērs attiecībā uz jūtīgumu pret sākuma nosacījumiem (maksimālais attālums starp diviem simbolu telpas punktiem ir 2!).

**Apgalvojums 13.5.** Pieņemsim, ka  $s \in \Sigma_2$  un  $\varepsilon > 0$ . Tad

$$\exists t \in \Sigma_2 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad [d(s, t) < \varepsilon \text{ un } \forall n > N : d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = 2].$$

**Pierādījums.** Tātad brīvi fiksējam  $s = s_0s_1s_2\dots \in \Sigma_2$  un  $\varepsilon > 0$ . Mēģināsim parādīt, ka  $\exists t \in \Sigma_2 \quad \exists N \in \mathbf{N} : d(s, t) < \varepsilon$ , bet  $\forall n > N : d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = 2$ .

$N$  izvēlamies tik lielu, lai  $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ . Ņemam  $t = t_0t_1t_2\dots$  tādu, kuram pirmie  $N + 1$  simboli sakrīt ar  $s$  pirmajiem  $N + 1$  simboliem, bet visi pārējie  $t$  simboli ir atšķirīgi no  $s$  atbilstošajiem simboliem. Tas ir,

$$s_i = t_i, \quad i \leq N, \quad \text{un } s_i \neq t_i, \quad i > N.$$

No Lemmas 13.1 seko, ka

$$d(s, t) \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Ja  $n > N$ , tad virknes  $\sigma^n(s)$  un  $\sigma^n(t)$  atšķiras visos simbolos, tāpēc

$$d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n} - t_{i+n}|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Tātad esam atraduši tādu  $t \in \Sigma_2$  un tādu  $N \in \mathbf{N}$ , ka  $d(s, t) < \varepsilon$  un  $\forall n > N : d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = 2$ . ■

**Sekas 13.1.** Nobīdes attēlojums  $\sigma$  ir haotisks simbolu telpā  $\Sigma_2$ .

**Pierādījums.** Esam pierādījuši Apgalvojumā 13.3.b), ka  $\sigma$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $\Sigma_2$ , Apgalvojumā 13.3.e), ka eksistē punkts, kura orbīta pie  $\sigma$  iterācijām ir blīva telpā  $\Sigma_2$ , tad no Apgalvojuma 13.4 seko, ka  $\sigma$  ir topoloģiski transitīvs attēlojums kopā  $\Sigma_2$ . Tā kā  $\sigma$  ir arī nepārtraukta funkcija (pierādīts Apgalvojumā 13.3.a)), tad pēdējā Teorēma 13.1 ļauj secināt, ka  $\sigma$  ir haotisks attēlojums simbolu telpā  $\Sigma_2$ . ■

Atgriezīsimies pie logistikā attēlojuma

$$h_r(x) = rx(1 - x), \quad r > 2 + \sqrt{5},$$

uzvedības izpētes kopā

$$\Lambda = \{x \mid \forall n : h^n(x) \in [0; 1]\}.$$

Parādīsim, ka  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  un  $h_r : \Lambda \rightarrow \Lambda$  ir topoloģiski saistītas, ja  $r > 2 + \sqrt{5}$ . Šī saistība demonstrēs to, ka kopā  $\Lambda$  eksistē tāds punkts, kura orbīta pie  $h_r$  ir blīva kopā  $\Lambda$ . Šis apgalvojums ir patiess arī, ja  $4 < r \leq 2 + \sqrt{5}$ , bet to pierādīt ir sarežģītāk.

Vispirms atzīmēsim, ka topoloģiskā saistība metriskās telpās ir definēta tieši tāpat kā iepriekš (reālo skaitļu kopu gadījumā).

Definēsim funkciju  $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ , kura būs topoloģiskā saite. Atgādināsim, ka

$$\begin{aligned} I_0 &= [0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}], \\ I_1 &= [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; 1]; \\ \Lambda_1 &= \{x \mid h(x) \in [0; 1]\} = I_0 \cup I_1. \end{aligned}$$

Tā kā  $\Lambda \subset \Lambda_1$ , tad  $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$ . Katram  $x \in \Lambda$  definēsim virkni

$$\psi(x) = s_0 s_1 s_2 \dots \in \Sigma_2$$

tā, ka jebkuram  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$s_n = 0 \Leftrightarrow h^n(x) \in I_0,$$

$$s_n = 1 \Leftrightarrow h^n(x) \in I_1.$$

Piemēram, ja  $r = 5$  un  $x = \frac{4}{5} \in I_1$ , tad  $h(\frac{4}{5}) = 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 - \frac{4}{5}) = \frac{4}{5} \in I_1$  —  $\frac{4}{5}$  ir nekustīgais punkts, visas tā iterācijas pieder  $I_1$ , tāpēc  $\psi(\frac{4}{5}) = 111\dots$ . Bet, ja  $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \in I_0$ , tad

$$h_5(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}) = 1 \in I_1;$$

$$h_5^n(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}) = 0 \in I_0, \forall n \geq 2;$$

$$\psi(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}) = 01000\dots$$

Mēs varam par  $\psi(x)$  domāt kā par punkta  $x$  maršrutu.

**Teorēma 13.2.** Funkcija  $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  ir topoloģiskā saite, t.i.,

- 1)  $\psi$  ir injekcija un surjekcija;
- 2)  $\psi$  ir nepārtraukta funkcija;
- 3)  $\psi^{-1}$  ir nepārtraukta funkcija;
- 4)  $\psi \cdot h = \sigma \cdot \psi$ .

**Pierādījums.** Pierādījumu sāksim ar intervālu virknes

$$I_{s_0} \supset I_{s_0 s_1} \supset I_{s_0 s_1 s_2} \supset \dots \supset I_{s_0 s_1 \dots s_n} \supset$$

definēšanu katrai virknei  $s_0 s_1 s_2 \dots \in \Sigma_2$ . Intervāli tiek izvēlēti tā, ka

$$\forall n \quad I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subset \Lambda_n.$$

Kad būs šī konstrukcija pabeikta, mēs pierādīsim teorēmas atsevišķos apgalvojumus.

Pieņemsim, ka  $h, I_0, I_1$  definēti kā diskusijā pirms teorēmas formulējuma, virkne  $s_0 s_1 s_2 \dots \in \Sigma_2$ . Jebkuram  $n$  intervālu  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  definēsim induktīvi. Pieņemsim, ka

$$\begin{aligned} I_{s_0} &= I_0, & \text{ja } s_0 &= 0, \\ I_{s_0} &= I_1, & \text{ja } s_0 &= 1. \end{aligned}$$

Pieņemsim, ka  $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$  ir definēts. Tad

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \{x \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \mid h^n(x) \in I_{s_n}\},$$

kur  $I_{s_n} = I_0$ , ja  $s_n = 0$ , un  $I_{s_n} = I_1$ , ja  $s_n = 1$ . Citiem vārdiem,  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  ir  $\Lambda$  punktu kopa, kas apmierina nosacījumu, ka

$$\forall k \leq n \quad h^k(x) \in I_{s_k}.$$

Šeit atkal,  $I_{s_k} = I_0$ , ja  $s_k = 0$ , un  $I_{s_k} = I_1$ , ja  $s_k = 1$ . Redzams, ka punktiem no  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  ir kopīgs maršruts pirmajām  $n$  iterācijām pie attēlojuma  $h$ . Tas ir, ja  $x$  un  $y$  pieder  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ , tad jebkuram  $k$ , kurš mazāks vai vienāds ar  $n$ , zināms, ka

$$h^k(x) \in I_0 \Leftrightarrow h^k(y) \in I_0 \text{ vai } h^k(x) \in I_1 \Leftrightarrow h^k(y) \in I_1.$$

Varam apgalvot, ka  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  ir viens no intervāliem, kuru ietver  $\Lambda_{n+1}$ , kur

$$\Lambda_{n+1} = \{x \mid h^{n+1}(x) \in [0; 1]\}.$$

Šo apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc  $n$ .

Kopa  $I_{s_0}$  ir  $I_0$  vai  $I_1$  pēc definīcijas, kā arī  $\Lambda_1 = I_0 \cup I_1$ , tā kā apgalvojums ir patiess  $n = 0$ .

Pieņemsim, ka  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$  ir viens no intervāliem, kas pieder kopai  $\Lambda_n$ . Jāparāda, ka no tā seko, ka  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  ir viens no kopas  $\Lambda_{n+1}$  intervāliem.

Ievērosim vispirms, ka  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  ir  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$  apakškopa pēc definīcijas. Pieņemsim, ka  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} = [a; b]$ . Apgalvojums 7.1 konstatēja, ka  $h^n([a; b]) = [0; 1]$  un  $h^n$  ir monotona intervālā  $[a; b]$ . Mēs pieņemsim, ka  $h^n$  ir augoša intervālā  $[a; b]$  (pierādījums ir analogs, ja mēs pieņemtu, ka  $h^n$  ir dilstoša). Pēc starpvērtību teorēmas

$$\begin{aligned} \exists c_1, c_2 : a < c_1 < c_2 < b : \quad h^n(c_1) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, \\ h^n(c_2) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}. \end{aligned}$$

Tāpēc:

$$\begin{aligned} h^n([a; c_1]) &= [0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}] = I_0, \\ h^n([c_1; c_2]) &= [\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}], \\ h^n([c_2; b]) &= [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}; 1] = I_1. \end{aligned}$$

Tātad, ja  $s_n = 0$ , tad  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = [a; c_1]$ , un ja  $s_n = 1$ , tad  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = [c_2; b]$ . Tā kā šādā veidā tika definēti arī kopas  $\Lambda_{n+1}$  intervāli Apgalvojuma 7.1 pierādījumā, tad redzams, ka  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  ir viens no  $\Lambda_{n+1}$  intervāliem.

