Latvijas Universitāte

Fizikas un matemātikas fakultāte

Matemātiskās analīzes katedra

Inese Bula

STRATĒĞISKO SPĒĻU TEORIJA

LEKCIJU KONSPEKTS — 2007

SATURS

LEKCIJA NR. 1

KAS IR SPĒĻU TEORIJA?

Kursa prasības
Ievads spēļu teorijā
Cietuma dilemma

Kursa prasības

Pēc sekmīgi apgūta kursa, jāspēj orientēties kursā aplūkotajos jēdzienos un atšķirt apskatītos spēļu teorijas modeļus. Jāprot risināt atbilstoša rakstura uzdevumus.

PRASĪBAS KREDĪTPUNKTU IEGŪŠANAI

1. Laikā līdz eksāmenam jāatrāda visu mājas darbu atrisinājumi rokrakstā - 10%.

2. Noslēguma kontroldarbā jāveic rakstisks tests (teorētiski un praktiski jautājumi un uzdevumi par semestrī apgūto), kura vērtējums nosaka gala atzīmi par 90%.

LITERATŪRA

Mācību pamatliteratūra

1. M.J.Holler, G.Illing, Einfuerung in die Spieltheorie, Springer-Verlag, 1991. (vācu val.).
2. M.J.Osborne, An introduction to game theory, Oxford University Press, 2004.
3. G.Ouen, Teorija igr, Maskava, Izdevn. Miers, 1971 (krievu val.).

Papildliteratūra

4. H.Taha, Vvedenije v issledovanije operacii, II daļa, Maskava, Izdevn.

Miers, 1985 (krievu val.).
5. J.W.Friedman, Game Theory with Applications to Ecconomics, Oxford University Press, 1991.
6. D.M.Kreps, A Course in Microeconomic Theory, Harvester Wheatsheaf, 1990.
7. A.A.Vasin, V.V.Morozov, Teorija igr i modeli matematiceskoj ekonomiki, Maks Press, Maskava, 2005 (krievu val.)

Periodika, interneta resursi un citi avoti

8. International Journal of Game Theory
9. Mathematical Social Sciences
10. Games and Economic Behavior
11. *http://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory*

Ievads spēļu teorijā

Spēļu teorija ir matemātikas nozare, kas pēta optimālās lēmumu pieņemšanas metodes konfliktsituācijās. Konflikta matemātiskais modelis apraksta divu vai vairāku tā dalībnieku (spēlētāju) savstarpējo pretdarbību, kas izpaužas to izraudzītajās stratēģijās; spēlētāji var arī apvienoties koalīcijās. Spēli uzdod ar visu spēlētāju vai koalīcijas stratēģiju kopām un to veidotajām situācijām.

Tātad spēļu teorija ir matemātiskās teorijas nozare par lēmumu pieņemšanu konflikta situācijās. Vienkāršākie lēmumu pieņemšanas modeļi tiek apskatīti matemātiskās analīzes un optimizācijas kursos. Šajos modeļos persona, kas pieņem lēmumu, izvēlas savu rīcību no kaut kādas stratēģiju kopas (piemēram, ražošanas plānu kopas). Tiek uzskatīts, ka ir dota mērķa funkcija, kura atspoguļo lēmumu pieņemošās personas viedokli, un tā ir atkarīga no šīs personas izvēlētās stratēģijas (piemēram, peļņas funkcija ir atkarīga no izvēlētā ražošanas plāna). Lēmuma pieņemšanas uzdevums ir izvēlēties tādu stratēģiju, kas dotu mērķa funkcijas maksimumu. Konflikta situācijas, kas tiek apskatītas spēļu teorijā, atšķiras ar to, ka lēmumu pieņem nevis viens indivīds, bet gan vairāki dalībnieki, un mērķa (ieguvumu) funkcija katram indivīdam ir atkarīga ne tikai no viņa stratēģijas, bet arī pārējo dalībnieku stratēģijām

Stratēģiskās spēles nesastāv no gadījuma gājieniem (kā tas ir azartspēlēs — kauliņu spēlēs, ruletē, utt.), bet tajās katrs spēlētājs var ar saprātīgu rīcību tuvoties maksimālajam laimestam.

Spēļu klasifikācija tiek veikta pēc :

⋆ spēlētāju skaita,

⋆ stratēğiju skaita,
⋆ spēlētāju savstarpējā mijiedarbības rakstura,
⋆ vinnesta,
⋆ gājienu skaita,
⋆ informācijas daudzuma.

Pēc spēlētāju skaita: divu un n spēlētāju spēles. Divu spēlētāju spēles ir labi izpētītas; pārējās mazāk.

Pēc stratēğiju skaita: galīgas un bezgalīgas spēles. Ja spēlē visiem spēlētājiem ir galīgs skaits stratēğiju, tad spēle ir galīga. Ja kaut vienam spēlētājam ir bezgalīgi daudz stratēğiju, tad tā ir bezgalīga spēle.

Pēc mijiedarbības rakstura: bezkoalīciju (nekooperatīvas) spēles (spēlētājiem nav iespējams izveidot koalīcijas, līgumus, vienoties, utt.); koalīciju (kooperatīvās) spēles, kurās notiek vienošanās.

Pēc vinnests rakstura: spēles ar nulles summu (kopējais spēlētāju kapitāls nemainās, bet tiek pārdalīts starp spēlētājiem; visu spēlētāju vinnests ir 0) un spēles ar nenulles summu.

Pēc vinnesta funkcijas veida: matricu, bimatricu, nepārtrauktas, izliektas, u.c.

Matricu spēle: galīga divu spēlētāju spēle ar nulles summu, kurā pirmā spēlētāja vinnests tiek izvietots matricā. Matricu spēlēm ir pierādīts, ka katrai no tām ir atrisinājums un tās var pārveidot par lineārās programmēšanas uzdevumu.

Bimatricu spēle: galīga divu spēlētāju spēle ar nenulles summu, kurā katra spēlētāja vinnests (ieguvums) tiek uzdots ar atsevišķu matricu.

Nepārtrauktas spēles: vinnesta (ieguvuma) funkcija katram spēlētājam ir nepārtraukta. Pierādīts, ka
v sīs klases spēlēm eksistē atrisinājums, bet nav izstrādātas praktiskas metodes to atrašanai.

Ja vinnesta (ieguvuma) funkcija ir izliekta, tad spēli sauc par *izliektu spēli*. Šīm spēlēm ir izstrādāta laba metodika.

Pēc tā, vai iepriekšējās situācijas (gājieni, stratēğijas) ir zināmas pilnīgi vai daļēji, izšķir *spēles ar pilnīgu informāciju* (šahs, dambrete) vai *daļēju informāciju* (domino, kāršu spēles).

Spēļu teorijas kā matemātiskas disciplīnas dzimšanu var attiecināt uz 1654.gada 29.jūlijā *B.Pascal* rakstīto vēstuli *P.Fermat*, kuru uzskata par matemātiskās varbūtību teorijas sākumu. Tālākajā attīstībā atsevišķas idejas, kuras var uzskatīt par teorētiskām, ir izteikuši 1712.gadā *Waldegrave* (optimālo jaukto stratēğiju atrašana), 1732.gadā *D.Bernoulli* ("Pēterburgas spēles" analīze), 1814.gadā *P.Laplace* (optimalitātes principi), 1888.gadā *J.Bertrand* (beķera spēles teorētiska analīze). Daudzi spēļu teorētiskie aspekti pēc būtības tika apskatīti ekvivalentās formās citās matemātikas disciplīnās: par labākajiem tuvinājumiem (P.Čebiševs), izliekto daudzskaldņu ğeometrijā (*H.Minkowski*), lineāro nevienādību teorijā (*E.Stiemke*). 1911.gadā *E.Zermelo* aprakstīja spēles teorētisko pieeju šaha spēlei, bet 1921.gadā *E.Borel* uzsāka sistemātiskus matricu spēļu pētījumus, pierādot dažos gadījumos jaukto stratāğiju optimalitātes eksistenci. 1928.gadā iznāca *J.von Neumann* darbs " Stratēğisko spēļu teorija", kas saturēja pamatidejas mūsdienīgai spēļu teorijai. Šīs idejas tālāk tika izstrādātas *J.von Neumann* un *O.Morgenstern* 1944.gada grāmatā "Spēļu un ekonomiskās uzvedības teorija" — to uzskata arī par spēļu teorijas kā sistemātiskas matemātiskās teorijas izveidošanās gadu. 1950.gadā *John Nash* definē optimālās stratēğijas jēdzienu, dod līdzsvara definīciju, kas tagad pazīstama ar nosaukumu Neša līdzsvars (*J.Nash* ir Nobela prēmijas laureāts, 2001.gadā par viņu uzņemta mākslas filma "A Beautiful Mind"). 1970.gadā *J.Smith* atradis spēļu teorijai lietojumus bioloğijā. *T.Schelling* un *R.Aumann* vārdi spēļu teorijā ierakstīti nesen, 2005.gadā veikti viņu pētījumi par tā saucamajiem dinamiskajiem modeļiem.

Spēļu teorijas pieeju un metodes izmanto matemātiskajā statistikā, operāciju pētīšanā, ekonomiskajos pētījumos un kara zinātnē. Spēļu teorijas sākotnējās attīstības pamatā bija uzdevumi par optimālo rīcību ekonomikā konkurences apstākļos (firmu cīņa par noieta tirgiem, oligopols, cenu veidošanās, reklāmas plānošana, biržas operācijas, u.c.). Ar spēļu teoriju apraksta indivīdu masveida izturēšanos (iedzīvotāju migrācija, bioloğiskā eksistence). Ar spēļu teoriju risināmi arī daudzi plānveida ekonomikas jautājumi: ražošanas vadības centralizācija un decentralizācija, optimālā plānošana daudzu faktoru radītas nenoteiktības apstākļos, sociālā plānošana un prognozēšana.

Cietuma dilemma (*Prisoner's Dilemma*)

Daudzus spēļu teorijai raksturīgus jēdzienus atklāj tā saucamā cietuma dilemma.

Noķerti divi noziedznieki. Šerifs ir pārliecināts, ka viņi abi piedalījušies lielas bankas aplaupīšanā, taču nav nekādu pierādījumu. Šerifs zina, ka katram no noziedzniekiem ir divas iespējas: atzīties aplaupīšanā vai neatzīties. Šerifs ievieto noziedzniekus katru savā kamerā un katram no viņiem saka sekojošo: "Ja tu neatzīsies un tavs biedrs neatzīsies, tad jūs abi izcietīsiet 3 mēnešus cietumsodu; ja tu neatzīsies, bet tavs biedrs atzīsies, tad tu saņemsi

10 gadus cietumsodu, bet viņš staigās brīvībā; ja tu atzīsies, bet viņš ne, tad otrādi — tu staigāsi brīvībā, bet viņš cietīs sodu; ja nu jūs abi atzīsieties, tad abi dabūsiet 8 gadus cietumsodu."

Kā rīkosies noķertie noziedznieki?

Abus noziedzniekus mēs varam aplūkot kā spēles dalībniekus jeb spēlētājus. Katram spēlētājam i ($i = 1, 2$) ir iespējamas divas *tīrās stratēģijas* s_i:

neatzīties (stratēģija s_{i1}, $i = 1, 2$) un
atzīties (stratēģija s_{i2}, $i = 1, 2$).

Atkarībā no tā, kuru no abām stratēģijām izvēlēsies katrs no abiem spēlētājiem, veidosies noteikta stratēģiju kombinācija kā pāris $s = (s_1, s_2)$. Pavisam kopā ir iespējamas 4 tīro stratēģiju kombinācijas (2×2). Katrai kombinācijai s var piekārtot atbilstošu *notikumu* $e(s)$ — gadu skaitu, kādu noziedzniekiem vajadzēs pavadīt cietumā. Spēli ar iespējamajiem notikumiem $e(s)$ varam attēlot ar matricu kā 1.1.zīmējumā.

2.spēlētājs 1.spēlētājs	neatzīties s_{21}	atzīties s_{22}
neatzīties s_{11}	$\frac{1}{4}$g. 1.spēlētājam $\frac{1}{4}$g. 2.spēlētājam	10g. 1.spēlētājam 0g. 2.spēlētājam
atzīties s_{12}	0g. 1.spēlētājam 10g. 2.spēlētājam	8g. 1.spēlētājam 8g. 2.spēlētājam

1.1.zīm.

Spēles aprakstu, kas dots ar matricas palīdzību, sauc par *spēles normālformu* vai *stratēģisko spēles formu.* Abi noziedznieki izvēlas stratēģiju vienlaicīgi, nezinot, ko izvēlēsies otrs spēlētājs. Komunikācija starp abiem nav iespējama. Šādu spēli sauc par *nekooperatīvu.*

Spēle ir dota, ja mēs varam katram spēlētājam uzrādīt viņa priekšrocību sakārtojumu, t.i., varam novērtēt spēlētāju attieksmi pret gaidāmajiem notikumiem. Konkrētajā cietuma dilemmas situācijā spēlētājiem ir jāizšķiras par pavadāmo laiku cietumā. Dabiski būtu pieņemt, ka neviens no noziedzniekiem nevēlas tur atrasties vai, ja tas tomēr draud, vēlas tur pavadīt pēc iespējas īsāku laiku posmu. Tādējādi katram spēlētājam i , $i = 1, 2$, iespējams katram no gaidāmajiem notikumiem $e(s) \in E$ piekārtot *lietderības indeksu* $u_i(e)$. Lietderības indeksi tiek izvēlēti atkarībā no tā, cik ilgs laiks jāpavada cietumā; jo īsāks laiks, jo indekss lielāks. Tā kā stratēģiju kombinācijai $s \in S$ viennozīmīgi piekārtots notikums $e \in E$ (veidojas funkcija $e(s)$), tad katram s

varam
viennozīmīgi piekārtot atbilstošu ieguvumu funkciju $u_i(s)$ ar lietderības indeksu palīdzību.

Dotajā cietuma dilemmas situācijā lietderības indeksus mēs varētu izvēlēties, piemēram, šādus:

$$\begin{array}{ll} u_1(0,10)=4 & u_2(10,0)=4 \\ u_1(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=3 & u_2(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=3 \\ u_1(8,8)=2 & u_2(8,8)=2 \\ u_1(10,0)=1 & u_2(0,10)=1 \end{array}$$

Atbilstošā ieguvumu matrica parādīta 1.2.zīmējumā.

2.spēlētājs / 1.spēlētājs	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(3,3)$	$(1,4)$
s_{12}	$(4,1)$	$(2,2)$

1.2.zīm.

Noziedznieki, meklējot labāko atrisinājumu šerifa piedāvātajā, spriedīs tā:

"Es nezinu, ko darīs mans biedrs, bet katrā ziņā par mani viņš nedomās — katram sava āda tuvāka. Ja viņš neatzīsies, tad man labāk būtu atzīties — tikšu brīvībā; savukārt, ja viņš sadomā atzīties, tad man arī labāk ir atzīties — 8 gadi tomēr ir mazāk nekā 10."

Un tā abi noziedznieki izvēlēsies stratēģiju "atzīties". Pirmajā brīdī tas var likties pārsteidzoši, jo, Jūs teiksiet, tas taču ir skaidri redzams, ka "neatzīties" ir labāk, abi vainīgie tad dabū tikai 3 mēnešus cietumsoda! Taču, ja mēs aplūkojam nekooperatīvās spēles, tad bieži vien atrisinājums ir negaidīts, spēlētājiem ne pats labākais, ko varbūt iegūtu, ja spēlētāji kooperētos. Stratēģiju, kuru var spēlētājs visos gadījumos izvēlēties kā sev optimālāko (labāko) neatkarīgi no tā, ko dara citi spēlētāji, sauc par *dominējošo stratēģiju*. Cietuma dilemmā abiem noziedzniekiem ir šāda dominējošā stratēģija, proti, "atzīties". To pamato iepriekš aprakstītie noziedznieka spriedumi, meklējot labāko atrisinājumu šerifa piedāvājumā.

Stratēģija $s=(s_{12},s_{22})$ (skatīt ieguvumu matricu 1.2.zīmējumā) ir līdzsvara stāvoklis: spēlētāju stratēģiju pārim (s_{12},s_{22}) atbilst ieguvums $(2,2)$; ja 1.spēlētājs paliek pie savas stratēģijas s_{12}, tad 2.spēlētājam nav iespējams savu stāvokli uzlabot: s_{21} ieguvums ir tikai 1. Tāpat 1.spēlētājam nav iespējams savu stāvokli uzlabot, izvēloties s_{11}, ja 2.spēlētājs ir jau izvēlējies stratēģiju s_{22}. Pārējie stratēģiju pāri cietuma dilemmā neatrodas līdzsvara stāvoklī. Piemēram, $s = (s_{12}, s_{21})$: 1.spēlētājam nav iespējams uzlabot savu stāvokli, bet 2.spēlētājam ir iespējams iegūt lielāku ieguvumu, ja viņš izvēlas stratēģiju s_{22}. Par *Neša (Nash) līdzsvaru* sauc tādu spēlētāju stratēģiju kombināciju, pie kuras izvēles nevienam no spēlētājiem nav iespējams iegūt lielāku ieguvumu, izmainot savu stratēģiju, bet pārējie spēlētāji paliek pie šīs kombinācijas stratēģijām. Tātad stratēģiju pāris $s = (s_{12}, s_{22})$ ir cietuma dilemmas Neša līdzsvars.

LEKCIJA NR. 2

SPĒĻU PIEMĒRI

Karteļa noruna
Sabiedriskie labumi
"Dzimumu cīņa"

Karteļa noruna

Iepriekš aprakstītos jēdzienus mēģināsim ilustrēt ar vairāku piemēru palīdzību.

Divi lielu firmu viena veida produkcijas ražotāji satiekas pilsētā A, lai vienotos par karteļa izveidi. Līdz šim, izturot sīvu konkurenci, abu ražotāju peļņa ir bijusi 10 naudas vienības. Abi zina, ka peļņu varētu paaugstināt līdz pat 50 naudas vienībām, ja vien viņi izveidotu karteli: vienotos par produkcijas ražošanas sašaurināšanu un monopolcenas noteikšanu. Pieņemsim, ka abi ražotāji ir vienojušies par karteļa izveidi. Vai viņi vārdu turēs?

Pēc atgriešanās mājās katrs no ražotājiem birojā vēlreiz pārdomā karteļa norunu, spriežot sekojoši: "Ja mans konkurents norunu tur, tad man ir iespējams savu peļņu palielināt, ja es ražoju vairāk nekā norunāts, t.i., vārdu laužu. Es varu peļņu palielināt līdz pat 100 naudas vienībām, tanī pašā laikā manam konkurentam peļņa būs 0. No otras puses, ja mans konkurents pats norunu lauž, tad man daudz drošāk ir neturēt vārdu, jo pretējā gadījumā mana peļņa būs 0 un viņa 100."

	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(50, 50)$	$(0, 100)$
s_{12}	$(100, 0)$	$(10, 10)$

2.1.zīm.

Ieguvumu matrica (skatīt 2.1.zīm.), kur s_{i1} — norunu turēt un s_{i2} — norunu lauzt, $i = 1, 2$, rāda, ka mēs atkal esam cietuma dilemmas situācijā: ir divi spēlētāji, divas spēlētāju stratēģijas, no kurām "norunu lauzt" ir dominējošā, un ir viens Neša līdzsvars (s_{12}, s_{22}). Atšķirība situācijas aprakstā tomēr ir — konkurenti spēles sākumā paši vienojas par karteļa norunu. Tomēr gala rezultātā nekāda kooperācija neiznāk, jo katrs domā par personīgo labumu. Par norunas laušanu ražotājiem nekāds sods nedraud, toties norunas turēšanas gadījumā, ja otrs tomēr vārdu netur, peļņas vispār nav. Ja, piemēram, karteļa noruna tiktu izdarīta trešās personas klātbūtnē, kas rūpētos par to, lai vārds tiktu turēts, galarezultāts būtu stratēģiju pāris (s_{11}, s_{21}), un ciestu patērētāji. Tāpēc daudzās valstīs karteļu norunas ir ar likumu aizliegtas.

Atcerēsimies vēlreiz cietuma dillemu. Ja nu situācija būtu izveidojusies tā, ka pirms noziedznieku apcietināšanas paši noziedznieki būtu vienojušies neatzīties. Vai tas rezultātu mainītu? Taču nē! Sēdot kamerās, abi izspriestu, ka labāk ir atzīties. Citādāk būtu, ja, teiksim, noziedznieku mafija katru, kas atzinies, pacenstos nogalināt vai kā citādi nelabvēlīgi ietekmēt viņa likteni, t.i., trešā persona uzraudzītu dotā vārda turēšanu.

Sabiedriskie labumi

Sabiedriskie labumi — tie ir tādi labumi (preces), kurus vienlaicīgi izmanto vairākas personas, piemēram, ielas, parki, bibliotēkas, veikali, u.c. Izmantojot sabiedrisko labumu, patērētāja i ieguvums neietekmē patērētāja j ieguvumu. Viens no svarīgākajiem ekonomiskās teorijas pamatizteikumiem skan: sabiedrisko labumu iekārtošana nav iespējama ar privātā tirgus palīdzību, jo noteiktu sabiedrisko labumu var izmantot arī bez iemaksas tā izveidošanai.

Piemēram, *divām personām A un B tiek piedāvāts iekārtot sabiedrisko parku. Parka pilnīga iekārtošana izmaksātu 120 naudas vienības. Ja parks tiktu iekārtots, tad gan A, gan B gūtu 110 naudas vienību peļņu. Ja A un B vienotos par parka ierīkošanu, tad katram tas izmaksātu 60 naudas vienības. Ja tikai viens būtu ar mieru iekārtot parku, tad visi izdevumi jāsedz viņam vienam pašam. Savukārt, ja A un B nevienosies par parka izveidošanu, parks netiks iekārtots un nevienam nekas nav jāmaksā. Vai parks tiks izveidots?.*

Ieguvumu matrica (starpības starp izmaksām un peļņu) parka iekārtošanas situācijai dota 2.2.zīmējumā.

	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(50, 50)$	$(-10, 110)$
s_{12}	$(110, -10)$	$(0, 0)$

2.2.zīm.

Stratēģiju pāris (s_{12}, s_{22}) (abiem — neierīkot parku) ir spēlētāju dominējošā stratēģija. Stratēģiju pāris (s_{12}, s_{22}) ir dotās spēles Neša līdzsvars: 1.spēlētājs nevar uzlabot savu ieguvumu, izmainot stratēģiju, jo tad ieguvums būs -10; 2.spēlētājs arī nevar uzlabot savu ieguvumu, jo s_{21} viņam dos tikai -10. Tātad parks netiks ierīkots. Šis rezultāts ir nenovēršams tik ilgi, kamēr situācija netiks atkārtota un spēlētājiem nav jāsastāda vienošanās līgums, kā rezultātā tiktu izvēlēts stratēģiju pāris (s_{11}, s_{21}).

"Dzimumu cīņa"

Oskars un Tīna pusdienlaikā nejauši satikušies kafejnīcā. Viņi nolemj šo vakaru pavadīt kopā. Tīna ir nepārspējama futbola fane, un vislabprātāk šovakar viņa ietu uz savas iemīļotās komandas spēli. Oskaram ne visai tīk futbols, viņš ir liels kino cienītājs un grib Tīnu pierunāt šovakar iet uz jaunāko Spīlberga filmu. Tīna ļauj manīt, ka viņa nelabprāt iet uz kino, īpaši viena. Sarunas laikā Oskars paskatās pulkstenī un pēkšņi atceras, ka pēc neilga laika viņam ir sarunāta ļoti svarīga satikšanās. Viņš strauji atvadās no Tīnas un saka: "Tu esi ļoti jauka, mums vajag vēl šovakar satikties." Arī Tīna ir iepriecināta. Bet tikai vēlāk abi aptver, ka nav sarunājuši konkrētu satikšanās vietu un ar adresēm un telefoniem nav paguvuši apmainīties. Uz kurieni lai viņi iet, lai atkal satiktos, — uz futbolu vai kino? Abi zina, ka Tīna labāk ietu uz stadionu un Oskars uz kino, bet kopā būtu iet ar mieru gan uz vienu, gan otru vietu. Kā šo jautājumu atrisināt?

Pamēģināsim noskaidrot Tīnas un Oskara attieksmi pret gaidāmajiem notikumiem, nosakot priekšrocību sakārtojumu. Pēc Oskara domām abiem iet uz kino ir daudz labāk nekā abiem iet uz futbolu $(K, K) >_O (F, F)$, kā arī abiem iet uz futbolu ir daudz labāk nekā šķirti katram uz citu vietu:

$$(F, F) >_O (K, F) =_O (F, K).$$

Gandrīz to pašu var teikt par Tīnu, tikai viņa priekšroku dod futbolam:

$$(F, F) >_T (K, K) >_T (K, F) =_T (F, K).$$

Piekārtojot lietderības indeksus kaut vai šādā veidā

$$u_O(K,K) = 10,\ u_O(F,F) = 8,\ u_O(K,F) = u_O(F,K) = 6,$$

$$u_T(F,f) = 10,\ u_T(K,K) = 8,\ u_T(K,F) = u_T(F,K) = 6,$$

iegūsim sekojošu ieguvumu matricu (2.3.zīm.):

Tīna Oskars	kino s_{21}	futbols s_{22}
kino — s_{11}	$(10,8)$	$(6,6)$
futbols — s_{12}	$(6,6)$	$(8,10)$

2.3.zīm.

Atšķirībā no iepriekš apskatītajiem gadījumiem šajā nav dominējošās stratēģijas, toties ir divi Neša līdzsvari: stratēģiju pāri (s_{11}, s_{21}) un (s_{12}, s_{22}), kas arī abi ir labākie atrisinājumi šajā spēlē. Tomēr nav skaidrs, kurš no abiem līdzsvariem tiks realizēts, kā arī, vai vispār šajā situācijā līdzsvars tiks realizēts. Tātad uz jautājumu, kā rīkoties Tīnai un Oskaram, atbildēt nevar. Protams, situācija ir ļoti atkarīga no konkrēto cilvēku rakstura īpašībām, audzināšanas un pieņemtajām morāles normām sabiedrībā. Tā, piemēram, ja Tīna un Oskars dzīvo sabiedrībā, kur galveno lomu spēlē vīrieši, tad laikam gan abi satiktos pie kinoteātra. Bet, ja sabiedrībā ir pieņemts izpatikt sievietēm, tad satikšanās vieta būs futbola stadions.

Šajā pēdējā "dzimumu cīņas" piemērā abiem spēlētājiem nebija dominējošās stratēģijas, toties ieguvumu matricā varējām uzrādīt divus Neša līdzsvarus, par kuru realizāciju grūti spriest. Apskatīsim divu spēlētāju, kuriem ir trīs atšķirīgas stratēģijas, ieguvumu matricu 2.4.zīmējumā.

	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	$(8,-8)$	$(1,1)$	$(-8,8)$
s_{12}	$(1,1)$	$(2,2)$	$(1,1)$
s_{13}	$(-8,8)$	$(1,1)$	$(8,-8)$

2.4.zīm.

Ja pirmais spēlētājs izvēlas stratēģiju s_{11}, tad otrajam visizdevīgāk būtu spēlēt s_{23}; ja pirmais izvēlas s_{12}, tad otrajam visizdevīgāk būtu spēlēt s_{22}; ja pirmais izvēlas s_{13}, tad otrajam visizdevīgāk būtu spēlēt s_{21}. Un pretēji: ja otrais spēlētājs izvēlas stratēģiju s_{21}, tad pirmajam visizdevīgāk būtu spēlēt s_{11}; ja otrais spēlētājs izvēlas s_{22}, tad pirmajam visizdevīgāk būtu spēlēt

s_{12}; ja otrais spēlētājs izvēlas s_{23}, tad pirmajam visizdevīgāk būtu spēlēt s_{13}. Tātad arī šajā spēlē nav dominējošo stratēģiju nevienam no spēlētājiem. Tas nozīmē, ka spēles atrisinājumu pēc dominējošo stratēģiju principa noteikt nevar. Arī šajā spēlē ir Neša līdzsvars (s_{12}, s_{22}), kuram atšķirībā no "dzimumu cīņas" piemēra ir liekāka iespēja tikt realizētam, jo šis līdzsvars šajā spēlē ir vienīgais.

LEKCIJA NR. 3

SPĒLES FORMALIZĀCIJA

Spēles normālforma
Stratēğiju uzvedība
Līdzsvars
John F.Nash

Spēles normālforma

Līdz šim esam apskatījuši dažādas spēļu variācijas, taču pats spēles jēdziens precīzi pagaidām nav dots, tagad to izdarīsim, kā arī definēsim dažus citus jēdzienus, kuriem būtiska nozīme spēļu teorijā.

DEFINĪCIJA. Teiksim, ka ir dota *spēle normālformā*, ja
1) dota spēlētāju kopa $N = \{1, ..., n\}$;
2) katram spēlētājam $i \in N$ ir zināma viņa stratēğiju kopa S_i;
3) katram spēlētājam $i \in N$ ir zināma viņa lietderības funkcija

$$u_i : S_1 \times ... \times S_n \to \mathbf{R}.$$

Saīsināti spēli normālformā pieraksta $\Gamma = (N; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$.

Atzīmēsim, ka spēle, kas dota ar ieguvumu matricas palīdzību, ir speciālgadījums spēlei normālformā.

Cietuma dilemmas situācijā spēlētāju kopa N sastāv no diviem spēlētājiem, abu spēlētāju stratēğiju kopas ir vienādas $S_i = \{n, a\}$, $i = 1, 2$ (n — neatzīties, a — atzīties). $S_1 \times S_2 = \{(n, n), (n, a), (a, n), (a, a)\}$ ir visu iespējamo stratēğiju kombināciju kopa.

Vispārīgā situācijā $S := S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ ir n spēlētāju visu iespējamo stratēğiju kombināciju kopa, kur $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ ir tikai viena konkrēta stratēģiju kombinācija no kopas S. Ar

$$S_{-i} := S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} S_j$$

tiek apzīmēta n spēlētāju stratēģiju kopa bez i-tā spēlētāja stratēģijām; attiecīgi $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ ir viena konkrētā n spēlētāju stratēģiju kombinācija bez i-tā spēlētāja stratēģijas s_i.

Stratēģiju uzvedība

DEFINĪCIJA. Saka, ka spēlē $\Gamma = (N; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$ *stratēģija* $s_i^* \in S_i$ *dominē pār stratēģiju* s_i, $i \in \{1, ..., n\}$, ja visām stratēģiju kombinācijām $s_{-i} \in S_{-i}$ ir spēkā nevienādības $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ un mazākais vienai no tām izpildās stingrā nevienādība.

DEFINĪCIJA. Stratēģiju $s_i^* \in S_i$ sauc par *dominējošu*, ja tā dominē pār visām citām stratēģijām $s_i \in S_i$.

DEFINĪCIJA. Stratēģija $s_i^* \in S_i$ *stingri dominē* pār stratēģiju s_i, $i \in \{1, ..., n\}$, ja visām stratēģiju kombinācijām $s_{-i} \in S_{-i}$ ir spēkā:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}).$$

DEFINĪCIJA. Stratēģiju sauc par *stingri dominējošu*, ja tā stingri dominē pār visām citām stratēģijām $s_i \in S_i$.

DEFINĪCIJA. Stratēģiju $s_i^* \in S_i$ sauc par *dominētu*, ja ir vismaz viena stratēģija $s_i \in S_i$, kura pār to dominē.

DEFINĪCIJA. Stratēģiju $s_i^* \in S_i$ sauc par *stingri dominētu*, ja ir vismaz viena stratēģija $s_i \in S_i$, kura pār to stingri dominē.

Ilustrēsim definīcijas ar ieguvumu matricu, kurā ieguvums uzrādīts tikai pirmajam spēlētājam.

	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(3, ...)$	$(2, ...)$
s_{12}	$(0, ...)$	$(2, ...)$
s_{13}	$(1, ...)$	$(1, ...)$

3.1.zīm.

Stratēģija s_{11} dominē pār stratēģiju s_{12}:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = 3 > u_1(s_{12}, s_{21}) = 0 \quad \text{un}$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 2 \geq u_1(s_{12}, s_{22}) = 2, \quad (*)$$

bet tā nedominē stingri pār stratēģiju s_{12}, jo izpildās vienādība $(*)$ nevis stingrā nevienādība.

Stratēģija s_{11} stingri dominē pār stratēģiju s_{13}:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = 3 > u_1(s_{13}, s_{21}) = 1 \quad \text{un}$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 2 \geq u_1(s_{13}, s_{22}) = 1.$$

Tātad stratēģija s_{11} ir dominējoša, jo tā dominē pār stratēģijām s_{12} un s_{13}, bet tā nav stingri dominējoša, jo s_{11} stingri dominē tikai pār s_{13}, bet ne pār s_{12} (izpildās vienādība $(*)$).

Stratēģija s_{12} ir dominēta, jo stratēģija s_{11} dominē pār to, bet tā nav stingri dominēta (vienādības $(*)$ dēļ). Stingri dominēta ir stratēgija s_{13}, jo s_{11} stingri dominē pār to.

Līdzsvars

DEFINĪCIJA. Spēles $\Gamma = (N; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$ stratēģiju kombināciju $(s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ sauc par *dominējošo stratēģiju līdzsvaru*, ja visiem spēlētājiem $i \in N$ stratēģija s_i^* ir dominējoša.

DEFINĪCIJA. Stratēģiju $s_i^* \in S_i$ sauc par *maxmin-stratēģiju*, ja visām citām stratēģijām $s_i \in S_i$ izpildās nevienādības:

$$\min\{u_i(s_i^*, s_{-i}) \mid s_{-i} \in S_{-i}\} \geq \min\{u_i(s_i, s_{-i}) \mid s_{-i} \in S_{-i}\}.$$

Iepriekš apskatītajā piemērā stratēģija s_{11} ir maxmin-stratēģija, jo:

$$\min\{u_1(s_{11}, s_{21}), u_1(s_{11}, s_{22})\} = 2 \geq \min\{u_1(s_{12}, s_{21}), u_1(s_{12}, s_{22})\} = 0,$$
$$\min\{u_1(s_{11}, s_{21}), u_1(s_{11}, s_{22})\} = 2 \geq \min\{u_1(s_{13}, s_{21}), u_1(s_{13}, s_{22})\} = 1.$$

DEFINĪCIJA. Spēles $\Gamma = (N; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$ stratēģiju kombināciju $(s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ sauc par *maxmin- stratēģiju atrisinājumu*, ja visiem spēlētājiem $i \in N$ stratēģija s_i^* ir maxmin-stratēģija

DEFINĪCIJA. Spēles $\Gamma = (N; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$ stratēģiju kombināciju $(s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ sauc par *Neša (Nash) līdzsvaru*, ja katram spēlētājam $i \in N$ un jebkurai stratēģijai $s_i \in S_i$ izpildās nosacījums

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Atcerēsimies cietuma dilemmas situāciju (skatīt 1.2.zīm.). Stratēģiju pāris (s_{12}, s_{22}) ir Neša līdzsvars:

$$\begin{array}{l} u_1(s_{12}, s_{22}) = 2 \geq u_1(s_{11}, s_{22}) = 1 \quad \text{un} \\ u_1(s_{12}, s_{22}) = 2 \geq u_1(s_{12}, s_{21}) = 1. \end{array}$$

Šo secinājumu mēs izdarījām jau iepriekš. Mēs teicām, ka cietuma dillemas risinājumu dod dominējošo stratēģiju pāris. Tagad varam precizēt zināšanas un teikt, ka (s_{12}, s_{22}) ir dominējošo stratēģiju līdzsvars, pie tam tas ir stingri dominējošo stratēģiju līdzsvars. Šis stratēģiju pāris (s_{12}, s_{22}) ir arī maxmin-stratēģiju atrisinājums, jo s_{12} ir 1.spēlētāja maxmin-stratēģija:

$$\min\{u_1(s_{12}, s_{21}), u_1(s_{12}, s_{22})\} = 2 \geq \min\{u_1(s_{11}, s_{21}), u_1(s_{11}, s_{22})\} = 1,$$

un s_{22} ir 2.spēlētāja maxmin-stratēģija:

$$\min\{u_2(s_{11}, s_{22}), u_2(s_{12}, s_{22})\} = 2 \geq \min\{u_2(s_{11}, s_{21}), u_2(s_{12}, s_{21})\} = 1.$$

Tātad cietuma dilemmas gadījumā stingri dominējošo stratēģiju līdzsvars, Neša līdzsvars un maxmin-stratēģiju atrisinājums sakrīt. Tā tas ir ne vienmēr. Piemēram, spēlē, kas aplūkota 2.4.zīmējumā. Šajā spēlē nav dominējošo stratēģiju, tātad nav dominējošo stratēģiju līdzsvara, bet ir Neša līdzsvars (s_{12}, s_{22}), kas sakrīt ar maxmin-stratēģiju atrisinājumu (jo s_{12} ir 1.spēlētāja maxmin-stratēģija:

$$\begin{array}{l} \min\{u_1(s_{12}, s_{21}), u_1(s_{12}, s_{22}), u_1(s_{12}, s_{23})\} = 1 \geq \\ \quad \geq \min\{u_1(s_{11}, s_{21}), u_1(s_{11}, s_{22}), u_1(s_{11}, s_{23})\} = -8, \end{array}$$

kā arī

$$1 \geq \min\{u_1(s_{13}, s_{21}), u_1(s_{13}, s_{22}), u_1(s_{13}, s_{23}\} = -8 \quad).$$

John F.Nash

John F.Nash ir dzimis 1928.gadā *Bluefield, West Virginia*, ASV, šeit viņš arī uzaudzis. Viņš ir studējis matemātiku laikā no 1945.gada līdz 1948.gadam *Carnegie Institute of Technology.* 1948.gadā viņš ir ieguvis abus pamatgrādus — bakalaura un maģistra — matemātikā. Šajā pat gadā J.Nešs ir uzsācis doktora studijas Matemātikas nodaļā *Princeton University* (vienā no rekomendācijas vēstulēm *Carnegie Institute of Technology* profesors bija uzrakstījis tikai īsu teikumu: "Šis vīrs ir ğēnijs."). Četrpadsmit mēnešus pēc doktordarba uzsākšanas 1949.gada novembrī darba pamatrezultāts tika nosūtīts *Proceedings of the National Academy of Sciences.* Viņš pabeidza Ph.D. nākošajā gadā, svinot savu 22 dzimšanas dienu.

Dž.Neša doktordarba tēzes ir 28 lapas garas, kurās izveidots līdzsvara jēdziens, ko šodien mēs pazīstam ar nosaukumu "Neša līdzsvars", un izveidota stratēğisko spēļu klase, kurai eksistē Neša līdzsvars. Neša līdzsvara jēdziens ievērojami paplašināja spēļu teorijas darbības lauku, kas iepriekš bija fokusēts uz divu spēlētāju stingras konkurences spēlēm (kurās spēlētāju intereses ir tieši pretējas). Vēl būdams doktorands Prinsetonā 1950.gadā Nešs sarakstīja pirmos rakstus par tirgošanās (kaulēšanās) teoriju.

Dž.Nešs būdams augstskolas pasniedzējs ir sarakstījis virkni vērā ņemamu rakstu un viņš tiek vērtēts kā viens no orğinālākajiem 20.gadsimta prātiem. 1994.gadā Dž.Nešs kopā ar spēļu teorijas teorētiķiem *John C.Harsanyi* un *Reinhard Selten* saņēma Nobela prēmiju ekonomikas zinātnēs.

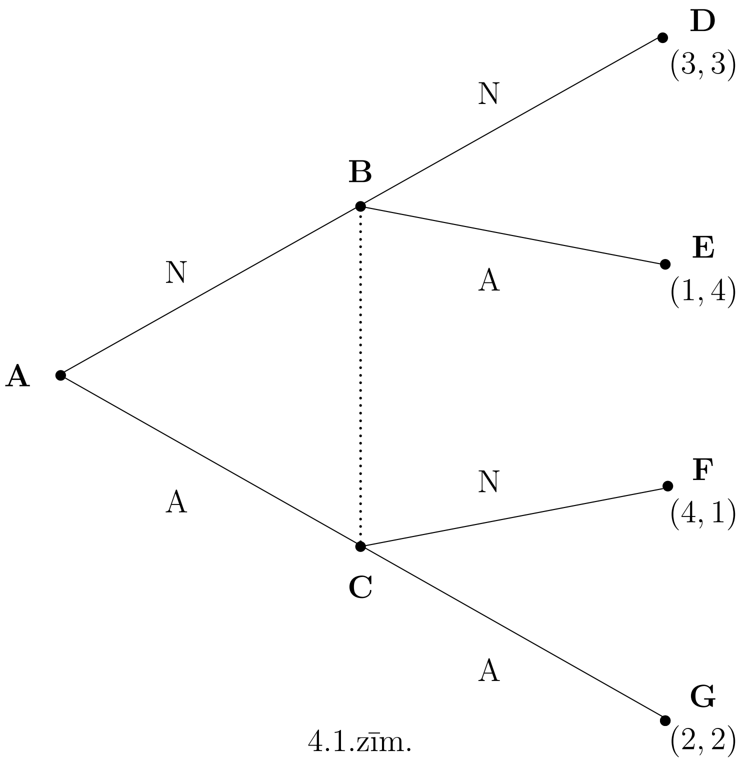
LEKCIJA NR. 4

EKSTENSĪVĀ SPĒLES FORMA

Spēles koks
Cietuma dilemmas analīze
Spēles "Monopolists un viņa konkurents" analīze

Spēles koks

Ne vienmēr ir izdevīgi spēli raksturot ar normālformu. Daudzās spēļu situācijās spēlētāji vienas spēles laikā veic vairākus gājienus, pie tam dažkārt viņi var novērot partneru gājienus, bet daļu partneru gājienu var nezināt. Šāda informācija spēles normālformā netiek atspoguļota. Daudzām spēlēm ir *dinamiska struktūra*: spēlētāji izdara gājienus viens pēc otra. Dinamisko spēles struktūru ar detalizētu visu spēlētāju iespējamo gājienu aprakstu, ietverot laika struktūru katra spēlētāja atsevišķajā gājienā, kā arī viņa informētības stāvokli katrā laika punktā, var formāli attēlot ar spēles koku. Katrs spēlētāja gājiens tiek atzīmēts ar mezglu, kurā spēlētājs var izvēlēties starp dažādām stratēģijām jeb zariem (jeb rīcības alternatīvām) sev vēlamāko. Šādu spēles attēlojuma veidu sauc par *spēles ekstensīvo formu* (arī pozīciju spēles formu). Spēles kokā tiek parādīts, kuram no spēlētājiem jāizdara gājiens un kādu informāciju par citiem spēlētājiem gājiena izdarīšanas brīdī spēlētājs var izmantot. Ja spēlētājam nav informācijas par to, kādu gājienu ir izdarījis viņa pretspēlētājs, tad viņš nevar izšķirt, kurā no spēles mezgliem viņš atrodas. Šādā situācijā tiek runāts par spēli ar *neperfektu (jeb nepilnu) informāciju*. Ja spēlētājs jebkurā mezglā zina, kādus gājienus izdarījuši pārējie spēlētāji, un atceras, kādus gājienus pats izdarījis iepriekš, tad tiek runāts par *spēli ar perfektu (jeb pilnu) informāciju*. Neperfektas informācijas spēlē tie mezgli, par kuriem spēlētājs nevar pateikt, kurā no tiem viņš atrodas, tiek savienoti ar pārtrauktu līniju (skatīt 4.1.zīm.).

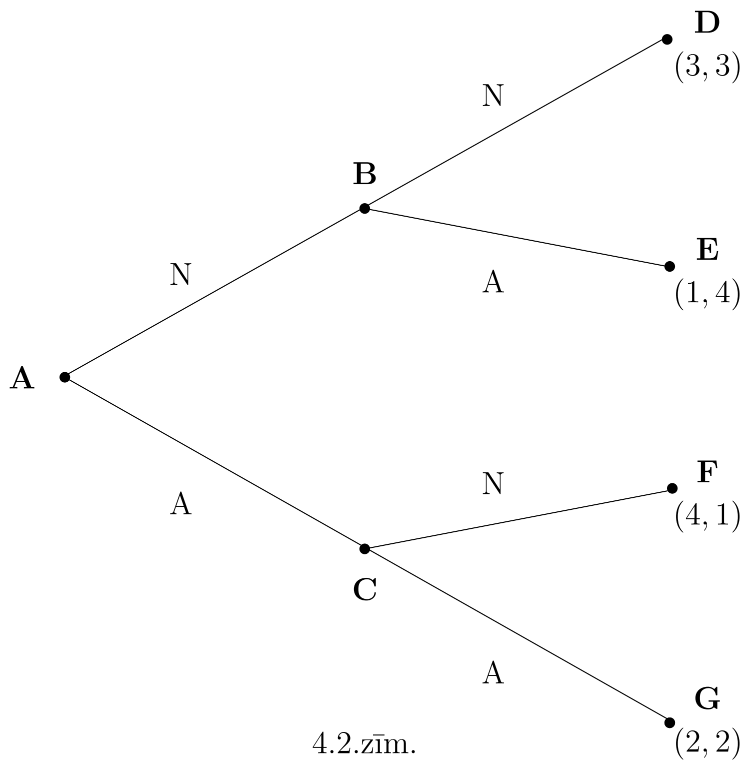


4.1.zīm.

Šie mezgli veido vienu *informācijas kopu.* Perfektas informācijas spēles informācijas kopu ir tikpat daudz cik mezglu.

Cietuma dilemmas analīze

Cietuma dilemmu ar spēles koku var attēlot šādi (4.1.zīm.): 1.spēlētājs atrodas sākumpunktā **A**, viņam ir iespējams izvēlēties starp zariem N — neatzīties un A — atzīties. Kad 2.spēlētājs izvēlas savu gājienu, viņš nezina, kuru zaru pirmais ir izvēlējies, tāpēc 2.spēlētājs nevar mezglus **B** un **C** atšķirt (mezgli **B** un **C** veido vienu informācijas kipu). Tā ir spēle ar neperfektu informāciju. Ja mēs 4.1.zīmējumā izdzēstu pārtraukto līniju (skatīt 4.2.zīm.), t.i., apskatītu spēli ar perfektu informāciju, tad šāds spēles koks nozīmētu, ka šerifs jautā vispirms vienam noziedzniekam — 1.spēlētājam, vai viņš atzīstas vai nē, pēc tam 2.spēlētājam, vai tas atzīstas vai nē, pie tam otrs noziedznieks zin pirmā noziedznieka atbildi. Veidojas pavisam cita situācija nekā iepriekš. Proti, ja 1.spēlētājs izdara gājienu, tad 2.spēlētājam principā ir pilnīgi skaidrs, ko viņš darīs: ja 1.spēlētājs izvēlējies N, tad 2.spēlētājs izvēlēsies A; ja 1.spēlētājs izvēlējies A, tad 2.spēlētājs izvēlēsies A. Ekstensīvā spēles forma var dot pilnīgu plānu, kā var rīkoties spēlētāji.



4.2.zīm.

No 4.2.zīmējuma redzams, ka 2.spēlētājam tagad ir četras stratēģijas: NN — abos mezglu punktos **B** un **C** tiek izvēlēta stratēģija neatzīties; NA — mezglā **B** neatzīties, mezglā **C** atzīties; AN — mezglā B atzīties, mezglā **C** neatzīties; AA — mezglā **B** atzīties, mezglā **C** atzīties. Tādējādi ieguvumu matrica būs šāda (4.3.zīm.):

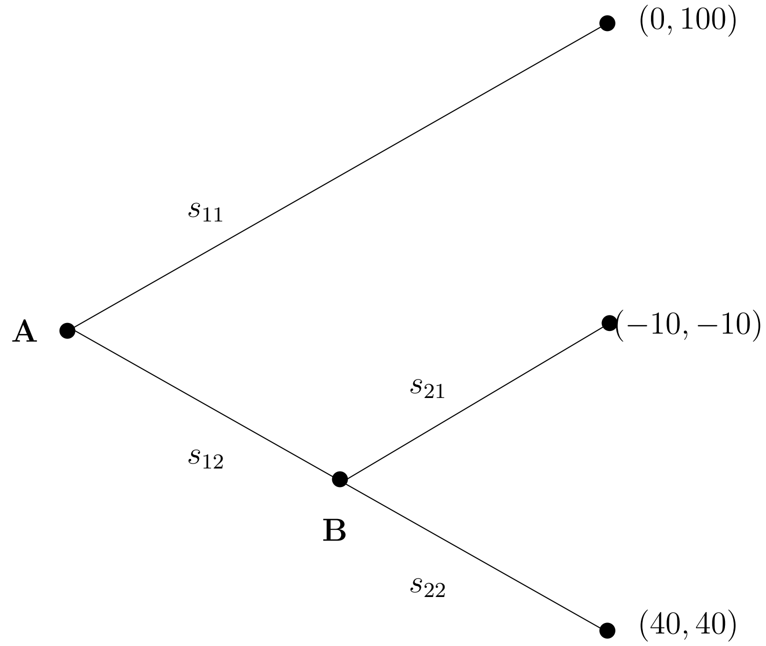
	NN	NA	AN	AA
N	$(3,3)$	$(3,3)$	$(1,4)$	$(1,4)$
A	$(4,1)$	$(2,2)$	$(4,1)$	$(2,2)$

4.3.zīm.