1) pierādījums. Pieņemsim, ka  $s = s_0s_1s_2\dots \in \Sigma_2$ . Lai pierādītu, ka  $\psi$  ir injekcija un surjekcija, mums jāparāda, ka  $\psi^{-1}(s)$  satur tieši vienu punktu. Bet, ja  $x \in \psi^{-1}(s)$ , tad  $x \in I_{s_0s_1s_2\dots s_n}$  jebkuram  $n$ . Tātad

$$\psi^{-1}(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0s_1s_2\dots s_n}.$$

Mums nepieciešams parādīt, ka šis šķēlums nav tukšs un satur tieši vienu punktu. Pieņemsim, ka

$$I_{s_0s_1s_2\dots s_n} = [a_n; b_n].$$

Pieņemsim, ka  $\psi^{-1}(s)$  satur divus punktus  $x$  un  $y$ . Tad

$$|x - y| \leq |b_n - a_n| \text{ jebkuram } n,$$

jo  $x$  un  $y$  ir katrā no intervāliem  $[a_n; b_n]$ . No Lemmas 7.2 seko, ka

$$|b_n - a_n| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Tāpēc  $|x - y| = 0 \Rightarrow x = y$ . Mēs secinām, ka  $\psi^{-1}(s)$  nesatur vairāk par vienu punktu. Tas, ka  $\psi^{-1}(s)$  nav tukša kopa, seko no matemātiskās analīzes teorēmas (Kantora teorēmas), kas apgalvo, ka slēgtu intervālu, kas ietver viens otru, šķēlums nav tukša kopa. Tātad  $\psi^{-1}$  satur tieši vienu punktu.

2) pierādījums. Pieņemsim, ka  $\varepsilon > 0$  un  $x \in \Lambda$ . Lai parādītu, ka  $\psi$  ir nepārtraukta punktā  $x$ , mums jāatrod tāds  $\delta > 0$ , ka, ja  $|x - y| < \delta$ , tad  $d(\psi(x), \psi(y)) < \varepsilon$ .

Izvēlēsimies  $n$  tā, lai  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Tad pēc Lemmas 13.1 nepieciešams parādīt, ka eksistē tāds  $\delta > 0$ , ka virknēs  $\psi(x)$  un  $\psi(y)$  sakrīt pirmie  $n + 1$  simboli, ja vien  $|x - y| < \delta$ . Citiem vārdiem, ja  $\psi(x) = s_0s_1s_2\dots$ , tad  $x \in I_{s_0s_1s_2\dots s_n}$ , un mums jāparāda, ka  $y \in I_{s_0s_1s_2\dots s_n}$ , kamēr  $y \in \Lambda$  un  $|x - y| < \delta$ . Lai to parādītu, pieņemsim, ka

$$[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_{2^{n+1}}; b_{2^{n+1}}]$$

ir  $2^{n+1}$  intervāli no  $\Lambda_{n+1}$  tā indeksēti, ka jebkuram  $i$  izpildās  $b_{i-1} < a_i$ . Izvēlēsimies  $\delta$  vienādu ar mazāko attālumu starp apskatāmajiem intervāliem, t.i.,

$$\delta = \min_{i \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}} |a_i - b_{i-1}|.$$

Tā kā intervāli nešķēļas (ir disjuncti) un to skaits ir galīgs, tad  $\delta > 0$ . Tātad, ja  $x, y \in \Lambda_{n+1}$  un  $|x - y| < \delta$ , tad seko, ka  $x$  un  $y$  ir vienā un tajā pašā

$\Lambda_{n+1}$  intervālā. Tā kā  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} \subset \Lambda_{n+1}$  un  $x \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ , tad redzams, ka  $y \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ , līdz ar to 2) pierādījums ir pabeigts.

3) pierādījumu ieteicams studentiem veikt pašiem.

4) pierādījums. nepieciešams parādīt, ka  $\psi \cdot h = \sigma \cdot \psi$ .

Pieņemsim, ka  $x \in \Lambda$  un  $\psi(x) = s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ . Kā jau tikām demonstrējuši pierādījuma pirmajā daļā, tad  $x$  ir vienīgais punkts, kurš pieder šim šķēlumam

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x \mid h^k(x) \in I_{s_k} \text{ visiem } k \leq n\}.$$

No šejienes seko, ka  $h(x)$  ir vienīgais punkts, kurš pieder sekojošam šķēlumam

$$I_{s_1 s_2 s_3 \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 s_2 \dots s_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x \mid h^{k+1}(x) \in I_{s_k} \text{ visiem } k \leq n\}.$$

Tādējādi  $\psi(h(x)) = s_1 s_2 s_3 \dots = \sigma(\psi(x))$ , kas mums bija arī jāpierāda. ■

Lietojot šo teorēmu, zinām, ka topoloģiskā saite starp metriskām telpu funkcijām saglabā šo funkciju dinamiskās īpašības.

**Sekas 13.2.** Pieņemsim, ka  $r > 2 + \sqrt{5}$ ,  $h_r(x) = rx(1-x)$  un  $\Lambda = \{x \mid h^n(x) \in [0; 1], \forall n\}$ . Eksistē tāds punkts kopā  $\Lambda$ , kura orbīta (pie attēlojuma  $h_r$ ) ir blīva kopā  $\Lambda$ .

**Pierādījums.** Rezultāts tieši seko no iepriekšējās teorēmas un Apgalvojuma 13.3.e), ka nobīdes attēlojumam eksistē blīva orbīta telpā  $\Sigma_2$ , kā arī Apgalvojuma 11.1. ■

# NODAĻA NR. 14

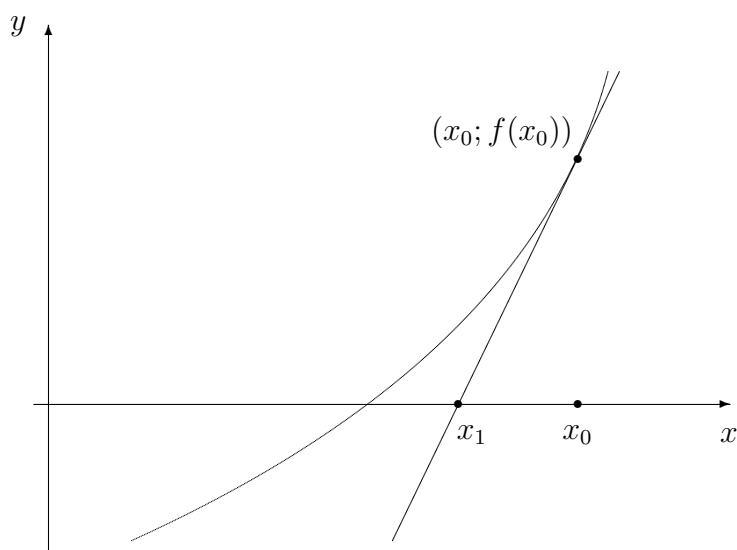
## ŅŪTONA METODE

**Anotācija.** Ņūtona metode kvadrātiskiem polinomiem. Ņūtona funkcijas konverģence. Vai iespējami pat tādi kvadrātiski polinomi, kuriem Ņūtona funkcija ir haotiska?

Ir labi zināmas kvadrātvienādojuma  $ax^2+bx+c=0$  atrisināšanas metodes, ir arī metodes trešās un ceturtās kārtas polinomu sakņu atrašanai, bet 19.gadsimta sākumā tika pierādīts, ka nav vispārīgas metodes 5., 6. un augstākas pakāpes polinomu sakņu atrašanai. Tāpēc nozīmīgas ir tuvinātās metodes, kas meklē vienādojumu saknes. *Isaac Newton* atrada vienu tādu metodi, kuru vēlāk uzlaboja *Joseph Raphson*. Metode pazīstama ar vārdu "Ņūtona metode", dažkārt tiek saukta arī par Ņūtona-Rapsona metodi.

Skaitlisko metožu pamatkursā parasti tiek mācīta Ņūtona metode, bet arī mēs šeit īsi atgādināsim, kas tā ir par metodi un kādas haotiskas problēmas šeit var rasties.