No šīs ieguvumu matricas viegli varam noteikt Neša līdzsvaru (A, AA), kas reducējas uz agrāk apskatīto situāciju un dod spēles atrisinājumu (A, A) — abiem noziedzniekiem jāatzīstas. Tātad, ja cietuma dilemmas situācija tiek izspēlēta ar perfektu informāciju, tas neietekmē spēles atrisinājumu. Spēles normālforma, kas attēlota ar matricas palīdzību, ir pietiekoša, lai noteiktu atrisinājumu; cietuma dilemmas situācijā ar to pilnīgi pietiek. Taču bieži vien matricas formā tiek pazaudēta būtiska informācija, jo ir situācijas, kurās spēles atrisinājums tiek ietekmēts atkarībā no tā, kādā secībā tiek izdarīti gājieni. Apskatīsim atbilstošu piemēru.

Spēles "Monopolists un viņa konkurents" analīze

Ir divi spēlētāji: monopolists — 2.spēlētājs un tā iespējamais konkurents — 1.spēlētājs. Pirmajā spēles gājienā 1.spēlētājs izšķiras, vai viņš ražos to pašu preci, ko 2.spēlētājs vai nē. Ja viņš izšķiras par neražošanu (gājiens s_{11}*), tad tas viņam nekādu peļņu nenes, toties 2.spēlētājs gūst 100 naudas vienības lielu peļņu. Ja 1.spēlētājs izšķiras par ražošanu (gājiens* s_{12}*), tad 2.spēlētājam ir jāizlemj, vai viņš konkurentu uzņems ar cīņu (gājiens* s_{21}*), un tādējādi abiem būs tikai zaudējumi -10 naudas vienības, vai konkurentu viņš sagaidīs draudzīgi (gājiens* s_{22}*), un abi gūs peļņu 40 naudas vienības katrs.*



4.4.zīm.

Spēles ekstensīvā forma dota 4.4.zīmējumā, no kuras izveidotā ieguvumu matrica parādīta 4.5.zīmējumā.

	$s_{21}s_{21}$	$s_{21}s_{22}$	$s_{22}s_{21}$	$s_{22}s_{22}$
s_{11}	$(0, 100)$	$(0, 100)$	$(0, 100)$	$(0, 100)$
s_{12}	$(-10, -10)$	$(40, 40)$	$(-10, -10)$	$(40, 40)$

4.5.zīm.

2.spēlētājam principā ir četras iespējamās stratēģijas:
1. $s_{21}s_{21}$ — cīņa pret konkurentu neatkarīgi no tā, kādu stratēģiju konkurents izvēlējies;
2. $s_{21}s_{22}$ — cīņa pret konkurentu, ja tas spēlē stratēģiju s_{11}, un miermīlīga konkurenta uzņemšana, ja tas spēlē stratēģiju s_{12};
3. $s_{22}s_{21}$ — miermīlīga konkurenta uzņemšana, ja tas spēlē stratēģiju s_{11}, un cīņa pret konkurenta uzņemšana, ja tas spēlē stratēģiju s_{12};
4. $s_{22}s_{22}$ — miermīlīga konkurenta uzņemšana neatkarīgi no tā, kādu stratēģiju konkurents izvēlējies.

Stratēģijas $s_{21}s_{21}$ un $s_{22}s_{21}$ dod vienādus ieguvumus, tāpat kā $s_{21}s_{22}$ un $s_{22}s_{22}$, tāpēc varam 2.spēlētāja 4 stratēģijas reducēt uz 2 stratēģijām un iegūt šādu ieguvumu matricu (4.6.zīm.):

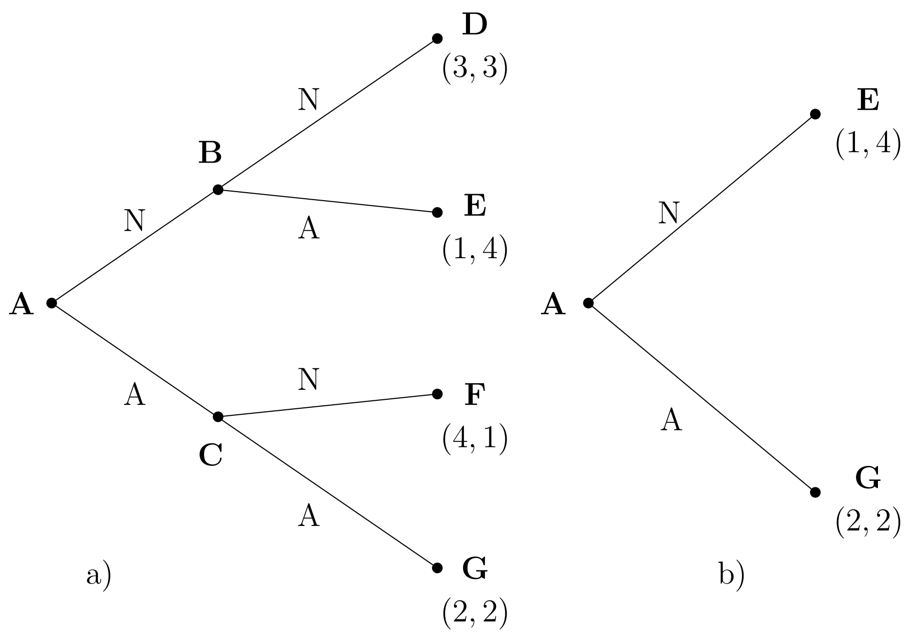
	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(0, 100)$	$(0, 100)$
s_{12}	$(-10, -10)$	$(40, 40)$

4.6.zīm.

No šīs ieguvumu matricas seko, ka spēlē ir divi Neša līdzsvari (s_{12}, s_{22}) un (s_{11}, s_{21}). Līdzsvaru (s_{12}, s_{22}) varētu izskaidrot tā — ja konkurents ir nolēmis iesaistīties ražošanā, tad monopolistam izdevīgāk būtu uzturēt ar viņu draudzīgas attiecības, tādējādi gūstot lielāku peļņu nekā pret to cīnoties. Arī līdzsvaram (s_{11}, s_{21}) ir savs pamatojums — ja pieņemam, ka monopolists ir nolēmis cīnīties pret jebkuru konkurentu, tad iespējamajam konkurentam izdevīgāk ir neuzsākt ražošanu, tādējādi viņš neko nezaudē un arī neiegūst. Tātad monopolistam ir izdevīgāk plānot konkurences cīņu, iebaidot potenciālo konkurentu uzsākt ražošanu.

Tomēr, vai šis otrais līdzsvars (s_{11}, s_{21}) ir ticams? Apskatīsim spēles koku 4.4.zīmējumā vēlreiz. Kaut arī 1.spēlētājs var pieņemt monopolista draudus par ticamiem, tad tomēr monopolistam, kaut arī viņš patiešām draudus gribētu realizēt, nav stimula to darīt, jo peļņas dalīšana viņam ir izdevīgāka situācija nekā konkurences cīņa, līdzko konkurents uzsāk ražošanu. Stratēģija s_{21} ir tukši draudi, tā nav ticama. Līdz ar to ekstensīvā spēles forma parāda, ka Neša līdzsvars (s_{11}, s_{21}) ir neticams.

No spēļu koka perfektas informācijas gadījumā vienmēr var noteikt vismaz vienu Neša līdzsvaru. Tikai jāņem vērā, ka to var izdarīt tad, ja spēlētāji uzvedas racionāli un viņiem visiem ir vienādas priekšrocības. Neša līdzsvaru var noteikt, analizējot spēli "atmuguriski". Apskatīsim cietuma dilemmas situāciju 4.7.zīmējumā a). Vienīgās iespējamās apakšspēles sākas mezglos **B** un **C**, kuros gājienus izdara 2.spēlētājs. Apakšpēlē **B** lielāko ieguvumu viņš gūs, ja izvēlēsies stratēģiju A; apakšspēlē **C** lielāko ieguvumu gūs, ja izvēlēsies stratēģiju A. Pirmais spēlētājs tagad ir nonācis situācijā, kas parādīta 4.7.zīmējumā b), kurā dabīgi izvēlēties stratēģiju A. Galarezultātā esam ieguvuši stratēģiju pāri (A, A), kurš ir Neša līdzsvars.



4.7.zīm.

Spēles kokā situācijā ar monopolistu un viņa iespējamo konkurentu ir tikai viena apakšspēle, kas sākas mezglā **B**. Otrais spēlētājs gūs lielāku peļņu, ja izvēlēsies stratēģiju s_{22}. Apzinoties to, 1.spēlētājam izdevīgāk ir izdarīt gājienu s_{12}. Stratēģiju pāris (s_{12}, s_{22}) ir Neša līdzsvars.

LEKCIJA NR. 5

LĒMUMU PIEŅEMŠANA NEDROŠOS (VARBŪTISKOS) NOTIKUMOS

Spēle pret dabu

Reālajā dzīvē ir iespējamas ļoti dažādas situācijas, kurās jāpieņem konkrēts lēmums, kā rīkoties. Dažas no šīm situācijām varam apskatīt kā spēli, kurā nav saprātīgu (racionālu) spēlētāju vai kurā ir zināmi iespējamie spēlētāju gājieni, bet nevar paredzēt, kurš gājiens tiks izdarīts, vai kurā kāds no spēlētājiem izdara gājienu ar zināmu varbūtību. Par šīm situācijām runāsim nākamajās divās lekcijās. Dažkārt šādas situācijas sauc par "lēmuma pieņemšanu pie zināma riska", jo kaut arī kāds no spēlētājiem izdara gājienus pēc varbūtību likuma, tad pretspēlētājam savā ziņā ir jāriskē, lai iegūtu kādu labumu. Apskatīsim vienu piemēru.

Lauksaimnieks mēğina izlemt jautājumu, kādu kultūru stādīt nākamajā pavasarī: rudzus, kviešus, prosu vai miežus. Viņš zina, ka iespējamā peļņa būs atkarīga no nākamās vasaras laika apstākļiem. Varbūtība, ka būs labs laiks vasarā ir 0,6, bet slikts laiks — 0,4. Ieguvumu matrica pie noteiktiem laika apstākļiem dota 5.1.zīmējumā. Kā vislabāk rīkoties lauksaimniekam?

daba lauksaimnieks	labs laiks 0,6	slikts laiks 0,4
rudzi	10	25
kvieši	20	15
prosa	14	14
mieži	17	17

5.1.zīm.

Vispirms ievērosim, ka ieguvumu matrica šādā situācijā būtiski atšķiras no visām iepriekš apskatītajām. Reāli it kā ir divi spēlētāji: lauksaimnieks un daba, taču ieguvumu mēs varam aprēķināt tikai lauksaimniekam; daba savā ziņā ir uzskatāma par aklu spēlētāju, kuram ir vienalga, kas notiek.

Mēģinot analizēt lauksaimnieka situāciju matemātiski, varam izskaitļot tā saucamās matemātiskās cerības jeb sagaidāmo vidējo peļņu, ja tiks iestādīta viena no kultūrām:

$$E_r = 0,6 \cdot 10 + 0,4 \cdot 25 = 16$$
$$E_k = 0,6 \cdot 20 + 0,4 \cdot 15 = 18$$
$$E_p = 0,6 \cdot 14 + 0,4 \cdot 14 = 14$$
$$E_m = 0,6 \cdot 17 + 0,4 \cdot 17 = 17$$

Bet vai šie skaitļi 16, 18, 14 un 17 skaidri parāda, kā rīkoties? Vislielākais no tiem ir 18, kas atbilst kviešu sējai. Ja būs labi laika apstākļi, tad, sējot kviešus, peļņa būs vislielākā. Bet, ja laika apstākļi būs slikti, tad rudzu sēšana dotu daudz lielāku peļņu. Jāatzīstas, ka viennozīmīgu atbildi uz jautājumu, kā rīkoties lauksaimniekam, nevar dot. Ja viņš ir cilvēks, kurš baidās riskēt un samierinās tikai ar drošu ieguvumu, tad viņš var izšķirties par miežu sēju, jo tā neatkarīgi no laika apstākļiem dos peļņu, kas lielāka, ja viņš sliktā vasarā būtu iesējis kviešus vai ja viņš labā vasarā būtu iesējis rudzus. Ja viņam ļoti vajadzīga prosa, tad labā vasarā viņš gūs lielāku peļņu nekā, ja būtu iestādījis rudzus. Bet — kas neriskē, tas nevinnē, tāpēc daudzi lauksaimnieki izies uz loteriju un sēs rudzus vai kviešus. Šādu darbību var nosaukt par neracionālu.

Mēģināsim piedāvāto situāciju vispārināt. Ar Ω apzīmēsim visu iespējamo notikumu kopu. (Lauksaimnieka situācijā $\Omega = \{10, 14, 15, 17, 20, 25\}$.)

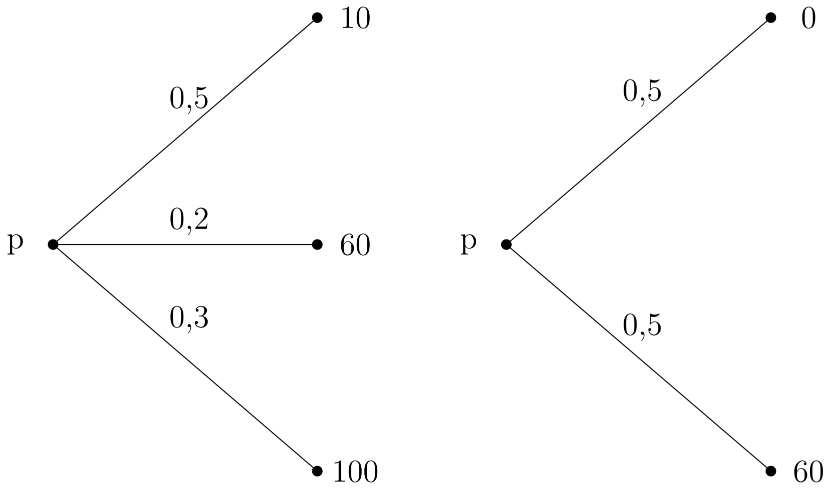
Loterija

DEFINĪCIJA. Par *loteriju* pār kopu Ω sauc tādu funkciju $p : \Omega \to [0;1]$, kurai $\sum\limits_{w\in\Omega} p(w) = 1$.

Bieži "loterijas" vietā tiek lietots jēdziens "varbūtības sadalījums". Šos vārdus uztversim kā sinonīmus. (Piemēram, viena no iespējamajām loterijām pār lauksaimnieka Ω ir $p(\Omega) = \{0,6;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0,4\}$.)

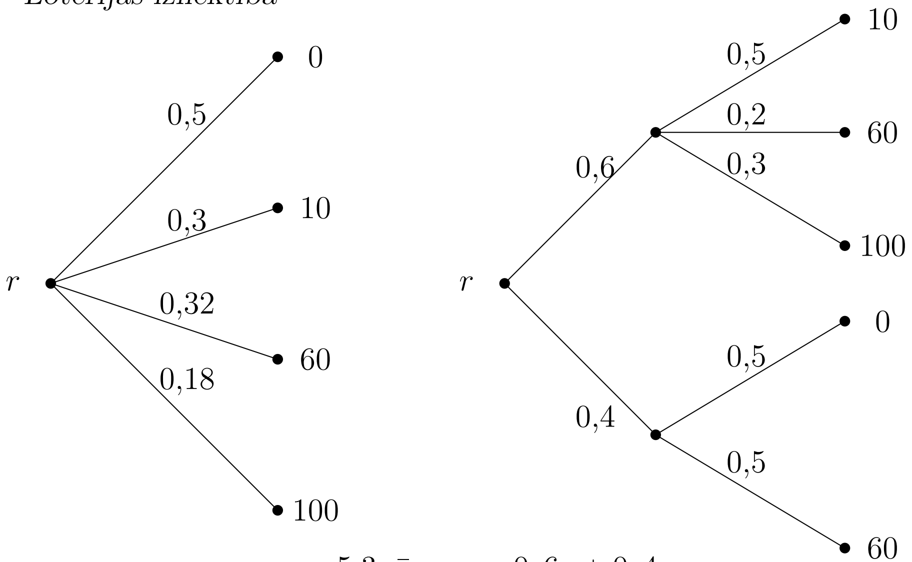
Ar W apzīmēsim visu iespējamo varbūtību sadalījumu kopu kopā Ω. Ja Ω satur n elementus, tad W varam stādīties priekšā kā sarakstu ar n stabiņiem. Piemēram, $(0,2;\ 0;\ 0;\ 0,6;\ 0,2)$ ir viena rindiņa šādā sarakstā, kur Ω satur 5 elementus.

Varbūtību sadalījumu var ilustrēt arī ar spēļu koku. Piemēram, notikumu kopai $\Omega = \{0;\ 10;\ 60;\ 100\}$ doti divi varbūtību sadalījumi 5.2.zīmējumā.



5.2.zīm.

No šiem zīmējumiem varam noteikt, ka $p = (0;\ 0,5;\ 0,2;\ 0,3)$ un $q = (0,5;\ 0;\ 0,5;\ 0)$. Varam arīdzan jautāt, kāds koks atbilst loterijai $0,6p+0,4q$? Atbildi varam atspoguļot divējādi (skatīt 5.3.zīmējumu a) un b)): spēļu koki gan ir atšķirīgi, bet notikumiem ir vienādas varbūtības.



5.3.zīm. $r = 0,6p + 0,4q$

Loterijas izliektība

APGALVOJUMS. Ja $p, q \in W$ un $\alpha \in [0; 1]$, tad $\alpha p + (1-\alpha)q \in W$, t.i., W ir izliekta kopa.

$\square$ Ja $p, q \in W$, tad $p = (p_1, p_2, ..., p_n),\ p_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ un $q = (q_1, q_2, ..., q_n),\ q_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$ pie pieņēmuma, ka W ir visu iespējamo varbūtību sadalījumu kopa kopai Ω ar n notikumiem. Tad:

$$\alpha p + (1-\alpha)q = (\alpha p_1, \alpha p_2, ..., \alpha p_n) + ((1-\alpha)q_1, (1-\alpha)q_2, ..., (1-\alpha)q_n) =$$

$$= (\alpha p_1 + (1-\alpha)q_1, \alpha p_2 + (1-\alpha)q_2, ..., \alpha p_n + (1-\alpha)q_n).$$

Iegūtais vektors patiešām ir varbūtību sadalījuma kopas W vektors, jo tā visas koordinātas ir lielās vai vienādas ar 0 (jo visi p_i un $q_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, un $\alpha \in [0; 1]$) un to summa ir vienāda ar 1:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha p_i + (1-\alpha)q_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} p_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} q_i = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1. \blacksquare$$

Tā kā kopas W elementus varam uztvert kā telpas $\mathbf{R}^n$ vektorus (dimensija n norāda notikumu kopas Ω elementu skaitu), tad mēs varam tos reizināt ar jebkuru reālu skaitli un varam jebkurus $p, q \in W$ saskaitīt, veicot saskaitīšanu pa atbilstošajām vektoru koordinātām.

Priekšrocību sakārtojums

Mēs pieņemsim, ka katram spēlētājam (lēmuma pieņēmējam) ir savs priekšrocību sakārtojums $\succ$ attiecībā uz kopas W elementiem. Ar šī sakārtojuma palīdzību varam kopā W definēt neizšķiršanas attiecību:

$$p \sim q \Leftrightarrow \neg(p \succ q) \,\&\, \neg(q \succ p).$$

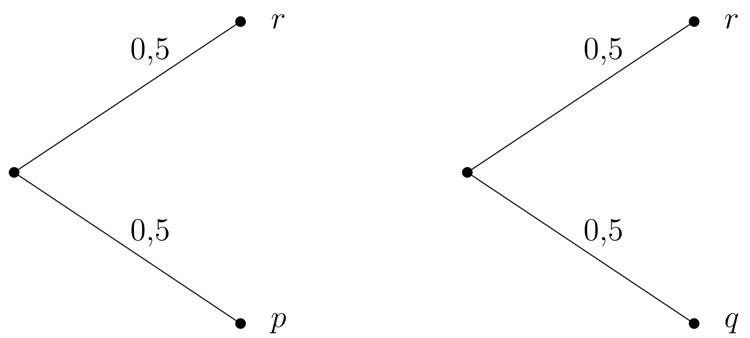
Neizšķiršanas attiecība ir refleksīva, t.i., $p \sim q$ visiem $p \in W$; simetriska: ja $p \sim q$, tad $q \sim p$, $p, q \in W$; transitīva: ja $p \sim q$ un $q \sim r$, tad $p \sim r$, $p, q, r \in W$. Tanī pašā laikā priekšrocību sakārtojums $\succ$ ir gan transitīvs: no $p \succ q$ un $q \succ r$ seko, ka $p \succ r$, bet nav simetrisks: katram loteriju pārim $p, q \in W$, ja $p \succ q$, tad $\neg(q \succ p)$, nav arī refleksīva, t.i., loterijai p netiek dota priekšroka pār to pašu loteriju p.

1.AKSIOMA. Priekšrocību sakārtojums $\succ$ kopā W ir pilns, t.i., par katru pāri $p, q \in W$ lēmuma pieņēmējs var pateikt, ka $p \succ q$ vai $q \succ p$, vai $p \sim q$.

No 1.aksiomas seko, ka patvaļīgām loterijām $p, q \in W$, kurām $p \succ q$, izpildās viena no sakarībām $p \succ r$ vai $r \succ q$. Gadījumā, kad $r \succ p$, transitivitātes dēļ iegūsim, ka $r \succ q$. Savukārt, ja $q \succ r$, tad transitivitātes dēļ $p \succ r$. Bet, ja $r \sim p$, tad $r \succ q$, ja $r \sim q$, tad $p \succ r$.

2.AKSIOMA. Pieņemsim, ka $p, q, r \in W$ ir trīs atšķirīgas loterijas un $\alpha \in [0; 1]$. Ja $p \succ q$, tad $\alpha p + (1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$.

2.aksiomu bieži dēvē par *Morgenšterna neatkarības postulātu.* Ilustrēsim 2.aksiomu ar piemēru. Pieņemsim, ka p, q ir divas loterijas no W, par kurām ir zināms, ka $p \succ q$. Pieņemsim, ka r arī ir kaut kāda loterija no W. Tad $\alpha = 0,5$ ir spēkā $0,5p + 0,5r \succ 0,5q + 0,5r$. Šo situāciju uzskatāmi var parādīt ar spēles koku (5.4.zīm.).



$$0,5p + 0,5r \succ 0,5q + 0,5r$$

5.4.zīm.

3.AKSIOMA. Pieņemsim, ka $p, q, r \in W$ ir trīs patvaļīgas loterijas. Ja $p \succ q$, tad eksistē tādas konstantes α, $\beta \in [0; 1]$, ka

$$q \succ \alpha p + (1-\alpha)r \text{ un } q \prec \beta p + (1-\beta)r.$$

3.aksiomu sauc arī par *Arhimeda aksiomu.* No šīs aksiomas seko:

ja $p^+ \succ q \succ p^-$, tad eksistēs tāds $\alpha \in]0; 1[$, ka $\alpha p^+ + (1-\alpha)p^- \sim q$. Ilustrēt to varētu tā: ir iespējami 0 Ls, 1 Ls un 100 Ls laimesti, tad eksistē tāda loterija $A = (\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in [0; 1]$, ka 1 Ls drošs vinnests ir līdzvērtīgs loterijai A, kurā ar varbūtību α var laimēt 0 Ls un ar varbūtību $1-\alpha$ var laimēt 100 Ls.

LEKCIJA NR. 6

LĒMUMU PIEŅEMŠANA NEDROŠOS (VARBŪTISKOS) NOTIKUMOS II

Derīguma funkcija
Drošības ekvivalents
Piemēri
Sankt-Pēterburgas paradokss

Derīguma funkcija

DEFINĪCIJA. Funkciju $u : W \to \mathbf{R}$ sauc par lēmuma pieņēmēja *derīguma funkciju*, ja sakarība $u(p) > u(q)$ izpildās tad un tikai tad, kad $p \succ q$, $p, q \in W$.

TEORĒMA. ja izpildās 1.-3.aksiomas un $\succ$ ir priekšrocību sakārtojums kopā W, tad eksistē tāda derīguma funkcija $u : \Omega \to \mathbf{R}$, ka sakarība $p \succ q$ izpildās tad un tikai tad, ja $\sum\limits_{w\in\Omega} p(w)u(w) > \sum\limits_{w\in\Omega} q(w)u(w)$.

Summas $\sum\limits_{w\in\Omega} p(w)u(w) = E_p(u)$ un $\sum\limits_{w\in\Omega} q(w)u(w) = E_q(u)$ sauc par derīguma matemātiskajām cerībām loterijās p un q. No šīs teorēmas seko, ka starp loterijām p un q mēs varēsim izšķirt, kura labāka, ja aprēķināsim atbilstošās matemātiskās cerības $E_p(u)$ un $E_q(u)$.

UNITĀTES TEORĒMA. Ja $u : \Omega \to \mathbf{R}$ un $v : \Omega \to \mathbf{R}$ ir divas dažādas derīguma matemātisko cerību funkcijas pie viena un tā paša priekšrocību sakārtojuma $\succ$ kopā W un izpildās 1.-3.aksiomas, tad eksistē tādas konstantes $a, b > 0$, ka $u(w) = a + bv(w)$ jebkuram $w \in \Omega$.