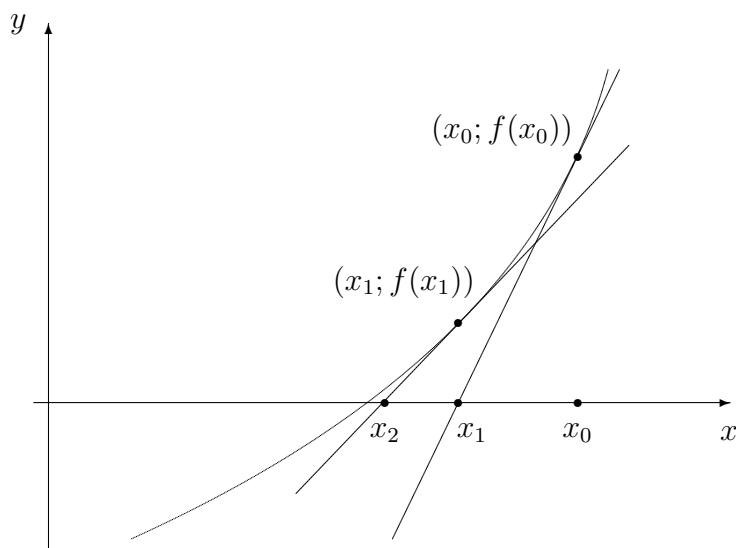
Pieņemsim, ka  $f(x)$  ir reālā mainīgā diferencējama funkcija. Apzīmēsim ar  $x_0$  sākuma tuvinājumu vienādojuma  $f(x) = 0$  atrisinājumam.



14.1. zīm.



Novelk pieskari punktā  $(x_0; f(x_0))$ , tās virziena koeficients ir  $f'(x_0)$ . Pieskare krusto  $x$  asi punktā  $x_1$  (skatīt 14.1.zīmējumu). Kamēr funkcija neizliecas par daudz, tikmēr otrais tuvinājums  $x_1$  atrodas tuvāk saknei nekā sākotnējais tuvinājums  $x_0$ . Lietojot vēlreiz Ņūtona metodi, iegūsim vēl labāku tuvinājumu (14.2.zīmējums).



14.2. zīm.

Ja Ņūtona metode konverģē uz sakni, tad tā konverģē tā, ka precīzo ciparu skaits aiz komata aptuveni divkāršojas katrā iterācijā.

Lai analītiski izpētītu Ņūtona metodi, apskatīsim šo metodi kā iterāciju procesu. Tātad pieņemsim, ka dota funkcija  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ir tās atvasinājums,  $x_0$  ir saknes sākotnējais tuvinājums. Pieskares vienādojums punktā  $(x_0; f(x_0))$  ir

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Krustpunktā ar  $x$  asi izpildās  $y = 0$ , atrodam  $x_1$ :

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ja  $x_1$  ir nākošais tuvinājums, tad līdzīgi varam atrast  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Tā var atrast  $x_3, x_4$ , utt., veidojas iterāciju process. Apzīmēsim

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Funkciju  $N_f$  sauksim par *Nūtona funkciju*. Tad

$$\begin{aligned} x_1 &= N_f(x_0), \\ x_2 &= N_f(x_1) = N_f(N_f(x_0)) = N_f^2(x_0), \\ &\dots \\ x_n &= N_f^n(x_0). \end{aligned}$$

Ir tādi kubiskie polinomi un reālo skaitļu intervāli, ka punkti no šiem intervāliem ne tikai var ilgi konverģēt, bet var vispār nekonverģēt uz sakni.

**Teorēma 14.1.** Pieņemsim, ka  $p(x)$  ir polinoms. Ja ļauj saīsināt kopīgos reizinātājus funkcijas  $N_p(x)$  izteiksmē, tad  $N_p(x)$  vienmēr būs definēta funkcija polinoma  $p(x)$  saknēs. Skaitlis ir  $N_p(x)$  nekustīgais punkts tad un tikai tad, ja tas ir polinoma sakne, un visi funkcijas  $N_p(x)$  nekustīgie punkti ir pievelkoši.

Šī teorēma ļauj izvairīties no tādas problēmas kā, piemēram,  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . Sakne ir 1 un  $f'(1) = (2x - 2)|_{x=1} = 0$ . Līdz ar to  $N_p(1) = 1 - \frac{0}{0}$  — nedefinēta funkcija. Vispārīgā gadījumā, ja  $r$  ir polinoma  $p(x)$  sakne un  $p'(r) = 0$ , tad  $N_p(r) = r - \frac{0}{0}$ .

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $r$  ir polinoma  $p(x)$  sakne, t.i.,  $p(r) = 0$ . No algebras kursa zināms, ka eksistē tāds  $n \in \mathbf{N}$  un tāds polinoms (iespējams arī 0-tās kārtas), ka

$$p(x) = (x - r)^n q(x) \text{ un } q(r) \neq 0.$$

Tad varam veikt šādus pārveidojumus:

$$\begin{aligned} N_p(x) &= x - \frac{p(x)}{p'(x)} = \\ &= x - \frac{(x - r)^n q(x)}{(x - r)^n q'(x) + n(x - r)^{n-1} q(x)} = \\ &= x - \frac{(x - r)^n q(x)}{(x - r)^{n-1} [(x - r) q'(x) + n q(x)]} = \\ &= x - \frac{(x - r) q(x)}{(x - r) q'(x) + n q(x)}. \end{aligned}$$

Ja drīkst saīsināt locekli  $(x - r)^{n-1}$ , tad funkcija ir  $N_p(r)$  ir definēta un

$$N_p(r) = r - \frac{(r - r)q(r)}{(r - r)q'(r) + nq(r)} = r - \frac{0}{0 + nq(r)} = r,$$

jo  $q(r) \neq 0$  pēc dotā. Tādējādi Ņūtona funkcija  $N_p(x)$  ir definēta polinoma saknē  $r$  un tā ir  $N_p(x)$  nekustīgais punkts.

No otras puses, ja  $N_p(r) = r$ , tad

$$r - \frac{p(r)}{p'(r)} = r,$$

kur  $\frac{p(r)}{p'(r)}$  ir reducētajā formā. Tad jābūt  $\frac{p(r)}{p'(r)} = 0$  jeb  $p(r) = 0$ . Tātad  $N_p$  nekustīgais punkts ir polinoma  $p$  sakne.

Atliek pierādīt, ka funkcijas  $N_p(x)$  nekustīgie punkti ir pievelkoši. Atrādīsim Ņūtona funkcijas atvasinājumu

$$N'_p(x) = 1 - \frac{(p'(x))^2 - p(x)p''(x)}{(p'(x))^2} = \frac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}. \quad (14.1)$$

Ja  $r$  ir  $p$  sakne un  $p'(r) \neq 0$ , tad

$$N_p(r) = r \quad \text{un} \quad |N'_p(r)| = \left| \frac{p(r)p''(r)}{(p'(r))^2} \right| = 0 < 1.$$

Tāpēc  $r$  ir pievelkošs  $p$  nekustīgais punkts. Līdzīgi argumenti izpildās arī tajā gadījumā, ja  $r$  ir  $p$  sakne un  $p'(r) = 0$ . ■

Teorēmas 14.1 pierādījumā mēs izmantojām to faktu, ka funkcija ir polinoms. Tāds pats pierādījums demonstrē, ja  $r$  ir funkcijas  $f$  sakne un  $N_f(r)$  ir definēta, tad  $N_f(r) = r$  un  $N'_f(r) = 0$ . Funkcijas nekustīgos punktus, kuros atvasinājums ir vienāds ar 0, bieži sauc par *superpievelkošajiem* nekustīgajiem punktiem. Atzīmēsim no Teorēmas 14.1 izrietošas sekas;

**Sekas 14.1.** Ja  $f$  ir diferencējama funkcija, tad  $N_f(x)$  nekustīgais punkts ir  $N_f$  pievelkošs nekustīgais punkts un  $f$  sakne. No otras puses, ja punkts ir  $f$  sakne un  $N_f$  ir definēta šajā punktā, tad šis punkts ir  $N_f$  pievelkošs nekustīgais punkts.

Pirms mēs noskaidrosim nopietnāku Ņūtona metodes uzvedību, apskatīsim kvadrātiska polinoma gadījumu. Pieņemsim, ka  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Tad

$$N_f(x) = x - \frac{ax^2 + bx + c}{2ax + b} = \frac{ax^2 - c}{2ax + b}. \quad (14.2)$$

Nākošajā apgalvojumā parādīsim, ka pietiekoši ir apskatīt gadījumu ar  $a = 1$  un  $b = 0$ .

**Apgalvojums 14.1.** Pieņemsim, ka  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un  $q(x) = x^2 - A$ , kur  $A = b^2 - 4ac$ . Tad  $\tau(x) = 2ax + b$  ir topoloģiskā saite starp  $N_f(x)$  un  $N_q(x)$ .

**Pierādījums.** Visas lineāras funkcijas, kuras nav konstantes, ir homeomorfismi, tāpēc  $\tau(x) = 2ax + b$  ir homeomorfisms. Atliek parādīt, ka  $\tau \circ N_f = N_q \circ \tau$ . Atzīmēsim, ka

$$N_f(x) = \frac{ax^2 - c}{2ax + b} \quad \text{un} \quad N_q(x) = \frac{x^2 + A}{2x}.$$

Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} (\tau \circ N_f)(x) &= 2a \cdot \frac{ax^2 - c}{2ax + b} + b = \frac{2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac}{2ax + b} \quad \text{un} \\ (N_q \circ \tau)(x) &= \frac{(2ax + b)^2 + A}{2(2ax + b)} = \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 + A}{2(2ax + b)} = \\ &= \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 + b^2 - 4ac}{2(2ax + b)} = \frac{2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac}{2ax + b}. \end{aligned}$$

Iegūtās vienādības noslēdz pierādījumu. ■

Tātad saskaņā ar šo Apgalvojumu 14.1, Ņūtona metode kvadrātiskiem polinomiem ir ierobežojama ar polinomu formā  $q(x) = x^2 - c$  izpēti. Acīmredzot, ja  $c > 0$ , tad vienādojumam  $q(x) = 0$  ir divas saknes  $\pm\sqrt{c}$ , ja  $c = 0$ , tad ir tikai viena sakne 0, ja  $c < 0$ , tad vienādojumam nav reālu sakņu. Analīzi sāksim ar gadījuma  $c > 0$  izpēti.

**Piemērs 14.1.** Apskatīsim polinomu  $p(x) = x^2 - 1$ . No Teorēmas 14.1 ir zināms, ka -1 un 1 ir vienīgie  $N(x)$  nekustīgie punkti. Tā kā  $p'(0) = 0$ , tad  $N(0)$  nav definēts. mēs vēlamies parādīt, ka  $W^S(1) = ]0; +\infty[$  un  $W^S(-1) = ]-\infty; 0[$ . Varat pārlicināties, ka grafiskā analīze parāda šādu izturēšanos, bet tas nav pierādījums.

Apgalvojumu mēs pierādīsim  $W^S(1)$  gadījumam. Ievērosim, ja  $x_0 \in ]0; +\infty[$ , tad

$$N(x_0) = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} \in [1; +\infty[,$$

jo tas ir ekvivalenti ar apgalvojumu, ka  $x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0 - 1)^2 \geq 0$ . Ir nepieciešams parādīt, ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} N^n(x_1) = 1$ , ja vien  $x_1 > 1$ .

Pieņemsim, ka  $x_1 > 1$ . No vienādojuma (14.1) seko, ka

$$N'(x) = \frac{q(x)q''(x)}{(q'(x))^2} = \frac{x^2 - 1}{2x^2}.$$

Vēlreiz diferencējot, noskaidrosim, ka  $N''(x) = \frac{1}{x^3}$ . Tā kā  $N''(x) > 0$ , ja  $x \in ]1; +\infty[$ , tad mēs zinām, ka  $N'(x)$  ir augoša funkcija šajā intervālā. Tā kā  $N'(1) = 0$  un

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

tad visiem  $x \in ]1; +\infty[$ :  $0 < N'(x) < \frac{1}{2}$ . No Lagranža teorēmas seko, ka eksistē tāds  $c_1$  starp 1 un  $x_1$ , ka

$$N(x_1) - 1 = N(x_1) - N(1) = N'(c_1)(x_1 - 1).$$

Tā kā visiem  $x \in ]1; +\infty[$ :  $0 < N'(x) < \frac{1}{2}$ , tad

$$0 < N(x_1) - 1 < \frac{1}{2}(x_1 - 1).$$

No šejienes seko, ka  $N(x_1) > 1$  un  $|N(x_1) - 1| < \frac{1}{2}|x_1 - 1|$ . Tā kā  $N(x_1) > 1$ , tad mēs varam induktīvi atrast tādu skaitļu virkni  $c_n$  starp  $N^{n-1}(x_1)$  un 1, ka

$$\begin{aligned} |N^n(x_1) - 1| &= |N(N^{n-1}(x_1)) - N(N^{n-1}(1))| = \\ &= |f'(c_n)| |N^{n-1}(x_1) - N^{n-1}(1)| < \\ &< \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - 1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_1 - 1|. \end{aligned}$$

Pēdējā nevienādības izteiksme tiecas uz 0, ja  $n$  tiecas uz bezgalību. Tātad, ja  $x_1 > 1$ , tad  $N^n(x_1)$  konverģē uz 1, ja  $n$  tiecas uz bezgalību. Tāpēc, ja  $x_0 > 0$ , tad  $N^n(x_0)$  arī konverģē uz 1, ja  $n$  tiecas uz bezgalību. Tādējādi  $]0; =\infty[ \subset W^S(1)$ .

Otra pierādījuma puse: apgalvojums, ka  $] -\infty; 0[ \subset W^S(-1)$ , ir analogisks. ■

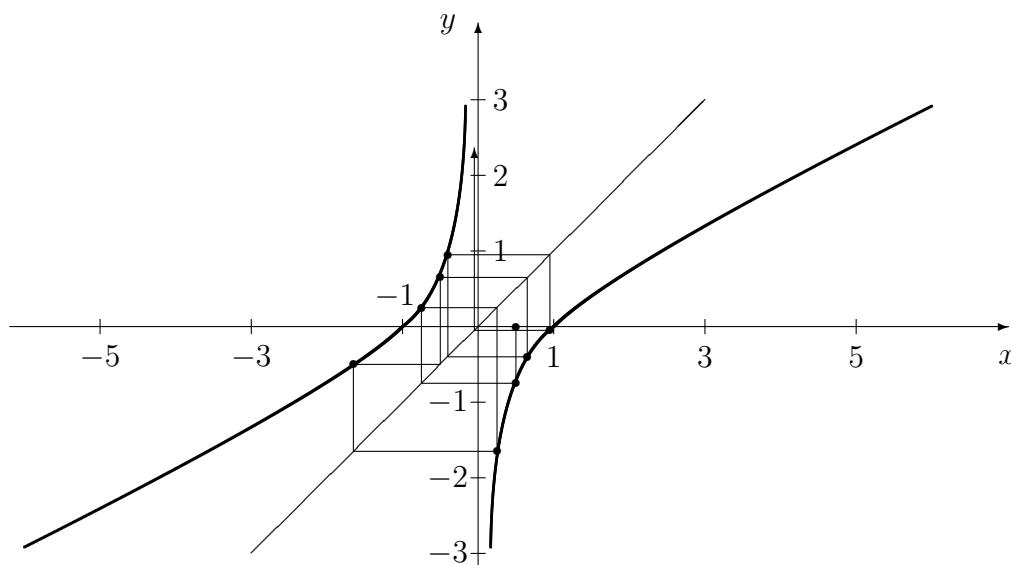
Piemērā 14.1 izmantotie argumenti ierosina uz vispārīgāku apgalvojumu, kura pierādījums ir analogisks piemērā veiktajam.

**Apgalvojums 14.2.** Ja  $q(x) = x^2 - c^2$  un  $c > 0$ , tad  $N_q(x)$  nekustīgie punkti ir  $-c$  un  $c$ , kuri abi ir pievelkoši, precīzāk  $W^S(-c) = ] -\infty; 0[$  un  $W^S(c) = ]0; +\infty[$ .

Gadījums, ja  $c = 0$  ir vienkāršs. Šajā situācijā  $q(x) = x^2$  un  $N(x) = x - \frac{x^2}{2x} = \frac{1}{2}x$ . Skaidrs, ka  $0$  ir vienīgais  $N(x)$  nekustīgais punkts. Tā kā  $N'(x) = \frac{1}{2}$ , tad visi reālie skaitļi atrodas  $0$  stabilitātes kopā.

Tagad mēs varam pievērsties interesantākajam gadījumam — Ņūtona metodei funkcijai  $q(x) = x^2 + c$ , ja  $c_0$ . Skaidrs, ka  $q(x)$  nav reālu sakņu un tā kā vienīgie pievelkošie  $n$  nekustīgie punkti ir  $q$  saknes, tad konverģencei te navajadzētu būt. Apskatīsim gadījumu ar  $c = 1$ .

**Piemērs 14.2.** Pieņemsim, ka  $p(x) = x^2 + 1$ . Tad  $N(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ . Lai iegūtu kādas idejas, kas šeit varētu atgadīties, varam apskatīties konkrēta punkta grafisko analīzi 14.3.zīmējumā.



14.3. zīm.

14.3.zīmējumā ir parādītas pirmās astoņas punkta iterācijas, kas pagaidām neliecina ne par kādu saprotamu punkta iterāciju uzvedību — neveidojas cikls, nav konverģences ne uz kādu konkrētu citu punktu vai bezgalību. Protams, astoņas iterācijas ir par maz šādam pētījumam. Īpaši jau tamdēļ, ka var pierādīt, ka funkcija  $N(x)$  ir haotiska. To var izdarīt, parādot, ka  $N(x)$  ir topoloģiski saistīta ar riņķa līnijas dubultošanās attēlojumu.

Riņķa līniju apzīmēsim ar  $S$  (parasti tiek apskatīta vienības riņķa līnija). Leņķi jeb punkti uz riņķa līnijas tiek mērīti radiānos pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam ar sākumpunktu uz pozitīvās  $x$ -ass. Riņķa līnijas *dubultošanās*

attēlojums  $D : S \rightarrow S$  tiek definēts ar vienādību:

$$\forall \theta \quad D(\theta) = 2\theta.$$

Literatūrā ir pierādīts, ka riņķa līnijas dubultošanās attēlojums ir haotisks.