Pieņemsim, ka 0 Ls ieguvums atbilst lietderības funkcijas vērtība 0 un 1000 Ls ieguvumam atbilst lietderības funkcijas vērtība 1, t.i., $u(0) = 0$ un $u(1000) = 1$. Var rasties jautājums, kāda lietderības funkcijas vērtība atbilst 500 Ls ieguvumam.

Apzīmēsim ar δ_r tādu loteriju, kurai $\delta_r(r) = 1$ un $\delta_r(w) = 0$, $w \neq r$. Izmantojot šo apzīmējumu, varam jautāt, vai loterijai $0,5\delta_0 + 0,5\delta_{1000}$ dosim priekšroku pār loteriju δ_{500}? Lielākais vairums lasītāju droši vien labāk izvēlēsies 500 Ls drošu ieguvumu nekā loteriju, kurā ar varbūtību 0,5 var laimēt 0 Ls un ar varbūtību 0,5 var laimēt 1000 Ls. Tātad

$$0,5\delta_0 + 0,5\delta_{1000} \prec \delta_{500}. \tag{6.1}$$

Savukārt, ja drošam 500 Ls vinnestam pretī būs likta loterija, kurā ar varbūtību 0,0001 var laimēt 0 Ls un ar varbūtību 0,9999 var laimēt 1000 Ls, tad laikam gan priekšroka tiks dota šai loterijai, t.i.,

$$0,0001\delta_0 + 0,9999\delta_{1000} \succ \delta_{500}. \tag{6.2}$$

Uzrakstot sakarības (6.1) un (6.2) ar derīguma funkcijām, iegūsim

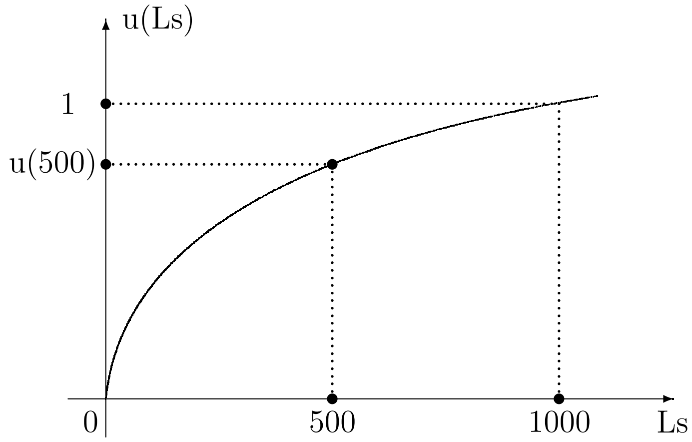
$$0,5u(0) + 0,5u(1000) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 = 0,5 < u(500) \text{ un}$$

$$0,0001u(0) + 0,9999u(1000) = 0,0001 \cdot 0 + 0,9999 \cdot 1 = 0,9999 > u(500).$$

No Arhimeda aksiomas sekām iegūsim, ka eksistēs tādas tāda konstante $\alpha \in]0,5; 0,9999[$, ka

$$(1 - \alpha)u(0) + \alpha u(1000) = u(500) \text{ jeb } \alpha = u(500).$$

Un, jo bailīgāks būs lēmuma pieņēmējs, jo α būs lielāks.



6.1.zīm.

Tātad derīguma funkcijai šajā situācijā ir izliekts uz augšu grafiks (skatīt 6.1.zīm.) jeb lietderības funkcijas otrais atvasinājums u'' ir ar negatīvu zīmi.

Drošības ekvivalents

DEFINĪCIJA. Par *drošības ekvivalentu* y_p loterijai p sauc tādu notikumu, pie kura loterijas δ_{y_p} un p nav izšķiramas, t.i., $\delta_{y_p} \sim p$, kā arī atbilstošās derīguma funkcijas matemātiskās cerības ir vienādas:

$$E_{\delta_{y_p}} u(\Omega) = E_p u(\Omega) \text{ jeb } u(y_p) = p(y_1)u(y_1) + ... + p(y_n)u(y_n).$$

(Ar $\Omega = \{y_1, ..., y_n\}$ apzīmēta notikumu kopa.)

No Morgenšterna 2.aksiomas seko, ka katrai loterijai p eksistē savs drošības ekvivalents.

Atceroties iepriekš apskatīto situāciju ar 0 Ls un 1000 Ls vinnestiem, varam sacīt, ka riska bailīgam cilvēkam drošības ekvivalents loterijā $0,5\delta_0 + 0,5\delta_{1000}$ būs daudz mazāks par skaitli 500 (viņš būs gatavs labāk saņemt mazu vinnestu nekā riskēt un piedalīties loterijā $0,5\delta_0 + 0,5\delta_{1000}$). Tas nozīmē, ka riska bailīgam cilvēkam drošības ekvivalents y_p loterijai p ir mazāks lielums nekā sagaidāmais ieguvums (matemātiskā cerība) loterijā p, t.i., $y_p < E_p(\Omega)$. Riskēt gatavam cilvēkam situācijā ar 0 Ls un 1000 Ls vinnestiem būs pavisam savādāka uzvedība nekā riska bailīgajam. Viņš labāk dos priekšroku daudzām pārdrošām loterijām un atsacīsies no droša vinnesta, t.i., šādam cilvēkam $y_p > E_p(\Omega)$. Par riska neitrālu mēs sauksim tādu lēmuma pieņēmēju, kuram loterijas ar vienādu ieguvumu ir neizšķiramas. Iepriekš apskatītajā situācijā tas nozīmētu, ka $0,5\delta_0 + 0,5\delta_{1000} = \delta_500$ jeb $y_p \sim E_p(\Omega)$. Iegūtos rezultātus varam apkopot tabulā (6.2.zīm.).

	riska bailīgs	riska neitrāls	riskēt gatavs
drošības ekvivalents salīdzinājumā ar sagaidāmo ieguvumu	$y_p < E_p(\Omega)$	$y_p \sim E_p(\Omega)$	$y_p > E_p(\Omega)$
riska prēmija $r := E_p(\Omega) - y_p$	$r > 0$	$r = 0$	$r < 0$
derīguma funkcijas u veids	$u'' < 0$ izliekta uz augšu	$u'' = 0$ lineāra	$u'' > 0$ izliekta uz leju

6.2.zīm.

Piemēri

Apskatīsim vienu piemēru, lai redzētu, kā noteiktā situācijā rīkotos dažādi lēmuma pieņēmēji (riska bailīgs, riska neitrāls, riskēt gatavs).

Jānim pieder māja, kuras vērtība ir 1 000 000 Ls. Varbūtība, ka māja varētu nodegt, ir 1%. 99% gadījumu māja nenodegs, to var iznomāt un iegūt 100 000 Ls peļņu. Jānim ir jānoslēdz mājas apdrošināšanas līgums par summu S. Mājas nodegšanas gadījumā apdrošināšanas firma sedz mājas vērtību un izmaksā 100 000 Ls. Kādu summu S Jānis būtu gatavs maksāt, līgumu noslēdzot?

Situāciju, kad ar varbūtību 0,01 māja nodegs un ar varbūtību 0,99 tā nenodegs, varam aplūkot kā loteriju p, kur $p(-1\,000\,000) = 0,01$ un $p(100\,000) = 0,99$. Šīs loterijas sagaidāmais ieguvums aprēķināms kā matemātiskā cerība un tas ir

$$E_p(\Omega) = 0,01 \cdot (-1\,000\,000) + 0,99 \cdot 100\,000 = 89\,000.$$

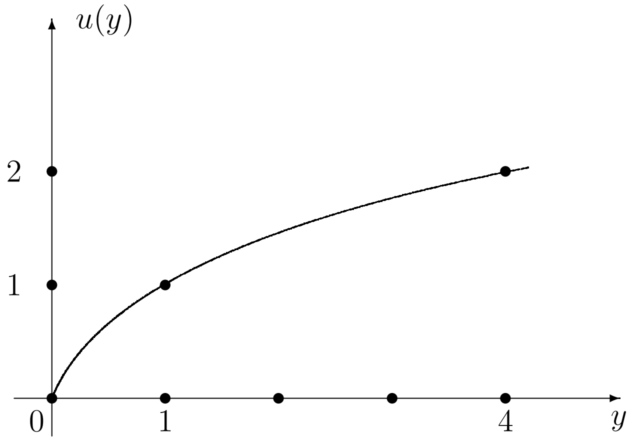
No otras puses varam aplūkot gadījumu, ja māja nodegtu. Jāņa ienākumus tad varam vērtēt $100\,000 - S$ Ls, un tas ir drošs ieguvums, ja māja nodegtu.

Lai varētu pateikt, kādu summu Jānis būtu gatavs izdot par mājas apdrošināšanu, jāsalīdzina viņa sagaidāmie ienākumi $E_p(\Omega) = 89\,000$ ar drošības ekvivalentu $y_p = 100\,000 - S$. Ja Jānis ir riska neitrāls, tad $E_p(\Omega) = y_p$ jeb $89\,000 = 100\,000 - S$, t.i., $S = 11\,000$. Ja Jānis ir riska bailīgs, tad $S > 11\,000$ Ls; ja Jānis ir riskēt gatavs, tad $S < 11\,000$ Ls.

Atšķirības starp riska bailīgiem un riskēt gatavajiem var būt ļoti lielas. Ja mēs esam noskaidrojušikādas personas derīguma funkciju u, tad pēc tās otrās kārtas atvasinājuma varēsim pateikt, ar kādu personu mums darīšana. Ja kāds lēmuma pieņēmējs i ir bailīgāks par kādu citu j-to lēmuma pieņēmēju, tad tā derīguma funkcija ir izliektāka vairāk uz augšu.

Apskatīsim vēl vienu piemēru.

Bērziņa kunga derīguma funkcija ir $u(y) = \sqrt{y}$ (skatīt 6.3.zīm.).



6.3.zīm.

Bērziņa kungam bankā ir noguldīti 3125 Ls. Viņam tiek piedāvāts darījums iegādāties vērtspapīrus, kuri ar varbūtību 0,5 var dot ienākumus 400 Ls un ar tādu pašu varbūtību 0,5 var dot ienākumus 900 Ls. Par šiem vērtspapīriem Bērziņa kungam tiek prasīta 650 Ls liela cena. Kā viņš rīkosies?

Ja Bērziņa kungs vērtspapīrus pirktu, tad matemātiskā cerība šādam darījumam būtu

$$E_p(\Omega) = 0,5 \cdot (3125 + 400 - 650) + 0,5 \cdot (3125 + 900 - 650) = 3125.$$

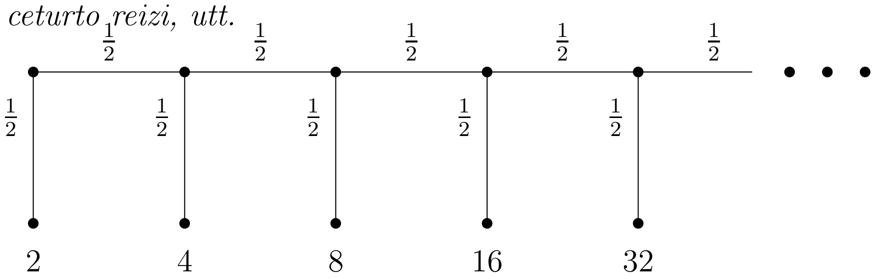
Pašlaik Bērziņa kunga rīcībā ir jau drošs ieguvums 3125 Ls. Un tā kā Bērziņa kungs ir riska bailīgs (derīguma funkcija 6.3.zīm. ir izliekta uz augšu, t.i., $u'' = (\sqrt{y})'' = (\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4y\sqrt{y}} < 0$), tad viņš vērtspapīrus nepirks, jo drošības ekvivalents šādā darījumā pēc viņa izpratnes ir stingri mazāks skaitlis par 3125 (un nevis ar to vienāds). Ja Bērziņa kungs ar pārdevēju vienotos par zemāku cenu nekā 650 Ls, tad atbilde varētu būt arī pozitīva.

Tātad derīguma funkcijas izliektība nosaka riska nepatikas pakāpi. Tā saucamais Arrova-Pratta mērs aptver izliektību neatkarīgi no derīguma funkcijas, tas paliek pie patvaļīgas transformācijas neizmainīts. Absolūtās riska nepatikas Arrova-Prata mērs tiek definēts šādi $A := -\frac{u''}{u'}$, kur u' un u'' ir derīguma funkcijas pirmās un otrās kārtas atvasinājumi pēc ienākumiem. Ja i-tais spēlētājs ir riska bailīgāks nekā j-tais spēlētājs, tad tā derīguma funkcija ir vairāk izliekta uz augšu un tā Arrova-Pratta mērs ir lielāks: $A_i > A_j$. Riska neitralitātes gadījumā Arrova-Pratta mērs ir vienāds ar 0.

Bērziņa kunga gadījumā $A = -\frac{-1}{4y\sqrt{y}} : \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2y}$. Šī funkcija parāda, jo lielāki ir Bērziņa kunga ienākumi, jo funkcijas vērtība ir mazāka, t.i., mazāka ir nepatika pret risku.

Sankt-Pēterburgas paradokss

Spēles noteikumi ir sekojoši(skatīt 6.4.zīm.): *tiek mesta monēta; ja uzkrīt cipars, tad spēlētājs saņem 2 naudas vienības, ja uzkrīt ğērbonis, tad monēta tiek mesta otru reizi: ja uzkrīt cipars, tad spēlētājs saņem 4 naudas vienības, ja uzkrīt ğērbonis, tad monēta tiek mesta trešo reizi: ja uzkrīt cipars, tad spēlētājs saņem 8 naudas vienības, ja uzkrīt ğērbonis, tad monēta tiek mesta ceturto reizi, utt.*



6.4.zīmējums

Ieguvumu matemātiskā cerība ir:

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + ... = +\infty.$$

Pat riska bailīgu cilvēku šis pārsteidzošais rezultāts var ļoti ieintriğēt, un viņš nemaz neiedomāsies, ka ar varbūtību $\frac{1}{2}$ spēle ir pabeigta jau pirmajā gājienā un ienākums ir tikai 2 naudas vienības.

LEKCIJA NR. 7

NEŠA LĪDZSVARS

Piemērs
Reakcijas funkcija
Neša līdzsvara eksistence
Reakcijas multiattēlojums

Piemērs

Vispirms atcerēsimies Neša līdzsvara definīciju no 3.lekcijas:

DEFINĪCIJA. Spēles $\Gamma = (N; S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n)$ stratēģiju kombināciju $(s_1^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_n$ sauc par *Neša (Nash) līdzsvaru*, ja katram spēlētājam $i \in N$ un jebkurai stratēģijai $s_i \in S_i$ izpildās nosacījums

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

(Atgādināsim, ka pieraksts (s_i^*, s_{-i}^*) nozīmē $(s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ un $(s_i, s_{-i}^*) = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i, ..., s_n^*)$.)

Šīs lekcijas uzdevums ir noskaidrot, pie kādiem nosacījumiem eksistē Neša līdzsvars.

Aplūkosim vienu samērā vienkāršu spēli ar diviem spēlētājiem. Spēlētājiem ir divas iespējamās stratēģijas: izvēlēties monētas cipara vai ģērboņa pusi. Ieguvumu matrica dota 7.1.zīmējumā.

2.spēlētājs 1.spēlētājs	ģērbonis	cipars
ģērbonis	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
cipars	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

7.1.zīm.

Viegli pārliecināties, ka šajā spēlē nav Neša līdzsvara un nav nekāda saprātīga veida, kā rīkoties spēlētājiem. Bet kā būtu spēlē, kurā otrais spēlētājs mestu neregulāru monētu "uz labu laimi"? Tādā gadījumā otrais spēlētājs ir ar varbūtisku raksturu. Pieņemsim, ka varbūtība uzkrist ğērbonim ir $q(\check{\mathrm{G}}) = \frac{1}{3}$ un varbūtība uzkrist ciparam ir $q(\mathrm{C}) = \frac{2}{3}$. Varam izskaitļot 1.spēlētāja derīguma funkcijas matemātisko cerību, izvēloties atbilstoši ğērboni vai ciparu:

$$E_{\check{\mathrm{G}}}(u_1) = \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{3},$$
$$E_{\mathrm{C}}(u_1) = \tfrac{1}{3} \cdot (-1) + \tfrac{2}{3} \cdot 1 = \tfrac{1}{3}.$$

Šādā spēlē 1.spēlētājam izdevīgāk ir izvēlēties monētas cipara pusi.

Bet kādi rezultāti sagaidāmi tad, ja pirmais spēlētājs ar varbūtību p izvēlas ğērboni, bet ar varbūtību $1-p$ ciparu, un otrais spēlētājs ar varbūtību q izvēlas ğērboni, bet ar varbūtību $1-q$ ciparu?

1.spēlētāja derīguma funkcijas matemātiskā cerība ir:

$$E_p(u_1) = pq \cdot 1 + p(1-q) \cdot (-1) + (1-p)q \cdot (-1) + (1-p)(1-q) \cdot 1 = 4pq - 2p - 2q + 1.$$

Šī funkcija būs 1.spēlētājam augoša, ja tās parciālais atvasinājums pēc p būs pozitīvs. $\frac{\partial E_p(u_1)}{\partial p} = 4q - 2$ — parciālais atvasinājums būs pozitīvs tanī gadījumā, ja $q > \frac{1}{2}$. Ja tas ir tā, tad 1.spēlētājam izdevīgāk ir izvēlēties monētas ğērboņa pusi, t.i., $p = 1$. Ja savukārt $q < \frac{1}{2}$, tad 1.spēlētājam derīguma funkcijas matemātiskā cerība ir dilstoša funkcija, un 1.spēlētājam izdevīgāk ir izvēlēties p pēc iespējas mazu, t.i., $p = 0$. Gadījumā, ja $q = \frac{1}{2}$, 1.spēlētājam principā ir vienalga, kāds ir p.

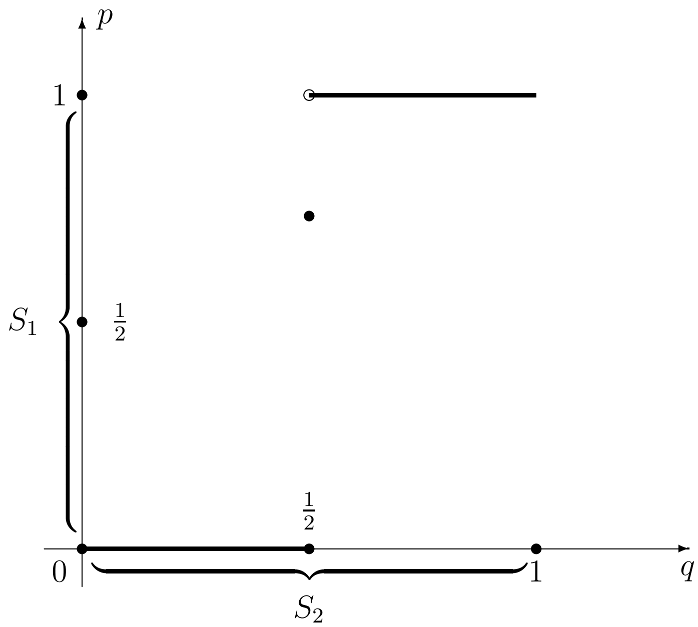
Formalizēsim tikko aprakstīto spēles situāciju.

Reakcijas funkcija

DEFINĪCIJA. Spēles $\Gamma = (N, S, U)$ i-tā spēlētāj stratēğiju s_i^* sauc par *optimālo reakciju uz* s_{-i}^*, ja jebkurai citai stratēğijai $s_i \in S_i$ izpildās sakarība: $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

Atskatoties atpakaļ uz Neša līdzsvara definīciju, varam sacīt, ka jaunajā terminoloğijā Neša līdzsvars ir tāda stratēğiju kombinācija, kurā jebkura spēlētāja $i \in N$ atbilstošā stratēğija ir tam optimālā reakcija.

DEFINĪCIJA. Spēlē $\Gamma = (N, S, U)$ funkciju $R_i : S_{-i} \to S_i$ sauc par i-tā spēlētāja *reakcijas funkciju*, ja jebkurai stratēğijai $s_i \in S_i$ reakcijas funkcijas vērtība $R_i(s_{-i})$ ir i-tā spēlētāja optimālā reakcija: $u_i(R_i(s_{-i}), s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$.



7.2.zīm. (1.spēlētāja reakcijas funkcija)

Ja i-tais spēlētājs zina visu pārējo spēlētāju stratēģijas, tad i-tajam spēlētājam ir iespējams izvēlēties sev vēlamāko stratēģiju, t.i., optimālo stratēģiju.

Apzīmēsim $R(s_1, s_2, ..., s_n) := (R_1(s_{-1}), R_2(s_{-2}), ..., R_n(s_{-n}))$.

Attēlojums R darbojas no stratēģiju telpas S stratēģiju telpā S. Ja mēs varam garantēt, ka šim attēlojumam eksistē nekustīgais punkts, tad tas arī būs mūsu meklētais Neša līdzsvars.

Neša līdzsvara eksistence

Piemērs. Dota divu spēlētāju ieguvumu matrica (7.3.zīmējums):

2.spēlētājs / 1.spēlētājs	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{12}	$(2,2)$	$(0,2)$	$(5,1)$
s_{12}	$(2,0)$	$(2,7)$	$(3,8)$

7.3.zīm.

Šajā spēlē (s_{11}, s_{21}) ir vienīgais Neša līdzsvars, bet 1.spēlētāja stratēģija s_{11} nav maxmin-stratēģija. Patiešām,

$$\min_{1\leq j\leq 3} u_{1j} = 0, \quad \min_{1\leq j\leq 3} u_{2j} = 2.$$

Tāpat arī 2.spēlētāja stratēģija s_{21} nav maxmin-stratēģija. Ja 2.spēlētājs nav labvēlīgi noskaņots pret partneri, tad viņš var Neša līdzsvara vietā izvēlēties maxmin-stratēģiju. Rezultātā viņa ieguvums būs tāds pats kā Neša līdzsvara gadījumā, t.i., 2, bet partnera ieguvums būs 0 (Neša līdzsvara gadījumā 2). ∎

Atzīmēsim Neša līdzsvara trīs nepilnības:
1) Neša līdzsvars spēlē var neeksistēt;
2) Neša līdzsvars var nebūt viens vienīgs;
3) Neša līdzsvars var būt neefektīvs (kā pēdējā piemērā).
Neskatoties uz šīm nepilnībām, Neša līdzsvaram ir nozīmīga loma konfliksituāciju lēmumu pieņemšanas teorijā.

Pierādīsim teorēmu, kas pamato Neša līdzsvara eksistenci divu personu spēlē. Šim nolūkam ir nepieciešama teorēma par nekustīgā punkta eksistenci. Bet vispirms atgādināsim, ko nozīmē izliekta kopa.

DEFINĪCIJA. Kopu $Z \subset \mathbf{R}^n$ sauc par *izliektu*, ja

$$\forall z_1,\, z_2 \in Z\,(z_1 \neq z_2) \quad \forall \lambda \in]0;1[\quad \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in Z.$$

Bola-Brauera TEORĒMA. Pieņemsim, ka $Z \subset \mathbf{R}^n$ ir izliekta un kompakta netukša kopa. Ja $f : Z \to Z$ ir nepārtraukta funkcija, tad tai eksistē nekustīgais punkts z_0, t.i., $f(z_0) = z_0$.

Jēdziens "kompakta kopa" $\mathbf{R}^n$ gadījumā nozīmē, ka kopa ir slēgta un ierobežota.

Vienkāršākajā gadījumā, kad $Z = [a;b]$, slavenā nekustīgo punktu teorēma ir viegli pierādāma, izmantojot tikai dažas nepārtrauktu funkciju īpašības.

Pierādījums. Tātad, ja $f : [a;b] \to [a;b]$ ir nepārtraukta funkcija, tad

$$\exists x^* \in [a;b] : \; f(x^*) = x^*.$$

Pieņemsim, ka intervāla galapunkti a un b nav funkcijas f nekustīgie punkti (ja kaut viens no tiem ir nekustīgais punkts, tad pierādījums pabeigts). Tad

$$f(a) > a \text{ un } f(b) < b.$$

Apskatīsim funkciju $g(x) = f(x) - x$, $x \in [a;b]$. Tā kā f un $y = x$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad g arī ir nepārtraukta funkcija kā nepārtrauktu funkciju starpība. Atliek ievērot, ka

$$g(a) = f(a) - a > 0 \text{ un } g(b) = f(b) - b < 0.$$

Nepārtraukta funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp divām savām vērtībām, tāpēc

$$\exists x^* \in]a;b[:\ g(x^*) = 0.$$

Tas nozīmē, ka $f(x^*) - x^* = 0$ jeb $f(x^*) = x^*$. ■

Vispārīgā gadījumā teorēmas pierādījums ir sarežģītāks, un mēs to šeit neaplūkosim.

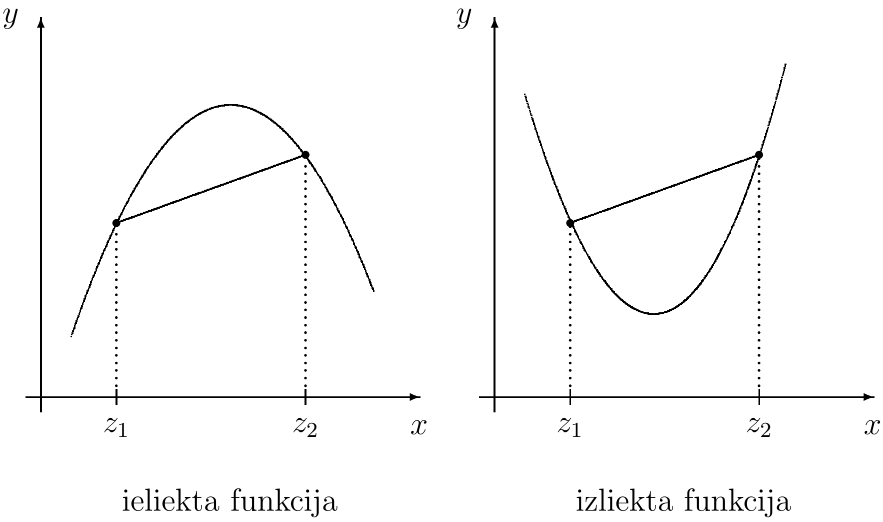
Atzīmēsim, ka visi teorēmas nosacījumi ir būtiski. Piemēram, ja Z nav izliekta kopa, tad apgalvojums var būt aplams (piemēram, Z ir riņķa līnija telpā $\mathbf{R}^2$, bet $f : Z \to Z$ pagriež riņķa līniju par leņķi $\alpha < 2\pi$, tad funkcijai f nav nekustīgā punkta).

DEFINĪCIJA. Funkciju h, kas definēta izliektā kopā Z, sauc par *izliektu*, ja

$$\begin{aligned} &\forall z_1, z_2 \in Z\,(z_1 \neq z_2) \quad \forall \lambda \in]0;1[\\ &\qquad h(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \leq \lambda h(z_1) + (1-\lambda)h(z_2). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Ja nevienādība $(*)$ izpildās stingi $(<)$, tad funkciju h sauc par *stingri izliektu.* Ja nevienādības $\leq$ vietā formulā $(*)$ ir $\geq$ vai $>$, tad funkciju h atbilstoši sauc par *ieliektu* vai *stingri ieliektu.*

Zīmējumā 7.4 ilustrēta definīcija.



7.4. zīm.

Var pierādīt, piemēram, ka $\sum_{i=1}^{n} z_i^2$ $(z \in \mathbf{R}^n)$ ir stingri izliekta funkcija. Bez tam stingri izliektai un nepārtrauktai funkcijai izliektā kompaktā kopā eksistē tikai viens vienīgs minimuma punkts.

Pieņemsim, ka pirmais spēlētājs izvēlas stratēģiju x no stratēģiju kopas X, bet otrais spēlētājs izvēlas stratēģiju y no stratēģiju kopas Y. Mēs apskatīsim spēli normālformā. Šādā spēlē katrs spēlētājs izvēlas stratēģiju, nezinot otra spēlētāja izvēlēto stratēģiju. Stratēģiju pāri (x, y) sauksim par spēles *situāciju.* Pirmā spēlētāja intereses raksturo ieguvumu funkcija $F(x, y)$, bet otrā spēlētāja intereses raksturo ieguvumu funkciju $G(x, y)$, kuras ir definētas visu situāciju kopā $X \times Y$. Katrs no spēlētājiem cenšas pēc iespējas maksimizēt savu ieguvumu funkciju.Tādējādi divu personu spēle normālformā tiek uzdota ar kopumu $\Gamma = (X,\, Y,\, F(x, y),\, G(x, y)\,)$. Šajā gadījumā Neša līdzsvaru varam nodefinēt šādi:

DEFINĪCIJA. Situāciju (x^0, y^0) sauc par *Neša līdzsvaru* spēlē Γ, ja

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^), y^0), \quad \max_{y \in Y} G(x^0, y) = G(x^), y^0).$$

Stratēģijas x^0 un y^0 sauc par *Neša līdzsvara* (īsāk — līdzsvara) stratēģijām.

Ja abi spēlētāji pieturas pie Neša līdzsvara stratēģijām, tad nevienam no spēlētājiem nav izdevīgi spēlēt citas stratēģijas.

Līdzsvara pierādījumā mēs izmantosim šādu nelielu rezultātu:

LEMMA. Pieņemsim, ka X un Y ir kompaktas kopas un ka funkcija $F(x, y)$ ir nepārtraukta kopā $X \times Y$. Pieņemsim, ka katram $x \in X$

$$Y(x) = \{y' \in Y \mid F(x, y') = \max_{y \in Y} F(x, y)\,\}.$$

Tādā gadījumā:
1) minimuma funkcija $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$ ir nepārtraukta kopā X;
2) ja papildus tiek pieņemts, ka katram $x \in X$ kopa $Y(x)$ sastāv no viena vienīga elementa $y(x)$, tad funkcija $y(x)$ ir nepārtraukta kopā X.

Pierādījums.
1) Izvēlēsimies patvaļīgu kopas X elementu virkni $(x^k)_{k \in \mathbf{N}}$, kura konverģē uz elementu x^0. Parādīsim, ka robeža

$$\lim_{k to \infty} W(x^k)$$

eksistē un tā ir vienāda ar $W(x^0)$. Pieņemsim pretējo. Tādā gadījumā eksistēs tāda apakšvirkne $(k_l)_{l\in\mathbf{N}}$, ka

$$A = \lim_{l\to\infty} W(x^{k_l}) \neq W(x^0).$$

Izvēlēsimies virkni $(y^{k_l} \in Y(x^{k_l}))_{l\in\mathbf{N}}$. Tā kā Y ir kompakta kopa, tad varam uzskatīt, ka $\lim\limits_{l\to\infty} y^{k_l} = y^0$. Parādīsim, ka $y^0 \in Y(x^0)$. Patiešām, pēc y^{k_l} definīcijas izpildās

$$\forall y \in Y \quad W(x^{k_l}) = F(x^{k_l}, y^{k_l}) \leq F(x^{k_l}, y).$$

Veicot robežpāreju šajā nevienādībā, kad l tiecas uz bezgalību, un izmantojot funkcijas $F(x, y)$ nepārtrauktību, iegūsim

$$\forall y \in Y \quad F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y) \Rightarrow y^0 \in Y(x^0).$$

Tādējādi

$$A = \lim_{l\to\infty} F(x^{k_l}, y^{k_l}) = F(x^0, y^0) = W(x^0).$$

Iegūtā pretruna noslēdz pierādījuma pirmo daļu.

2) Parādīsim, ka funkcija $y(x)$ ir nepārtraukta kopā X. Pieņemsim pretējo, proti, funkcija $y(x)$ ir pārtraukta kaut kādā punktā $x^0 \in X$. Tādā gadījumā eksistēs tāda kopas X elementu virkne $(x^k)_{k\in\mathbf{N}}$, kura konverģē uz x^0, bet atbilstošā virkne $(y(x^k))_{k\in\mathbf{N}}$ savukārt nekonverģē uz $y(x^0)$. Tāpēc eksistē tāda punkta $y(x^0)$ apkārtne U, kuras iekšienē neatrodas bezgalīgi daudz virknes $(y(x^k))_{k\in\mathbf{N}}$ elementu. Tā kā kopa $Y \setminus U$ ir kompakta, tad no šīs virknes var izdalīt apakšvirkni $(y(x^{k_l}))_{l\in\mathbf{N}} \subset Y \setminus U$, kura konverģē uz kaut kādu elementu $y' \neq y(x^0)$. Bet līdzīgi kā 1) daļā var parādīt, ka $y' \in Y(x^0)$. Esam ieguvuši, ka kopā $Y(x^0)$ ir divi atšķirīgi elementi. Tā ir pretruna ar sākotnējo pieņēmumu, ka $Y(x^0)$ sastāv no viena vienīga elementa. ∎

Piezīme. Teorēmas pierādījuma gaitā esam konstatējuši arī kopas

$$\{(x, y) \,|\, x \in X,\, y \in Y(x)\}$$

slēgtību. Atzīmēsim, ka kopas Y kompaktība ir būtiska teorēmas prasība. Piemēram, ja

$$X = [-1; 1],\ Y =]-\infty; +\infty[,\ F(x, y) = (y^2 + 1)(xy - 1)^2,$$

tad kopa Y nav kompakta, bet funkcijas

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad W(x) = \min_{y \in Y} F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

ir pārtrauktas. ■

TEORĒMA. Pieņemsim, ka divu personu spēlē Γ stratēģiju kopas $X \subset \mathbf{R}^m$ un $Y \subset \mathbf{R}^n$ ir izliektas un kompaktas kopas. Pieņemsim, ka funkcijas $F(x,y)$ un $G(x,y)$ ir nepārtrauktas kopā $X \times Y$, funkcija $F(x,y)$ ir ieliekta pēc x pie jebkurafiksēta y, bet funkcija $G(x,y)$ ir ieliekta pēc y pie jebkura fiksēta x. Šādā situācijā spēlē Γ eksistē Neša līdzsvars.

Pierādījums. Sākumā pieņemsim, ka funkcijas $F(x,y)$ un $G(x,y)$ ir nepārtrauktas kopā $X \times Y$ un ir stingri izliektas pēc teorēmas nosacījumiem dotajiem mainīgajiem. Tādā gadījumā jebkurām stratēģijām y un x reakcijas attēlojumu kopas

$$\begin{aligned} X(y) &= \{x' \in X \mid F(x',y) = \max_{x \in X} F(x,y)\} = \{x(y)\}, \\ Y(x) &= \{y' \in Y \mid F(x,y') = \max_{y \in Y} F(x,y)\} = \{y(x)\} \end{aligned}$$

satur tikai pa vienam elementam $x(y)$ un $y(x)$ (t.i., veidojas vienvērtīgs attēlojums). Saskaņā ar Lemmu funkcijas $x(y)$ un $y(x)$ ir nepārtrauktas. Varam tās nosaukt par pirmā un otrā spēlētāja reakcijas funkcijām.

Apzīmēsim $Z = X \times Y$ un apskatīsim attēlojumu $f : Z \to Z$, $f(x,y) = (x(y),(y(x))$. tā kā X un Y ir izliektas un kompaktas kopas, tad to Dekarta reizinājums arī ir izliekta un kompakta kopa. Pēc Bola-Brauera teorēmas attēlojumam f eksistē nekustīgais punkts $z^0 = (x^0, y^0) \in Z$: $f(z^0) = z^0$ jeb $x(y^0) = x^0$ un $y(x^0) = y^0$. Tad (x^0, y^0) ir Neša līdzsvars.

Tagad pieņemsim, ka funkcijas $F(x,y)$ un $G(x,y)$ ir ieliektas pēc teorēmas nosacījumos dotajiem mainīgajiem, bet ne obligāti stingri ieliektas. Apzīmēsim katram $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x,y) &= F(x,y)_\varepsilon \sum_{i=1}^{m} x_i^2, \\ G_\varepsilon(x,y) &= G(x,y)_\varepsilon \sum_{j=1}^{n} y_j^2. \end{aligned}$$

Funkcijas F_ε un G_ε ir nepārtrauktas kopā $X \times Y$, $F_\varepsilon(x,y)$ ir stingri ieliekta pēc x, bet $G_\varepsilon(x,y)$ ir stingri ieliekta pēc y. Pēc iepriekv̄ s pierādītā seko, ka spēlē $\Gamma_\varepsilon = (X, Y, F_\varepsilon(x,y), G_\varepsilon(x,y))$ eksistē Neša līdzsvars $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Pieņemsim, ka

$(\varepsilon_h)_{h\in\mathbf{N}}$ ir tāda pozitīvu skaitļu virkne, ka

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h = 0^+$$

un atbilstošā Neša līdzsvaru virkne $((x_{\varepsilon_h}, y_{\varepsilon_h}))_{h\in\mathbf{N}}$ konverģē uz kaut kādu stratēģiju pāri (x^0, y^0). Pēc $(x_{\varepsilon_h}, y_{\varepsilon_h})$ definīcijas:

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \quad F_{\varepsilon_h}(x, y_{\varepsilon_h}) \le F_{\varepsilon_h}(x_{\varepsilon_h}, y_{\varepsilon_h}), \\ &\forall y \in Y \quad G_{\varepsilon_h}(x_{\varepsilon_h}, y) \le G_{\varepsilon_h}(x_{\varepsilon_h}, y_{\varepsilon_h}). \end{aligned}$$

Veicot robežpāreju $h \to \infty$ pie fiksētiem x un y, iegūsim, ka

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \quad F(x, y^0) \le F(x^0, y^0), \\ &\forall y \in Y \quad G(x^0, y) \le G(x^0, y^0). \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka (x^0, y^0) ir spēles Γ Neša līdzsvars. ■

Apskatīsim Neša līdzsvara atrašanas metodi ar reakcijas attēlojumu izmantošanu

$$\begin{aligned} X(y) &= \{x' \in X \mid F(x', y) = \max_{x\in X} F(x, y)\,\}, \\ Y(x) &= \{y' \in Y \mid F(x, y') = \max_{y\in Y} F(x, y)\,\}. \end{aligned}$$

Tā sastāv no atrisinājuma šādai iekļāvumu sistēmai

$$x^0 \in X(y^0), \quad y^0 \in Y(x^0). \tag{7.1}$$

Tajā gadījumā, kad spēlētājiem eksistē nepārtrauktas reakcijas attēlojumu funkcijas $x(y)$ un $y(x)$, sistēma (7.1) pārvēršas par vienādojumu sistēmu $x(y^0) = x^0$ un $y(x^0) = y^0$.

Piemērs. Apskatīsim divu personu spēli $\Gamma = (X,\, Y,\, F(x, y),\, G(x, y))$, kur X, Y un $F(x, y)$, $G(x, y)$ atbilstoši ir pirmā un otrā spēlētāja stratēģiju kopas un ieguvumu funkcijas. Pieņemsim, ka

$$X = Y = [0; 1], \quad F(x, y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy, \quad G(x, y) = -(x + y - 1)^2.$$

Funkcijas $F(x, y)$ un $G(x, y)$ ir stingri ieliektas pēc atbilstošajiem mainīgajiem x un y. Par to var pārliecināties, atrodot doto funkciju otrās kārtas atvasinājumus pēc atbilstošajiem mainīgajiem, proti,

$$F_x = -6x + 7y, \quad F_{xx} = -6 < 0, \quad G_y = -2(x + y - 1), \quad G_{yy} = -2 < 0.$$

Izmantojot pirmās kārtas atbilstošos parciālos atvasinājumus, varam secināt, ka reakcijas funkcija šajā gadījumā ir

$$x(y) = \begin{cases} \frac{7y}{6}, & 0 \le y \le \frac{6}{7}, \\ 1, & \frac{6}{7} < y \le 1, \end{cases} \qquad y(x) = 1 - x.$$

Atrisinot sistēmu $x(y) = x$, $y(x) = y$:

$$\begin{cases} \frac{7y}{6} = x, \\ 1 - x = y, \end{cases}$$

atradīsim, ka $x^0 = \frac{7}{13}$ un $y^0 = \frac{6}{13}$. ■

Iepriekšējā paragrāfā apskatītā spēles piemēra 1.spēlētāja reakcijas funkcija attēlota 7.2.zīmējumā (pie $q = \frac{1}{2}$ varbūtības p vērtība izvēlēta patvaļīgi), taču tā nav nepārtraukta funkcija, kā to pieprasa teorēma.

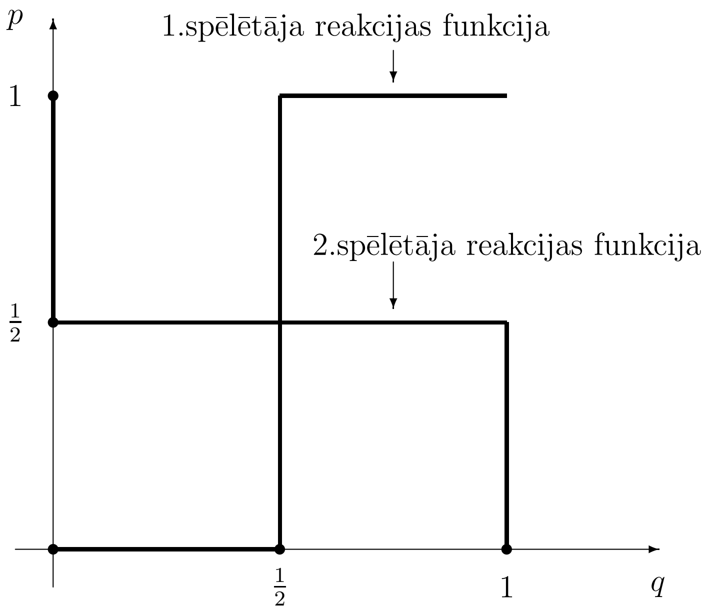
Stratēģiju telpa $S = S_1 \times S_2$ ir netukša, kompakta un izliekta kā netukšu, kompaktu un izliektu kopu Dekarta reizinājums. Nepārtrauktu līniju mēs panāktu, ja punktā $q = \frac{1}{2}$ savienotu ar taisnes nogriezni funkcijas grafikus, taču tad iegūtais attēlojums nebūtu funkcija, bet gan daudzvērtīgs attēlojums $R_1 : S_2 \to P(S_1)$, kurš darbojas no 2.spēlētāja stratēģiju kopas S_2 1.spēlētāja stratēģiju kopas visu apakškopu kopā (dažkārt šādus attēlojumus sauc arī par multiattēlojumiem, kopvērtīgiem attēlojumiem vai korespondencēm).

Reakcijas multiattēlojums

Vispārinot reakcijas funkcijas definīciju, varam sacīt:

DEFINĪCIJA. Spēlē $\Gamma = (N, S, U)$ funkciju $r_i : S_{-i} \to P(S_i)$ sauc par i-tā spēlētāja *reakcijas multiattēlojumu*, ja jebkurai stratēģijai $s_i \in S_i$ visi kopas $R_i(s_{-i})$ elementi ir i-tā spēlētāja optimālās reakcijas.

Par daudzvērtīga attēlojuma $R : S \to P(S)$ nekustīgo punktu sauc tādu punktu $s \in S$, kurš $s \in R(s)$. Iepriekš apskatītā teorēma paliek spēkā arī daudzvērtīgu attēlojumu gadījumā, to nodrošina Kakutani nekustīgā punkta teorēma daudzvērtīgiem attēlojumiem. Apskatītā piemēra spēlētāju nepārtrauktie reakcijas attēlojumi parādīti 7.5.zīmējumā. No šī zīmējuma redzams, ka reakcijas attēlojumu grafiki krustojas, t.i., reakcijas daudzvērtīgajam attēlojumam $R : S \to P(S)$, kur $R(s) := (R_1(s), R_2(s))$, $s \in S_1 \times S_2$, ir nekustīgais punkts $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.



7.5.zīm.

LEKCIJA NR. 8

KURNO-NEŠA (COURNOT-NASH) OLIGOPOLMODELIS AR n RAŽOTĀJIEM

Modeļa apraksts

Šajā nodaļā apskatīsim oligopolmodeli un mēģināsim noskaidrot, ko tanī nozīmē Neša līdzsvars.

Oligopols ir viena no tirgus formām. Šeit mēs runāsim par piedāvājuma oligopolu, t.i., tādu tirgus situāciju, kurā ir daži ražotāji un daudzi patērētāji. Individuālais pieprasījums ir ļoti mazs un nevar ietekmēt tirgus kopējo pieprasījumu, bet katra ražotāja rīcība gan ietekmē kopējo piedāvājumu.

Pieņemsim, ka ir n ražotāji, kuri ražo viena veida produkciju vienam tirgum (t.i., prece ir homogēna). Ar y_i apzīmēsim i-tā ražotāja saražoto produkcijas daudzumu; šīs produkcijas saražošana i-tajam ražotājam izmaksā $C_i := c_i y_i$ naudas vienības, kur c_i nozīmē, cik naudas vienības nepieciešamas, lai saražotu vienu vienību produkcijas, $i = 1, 2, .., n$. Pieņemsim, ka produkcijas cenu p tirgū nosaka piedāvātās produkcijas daudzums ar lineāru sakarību:

$$p = A - B \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

kur A un B ir tādas zināmas konstantes, ka $y_i \in [0; \frac{A}{B}]$, $i = 1, 2, ..., n$, un $A > c_i > 0$, $B > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Peļņas maksimizācija

Katrs ražotājs cenšas maksimizēt savu peļņu:

$$\Pi_i = py_i - c_i y_i \rightarrow max, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Mēs pieņemsim, ka visi ražotāji zina, kāds izskatās cenas funkcijas vispārīgais veids pie noteikta piedāvājuma. Kopīgo piedāvājumu $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ ražotāji nezin. Katrs ražotājs atsevišķi zina, cik daudz produkcijas saražo viņš pats, bet nezina, ko dara citi ražotāji. Veidojas spēļu teorijas situācija, kurā viena cilvēka darbība ir atkarīga no pārējo cilvēku darbības.

Ja pieņemam, ka katrs ražotājs zina cenas funkcijas vispārīgo veidu, tad peļņas funkcijas varam pierakstīt šādi:

$$\Pi_i = (A - B \sum_{i=1}^{n} y_i) y_i - c_i y_i, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Katra ražotāja nolūks ir maksimizēt šo funkciju, tātad matemātiski izsakoties — jārisina optimizācijas uzdevums. Ekstrēma punktos (maksimuma un minimuma punktos) funkcijas pirmās kārtas atvasinājums ir vienāds ar 0:

$$0 = \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_i} = A - B \sum_{i=1}^{n} y_i - By_i - c_i = A - c_i - B \sum_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{n} y_j - 2By_i.$$

Ekstrēma punkts ir

$$y_i^* = \frac{1}{2B} \left(A - c_i - B \sum_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{n} y_j \right) = R_i(y_{-i}^*),$$

un tas patiešām ir maksimuma punkts, jo peļņas funkcijas otrās kārtas atvasinājums ir negatīvs:

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial y_i^2} = -2B < 0, \; i = 1, 2, ..., n.$$

y_i^* ir i-tā spēlētāja reakcijas funkcija, jo, saražojot y_i^* produkcijas vienības, i-tais spēlētājs gūst maksimālo peļņu.

Neša līdzsvars

Atcerēsimies iepriekšējo nodaļu. Mēs teicām, ka reakcijas funkcijas $R(y_1, y_2, ..., y_n) = (R_1(y_{-1}), R_2(y_{-2}), ..., R_n(y_{-n}))$ nekustīgais punkts ir Neša līdzsvars. Pielāgojot šo definīciju iepriekš apskatītajai situācijai, mums ir jāatrod tāds produkcijas vektors $(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$, ka

$$(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) = (R_1(y_{-1}^*), R_2(y_{-2}^*), ..., R_n(y_{-n}^*)).$$

Tāpēc Neša līdzsvara situācijā ir jābūt spēkā vienādībām

$$y_i^* = \frac{1}{2B}\left(A - c_i - B \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} y_j^* \right) = R_i(y_{-i}^*), \; i = 1, 2, ..., n.$$

Izveidojas n vienādojumu sistēma ar n nezināmajiem. Pamēģināsim to atrisināt:

$$2By_i^* = A - c_i - B \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} y_j^*, \; i = 1, 2, ..., n,$$

$$By_i^* = A - c_i - B \sum_{j=1}^{n} y_j^*, \; i = 1, 2, ..., n. \qquad (*)$$

Sasummējot visus n vienādojumus kopā, iegūsim

$$B \sum_{i=1}^{n} y_i^* = nA - \sum_{i=1}^{n} c_i - nB \sum_{j=1}^{n} y_j^* \quad \text{jeb}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* = \frac{nA - \sum_{i=1}^{n} c_i}{B(1+n)} =: Y^* \quad -$$

esam noteikuši saražojamās produkcijas daudzumu Neša līdzsvara gadījumā. Savietojot pēdējo sakarību ar $(*)$, iegūsim:

$$y_i^* = \frac{A}{B} - \frac{c_i}{B} - \frac{nA - \sum_{i=1}^{n} c_i}{B(1+n)}, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Šajā izteiksmē principā ietilpst tikai zināmi lielumi, un mēs varam uzskatīt, ka esam noteikuši katra ražotāja optimālo reakciju, t.i., esam atraduši Neša līdzsvaru. Tātad Neša līdzsvara gadījumā katrs no ražotājiem maksimizē savu peļņu.

No iepriekš iegūtajiem rezultātiem varam arī noskaidrot katra ražotāja tirgus daļu $m_i = \dfrac{y_i^*}{Y^*}$.