Apskatīsim attēlojumu ar definīcijas apgabalu  $S$  bez 0 punkta un vērtību kopu reālajos skaitļos  $\phi : S \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ , kas definēts ar vienādību

$$\forall x \in S \setminus \{0\} \quad \phi(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

Šim attēlojumam izpildās komutativitātes īpašība  $N \cdot \phi = \phi \cdot D$ :

$$\begin{aligned} (N \cdot \phi)(x) &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = (\phi \cdot D)(x). \end{aligned}$$

Bet  $\phi$  nav definēts 0 punktā, tāpēc nav homeomorfisms starp  $S$  un  $\mathbf{R}$  un tāpēc nav topoloģiskā saite starp  $N$  un  $D$ . No  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$  definīcijas seko, ka tā ir nepārtraukta funkcija, tā ir injekcija un surjekcija, kas attēlo kopu  $S \setminus \{0\}$  reālajos skaitļos. Atzīmēsim, ka  $(\phi \cdot D)(\pi) = \phi(0)$  — veidojas nedefinēts lielums. Taču arī  $(N \cdot \phi)(\pi) = N(0)$  nav definēts lielums, jo  $p'(0) = 0$ . Atpakaļgaitā turpinot, redzams, ka  $D^2(\frac{\pi}{2}) = D^2(\frac{3\pi}{2}) = 0$  un  $\phi \cdot D^2$  nav definēts  $\frac{\pi}{2}$  vai  $\frac{3\pi}{2}$ . No otras puses, abi gadījumi  $(N^2 \cdot \phi)(\frac{\pi}{2})$  un  $(N^2 \cdot \phi)(\frac{3\pi}{2})$  reducējas uz  $N(0)$ , kas nav definēts lielums. Iterējot šo procedūru, varam parādīt, ka  $r_n$  ir tāds  $S$  punkts, kuram  $D^n(r_n) = 0$  un  $(\phi \cdot D^n)(r_n)$  nav definēts tad un tikai tad, ja  $N^n(\phi(r_n))$  nav definēts lielums. Tādējādi  $\phi$  attēlo  $S$  punktus, kuri neattēlojas par 0, ar kādu  $D$  iterāciju par  $\mathbf{R}$  punktiem, kuriem  $N^n$  ir definēts jebkurai iterācijai  $n$ . No otras puses, ja  $\gamma$  ir  $S$  punkts, kas nav attēlots par 0 ar kādu  $D$  iterāciju, tad visiem naturāliem skaitļiem  $n$  izpildās vienādība  $(\phi \cdot D^n)(\gamma) = (N^n \cdot \phi)(\gamma)$ .

Pēc Teorēmas 9.6 seko, ja var parādīt, ka  $N$  periodisko punktu kopa ir blīva kopā  $\mathbf{R}$  un  $N$  ir topoloģiski transitīva kopā  $\mathbf{R}$ , tad  $N$  ir haotiska kopā  $\mathbf{R}$ . Pieņemsim, ka  $]a; b[$  ir  $\mathbf{R}$  intervāls. Tad  $\phi^{-1}(]a; b[) = ]\alpha; \beta[$  ir kopas  $S$  intervāls. Var pierādīt, ka  $\exists \gamma \in ]\alpha; \beta[: D^k(\gamma) = \gamma$ . Nemazinot vispārīgumu, varam pieņemt, ka  $D^n(\gamma) \neq 0$  jebkuram  $n$ . Tātad, ja  $c = \phi(\gamma)$ , tad  $c \in ]a; b[$  un

$$N^k(c) = N^k(\phi(\gamma)) = \phi(D^k(\gamma)) = \phi(\gamma) = c.$$

Tas nozīmē, ka  $c$  ir  $N$  periodisks punkts intervālā  $]a; b[$ , tādējādi  $N$  periodiskie punkti ir blīvi kopā  $\mathbf{R}$ .

Var pierādīt, ka eksistē tāds  $m$ , ka  $D^m(]a, \beta]) = S$ . No šejienes seko, ka  $N^m(]a; b]) = \mathbf{R}$ . Tāpēc, ja  $]d; e[$  ir kāds cits  $\mathbf{R}$  intervāls, tad eksistē tāds  $x_0 \in ]a; b[$ , ka  $N^m(x_0) \in ]d; e[$ , t.i.,  $N$  ir topoloģiski transitīva.

To, ka  $N$  ir haotisks attēlojums, var pierādīt arī caur topoloģisko saiti. Tikai tad  $S$  vietā ir jāapskata tāda kopa  $S^*$ , kura nesatur attēlojuma  $D$  eventuāli nekustīgos punktus punktam  $0$ . Jāpierāda arī, ka  $D : S^* \rightarrow S^*$  ir haotisks attēlojums.  $\mathbf{R}$  vietā tiek apskatīta kopa

$$\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} \mid N^n(x) \text{ ir definēts visiem } n\}.$$

Var parādīt, ka  $D : S^* \rightarrow S^*$  un  $N : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^*$  ir topoloģiski saistīti ar saiti  $\phi : S^* \rightarrow \mathbf{R}^*$ , kas definēta ar iepriekšējo vienādību  $\phi(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ . ■

Pieņemsim, ka  $q(x) = x^2 + c^2$ ,  $c \neq 0$ , un  $p(x) = x^2 + 1$ . Var viegli pārlicināties, ka  $N_q$  un  $N_p$  ir topoloģiski saistīti attēlojumi ar saiti  $\tau(x) = \frac{1}{c}x$ ,  $c \neq 0$ ,  $x \neq 0$ . Tādējādi, ņemot vērā iepriekšējo piemēru, esam pierādījuši:

**Teorēma 14.2.** Ja  $q(x) = x^2 + c^2$ ,  $c \neq 0$ , tad  $N_q$  ir haotisks attēlojums kopā  $] - \infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ .



# NODAĻA NR. 15

## KOMPLEKSU FUNKCIJU UZVEDĪBA

**Anotācija.** Kompleksas funkcijas nepārtrauktība. Diferencējamas kompleksas funkcijas dinamika, ja atvasinājums nav 1 vai -1. Kompleksu funkciju dinamikas haotiskais variants. Kvadrātiskas kompleksas funkcijas. Džūlija kopas un Mandelbrota kopa.

Daudzus interesantus un brīnišķīgus dinamikas rezultātus var ieraudzīt, apskatot kompleksas funkcijas.

Vispirms atgādināsim lasītājam dažus pamatfaktus par kompleksajiem skaitļiem.

Komplekso skaitļu kopa sastāv no skaitļiem formā  $a + bi$ , kur  $a$  un  $b$  ir reāli skaitļi, bet  $i$  ir imaginārs skaitlis ar īpašību, ka  $i^2 = -1$ . Šo kopu mēs apzīmēsim ar simbolu  $\mathbf{C}$ . Ja  $a + bi$  un  $c + di$  ir divi kompleksie skaitļi, tad

$$(1) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(2) (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(3) (a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$(4) (a + bi) : (c + di) = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 - d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2} i.$$

komplekso skaitli  $a + bi$  var reprezentēt Dekarta koordinātu sistēmā ar punktu  $(a; b)$ . Reālo skaitļu kopa ir komplekso skaitļu kopas apakškopa (Dekartu koordinātu sistēmas  $x$  ass); visi tīrie imaginārie skaitļi formā  $bi$  atrodas uz  $y$  ass. Tāpēc, runājot par komplekso plakni, bieži vien horizontālā ass tiek saukta par reālo asi, bet vertikālā ass par imagināro asi.

Komplekso skaitli, kas vizualizēts Dekarta koordinātu sistēmas plaknē, var stādīt priekšā arī kā vektoru, kas savieno koordinātu sistēmas sākumpunktu

ar kompleksam skaitlim atbilstošo punktu. Divu komplekso skaitļu saskaitīšanai atbilst divu šādu vektoru saskaitīšana. Šī interpretācija dod arī dabīgu garuma definīciju. Par kompleksa skaitļa  $a + bi$  garumu jeb *moduli* sauc attālumu no koordinātu sistēmas sākumpunkta  $(0; 0)$  līdz punktam  $(a; b)$ , to izrēķina pēc formulas  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , apzīmē  $|a + bi|$ . Komplekso skaitļu kopā metrika tiek definēta līdzīgi kā reālo skaitļu kopā, proti, ja  $z$  un  $w$  ir divi kompleksi skaitļi, tad  $d(z, w) = |z - w|$ , precīzāk, ja  $z = a + bi$  un  $w = c + di$ , tad attālums starp šiem punktiem ir

$$d(z, w) = |z - w| = |(a + bi) - (c + di)| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Punkta  $z \in \mathbf{C}$   $\varepsilon$ -apkārtni varam definēt šādi

$$N_\varepsilon(z) = \{ w \in \mathbf{C} \mid |z - w| < \varepsilon \}.$$

Tātad punkta  $z$  apkārtnē koordinātu plaknē būs vaļējs riņķis ar rādiusu  $\varepsilon$ .