Ja izdaram pieņēmumu, ka visiem ražotājiem vienas produkcijas vienības saražošana izmaksā vienādi, t.i., $c_i = c$, $i = 1, 2, ..., n$, tad produkcijas vienas vienības cena ir

$$p^* = A - B\sum_{i=1}^{n} y_i^* = A - \frac{nA - nc}{1+n} = \frac{A + nc}{1+n}.$$

Tā kā sākumā ir izdarīts pieņēmums, ka $A > c$, tad $p^* > c$ — vienas vienības produkcijas cena ir lielāka par vienas vienības produkcijas ražošanas izmaksām, kā tam saprātīgi domājot arī vajadzētu būt, jo pretējā gadījumā ražotājam šīs produkcijas ražošana nestu tikai zaudējumus un nevis peļņu. Taču robežsituācijā, kad ražotāju skaits kļūst neierobežoti liels, vienas vienības produkcijas cena $p^* = \dfrac{c + \frac{A}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$, n tiecoties uz bezgalību, tiecas uz vienas vienības ražošanas izmaksām c. Tātad, pieaugot ražotāju skaitam, peļņa $\Pi_i = p^* y_i - c y_i$ samazināsies un $\Pi_i \to_{n\to\infty} 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Reālajā Latvijas tirgus situācijā maz ticams, ka kāds mēģinās analizēt tirgus modeli tā, kā mēs tikko tikām darījuši. Taču tik neiespējami tas nemaz nav, īpaši uzņēmumiem ar labu datortehniku, tikai tas prasītu pamatīgu tirgus izpēti un faktu materiālus.

Duopola modelis

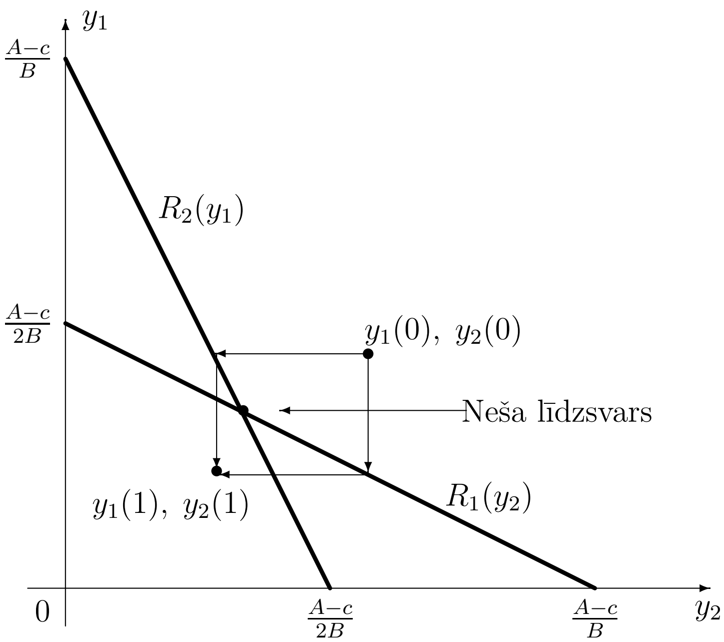
Paanalizēsim vēl mazliet modeli duapola gadījumā. Ražotāju reakcijas funkcijām ir veids

$$R_1(y_2) = \frac{A-c}{2B} - \frac{1}{2}y_2 \text{ un } R_2(y_1) = \frac{A-c}{2B} - \frac{1}{2}y_1.$$

Cilvēkam, kas neko nezinu par Neša līdzsvaru, darbības reakcija noteiktā laika periodā t būs atkarīga no iepriekšējā laika perioda $t-1$ (no viņa pieredzes), t.i.,

$$y_1(t) = R_1(y_2(t-1)) \text{ un } y_2(t) = R_2(y_1(t-1)).$$

Raugoties 8.1.zīmējumā: ja laikā $t = 0$ tiek saražots $y_1(0)$ un $y_2(0)$, tad nākamajā laika posmā $t = 1$ ražotāji ņem vērā periodu $t = 0$, par kuru zina, kā tanī rīkojies otrs, un maksimizē savu peļņu, izejot no šiem datiem, iegūstot $y_1(1)$ un $y_2(1)$. Turpinot šo iterāciju procesu, izrādās, ka tas laika gaitā tiecas uz Neša līdzsvaru. Tātad uz Neša līdzsvaru varam raudzīties arī kā uz robežstāvokli, uz kuru tiecas ražotāju intereses.



8.1. zīm.

Neša līdzsvars kā iterāciju process

Pieņemsim, ka spēlētāji mēģina paredzēt savu pretspēlētāju gājienus, izmantojot savu iepriekšējo pieredzi. Pieņemsim, ka spēlētāji nosaka ražošanas apjomu pēc kārtas kā labāko atbildi atkarībā no tā, kādu apjomu ir izvēlējies pretspēlētājs iepriekšējā gājienā un vadoties pēc Kurno pieņēmuma, ka pretspēlētājs atstās savu izlaidi bez izmaiņām.

Ja 1.spēlētājs izdara gājienu 0.periodā un izvēlas q_1^0 lielu ražošanas apjomu, tad 2.spēlētāja izlaide 1.periodā ir $q_2^1 = R_2(q_1^0)$ (kur R_2 ir 2.spēlētāja reakcijas funkcija). Pēc tam sekos $q_1^2 = R_1(q_2^1) = R_1(R_2(q_1^0))$, u.t.t.

Ja šis process konverğē uz (q_1^*, q_2^*), tad $q_2^* = R_2(q_1^*)$ un $q_1^* = R_1(q_2^*)$ — tas ir Neša līdzsvars.

Ja process konverğē uz kaut kādu stāvokli (q_1^*, q_2^*) pie jebkura sākumstāvokļa no (q_1^*, q_2^*) tuvas apkārtnes, tad saka, ka (q_1^*, q_2^*) ir asimptotiski stabils līdzsvars (pašu procesu sauc par "uztaustīšanas" procesu). Tā ir situācija, kas aplūkota 8.1.zīmējumā. Vispārīgā gadījumā process var būt sarežğītāks. Pietiekamais nosacījums stabilitātei ir šāds

$$\left|\frac{dR_1}{dq_2}\right| \left|\frac{dR_2}{dq_1}\right| < 1.$$

LEKCIJA NR. 9

JAUKTO STRATĒĞIJU NEŠA LĪDZSVARS

Spēles jauktais turpinājums
Debreu, Glickberg, Fan Ky teorēma
"Dzimumu cīņas" atrisinājums jauktajās stratēğijās
Neša līdzsvara izvēles pamatojums

Spēles jauktais turpinājums

Iepriekšējā lekcijā apskatījām Neša līdzsvara eksistenci ologopolmodeļa ietvaros. Šajā modelī spēlētāju reakcijas funkcijas bija nepārtrauktas, kas ir viens no nepieciešamajiem nosacījumiem līdzsvara eksistencei. Bet ne vienmēr tā ir. Par to mēs pārliecinājāmies vēl vienu lekciju iepriekš. Tad arī veicām stratēğiju jēdziena paplašināšanu. Tagad vēlreiz atgriezīsimies pie stratēğiju randomizācijas un Neša līdzsvara eksistences.

DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka X ir galīga skaita elementu kopa. Kopu

$$\Delta X = \{p : X \to [0;1] \mid \sum_{x \in X} p(x) = 1\}$$

sauc par kopas X *varbūtību sadalījuma kopu.*

DEFINĪCIJA. Pieņemsim, ka $\Gamma = (N, S_1, ..., S_n, u_1, ..., u_n)$ ir spēle normālformā ar stratēğijām galīgā skaitā. $G\Gamma = (N, \Delta S_1, ..., \Delta S_n, U_1, ..., U_n)$ sauc par spēles Γ *jaukto turpinājumu*, ja derīguma funkcijas

$$U_i : \Delta S_1 \times \Delta S_2 \times ... \times \Delta S_n \to \mathbf{R}$$

katram $i = 1, 2, ..., n$, tiek definētas ar vienādībām

$$U_i(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} ... \sum_{s_n \in S_n} p_1(s_1)p_2(s_2)...p_n(s_n)u_i(s_1, ..., s_n).$$

Šādā spēlē $G\Gamma$ "stratēģijas" $\Delta S_1, ..., \Delta S_n$, kuras patiesībā ir varbūtību sadalī- jumu kopas attiecīgajā stratēģiju kopā S_i, $i = 1, 2, ..., n$, sauc par *jauktajām stratēģijām.* Tad, lai atšķirtu, par kurām stratēģijām tiek runāts, spēles Γ stratēģijas sauc arī par *tīrajām stratēģijām.*

DEFINĪCIJA. Spēles $G\Gamma = (N; \Delta S_1, ..., \Delta S_n; U_1, ..., U_n)$ jaukto stratēģiju kombināciju $(p_1^*, ..., p_n^*) \in \Delta S_1 \times ... \times \Delta S_n$ sauc par *jaukto stratēģiju Neša līdzsvaru,* ja katram spēlētājam $i \in N$ un jebkurai jauktajai stratēģijai $p_i \in \Delta S_i$ izpildās nosacījums

$$U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(p_i, p_{-i}^*).$$

TEORĒMA 1. Ja Γ ir spēle normālformā ar stratēģijām galīgā skaitā, tad eksistē vismaz viens jaukto stratēģiju Neša līdzsvars spēles Γ jauktajā turpinājumā $G\Gamma$.

Šī teorēma seko no daudz vispārīgāka rezultāta, jo spēles jauktajā turpinājumā $G\Gamma$ stratēģiju kopas ir uztveramas kā atbilstošas telpas simplekss (tātad ne-tukša, izliekta un kompakta kopa).

Debreu, Glickberg, Fan Ky teorēma

TEORĒMA 2 (Debreu, Glicksberg, Fan Ky (1952)). Ja katram $i = 1, 2, ..., n$ izpildās:

1) S_i netukša, izliekta, kompakta ($\subset \mathbf{R}^n$) kopa,

2) $u_i(s_1, ..., s_n)$ — nepārtraukta pēc $(s_1, ..., s_n)$ un kvazi-izliekta pēc s_i,

tad spēlē $\Gamma = (N, S_1, S_2, ..., S_n, u_1, u_2, ..., u_n)$ eksistē Neša līdzsvars tīrajās stratēģijās.

Vispirms precizēsim,ka $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sauc par *kvazi-izliektu* funkciju, ja jebkuram $a \in \mathbf{R}$ kopa $\{x \mid f(x) \geq a\}$ ir izliekta.

Teorēmas 2 pierādīšanai izmantosim šādu lemmu:

LEMMA. Ja izpildās Teorēmas 2 nosacījumi, tad reakcijas daudzvērtīgie attēlojumi R_i, $i = 1, 2, ..., n$, ir netukši, izkiektvērtīgi un pusnepārtraukti no augšas.

□ Ievērosim, ka $R_i(s_{-i})$ ir to i-tā spēlētāja stratēğiju kopa, kuras maksimizē $u_i(\cdot, s_{-i})$ kopā S_i (kompaktā kopā). Tas, ka tā ir netukša kopa, seko no u_i nepārtrauktības. Kopas $R_i(s_{-i})$ izliektība seko no $u_i(\cdot, s_{-i})$ kvaziizliektības. Atliek pārbaudīt pusnepārtrauktību no augšas. Vispirms atgādināsim, ka
daudzvērīgu attēlojumu F sauc par *pusnepārtrauktu no augšas* punktā x, ja no virkņu $x_n \to_{n\to\infty} x$ un $y_n \to_{n\to\infty} y$, kur $y_n \in F(x_n)$, konverğences seko, ka $y \in F(x)$.

Lai pārbaudītu pusnepārtrauktību no augšas, mums nepieciešams parādīt, ka jebkurai tādai virknei $(s_i^k, s_{-i}^k) \to_{k\to\infty} (s_i, s_{-i})$, kurai visiem k: $s_i^k \in R_i(s_{-i}^k)$, izpildās $s_i \in R_i(s_{-i})$ (ņemiet vērā, ka k šeit ir virknes indeksa apzīmējums!).

Ievērosim, ka jebkuram k un jebkurai stratēğijai $s_i' \in S_i$:

$$u_i(s_i^k, s_{-i}^k) \geq u_i(s_i', s_{-i}^k).$$

$u_i(\cdot)$ nepārtrauktības dēļ $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$, t.i., $s_i \in R_i(s_{-i})$. ■

□ Teorēmas 2 pierādījums. Definēsim attēlojumu $R : S \to S$ ar formulu

$$R(s_1, s_2, ..., s_n) = R_1(s_{-1}) \times R_2(s_{-2}) \times ... \times R_n(s_{-n}).$$

Skaidrs, ka $R(\cdot)$ ir daudzvērtīgs attēlojums, kurš attēlo kopu $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ sevī. Pēc Lemmas $R(\cdot)$ ir netukšs, izliektvērtīgs, pusnepārtraukts no augšas attēlojums. Pēc Kakutani teorēmas eksistē nekustīgais punkts, t.i.,

$$\exists s \in S : \ s \in R(s).$$

Šī stratēğiju kombinācija ir Neša līdzsvars, jo pēc konstrukcijas katram $i = 1, 2, ..., n$: $s_i \in R_i(s_{-i})$. ■

"Dzimumu cīņas" atrisinājums jauktajās stratēğijās

Teorēmas ilustrācijai apskatīsim jau pazīstamo "dzimumu cīņas" spēli, kurā darbojas Tīna un Oskars. Atgādināsim, ka spēlētāju ieguvumu matrica ir

Tīna Oskars	kino s_{21}	futbols s_{22}
kino — s_{11}	$(10, 8)$	$(6, 6)$
futbols — s_{12}	$(6, 6)$	$(8, 10)$

2.3.zīm.

Pieņemsim, ka p_i ir varbūtība, ar kādu i-tais spēlētājs (Oskars kā 1.spēlētājs un Tīna kā 2.spēlētājs) izvēlas stratēģiju s_{i1}. Tādējādi pāris (p_1, p_2) ir jaukto stratēģiju pāris, kurš norāda, ka ar varbūtību p_1 Oskars ies uz kino un ar varbūtību p_2 arī Tīna apmeklēs kino. Šim jaukto stratēģiju pārim (p_1, p_2) atbilstošās spēlētāju derīguma matemātiskās cerības jeb derīguma funkcijas spēles jauktā turpinājuma definīcijas nozīmē ir:

$$U_1 = 10p_1p_2 + 6p_1(1-p_2) + 6p_2(1-p_1) + 8(1-p_1)(1-p_2) = -2p_1 - 2p_2 + 6p_1p_2 + 8,$$

$$U_2 = 8p_1p_2 + 6p_1(1-p_2) + 6p_2(1-p_1) + 10(1-p_1)(1-p_2) = -4p_1 - 4p_2 + 6p_1p_2 + 10.$$

Spēlētāji cenšas maksimizēt viņu sagaidāmo derīguma funkciju:

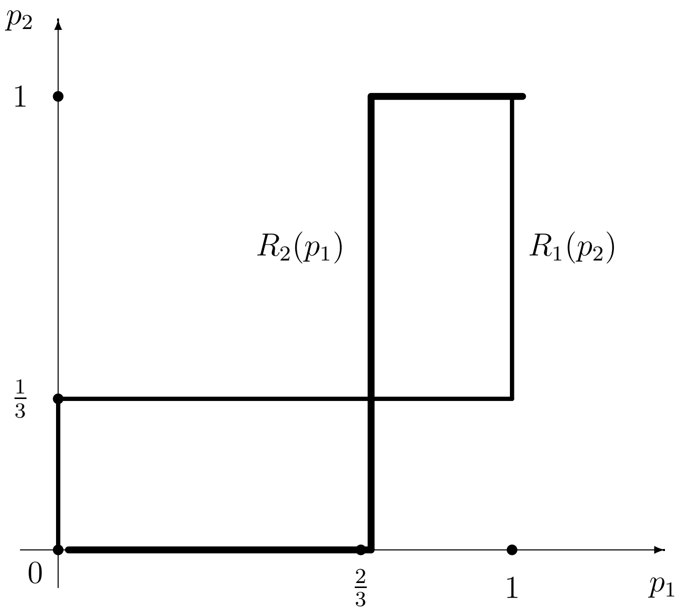
$$\frac{\partial U_1}{\partial p_1} = -2 + 6p_2 = 0, \ t.i., \ p_2 = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial p_2} = -4 + 6p_1 = 0, \ t.i., \ p_1 = \frac{2}{3}.$$

Iegūtais rezultāts parāda, ka jauktajās stratēģijās spēles atrisinājumu dod pāris $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Ja $p_2 = \frac{1}{3}$, tad Oskaram ir pilnīgi vienalga, kuru no divām stratēģijām izvēlēties, t.i., $p_1 \in [0; 1]$; tāpat, ja $p_1 = \frac{2}{3}$, tad Tīnai ir pilnīgi vienalga, vai doties uz futbolu vai apmeklēt kino, t.i., $p_2 \in [0; 1]$. Gadījumā, kad $p_2 > \frac{1}{3}$, tīrā stratēģija s_{11} ir optimālā (tās derīguma vērtība ir lielāka nekā s_{12}), tāpēc $p_1 = 1$. Līdzīgi spriedumi parāda, ja $p_2 < \frac{1}{3}$, tad $p_1 = 0$. Līdz ar to abu spēlētāju reakcijas funkcijas ir:

$$R_1(p_2) = \begin{cases} 0, & p_2 < \frac{1}{3} \\ [0; 1], & p_2 = \frac{1}{3}, \\ 1, & p_2 > \frac{1}{3} \end{cases} \quad R_2(p_1) = \begin{cases} 0, & p_1 < \frac{2}{3} \\ [0; 1], & p_1 = \frac{2}{3}. \\ 1, & p_1 > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Atbilstošie reakciju funkciju grafiki doti 10.1.zīmējumā.



10.1.zīm.

Mēs redzam, ka spēlei ir trīs jaukto stratēģiju Neša līdzsvari: $(0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $(1,1)$. Pirmais un trešais sakrīt ar Neša līdzsvariem tīrajās stratēģijās, par kuru praktisko realizāciju grūti izšķirties., bet otrais ir jauns līdzsvars. Proti, ja $p_1 = \frac{2}{3}$ un $p_2 = \frac{1}{3}$, tad abu spēlētāju reakcijas funkcijas krustojas un jaukto stratēģiju pāris $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ abpusēji ir labākais atrisinājums - tas tātad ir Neša līdzsvars jauktajās stratēģijās.

Neša līdzsvara izvēles pamatojums

Aplūkojot Neša līdzsvaru jauktajās stratēģijās, rodas divi jautājumi: 1)kāpēc būtu jāizvēlas tieši tas varbūtību sadalījums, kurš dod Neša līdzsvaru? 2)vai ir saprātīgi pieņemt, ka racionāls spēlētājs savu gājienu izvēli izdarīs ar gadījuma mehānisma palīdzību?

Pirmā jautājuma pamatojums meklējams tanī apstāklī, ka Neša līdzsvara stratēģiju izvēles gadījumā pretspēlētājam nav iespējamas tādas stratēģijas, kas dotu tam lielāku ieguvumu. Savukārt otrā jautājuma pozitīvā atbilde pamatojuma ar to, ka objektīvi daudzās situācijās (kā Tīnai un Oskaram) pie konkrēta sprieduma nonākt nevar. Ir nepieciešams subjektīvs mehānisms, kas izšķirtu lēmuma pieņemšanu.

Spēles jauktajā turpinājumā mēs pieņēmām, ka spēlētāji savas tīrās stratēģijas randomizē neatkarīgi viens no otra. Citiem vārdiem sakot, var uzskatīt, piemēram, ka Daba dod spēlētājiem individuālus, neatkarīgi sadalītus signālus

$$(p_1, p_2, ..., p_n) \in [0; 1] \times ... \times [0; 1],$$

un katrs spēlētājs pieņem lēmumu atkarībā no viņa signāla p_i atšķirīgajām iespējamajām realizācijām. Bet var aplūkot arī tādu situāciju, kurā ir kopīgs signāls $p \in [0; 1]$, kuru var redzēt visi spēlētāji. Šajā gadījumā parādās jaunas iespējas. Tā, piemēram, Tīnas un Oskara spēlē abi spēlētāji var izšķirties par iešanu uz futbolu, ja $p < \frac{1}{2}$, vai uz kino, ja $p \geq \frac{1}{2}$. Principā katram spēlētājam stratēģijas izvēle ir ar gadījuma raksturu, bet tanī pat laikā darbības tiek koordinētas, kas noved pie līdzsvara situācijas. Pie tam, ja viens no spēlētājiem izvēlas sekot šim likumam, tad arī otram optimāli ir pieturēties pie šī likuma. Tas ir piemērs korelētam līdzsvaram (*correlated equilibrium*), šo jēdzienu izveidojis *Robert Aumann* 1974.gadā.

LEKCIJA NR. 10

BEIJESA SPĒLES

Ievadpiemērs

Līdz šim apskatītajos modeļos spēlētāji zināja citu spēlētāju lietderības funkcijas, realitātē tā var nebūt.

Pirms pamatjēdzienu izveidošanas apskatīsim vienu vienkāršu piemēru.

Pieņemsim, ka ir divi spēlētāji, no kuriem 1.spēlētājs nezina 2.spēlētāja lietderības funkciju, bet 2.spēlētājs zina gan savējo, gan arī pretspēlētāja lietderības funkciju. Patiesā situācija dota ar ieguvumu matricu 10.1.zīmējumā, to mēs nosauksim par spēli Γ_1.

Γ_1	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(1,2)$	$(0,1)$
s_{12}	$(0,4)$	$(1,3)$

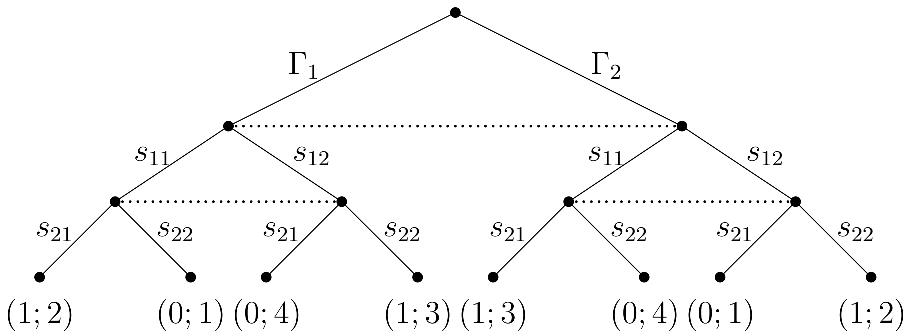
10.1.zīm.

Precizējot pirmā spēlētāja uzvedību, pieņemsim, ka viņš zina, ka varētu tikt spēlētas spēles Γ_1 vai Γ_2, kuras ieguvumu matrica dota 10.2.zīmējumā. Pie tam ievērosim, ka abās spēlēs 1.spēlētāja ieguvumi ir vienādi, bet par 2.spēlētāja ieguvumiem 1.spēlētājam nav noteikta viedokļa.

Γ_2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(1,3)$	$(0,4)$
s_{12}	$(0,1)$	$(1,2)$

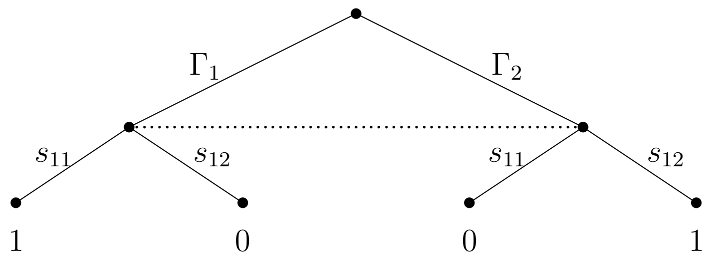
10.2.zīm.

Tā kā 1.spēlētājs nezina, kurā no situācijām — Γ_1 vai Γ_2 — viņš atrodas, tad lēmuma pieņemšanu viņš var izšķirt, piemēram, metot monētu. Tādējādi šī spēle 1.spēlētājam kļūst par spēli ar varbūtisku raksturu. Šādas spēles ekstensīvā forma parādīta 10.3.zīmējumā.



10.3.zīm.

1.spēlētājs var spriest sekojoši: "Spēlē Γ_1 2.spēlētājam dominējošā stratēģija ir s_{21}, t.i., neatkarīgi no tā, vai es izvēlos gājienus s_{11} vai s_{12}, 2.spēlētājs izvēlēsis gājienu s_{21}. Spēlē Γ_2 2.spēlētājam dominējošā stratēģija ir s_{22}; viņš šajā spēlē neatkarīgi no mana gājiena izvēlēsies gājienu s_{22}. Tātad mana spēle reducējas uz vienkāršotu spēli "pret dabu", kuras spēles koks parādīts 10.4.zīmējumā."



10.4.zīm.

Tā kā 1.spēlētājs nezina, ar kāda rakstura pretinieku viņam ir darīšana, tad varam apzīmēt spēli Γ_1 kā pretspēlētāju ar tipu t_{21} un Γ_2 kā pretspēlētāju ar tipu t_{22} (10.5.zīm.).

	t_{21}	t_{22}
s_{11}	1	0
s_{12}	0	1

10.5.zīm.