Kompleksās plaknes punktus var reprezentēt arī polārajā koordinātu sistēmā. Ja  $a + bi$  ir plaknes punkts, tad tā atrašanās plaknē pilnībā nosaka attālums no koordinātu sākumpunkta un leņķis starp staru, kas savieno koordinātu sākumpunktu ar  $(a; b)$ , un  $x$  ass pozitīvais virziens. Precīzāk, punktu  $(a; b)$  plaknē reprezentē tā modulis  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  un leņķis  $\alpha$ , kas apmierina nosacījumus

$$\cos \alpha \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ un } \sin \alpha \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (15.1)$$

Šo leņķi bieži sauc par  $a + bi$  *argumentu* un apzīmē ar  $\arg(a + bi)$ . Vispārīgā gadījumā ir bezgalīgi daudz leņķu, kas apmierina nosacījumus (15.1). Ja diviem kompleksajiem skaitļiem ir viens un tas pats modulis un to argumenti atšķiras ar veselo skaitli, kas pareizināts ar  $2\pi$ , tad tiek uzskatīts, ka šie kompleksie skaitļi ir vienādi (piemēram,  $\sqrt{3} + i$  modulis ir 2 un arguments  $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ , kur  $n \in \mathbf{Z}$ ). Arguments nav definēts, ja  $(a; b) = (0; 0)$ .

Pieņemsim, ka  $z$  ir nenulles komplekss skaitlis,  $r$  ir tā modulis un  $\alpha$  ir tā arguments. Tad

$$z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (15.2).$$

Šādi pierakstītu komplekso skaitli sauc par pierakstītu ģeometriskajā formā vai trigonometriskajā formā, bet  $a + bi$  ir algebriskā forma. Formulu

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{\alpha i}$$

sauc par *Eilera formulu*. Šī formula ļauj kompleksu skaitli  $z$  pierakstīt ekponenciālajā jeb polārajā formā

$$z = re^{\alpha i},$$

kur  $r = |z|$  un  $\alpha = \arg(z)$ . Eksponeciālā forma atvieglo divu kompleksu skaitļu reizināšanu un dalīšanu. Ja  $z = re^{\alpha i}$  un  $w = se^{\beta i}$ , tad

$$z \cdot s = (rs)e^{(\alpha+\beta)i} \text{ un}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{re^{\alpha i}}{se^{\beta i}} = \frac{r}{s} e^{(\alpha-\beta)i}.$$

Lai pētītu kompleksu funkciju dinamiku, vispirms nepieciešamas dažas definīcijas un teorēmas, kuras bija apskatītas jau reālu funkciju gadījumā.

**Definīcija 15.1.** Pieņemsim, ka  $D \subset \mathbf{C}$ . Funkciju  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  sauc par *nepārtrauktu punktā*  $z_0 \in D$ , ja

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D : |z_0 - z| < \delta \Rightarrow |f(z_0) - f(z)| < \varepsilon.$$

Funkciju sauc par *nepārtrauktu kopā*  $D$ , ja tā ir nepārtraukta jebkurā kopas  $D$  punktā.

Redzams, ka šī definīcija praktiski ne ar ko neatšķiras no nepārtrauktas funkcijas punktā un kopā definīcijas reālu skaitļu un metrisku telpu gadījumā. Lai vizualizētu nepārtrauktu kompleksu funkciju, tiek izmantoti tie paši līdzekļi kā reālu funkciju gadījumā. Arī kompleksas funkcijas atvasinājumu var definēt tāpat kā reālu funkciju gadījumā.

**Definīcija 15.2.** Funkciju  $f$  sauc par *diferencējamu punktā*  $z_0$ , ja  $f$  ir definēta visos  $z_0$  apkārtnes punktos un eksistē robeža

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Robežu apzīmēsim ar  $f'(z_0)$ . Funkciju sauc par *diferencējamu*, ja tā ir diferencējama jebkurā definīcijas apgabala punktā.

Definīcija ir uzrakstīta tāpat kā reālo funkciju gadījumā, tomēr ir viena principiāla atšķirība: kā šeit saprast pašu robežu  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  kompleksas funkcijas gadījumā.

**Definīcija 15.3.** Pieņemsim, ka  $f$  ir funkcija, kas ir definēta punkta  $z_0$  apkārtņē. Kompleksu skaitli  $L$  sauc par funkcijas  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  robežu argumentam  $z$  tiecoties uz kompleksu skaitli  $z_0$ , ja

$$\left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon).$$

Definīciju 15.3 var pierakstīt ekvivalentā apkārtņu valodā.

**Definīcija 15.3'.** Pieņemsim, ka  $f$  ir definēta punkta  $z_0$  apkārtņē.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ , ja katrai  $L$  apkārtnei  $N$  eksistē tāda  $z_0$  apkārtne  $N_1$ , ka, ja  $z \in N_1$  un  $z \neq z_0$ , tad  $f(z) \in N$ .

Atzīmēsim vēl dažus rezultātus, kas ir līdzīgi reālām un kompleksām funkcijām.

**Teorēma 15.1.** Ja funkcija ir diferencējama punktā  $z_0$ , tad tā ir nepārtraukta punktā  $z_0$ .

**Teorēma 15.2.** Pieņemsim, ka  $f$  un  $g$  ir kompleksas funkcijas un diferencējamas punktā  $z_0$ . Tas

- a)  $f + g$  ir diferencējama punktā  $z_0$  un  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ ;
- b) ja  $a$  ir kompleks skaitlis, tad  $(af)'(z_0) = af'(z_0)$ ;
- c) reizinājums  $fg$  ir diferencējams punktā  $z_0$  un  $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$ ;
- d) ja  $g(z_0) \neq 0$ , tad  $\frac{f}{g}$  ir diferencējama punktā  $z_0$  un

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

**Teorēma 15.3** (saliktas funkcijas atvasināšana). Ja  $f$  ir diferencējama punktā  $z_0$  un  $g$  ir diferencējama punktā  $f(z_0)$ , tad funkciju kompozīcija  $g \circ f$  ir diferencējama punktā  $z_0$  un  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$ .

**Teorēma 15.4.** Formula  $(z^n)' = nz^{n-1}$  izpildās visiem naturāliem skaitļiem  $n$ .

Līdz ar to seko, ka visi kompleksie polinomi un racionālās funkcijas ir diferencējamas funkcijas.

Kompleksu funkciju dinamikas izpēti sāksim ar funkcijas  $f(z) = az$  apskati, kur  $a$  ir kompleks skaitlis.

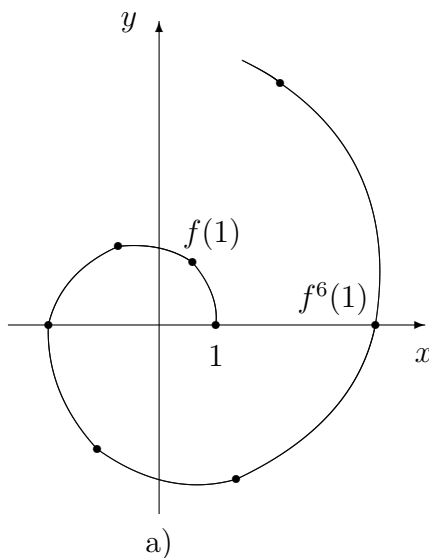
**Piemērs 15.1.** Pieņemsim, ka dota funkcija  $f(z) = az$ , kur  $a$  ir kompleks skaitlis, kura modulis nav 1. Vienīgais  $f$  nekustīgais punkts ir 0, tāpēc izpētīsim orbītu tādā punktam  $z_0$ , kurš nav 0.

Skaidrs, ka  $f^2(z_0) = f(az_0) = a^2z_0$ , un vispārīgā gadījumā  $f^n(z_0) = a^n z_0$ . Ja pierakstām  $a$  kā  $|a|e^{\theta i}$  un ievērojam, ka  $a^n = |a|^n e^{n\theta i}$ , tad varam  $f^n(z_0)$  uzrakstīt kā  $|a|^n e^{n\theta i} z_0$  jeb eksponenciālajā formā

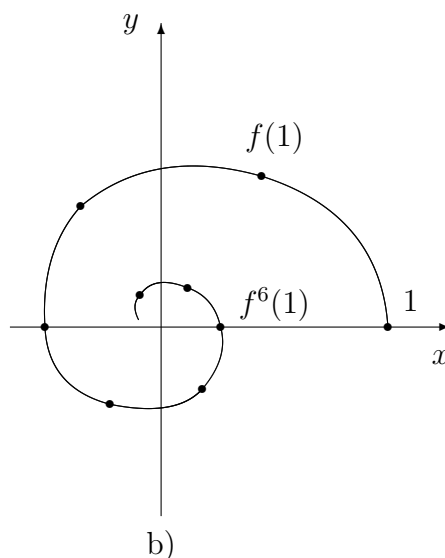
$$f^n(z_0) = |a|^n |z_0| e^{(n\theta + \arg(z_0))i}.$$

Tāpēc  $|f^n(z_0)| = |a|^n |z_0|$  un  $\arg(f^n(z_0)) = \arg(z_0) + n\theta$ . Ja  $|a| < 1$ , tad  $|a|^n |z_0|$  konverģē uz 0,  $n$  tiecoties uz bezgalību. Tātad  $W^S(0) = \mathbf{C}$ , ja  $|a| < 1$ . No otras puses, ja  $|a| > 1$ , tad  $|a|^n |z_0|$  tiecas uz bezgalību,  $n$  tiecoties uz bezgalību, tādējādi  $W^S(0) = 0$  un  $W^S(\infty) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Funkciju iterējot,  $\arg(a)$  tiek pieskaitīts ievada argumentam. Ja  $\arg \neq 0$ , tad jebkura nenulles punkta orbīta griežas apkārt nekustīgajam punktam.