1.spēlētājs nezina, kurš no tipiem ir viņa pretspēlētājs; varam pieņemt, ka t_{21} ir ar varbūtību p un t_{22} ar varbūtību $1-p$ vai $p_1(t_{21})$ un $p_1(t_{22})$. Tādā gadījumā varam izrēķināt abu tipu matemātiskās cerības. Ja $p = 1-p = 0,5$, tad rezultāts ir =0,5, un 1.spēlētājam ir vienalga, kuru gājienu izvēlēties. Ja totiess pieņem, ka $p_1(t_{21}) = 0,6$ un $p_1(t_{22}) = 0,4$, tad

$$\begin{aligned} E_{p_1} &= (u_1|s_{11}) = p_1(t_{21}) \cdot 1 + p_1(t_{22}) \cdot 0 = 0,6, \\ E_{p_1} &= (u_1|s_{12}) = p_1(t_{21}) \cdot 0 + p_1(t_{22}) \cdot 1 = 0,4. \end{aligned}$$

Secinām, ka 1.spēlētājam labāk izvēlēties gājienu s_{11}. Pašreizējos aprēķinos mēs netikām izmantojuši faktu, kāda tipa spēlētājs patiesībā ir 2.spēlētājs (viņš zina, ka notiek spēle Γ_1), bet tas var būtiski ietekmēt rezultātu.

Beijesa spēles definīcija

DEFINĪCIJA. Par *Beijesa spēli* sauc spēli

$$\Gamma^B = (N, S_1, S_2, ..., S_n, T_1, T_2, ..., T_n, p_1, p_2, ..., p_n, u_1, u_2, ..., u_n), \text{ kur}$$

$N \neq \emptyset$ — spēlētāju kopa,
S_i — i-tā spēlētāja darbību (stratēģiju) kopa, $i \in N$,
T_i — i-tā spēlētāja tipu kopa, $i \in N$,
$p_i : T_{-i} \times T_i \to [0; 1]$ — varbūtība notikumam, ka i-tā spēlētāja tips ir t_i, bet no pārējiem viņš sagaida tipus t_{-i}, $i \in N$,
$u_i : S_1 \times ... \times S_n \times T_1 \times ... \times T_n \to \mathbf{R}$, kur $u_i(s_1, ..., s_n, t_1, ..., t_n)$ ir i-tā spēlētāja ieguvums gadījumā, ja tiek veiktas darbības $s_1, ..., s_n$ un n spēlētāju tipi ir $t_1, ..., t_n$, $i \in N$,
$|N| < \infty$, $|S_i| < \infty$, $|T_i| < \infty$, $i \in N$.

Beijesa spēlē spēlētāju darbības ir atkarīgas arī no viņu tipiem, tāpēc noteikta i-tā ($i \in N$) spēlētāja stratēģija ir uzlūkojama kā funkcija $S_i(\cdot)$, kuras argumentu kopa ir i-tā spēlētāja tipu kopa T_i un vērtību kopa ir i-tā spēlētāja darbību kopa S_i. Principā i-tais spēlētājs zina savu tipu, savu izvēlēto stratēģiju, bet nezina pretspēlētāja tipu. Varam aprēķināt i-tā spēlētāja sagaidāmo ieguvumu, ja viņš ir ar tipu t_i un izspēlēs stratēģiju $s(\cdot) = (s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot))$:

$$U_i(s_i(t_i), s_{-i}(\cdot), t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}, t_1, ..., t_n)) \cdot p_i(t_{-i}|t_i).$$

Beijesa-Neša līdzsvars

DEFINĪCIJA. Stratēģiju kombināciju $s^*(\cdot)$ spēlē Γ^B sauc par *Beijesa-Neša līdzsvaru*, ja katram spēlētājam $i \in N$ un jebkuram viņa tipam $t_i \in T_i$ ir spēkā nevienādība

$$U_i(s_i^*(t_i), s_i^*(\cdot), t_i) \geq U_i(s_i(t_i), s_{-i}^*(\cdot), t_i)$$

visām stratēģijām $s_i(t_i) \in S_i$.

Aplūkosim ekonomiska rakstura piemēru (Kurno duopola modelis ar nepilnīgu informāciju). *Apskatīsim viena veida produkcijas divus ražotājus. Produkcijas cena tirgū abiem ir vienāda un tā ir atkarīga no abu ražotāju piedāvātajiem produkcijas apjomiem: $c = A - s_1 - s_2$, kur A noteikta konstante. Ražotāju ieguvumu funkcijas ir $u_i = s_i(t_i - s_1 - s_2)$, $i = 1, 2$, t_i — ražotāju tipi, kas noteikti ar sakarību $t_i = A - k_i$, $i = 1, 2$, šeit ar k_i, $i = 1, 2$, tiek apzīmēta i-tā ražotāja saražotās produkcijas vienas vienības izmaksas. Abi ražotāji zin, ka $t_1 = 1$, bet 1.ražotājs nezin, kāds precīzi ir otrā spēlētāja tips: $t_{21} = \frac{3}{4}$ vai $t_{22} = \frac{5}{4}$, tāpēc viņš pieņem, ka abi tipi ir vienlīdz iespējami, t.i., $p_1(t_{21}|t_1) = p_1(t_{22}|t_1) = \frac{1}{2}$. Jānoskaidro šīs spēles Beijesa-Neša līdzsvars.*

Pēc Beijesa-Neša līdzsvara definīcijas formāli mums ir jāatrod tāds stratēģiju pāris $(s_1^*, s_2^*(\cdot))$, kurš apmierinātu nevienādības:

$$\begin{aligned}
U_1(s_1^*, s_2^*(\cdot), t_1) &\geq U_1(s_1, s_2^*(\cdot), t_1), \quad \forall s_1 \in S_1 = \mathbf{R}, \\
U_2(s_1^*, s_2^*(t_{21}), t_{21}) &\geq U_2(s_1, s_2^*, t_{21}), \quad \forall s_2 \in S_2 = \mathbf{R}, \\
U_2(s_1^*, s_2^*(t_{22}), t_{22}) &\geq U_2(s_1, s_2^*, t_{22}), \quad \forall s_2 \in S_2 = \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Mums ir zināms, ka ražotāji cenšas maksimizēt lietderības funkciju vērtības. Tā otrais ražotājs maksimizē funkciju

$$u_2 = s_2(t_2 - s_1^* - s_2), \text{ tad}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial s_2} = t_2 - s_1^* - 2s_2 = 0$$

un iegūsim, ka $s_2^*(t_2) = \frac{1}{2}(t_2 - s_1^*)$ jeb konkrētāk:

$$\begin{aligned}
s_2^*(t_{21}) &= s_2^*(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4} - s_1^*), \\
s_2^*(t_{22}) &= s_2^*(\tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{4} - s_1^*) \text{ -}
\end{aligned} \qquad (*)$$

esam ieguvuši 2.ražotāja līdzsvara stratēģijas, kas ir atkarīgas no 1.ražotāja stratēģijām.

Savukārt arī 1.ražotājs cenšas maksimizēt savu lietderības funkciju $u_1 = s_1(t_1 - s_1 - s_2^*)$, bet tā kā viņš nezina, kāda tipa spēlētājs ir otrais ražotājs, tad maksimizēta tiek funkcija

$$
\begin{aligned}
&U_1(s_1, s_2^*(\cdot), t_1) = \\
&= p(t_{21}|t_1)s_1(t_1 - s_1 - s_2^*(t_{21})) + p(t_{22}|t_1)s_1(t_1 - s_1 - s_2^*(t_{22})) = \\
&= \tfrac{1}{2}s_1(t_1 - s_1 - s_2^*(t_{21}) + t_1 - s_1 - s_2^*(t_{22})) = \\
&= \tfrac{1}{2}s_1(2 - 2s_1 - s_2^*(t_{21}) - s_2^*(t_{22})), \text{ t.i.,} \\
&\tfrac{\partial u_1}{\partial s_1} = \tfrac{1}{2}(2 - s_2^*(t_{21}) - s_2^*(t_{22})) - 2s_1 = 0, \text{ tādējādi} \\
&s_1^* = \tfrac{1}{4}(2 - s_2^*(t_{21}) - s_2^*(t_{22})) \qquad\qquad (**)
\end{aligned}
$$

ir 1.ražotāja līdzsvara stratēģija, kas ir atkarīga no 2.ražotāja līdzsvara stratēģijām. Savietojot (*) un (**), iegūsim atbildi uz sākotnēji formulēto jautājumu: $s_1^* = \frac{1}{3}$, $s_2^*(t_{21}) = \frac{5}{24}$ un $s_2^*(t_{22}) = \frac{11}{24}$ ir Beijesa-Neša līdzsvars.

LEKCIJA NR. 11

DRAUDI

Pamatidejas
Sadalījumi
α-kodols

Pamatidejas

Šajā lekcijā pieņemsim, ka spēlētāji tiecas kooperēties, bet, ņemot vērā stratēģisko savstarpējo atkarību, kas raksturīga spēlēm normālformā, tagad spēlētāji, izvēloties savu stratēģiju, rēķinās ar iespējamo citu spēlētāju reakciju. Draudot viens otram, spēlētāji var stabilizēt samērā plašu gājienu kopu. Tāpēc draudus varam apskatīt kā kooperācijas mehānismu.

Ilgāku laiku kooperācija kā savstarpēji brīdinoši draudi ir tikusi pētīta ekonomiskajā literatūrā saistībā ar oligopola problēmām. Piemēram, Kurno duapola gadījumā gājiens, kas dod vislielāko kopējo peļņu, nav Neša līdzsvars, jo vienpusējs firmas piedāvājuma apjoma palielinājums un cenas samazinājums palielina tās tekošos ienākumus. Tas liek otrai firmai arī samazināt cenu un palielināt piedāvājuma apjomu, kas gala rezultātā noved pie tā, ka abi spēlētāji zaudē salīdzinājumā ar sākuma stāvokli. Šajā gadījumā katra firma veic tādus gājienus, kuru rezultātā citas firmas veic savukārt tādus atbildes gājienus, kas rada zaudējumus visai nozarei.

Brīdinājumi ir samērā iespaidīgs kooperācijas mehānisms. Lai sasniegtu norunu stabilitāti, spēlētāji draud viens otram, t.i., paziņo noteiktu reaģēšanas shēmu, ja netiks ievērotas norunas. Tā kā norunas neievērojošajam spēlētājam var būt slikti, ja draudi tiks izpildīti, tad viņš baidīsies norunas nepildīt, tāpēc neobligātā vienošanās izrādīsies stabila. Tādējādi brīdinājumi ir saprātīga potenciālo spēku izmantošana. Sekmīgi ir tie draudi, kuri nekad netiek realizēti.

Sadalījumi

Piemērs. Cietuma dilemmas kooperatīvais atrisinājums.

Cietuma dilemmas nekooperatīvs atrisinājums ir (atzīties, atzīties), kas abiem dod samērā lielu cietumsodu. Lai dabūtu pavisam mazu cietumsodu un tiktu izdarīts gājiens (neatzīties, neatzīties), jāveido kooperācija, kurā katrs spēlētājs pasludina savas uzvedības principus: "kā tu, tā arī es", t.i.,

$$\begin{cases} \text{ja tu atzīsies, tad es arī atzīšos,} \\ \text{ja tu neatzīsies, tad es arī neatzīšos.} \end{cases} \tag{1}$$

Ņemot vērā šos draudus, katram no spēlētājiem ir izdevīgāk neatzīties, jo tas dod abiem lielāku ieguvumu (mazāku cietumsodu) nekā atzīšanās. Tādā veidā izpaužas draudu (1) stabilitāte.

Divpusēji draudi neveido pieļaujamo darbību pāri. Lai realizētu tādu uzvedību, kāda tiek izteikta draudos (1), spēlētājam ir jāzin partnera rīcība. Ja spēlētāji izvēlas stratēģijas uzreiz un galīgi, tad tikai viens no spēlētājiem var būt tādā stāvoklī, ka zina otra spēlētāja gājienu. Cietuma dilemma ir simetriska spēle, mēs vēlētos, lai kooperatīvo iznākumu nodrošinātu brīdinājumu scenārijs, kurā spēlētājiem ir simetriskas lomas. Lai pārvarētu šīs grūtības, varam iedomāties, ka spēle var atkārtoties un spēles vinnests būs abu spēļu vinnesti kopā. Ja īslaicīgi ienākumi no nekooperatīvas novirzes pārklājas ar ilglaicīgiem zaudējumiem, kas rodas tipa (1) reakcijas rezultātā, tad brīdinājumu scenārijs nodrošina stabilu kooperatīvu iznākumu. ∎

Šeit mēs izveidosim no matemātikas viedokļa raugoties samērā vienkāršu konstrukciju kooperācijas formalizācijai uz draudu pamata. Spēlētājiem tikai nepieciešamas norunas par dažiem spēles iznākumiem un katram spēlētājam ir jāizvēlas draudi, kas to brīdina par novirzēm no dotā iznākuma.

Definīcija. Pieņemsim, ka $G = (X_i,\, u_i;\, i \in N)$ ir spēle normālformā (N — spēlētāju kopa, $i \in N$, X_i — stratēģiju kopa i-tajam spēlētājam, u_i — i-tā spēlētāja ieguvumu funkcija jeb derīguma funkcija, $x = (x_i)_{i \in N} \subset X_N$ — spēles gājiens). Par *brīdinājuma scenāriju* sauc komplektu $(x,\, \xi_{\hat{\imath}};\, i \in N)$, kur $x \in X_N$ — spēles G gājiens, $\xi_{\hat{\imath}}$ visiem $i \in N$ apzīmē draudus spēlētājam

i, t.i., $\xi_{\hat{\imath}}$ ir tāds attēlojums no X_i kopā $X_{N\setminus\{i\}}$, ka

$$\begin{cases} \xi_{\hat{\imath}}(x_i) = x_{\hat{\imath}}, \\ \forall y_i \in X_i \setminus \{x_i\}: \quad u_i(y_i, \xi_{\hat{\imath}}(y_i)) \leq u_i(x). \end{cases} \tag{2}$$

Ilustrēsim brīdinājuma scenāriju ar spēli, kura tiek izspēlēta bezgalīgā laika intervālā. Katrā konkrētā laika momentā katrs spēlētājs izvēlas savu stratēģiju, pie tam viņš var nomainīt savu stratēģiju jebkurā laika momentā. Spēle tiek spēlēta atklāti, t.i., visu spēlētāju stratēģijas ir visiem zināmas. Tas ir galvenais pieņēmums par informāciju, kurš padara neiespējamu slepenu norunu neievērošanu.

Spēlētājs, kurš ievēro norunu, sākumā izvēlas ar citiem spēlētājiem saskaņoto stratēģiju x_i un pēc tam novēro citu spēlētāju stratēģijas $y_{\hat{\imath}}$. Kamēr $y_{\hat{\imath}} = x_{\hat{\imath}}$, tikmēr spēlētājs i saglabā stratēģiju x_i, bet tiklīdz, piemēram, spēlētājs j izmanto stratēģiju $y_j \neq x_j$, spēlētājs i pārslēdzas reiz par visām reizēm uz i-to koordināti $\xi_{\hat{\imath}}(y_j)$. Stabilitātes nosacījumi (2) nozīmē, ja visi spēlētāji izpilda norunu, kas balstās uz brīdinājuma scenāriju, tad nevienam spēlētājam nerodas nekādi iemesli (vienpusēji), lai lauztu norunu. Ieguvums bezgalīgā laika intervālā vienmēr pārsniedz ieguvumu jebkurā intervālā ar galīgu garumu.

Definīcijā ņemti vērā tikai atsevišķu spēlētāju novirzes. Nākošajā paragrāfā apskatīsim vispārinājumu gadījumam, ja norunu neievēro koalīcija.

Protams, reizēm ir grūti izpildīt prasību, ka spēle tiek spēlēta atklāti. Speciālgadījumā pie mūsdienu bruņojuma negaidīts iebrukums kļūst aizvien bīstamāks. Tādējādi demilitarizētu zonu izveidošana, kurās redzamas visas agresīvās darbības, vai vienošanās par kodolieroču savstarpējām inspekcijām ir divi piemēri informācijas apmaiņai pie brīdinošiem draudiem. No otras puses, angļu-japāņu vienošanās par kara kuģu ražošanas ierobežošanu neparedzēja speciālu punktu par norunas izpildes kontroli, jo noruna tika parakstīta tajos laikos, kad tādu objektu slepena celtniecība skaitījās neiespējama.

Lemma 1. 1. Pieņemsim, ka $(x, \xi_{\hat{\imath}};\, i \in N)$ ir brīdinājuma scenārijs. Tad gājiens x ir individuāli racionālākais, t.i., :

$$\sup_{y_i} \inf_{y_{\hat{\imath}}} u_i(y_i, y_{\hat{\imath}}) \leq u_i(x) \text{ visiem } i \in N. \tag{3}$$

2. Pieņemsim, ka X_i ir kompaktas kopas, bet u_i ir nepārtrauktas funkcijas, $i \in N$. Tad spēlē G eksistē vismaz viens individuāli racionālākais gājiens. Katram tādam gājienam x visiem $i \in N$ eksistē tāds draudu komplekts $\xi_{\hat{\imath}}$, ka $(x, \xi_{\hat{\imath}};\, i \in N)$ ir brīdinājuma scenārijs.

Pierādījums. No (2) seko, ka

$$\inf_{y_{\hat{\imath}}} u_i(y_i, y_{\hat{\imath}}) \le u_i(y_i, \xi_{\hat{\imath}}(y_i)) \le u_i(x) \text{ visiem } y_i \in X_i.$$

No šejienes seko lemmas pirmais apgalvojums.

Pierādīsim otro — apgriezto apgalvojumu. Bet vispirms dosim vienu definīciju un lemmu (bez pierādījuma).

Definīcija. Normālformas spēlē $(X_i, u_i;\ i \in N)$ x_i sauc par i-tā spēlētāja *piesardzīgo stratēģiju*, ja izpildās vienādība

$$\inf_{x_{\hat{\imath}} \in X_{\hat{\imath}}} u_i(x_i, x_{\hat{\imath}}) = \sup_{y_i \in X_i} \inf_{x_{\hat{\imath}} \in X_{\hat{\imath}}} u_i(y_i, x).$$

Lemma. Pieņemsim, ka X_i ir kompaktas kopas, bet u_i ir nepārtrauktas funkcijas, $i \in N$. Tad i-tā spēlētāja piesardzīgo stratēģiju kopa nav tukša, tā ir kompakta un šķeļas ar nedominējošo stratēģiju kopu.

Pie mūsu topoloģiskajiem pieņēmumiem katram no spēlētājiem ir vismaz viena piesardzīgā stratēģija, apzīmēsim to ar x_i. Tad stratēģiju kombinācija (gājiens) $x = (x_i)_{i \in N}$ ir individuāli racionāls gājiens.

Tālāk, katram $i \in N$ un katrai stratēģijai $y_i \in X_i$, $y_i \ne x_i$, izvēlamies tādu elementu $y_{\hat{\imath}} = \xi_{\hat{\imath}}(y_i) \in X_{N \setminus \{i\}}$, ka

$$u_i(y_i, y_{\hat{\imath}}) = \inf_{z_{\hat{\imath}}} u_i(y_i, z_{\hat{\imath}}) \le \sup_{z_i} \inf_{z_{\hat{\imath}}} u_i(z_i, z_{\hat{\imath}}) \le u_i(x).$$

Tas pabeidz Lemmas 1 pierādījumu. ■

Definīcija. Par *sadalījumu* spēlē $G = (X_i, u_i,\ i \in\ )$ sauc optimālo pēc Pareto individuāli racionālo gājienu. Šo spēles G sadalījumu kopu apzīmēsim ar $I(G)$.

(Atgādināsim, ka spēlē normālformā $(X_i, u_i,\ i \in\ )$ gājiens $x \in X_N$ dominē pēc Pareto pār gājienu $y \in X_N$, ja

$$\begin{cases} \forall i \in N \quad u_i(y) \le u_i(x), \\ \exists i \in N \quad u_i(y) < u_i(x). \end{cases}$$

Gājienu x sauc par *optimālu pēc Pareto*, ja tas nedominē pēc Pareto.)

Lemma 2. Pieņemsim, ka katram spēlētājam $i \in N$ kopa X_i ir kompakta un funkcija u_i ir nepārtraukta. Tad spēlē G eksistē vismaz viens sadalījums.

Pierādījums. Visu spēles G gājienu kopas apakškopu, kas sastāv no individuālajiem racionālajiem gājieniem, apzīmēsim ar $IR(G)$, tā ir netukša un kompakta kopa. Izvēlēsimies tādu $x \in IR(G)$, kurš maksimizē $\sum\limits_{i\in N} u_i$ kopā $IR(G)$. Tad šis x ir pēc Pareto optimāls gājiens. Pieņemsim no pretējā, ka gājiens y dominē pēc Pareto gājienu x. Tad $y \in IR(G)$ un

$$\sum_{i\in N} u_i(x) < \sum_{i\in N} u_i(y).$$

Iegūtā pretruna noslēdz lemmas pierādījumu. ■

Sadalījums ir optimāls pēc Pareto gājiens un dod katram spēlētājam vismaz tā garantēto vinnestu. Pēc Lemmas 1 katrs sadalījums ir optimāls pē Pareto brīdinājuma scenārija gājiens. No otras puses, divas minimālālās prasības kooperatīvai norunai ir tieši individuālā racionalitāte un optimalitāte pēc Pareto. No šejienes seko, ka kopa $I(G)$ ir maksimālais apgabals kooperācijas sarunām. Lielākajā vairumā spēļu kopa $I(G)$ sastāv no daudziem gājieniem un izvēle starp tiem rada asas konflikta situācijas.

Piemērs. "Tirgus" spēle.

1.spēlētājs pārdod (nedalāmu) preci 2.spēlētājam. 1.spēlētājam jāizšķiras, vai preci pārdot par augstu vai zemu cenu. Pircējam principā ir pieņemamas abas cenas, bet viņš var veikt pirkumu un var no tā atteikties.

2.spēlētājs / 1.spēlētājs	pirkums	atteikums
augsta cena	(2,1)	(0,0)
zema cena	(1,2)	(0,0)

Gājiens (I, I) ir dominējošo stratēģiju līdzsvars, pie tam tas ir optimāls pēc Pareto. Ja spēlētājiem nav iespējams apmainīties ar informāciju, tad šis gājiens acīmredzot būs spēles rezultāts. Diemžēl tas nav vienīgais spēles sadalījums. Cits sadalījums ir gājiens (II, I). Lai 1.spēlētājs vinnētu (t.i., pārdotu preci par augstāko cenu), viņš var paziņot, ka pārdos preci tikai par augstāko cenu, t.i., uzņemties līdera lomu. No otras puses, 2.spēlētājs var vinnēt, piedraudot pārdevējam: "Es pirkšu tikai preci par zemāko cenu un atteikšos no darījuma, ja būs augstākā cena." Šī uzvedība, kas liekas nesaprātīga (par cik pircējs ir gatavs atteikties no izdevīga darījuma), var izrādīties samērā noderīga, ja tikai pārdevējs notic šiem draudiem. No kooperācijas viedokļa mēs nevaram dot priekšroku nevienam no nosauktajiem brīdinājuma scenārijiem.

Apskatāmajā piemērā pircējs vinnē, izmantojot radikālus draudus: "Jebkuras tavas novirzes gadījumā es reaģēšu, minimizējot tavu ieguvumu funkciju (t.i., izvēlēšos priekš tevis pašu sliktāko atbildi)." Šis radikālisms var novest pie tā, ka draudu izpilde var izrādīties pazudinoša abiem spēlētājiem. Pircēja paziņojums, ka viņš atteiksies no darījuma pie augstākās cenas, ir tikai, kā viņš iecerējis, brīdinošs signāls. Bet, lai draudi radītu iespaidu, nepieciešams, lai nerastos šaubas par to, ka šie draudi tiks izpildīti. Šādā nozīmē pat ļoti pārliecinoši un sekmīgi draudi ir riskanti, ja paziņotā reakcija uz novirzēm nesakrīt ar draudošā spēlētāja labākajām atbildēm. ■

Piemērā apskatīto situāciju var vispārināt uz patvaļīgu divu spēlētāju spēli.