Piemēram, 15.1.zīmējumā apskatīta punkta 1 orbīta. a) gadījumā  $a = \frac{5}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}$  modulis tiek reizināts ar  $\frac{5}{4}$  un  $\frac{\pi}{3}$  tiek argumentam klāt pieskaitīts katrā iterācijā — punkta 1 iterācijas tiecas uz bezgalību.



15.1. zīm.



15.1. zīm.

b) gadījumā  $a = \frac{4}{5}e^{\frac{\pi}{3}i}$  modulis tiek reizināts ar  $\frac{4}{5}$  un  $\frac{\pi}{3}$  tiek argumentam klāt pieskaitīts katrā iterācijā — punkta 1 iterācijas tiecas uz 0. ■

Šajā piemērā mēs redzējam, ka funkcijai  $f(z) = az$  nulles punkta stabilitātes kopa ir visa kompleksā plakne ( $W^S(0) = \mathbf{C}$ ), ja  $|f'(0)| = |a| < 1$ . Savukārt  $W^S(0) = \{0\}$ , ja  $|f'(0)| = |a| > 1$ . Atkarībā no atvasinājuma vērtības nekustīgais punkts var būt pievelkošs vai atgrūdošs tāpat kā reālā mainīgā funkciju gadījumā.

**Teorēma 15.5.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama kompleksa funkcija un  $p$  ir tās nekustīgais punkts. Ja  $|f'(p)| < 1$ , tad punkta  $p$  stabilitātes kopa satur punkta  $p$  apkārtni. Ja  $|f'(p)| > 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtnē, kuras visi punkti ar funkcijas  $f$  iterācijām iziet ārpus šīs apkārtnes.

Šo teorēmu var vispārināt periodisko punktu gadījumam tāpat kā reālā mainīgā funkcijām.

**Teorēma 15.6.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama kompleksa funkcija un  $p$  ir tās periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$ . Ja  $|(f^k)'(p)| < 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtnē, kura ietilpst punkta  $p$  stabilitātes kopā. Ja  $|(f^k)'(p)| > 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtnē, kuras visi punkti ar funkcijas  $f^k$  iterācijām iziet ārpus šīs apkārtnes.

Formulētās teorēmas motivē definēt jēdzienus par hiperbolisku pievelkošu un hiperbolisku atgrūdošu punktu.

**Definīcija 15.4.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama kompleksa funkcija un  $p$  ir tās periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$ . Punktu  $p$  sauc par *hiperbolisku periodisku punktu* (*hyperbolic periodic point*), ja  $|(f^k)'(p)| \neq 1$ . Ja  $|(f^k)'(p)| < 1$ , tad  $p$  sauc par *pievelkošu periodisku punktu* (*attracting periodic point*). Ja  $|(f^k)'(p)| > 1$ , tad  $p$  sauc par *atgrūdošu periodisku punktu* (*repelling periodic point*).

Tāpat kā reālā mainīgā funkciju gadījumā nehiperboliskiem periodiskiem punktiem nav skaidri formulējama uzvedība periodiskā punkta apkārtne.

**Piemērs 15.2.** Tālāk nedaudz paanalizēsim funkciju  $f(z) = az$ , ja  $|a| = 1$ . Ievērosim, ka  $0$  ir vienīgais nekustīgais punkts un  $0$  ir nehiperbolisks nekustīgais punkts, jo  $|f'(0)| = |a| = 1$ . Pieņemsim, ka  $a = e^{\theta i}$ . Tad  $f(z) = e^{\theta i}z$ . Fiksēsim  $z_0 \neq 0$ . Tad punkta  $z_0$  orbīta ar funkcijas  $f$  iterācijām atradīsies uz riņķa līnijas, kuras centrs ir  $(0, 0)$  un rādiuss  $|z_0|$ . Ja  $\theta$  ir skaitlis, kurš uzrakstāms kā  $\pi$  reizinājums ar racionālu skaitli, tad  $z_0$  ir  $f$  periodisks punkts. Ja  $\theta$  ir skaitlis, kurš nav uzrakstāms kā  $\pi$  reizinājums ar racionālu skaitli, tad  $z_0$  nav  $f$  periodisks punkts un tā orbīta ir blīva pa visu riņķa līniju.

Šajā piemērā funkcijai  $f(z) = e^{\theta i}z$  nulles punkts ir neitrāls nekustīgais punkts, jo punkti no  $0$  punkta apkārtnes ne attālinās, ne tuvojas ar  $f$  iterācijām pašam  $0$  punktam. ■

**Piemērs 15.3.** Apskatīsim funkciju  $q(z) = z^2$ . Vienīgie nekustīgie punkti ir  $0$  un  $1$ . Tā kā  $q'(0) = 0$  un  $q'(1) = 2$ , tad  $0$  ir pievelkošs nekustīgais punkts un  $1$  ir atgrūdošs nekustīgais punkts.

Ja  $z = re^{\theta i}$ , tad

$$\begin{aligned} q(z) &= (re^{\theta i})(re^{\theta i}) = r^2 e^{2\theta i}, \\ q^2(z) &= r^4 e^{4\theta i}, \\ &\dots \\ q^n(z) &= r^{2^n} e^{2^n \theta i}. \end{aligned}$$

Tā kā  $|q^n(z)| = r^{2^n}$ , tad

$$\begin{aligned} z \in W^S(0) &\Leftrightarrow |z| < 1 \text{ un} \\ z \in W^S(\infty) &\Leftrightarrow |z| > 1. \end{aligned}$$

Ja  $|z| = 1$ , funkcijas  $q$  dinamika kļūst interesantāka. Ar  $S$  apzīmēsim vienības riņķa līniju. Tad varam rakstīt  $q : S \rightarrow S$ . Pieņemsim, ka  $\arg(z) = \theta$ . Tad  $\arg(q(z)) = 2\theta$ ; iegūstam riņķa līnijas dubultošanas attēlojumu. Šis attēlojums ir haotisks, tāpēc  $q(z) = z^2$  ir haotisks attēlojums kopā  $S$ . ■

Tālāk aplūkosim kvadrātisku funkciju saimi  $q_c(z) = z^2 + c$ ,  $z \in \mathbf{C}$ . Iepriekš tika konstatēts, ka visas reālo skaitļu kvadrātiskas funkcijas ir topoloģiski saistītas ar reāliem polinomiem formā  $q_c(x) = x^2 + c$  ar noteiktu  $c$  vērtību. Logistiskās funkcijas  $h_r(x) = rx(1-x)$  gadījumā interesanti bija tie funkcijas definīcijas apgabala punkti, kuri nepameta intervālu  $[0; 1]$  pie jebkuras  $h$  iterācijas. Punkti, kuri pēc galīga skaita iterācijām pameta intervālu  $[0; 1]$ , atradās bezgalības stabilitātes kopā. Ievērojot šos secinājumus, uzskatīsim, ka funkcijas  $q_c$  dinamikas interesantākie punkti varētu būt tie, kuru orbītas ir ierobežotas. Kompleksas funkcijas gadījumā teiksim, ka punkta orbīta ir *ierobežota*, ja eksistē tāds pozitīvs reāls skaitlis, ka jebkurš orbītas punkta modulis ir mazāks par šo reālo skaitli. Nākošais apgalvojums parāda, ka funkcijas  $q_c$  orbītas ir sadalāmas divās kopās: tādās, kas ir ierobežotas, un tādās, kuras konverģē uz bezgalību.

**Apgalvojums 15.1.** Kompleksa skaitļa orbīta pie kompleksa kvadrātiska polinoma iterācijām ir vai nu ierobežota vai arī punkts atrodas bezgalības stabilitātes kopā.

**Pierādījums.** Tā kā visi kompleksie kvadrātiskie polinomi ir topoloģiski saistīti ar funkcijām formā  $q_c(z) = z^2 + c$ , tad ir pietiekami apgalvojumu pierādīt tikai šai polinomu saimei.

Iepriekš tikām pierādījuši, ka apgalvojums izpildās funkcijai  $q(z) = z^2$ . Pieņemsim, ka  $c$  ir nenulles komplekss skaitlis un  $q(z) = z^2 + c$ . Vispirms parādīsim, ja  $w$  ir tāds komplekss skaitlis, ka  $|w| > |c| + 1$ , tad  $w$  ir bezgalības stabilitātes kopā.

Tā kā  $q(w) = w^2 + c$ , tad

$$|q(w)| = |w^2 + c| \geq |w^2| - |c| \geq (|c| + 1)^2 - |c| = |c|^2 + |c| + 1.$$

Apskatīsim funkcijas  $q$  otro iterāciju punktā  $w$ :

$$\begin{aligned} |q^2(w)| &= |q(q(w))| = |(q(w))^2 + c| \geq |q(w)|^2 - |c| \geq (|c|^2 + |c| + 1)^2 - |c| = \\ &= |c|^4 + 2|c|^3 + 3|c|^2 + |c| + 1 \geq 3|c|^2 + |c| + 1. \end{aligned}$$

Turpinot šādi tālāk, ar matemātisko indukciju var parādīt, ka

$$|q^n(w)| \geq (2^n - 1)|c|^2 + |c| + 1.$$



Tā kā labā puse tiecas uz bezgalību, kad  $n$  tiecas uz bezgalību, tad arī kreisā puse tiecas uz bezgalību un  $w$  atrodas bezgalības stabilitātes kopā, ja  $|w| > |c| + 1$ . Savukārt, ja

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad |q^n(w)| > |c| + 1,$$

tad saskaņā ar iepriekš pierādīto  $w \in W^S(\infty)$ . Pretējā gadījumā

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |q^n(w)| \leq |c| + 1,$$

t.i., punkta  $w$  iterācijas ir ierobežotas. ■

Punktiem, kuriem ir ierobežotas orbītas, ir speciāls vārds.

**Definīcija 15.5.** Punktu kopu, kuru orbītas ir ierobežotas ar kompleksas funkcijas  $q(z) = z^2 + c$  iterācijām, sauc par *pildīto Džūlija kopu* (*filled Julia set*) un tās robežu — par *Džūlija kopu* (*Julia set*).

Atgādināsim, ka par *kopas robežu* sauc to kopas punktu apakškopu, kuriem jebkura apkārtnē vienlaicīgi satur punktus gan no dotās kopas, gan arī kopai nepiederošus punktus.

Džūlija kopa savu nosaukumu (*Julia set*) ir ieguvusi no tās atklājēja vārda, proti, franču matemātiķa *Gaston Julia*, kurš kopā ar tautieti *Pierre Fatou* ir veikuši daudzus fundamentālus atklājumus kompleksu funkciju dinamikā 20.g.s. sākumā. Viņu rezultāti ir ievērojami cienīgi kaut vai tāpēc, ka tajos laikos nebija datoru, ar kuru palīdzību varētu vizualizēt kopas, kuras abi matemātiķi apskatījuši.

Fatū un Džūlija ir pierādījuši vairākas interesantas teorēmas. Lūk, viena no tām!

**Teorēma 15.7.** (*Fatou, Julia*) Ja kompleksam polinomam ir pievelkoša periodiska orbīta, tad eksistē polinoma kritiskais punkts, kurš ir kāda no orbītas punktiem stabilitātes kopā.

Pieņemsim, ka  $z_0$  ir polinoma  $p$  kritiskais punkts:  $p'(z_0) = 0$ . Tā kā  $q_c(z) = z^2 + c$  vienīgais kritiskais punkts ir 0, tad  $q_c$  eksistē vismaz viena pievelkoša periodiska orbīta un 0 tiek tai pievilkta.

**Teorēma 15.8.** (*Fatou, Julia*) Ja 0 pieder pildītajai Džūlija kopai, tad pildītā Džūlija kopa ir sakarīga, t.i., jebkurus divus punktus savieno "ceļš", kurš pilnībā atrodas kopā. Ja 0 nepieder pildītajai Džūlija kopai, tad pildītā Džūlija kopa ir Kantora kopa.

Agrākā reālu skaitļu Kantora kopas definīcija šeit nav lietojama. Mēs šeit izmantosim plašāku definīciju.

**Definīcija 15.6.** Kompleksu skaitļu kopu sauc par *Kantora kopu*, ja šī kopa ir

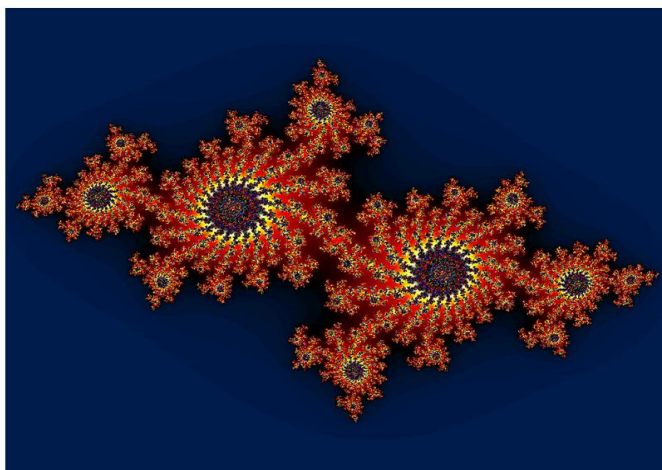
slēgta,

ierobežota,

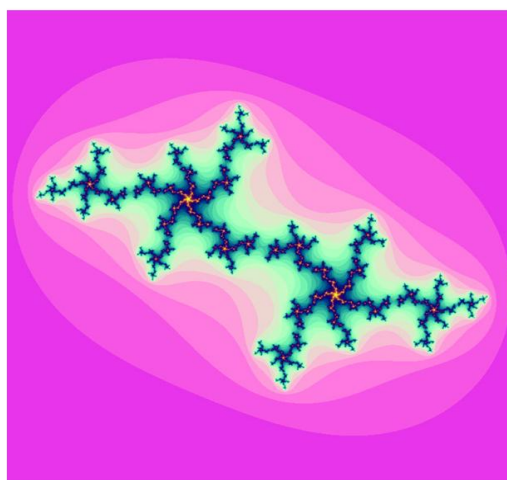
galīgi nesakarīga un

katrs kopas punkts ir tās akumulācijas punkts.

Kompleksu skaitļu kopu sauc par *galīgi nesakarīgu*, ja starp jebkuriem diviem kopas punktiem neeksistē "ceļš", kurš pilnībā ietilptu dotajā kopā.



Džūlija kopa ( $c=-1$ )

Džūlija kopa ( $c = -\pi - 2 + (\pi - 1)i$ )

## 15.2. zīmējums

Pierādītais apgalvojums un pēdējā formulētā teorēma sadala kompleksos skaitļus divās kopās: tajos, kuriem parametra vērtībai  $c$  pildītā Džūlija kopa ir sakarīga un 0 orbīta ir ierobežota ar  $q_c(z) = z^2 + c$  iterācijām, un tajos, kuriem pildītā Džūlija kopa ir galīgi nesakarīga un 0 ir bezgalības stabilitātes kopā. Parametra  $c$  vērtību kopa tiek pētīta īpaši. Var pierādīt, ka parametra vērtībām  $c$ , kuras  $|c| > 2$ , pildītā Džūlija kopa ir Kantora kopa un  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_c^n(0) = \infty$ .

Mēs interesēsimies par kopu

$$M = \{c \mid q_c^n(0) \text{ ir ierobežota kopa} \}.$$

No iepriekš teiktā seko, ka šī kopa atrodas riņķa ar centru  $(0, 0)$  un rādiusu 2 iekšienē.

Var pierādīt, ka parametra vērtību kopa, kurām funkcijai  $q_c$  eksistē pievelkošs nekustīgais punkts, atrodas iekšienē kardoīdai, kuras vienādojums ir

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2}e^{\theta i} - \frac{1}{4}e^{2\theta i}.$$

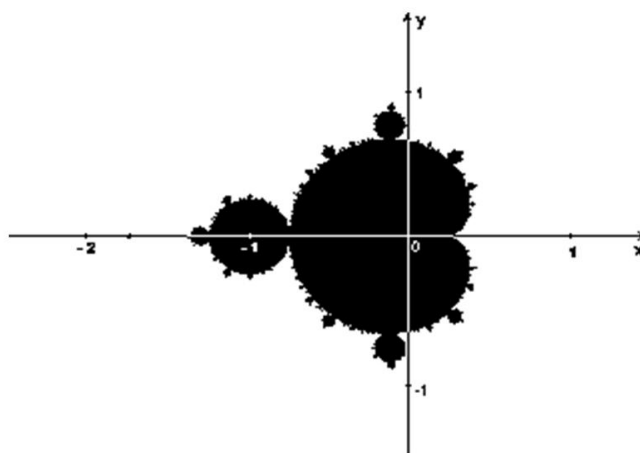
Tātad šo kardoīdu satur kopa  $M$ .

Var pierādīt, ka kopa  $M$  satur arī riņķi ar rādiusu  $\frac{1}{4}$  un centru  $(-1, 0)$ .

Lai labāk uzzīmētu kopu  $M$ , var veikt eksperimentu ar datoru. Tā kā mēs zinām, ka  $M$  satur tās parametra vērtības, kurām 0 orbīta ir ierobežota,

un, ja  $|q_c^n(0)| > 2$  kaut kādam  $n$ , tad  $c \notin M$ , tad varam varam apskatīt riņķi ar rādiusu 2, izveidot tajā režģi ar pietiekoši mazu soli; režģa punkti ir parametra  $c$  vērtības. Ja  $|q_c^{100}(0)| \leq 2$ , tad pieņem, ka  $c \in M$  (iekrāso melnā krāsā), ja  $|q_c^{100}(0)| > 2$ , tad  $c \notin M$  (iekrāso baltā krāsā).

Iegūtais zīmējums (skatīt 15.3.zīmējumu) ir *Mandelbrota kopa*, kuru pirmais publicēja 1980.gadā *Benoit Mandelbrot*.



15.3.zīmējums

Tā tiek intensīvi pētīta. Zināms, ka tā ir sakarīga kopa (arī daudzie izvirzījumi ir sakarīgas kopas). Ievērojiet, ka Mandelbrota kopa ir viena vienīga, bet Džūlija kopas ir bezgalīgi daudzas (katram Mandelbrota kopas punktam  $c$  atbilst sava Džūlija kopa).