Apskatīsim divu spēlētāju spēli (X_1, X_2, u_1, u_2), kurā kopas X_1 un X_2 ir kompaktas un u_1 un u_2 ir nepārtrauktas funkcijas. Spēlētājam i labākais sadalījums ir tāds gājiens x^i, ka

$$x^i \in I(G) \quad u_i(x^i) = \sup_{x \in I(G)} u_i(x),$$

ko ekvivalentā veidā var pierakstīt šādi:

$$x^i \in I(G) \quad u_i(x^i) = \sup \left\{ u_i(x) \mid u_j(x) \geq \sup_{y_j} \inf_{y_i} u_j(y_j, y_i) \right\}. \tag{4}$$

Vēl vairāk, jebkuri divi sadalījumi, kas apmierina nosacījumu (4), dod vienu un to pašu vinnestu *abiem* spēlētājiem:

$$[\, x \text{ apmierina } (4)\,] \Rightarrow [\, u_j(x) = u_j(x^i),\ j = 1, 2\,].$$

Lasītājs var patstāvīgi pierādīt iepriekv̄ s izteiktos apgalvojumus. Mēs pierādīsim šādu lemmu:

Lemma 3. Pieņemsim, ka x^i ir sadalījums, kurš apmierina nosacījumu (4). Pieņemsim, ka ξ_i ir i-tā spēlētāja (agresīvie) draudi:

$$\begin{cases} \xi_i(x_j^i) = x_i^i, \\ \forall y_j \in X_j \setminus \{x_j^i\} \quad u_j(y_j, \xi_i(y_j)) = \inf_{y_i} u_j(y_j, y_i). \end{cases} \tag{5}$$

Pieņemsim, ka ξ_j ir j-tā spēlētāja draudi ("piesardzības soļi") :

$$\begin{cases} \xi_j(x_i^i) = x_j^i, \\ \forall y_i \in X_i \setminus \{x_i^i\} \quad u_j(\xi_j(y_i), y_i) = \inf\limits_{y_j} u_j(y_j, y_i). \end{cases} \tag{6}$$

Tad (x^i, ξ_i, ξ_j) ir brīdinājuma scenārijs.

Pierādījums. No (5) iegūsim

$$\forall y_j \in X_j \setminus \{x_j^i\} \quad u_j(y_j, \xi_i(y_j)) \le \sup_{z_j} \inf_{z_i} u_j(z_j, z_i).$$

Tā kā gājiens x^i ir individuāli racionāls ($x^i \in IR(G)$), tad iegūsim

$$\forall y_j \in X_j \setminus \{x_j^i\} \quad u_j(y_j, \xi_i(y_j)) \le u_j(x^i).$$

No otras puses, no (6) seko, ka

$$\forall y_i \in X_i \setminus \{x_i^i\} \quad u_j(\xi_j(y_i), y_i) \ge \inf_{z_i} \sup_{z_j} u_j(z_j, z_i).$$

Fiksēsim stratēģiju y_i, $y_i \ne x_i^i$, un pieņemsim, ka

$$u_i(\xi_j(y_i), y_i) > u_i(x^i).$$

Pēdējās divas nevienādības kopā ar nosacījumu $x^i \in IR(G)$ ļauj apgalvot, ka $y = (\xi_j(y_i), y_i) \in IR(G)$. Pēc mūsu topoloģiskajiem pieņēmumiem eksistē tāds optimāls pēc Pareto gājiens z, kuram izpildās nevienādības

$$u_i(y) \le u_i(z), \quad u_j(y) \le u_j(z).$$

Tādējādi sadalījumam z izpildās nevienādība

$$u_i(x^i) < u_i(z).$$

Iegūtā pretruna noslēdz pierādījumu. ■

Nosauksim draudus, kas tiek izteikti sakarā ar vadošā spēlētāja draudiem, par piesardzības soļiem. Tādas atbildes reakcijas var būt pietiekoši iespaidīgas. Tajā momentā, kad nepieciešams draudus izpildīt, spēlētājam nepieciešams vai nu atttteikties no racionālas izvēles (raugoties no īslaicīgām interesēm), vai arī tomēr draudus neizpildīt. Tādējādi sekmīga draudu izmantošana piesardzības nolūkos prasa, lai draudošais spēlētājs spētu savus draudus arī izpildīt vai vismaz tiem jābūt tik ticamiem, lai visi tiem noticētu.

α-kodols

Definīcija. Pieņemsim, ka dota spēle $G = (X_i, u_i;\ i \in N)$. Par spēles G *α-kodolu* sauc apakškopu no tādiem gājieniem x^*, kuriem izpildās:

jebkurai koalīcijai $T \subset N$ un jebkurai kopējai stratēģijai $x_T \in X_T$ eksistē kopīga papildinājuma koalīcijas tāda stratēģija $x_{T^C} \in X_{T^C}$, ka neizpildās nosacījums

$$\begin{cases} u_i(x_T, x_{T^C}) \geq u_i(x^*) \text{ visiem } i \in T, \\ u_i(x_T, x_{T^C}) > u_i(x^*) \text{ vismaz vienam } i \in T. \end{cases}$$

Spēles G α-kodolu apzīmē ar $C_\alpha(G)$.

Šīs definīcijas formulējumā netika izmantots brīdinājuma scenārijs, kurā koalīcija reaģētu uz papildinājuma koalīcijas kopējām novirzēm. Formāli koalīciju brīdinājuma scenāriju var definēt kā komplektu

$$(x^*,\ \xi_T,\ T \subset N),$$

kur ξ_{T^C} — tāds attēlojums no X_T kopā X_{T^C}, ka neeksistē koalīcija $T \subset N$ un kopīga stratēģija $x_T \in X_T$, kuriem izpildītos

$$\begin{cases} u_i(x_T, \xi_{T^C}(x_T)) \geq u_i(x^*) \text{ visiem } i \in T, \\ u_i(x_T, \xi_{T^C}(x_T)) > u_i(x^*) \text{ vismaz vienam } i \in T. \end{cases}$$

Tādējādi x^* pieder kopai $C_\alpha(G)$ tad un tikai tad, ja katrai koalīcijai $T \subset N$ eksistē tādi koalīcijas T^C draudi pret potenciālajām koalīcijas T novirzēm, ka $(x^*,\ \xi_T;\ T \subset N)$ — koalīcijas brīdinājuma scenārijs.

Pēc α-kodola definīcijas gājiens x^* atrodas spēles G α-kodolā tajā gadījumā, ja jebkurai koalīcijas T novirzei x_T var pretī likt papildinājuma koalīcijas T^C gājienu x_{T^C}, kurš brīdina vismaz vienu koalīcijas T locekli no lēmuma izvēlēties stratēģiju x_T, jo šajā gadījumā šis spēlētājs zaudē:

$$u_i(x_T, x_{T^C}) < u_i(x^*)$$

(vai visi koalīcijas T spēlētāji iegūst tādu pašu vinnestu kā iepriekš

$$\forall i \in T \quad u_i(x_T, x_{T^C}) = u_i(x^*) \quad).$$

Pielietojot šo īpašību pakāpeniski koalīcijām $T = N$ un $T = \{i\}$, $i \in N$, iegūsim, ka jebkurš gājiens no α-kodola ir arī sadalījums:

$$C_\alpha(G) \subset I(G).$$

Divu spēlētāju spēlēs α-kodols sakrīt ar sadalījuma kopu, tāpēc tas nav tukša kopa. Bet interesanti atzīmēt, ka spēlēs ar vismaz trim spēlētājiem α-kodols var izrādīties tukšs.

Piemērs. *Kondorsē* paradokss.

Pieņemsim, ka N ir sabiedrība, kas sastāv no nepāra skaita dalībnieku, kuriem no galīgas kopas kandidātu A ir jāizvēlas viens. Kandidāts tiek izvēlēts ar balsu vairākumu: katrs spēlētājs balso par vienu kandidātu, vinnē tas, kuram ir visvairāk balsu.

Apzīmēsim ar u_i spēlētāja i $(i \in N)$ derīguma funkciju kopā A. Jebkuri divi derīguma iznākumi kopā A tiek uzskatīti par atšķirīgiem, tāpēc eksistē tieši $p!$ priekšrocības attiecību, kur $p = |A|$ — kopas A apjoms.

i-tā spēlētāja stratēģijas veido kopa $X_i = A$. Par balsošanas likumu tiek uzskatīts jebkurš tāds attēlojums $\pi : X_N \to A$, kurš $\forall x \in X_N$:

$$\pi(x) = a \Rightarrow |\{i \in N \,|\, x_i = a\}| \geq |\{i \in N \,|\, x_i = b\}| \text{ visiem } b \in A. \qquad (7)$$

Fiksētām Funkcijām u_i, $i \in N$, izveidojas šāda spēle normālformā

$$G = \{X_i,\, u_i \circ \pi;\, i \in N).$$

Atradīsim šajā spēlē kooperācijas stabilitātes gājienus. Pieņemsim, ka $x^* \in X_N$ ietilpst α-kodolā, un apzīmēsim $a = \pi(x^*)$. Atzīmēsim, ka jebkura koalīcija T, kurā atrodas vairāk par pusi spēlētāju ($|T| > \frac{N}{2}$), var nodrošināt jebkura kandidāta b ievēlēšanu, ja visi koalīcijas locekļi balsos par b (tas seko no (7)):

$$[\, x_i = b \text{ visiem } i \in T\,] \Rightarrow [\, \pi(x_T, x_{T^C}) = b \text{ visiem } x_{T^C} \in X_{T^C}\,].$$

Tādā gadījumā nevienādība

$$\forall i \in T \quad u_i(b) > u_i(a) \qquad (8)$$

būtu pretrunā ar gājiena x^* piederību α-kodolam. Tādējādi visām koalīcijām T, kas satur lielāko balsu daļu, un visiem kandidātiem b, $b \neq a$, īpašība (8) nedrīkst izpildīties. Šis apgalvojums ekvivalentā veidā var tikt noformulēts šādi:

$$|\{i \in N \,|\, u_i(a) > u_i(b)\}| > \frac{|N|}{2} \text{ visiem } b,\, b \neq a. \qquad (9)$$

Tā kā $|N|$ ir nepāra skaitlis, tad vai nu pati koalīcija satur lielāko daļu spēlētāju, vai arī tās papildinājums ir ar lielāko daļu spēlētāju. Ja izpildās īpašība (9), tad teiksim, ka kandidāts a ir uzvarētājs pēc *Kondorsē* ar priekšrocību sakārtojumu u_i, $i \in N$. Tāds kandidāts radīs zaudējumus jebkuram citam kandidātam, salīdzinot pa pāriem. Tādējādi esam pierādījuši, ka

$$[\, x^* \in C_\alpha(G)\,] \Rightarrow [\pi(x^*) \text{ ir uzvarētājs pēc } \textit{Kondorsē} \text{ pie } (u_i)_{i \in N}\,].$$

Apgrieztais apgalvojums arī ir spēkā.

Dotam priekšrocību sakārtojumam u_i, $i \in N$, atbilst ne vairāk kā viens uzvarētājs pēc *Kondorsē* (seko no (9)). Iespējami ir tikai divi gadījumi.

1.gadījums. Priekšrocību sakārtojumam u_i, $i \in N$, ir uzvarētājs pēc *Kondorsē*, pieņemsim a. Tad spēles G α-kodols sastāv no visiem tiem gājieniem x, kuriem $\pi(x) = a$: $C_\alpha(G) = \pi^{-1}(a)$.

2.gadījums. Priekšrocību sakārtojumam u_i, $i \in N$, neeksistē uzvarētājs pēc *Kondorsē*. Tad spēles G α-kodols ir tukša kopa:

$$C_\alpha(G) = \emptyset.$$

2.gadījums literatūrā ir pazīstams ar nosaukumu "*Kondorsē* paradokss", tas ir daudz pētīts.

Lai izveidotu tādu priekšrocību sakārtojumu, pie kura nav uzvarētāja pēc *Kondorsē*, pieņemsim, ka $p \geq 3$ un $|N| = n \geq 3$. Izvēlēsimies trīs kandidātus a, b, c un trīs naturālus skaitļus n_1, n_2, n_3 tā, ka izpildās ($|N|$ ir nepāra skaitlis!):

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = n, \\ n_k + n_l > n_m \text{ visiem } \{k,\, l,\, m\} = \{1,\, 2,\, 3\}. \end{cases}$$

Pieņemsim, ka sabiedrība N sadalās trijās vienādi domājošās grupās ar dalībnieku skaitu n_k, $k = 1, 2, 3$, pie tam

$$\begin{array}{ll} \forall i \in N_1 : & u_i(a) > u_i(b) > u_i(c) > u_i(\alpha), \\ \forall i \in N_2 : & u_i(b) > u_i(c) > u_i(a) > u_i(\alpha), \\ \forall i \in N_3 : & u_i(c) > u_i(a) > u_i(b) > u_i(\alpha), \\ \multicolumn{2}{l}{\text{visiem } \alpha \in A \setminus \{a,\, b,\, c\}.} \end{array}$$

Dalībnieki no $N_1 \cup N_3$ dod priekšroku kandidātam a salīdzinājumā ar b. Par cik $n_1 + n_3 > n_2$, tad b nevar būt uzvarētājs pēc *Kondorsē*. Līdzīgi vairākums no $N_1 \cup N_2$ dod priekšroku kandidātam b salīdzinājumā ar c, bet vairākums no $N_2 \cup N_3$ dod priekšroku kandidātam c salīdzinājumā ar a. ■

Spēlēs ar tukšu α-kodolu kooperatīvā stabilitāte nevar tikt sasniegta tikai brīdinošo draudu dēļ. Pat tas fakts, ka novirzes var izdarīt tikai atklātā veidā, negarantē, ka neeksistē tāda koalīcija, kurai novirzes ir izdevīgas, neatkarīgi no atbilstošām citu spēlētāju darbībām.

LEKCIJA NR. 12

DINAMISKĀS SPĒLES

Spēles ekstensīvās formas definīcija

Dinamiskās lēmumu pieņemšanas situācijas, kurās spēlētāja rīcība ir atkarīga no tā informētības par pagātnē izdarītiem gājieniem, visvienkāršāk var analizēt ar spēles koka palīdzību, t.i., ekstensīvo spēles formu. Tāpēc vispirms precizēsim, kas ir spēle ekstensīvajā formā. Spēles ekstensīvajā formā mēģināsim ietvert arī varbūtiska rakstura situācijas.

DEFINĪCIJA. Teiksim, ka spēle ir uzdota *ekstensīvajā formā*, ja par spēli ir dota sekojoša informācija:

(1) mezglu kopa K;

(2) zaru kopa $A \subset K \times A$, kas kopīgi ar K veido spēles koku (sakarīgu grafu bez cikliem);

(3) kopas K skaldījums $\{P_0,\ P_1,\ ...,\ P_n,\ E\}$, kur
P_0 ir gadījuma notikumu mezglu kopa,
P_i ir i-tā spēlētāja lēmumu pieņemšanas mezglu kopa,
E ir galamezglu kopa;

(4) katram spēlētājam dots skaldījums P_i informācijas apgabalos $I_i^1,\ ...,\ I_i^{M_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, M_i ir i-tā spēlētāja informācijas kopu skaits;

(5) katram informācijas apgabalam I_i^j dots no I_i^j mezgliem izejošo zaru skaldījums $Z(I_i^j)$, kur katram $z \in Z(I_i^j)$ atbilst viens no I_i^j izejošs gājiens un katrs mezgls $k \in I_i^j$ satur tieši vienu no k izejošu zaru;

(6) katram mezglam $k \in P_0$ un katram no k izejošam zaram ir piekārtota realizācijas varbūtība w_k;

(7) katram galamezglam $e \in E$ dots ieguvumu vektors $(u_1(e), ..., u_n(e))$.

Ar kopas X *skaldījumu* saprot tādu kopas X apakškopu $X_1, ..., X_n$ sistēmu, ka $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n = X$ un $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$

Tālāk definēsim spēlētāju dažāda veida stratēģijas ekstensīvajā spēlē.

DEFINĪCIJA. Par i-tā spēlētāja, $i = 1, 2, ..., n$, *tīro stratēģiju* ekstensīvajā spēlē sauc funkciju s_i, kura jebkuram šī spēlētāja informācijas apgabalam I_i^j piekārto vienu gājienu $s_i(I_i^j) \in Z(I_i^j)$.

DEFINĪCIJA. Par i-tā spēlētāja, $i = 1, 2, ..., n$, *jaukto stratēģiju* ekstensīvajā spēlē sauc tīro stratēģiju kopas varbūtību sadalījumu.

DEFINĪCIJA. Par i-tā spēlētāja, $i = 1, 2, ..., n$, *uzvedības stratēģiju* ekstensīvajā spēlē sauc sistēmu $\sigma_i = (\sigma_{i1}, ..., \sigma_{iM_i})$, kur $\sigma_i j$ ir $Z(I_i^j)$ varbūtību sadalījums un σ_{ij} ir varbūtība, ar kādu i-tais spēlētājs izvēlas gājienu z, ja vien viņš atrodas informācijas apgabalā I_i^j.

DEFINĪCIJA. Uzvedības stratēģiju sauc par *pilnīgi jauktu*, ja tā katram informācijas apgabalam I_i^j un katram gājienam $z \in Z(I_i^j)$ piekārto pozitīvu gājiena varbūtību $\sigma_{ij}(z) > 0$.

Minētās definīcijas neattiecas uz spēlēm ar atmiņas zudumiem, t.i., tādām spēlēm, kurās spēlētājs neatceras, kādus gājienus viņš ir izdarījis iepriekš. Mēs apskatīsim spēles ar *perfektu atmiņu*, t.i., tādas spēles, kurās izdarītie gājieni tiek ievēroti un tie nav izdzisuši no spēlētāju atmiņas.

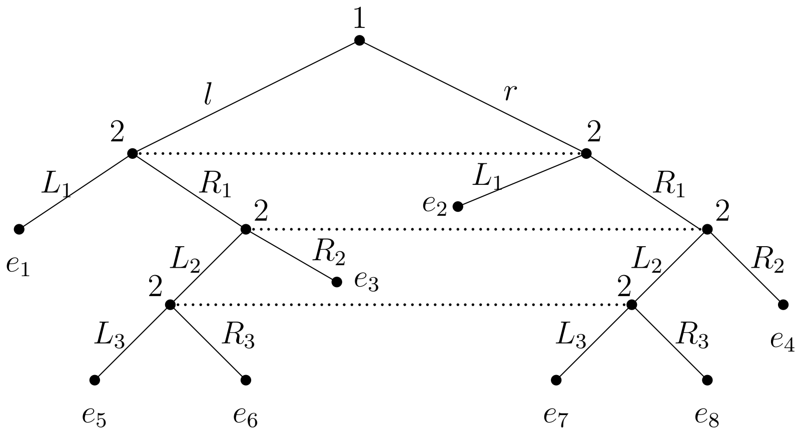
Piemērs

Pieņemsim, ka $P_0 = \{1\}$ un $w(l) = p$ un $w(r) = 1 - p$.

Tīrās stratēģijas 2.spēlētājam 12.1.zīmējumā attēlotajā spēlē ir pavisam astoņas: $r_1 = (L_1, L_2, L_3)$, $r_2 = (L_1, L_2, R_3)$, $r_3 = (L_1, R_2, L_3)$, $r_4 = (L_1, R_2, R_3)$, $r_5 = (R_1, L_2, L_3)$, $r_6 = (R_1, L_2, R_3)$, $r_7 = (R_1, R_2, L_3)$, $r_8 = (R_1, R_2, R_3)$.

Jauktās stratēģias varētu būt, piemēram, $q(r_1) = \frac{1}{3}$, $q(r_7) = \frac{2}{3}$ un visām pārējām tīrajām stratēģijām r: $q(r) = 0$.

Uzvedības stratēģija varētu būt, piemēram, $\sigma_{21}(L_1) = \frac{1}{3}$, $\sigma_{21}(R_1) = \frac{2}{3}$, $\sigma_{22}(L_2) = 0$, $\sigma_{22}(R_2) = 1$, $\sigma_{23}(L_3) = \frac{1}{2}$, $\sigma_{23}(R_3) = \frac{1}{2}$.



12.1.zīm.

Jaukto un uzvedības stratēģiju situācijās varam izrēķināt varbūtības, ar kādām spēlē varētu tikt sasniegts katrs no galamezgliem (12.2.zīmējums). Piemēram, jauktajās stratēģijās galapunkta e_1 sasniegšanas varbūtība ir $w(l) \cdot q(r_1) = p \cdot \frac{1}{3}$, bet uzvedības stratēģijās e_1 tiks sasniegts ar varbūtību $w(l) \cdot \sigma_{21}(L_1) = p \cdot \frac{1}{3}$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
q	$\frac{p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{2}{3}p$	$\frac{2}{3}(1-p)$	0	0	0	0
σ_2	$\frac{p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{2}{3}p$	$\frac{2}{3}(1-p)$	0	0	0	0

12.2.zīm.

Kā redzams, tad abas tabulas rindiņas ir vienādas. Tā nav nejaušība, bet tā būs arī ne vienmēr. Spēkā ir šāds rezultāts:

TEORĒMA. Spēlēs ar perfektu atmiņu jebkurai jauktai stratēģijai eksistē tāda uzvedības stratēģija, kas dod vienus un tos pašus ieguvumus.

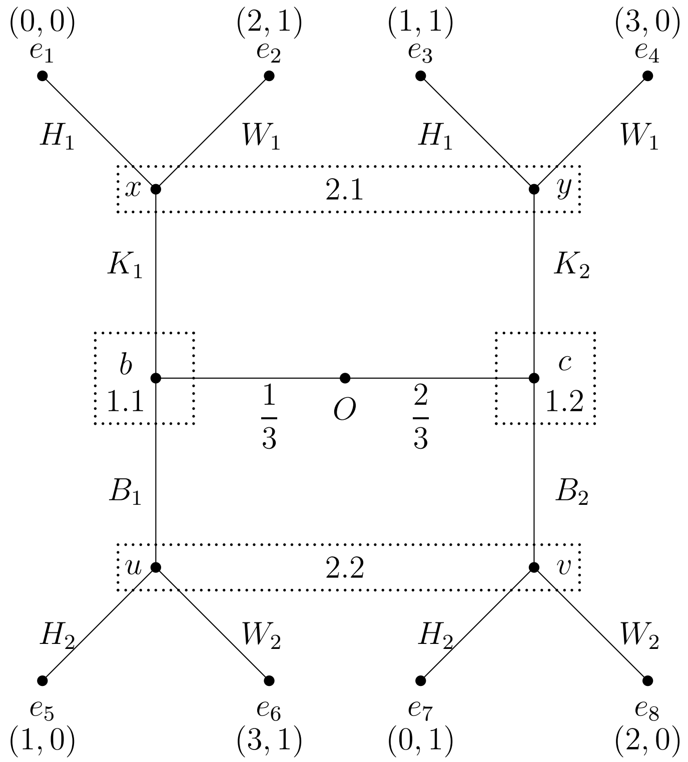
LEKCIJA NR. 13

DINAMISKĀS SPĒLES II

"Alus-kūkas" spēles apraksts

Izanalizēsim *"alus-kūkas" spēli*, kurā piedalās divi spēlētāji. *Ar varbūtību $\frac{1}{3}$ 1.spēlētājs var būt agresīvi noskaņots, bet ar varbūtību $\frac{2}{3}$ 1.spēlētājs ir labā un saticīgā noskaņojumā. 1.spēlētājs ir iegājis kafejnīcā un pašlaik izvēlas alu vai kūkas. Kafejnīcā ir tikai viena brīva vieta pie galdiņa, uz kuru tātad pretendē 1.spēlētājs. kafejnīcā ierodas 2.spēlētājs, kurš redz brīvo vietu pie galdiņa un redz 1.spēlētāju, pasūtot alu vai kūkas. 2.spēlētājam ir divas iespējas — iet projām no šīs kafejnīcas vai apsēsties brīvajā vietā un tā, iespējams, uzsākt strīdu ar 1.spēlētāju, ja tas ir agresīvi noskaņots. Spēles ekstensīvā forma dota 13.1.zīmējumā, kur K_1, K_2, B_1, B_2 ir 1.spēlētāja iespējamie gājieni (K — kūku izvēle, B — alus izvēle), H_1, H_2, W_1, W_2 ir 2.spēlētāja iespējamie gājieni (H — palikt kafejnīcā, W — doties prom). Kā rīkoties 2.spēlētājam?*

Atgriežoties pie ekstensīvās spēles formas apraksta, varam sacīt, ka šajā spēlē ir dota sekojoša informācija (skatīt arī 13.1.zīmējumu):
$P_0 = \{O\}$, $P_1 = \{b, c\}$, $P_2 = \{x, y, u, v, \}$,
$I_1^1 = \{b\} =: 1.1$ un $I_1^2 = \{c\} =: 1.2$,
$I_2^1 = \{x, y\} =: 2.1$, $I_2^2 = \{u, v\} =: 2.2$,
$H_1 = \{xe_1, ye_3\}$, $W_1 = \{xe_2, ye_4\}$,
$H_2 = \{ue_5, ve_7\}$, $W_2 = \{ue_6, ve_8\}$.



13.1.zīm.

	$xy\|uv$ $H_1\,H_2$	$xy\|uv$ $H_1\,W_2$	$xy\|uv$ $W_1\,H_2$	$xy\|uv$ $W_1\,W_2$
$b\|c$ $B_1\,B_2$	$\frac{1}{3}(1,0)+\frac{2}{3}(0,1)=$ $=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$\frac{1}{3}(3,1)+\frac{2}{3}(2,0)=$ $=(2\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	utt.	
$B_1\,K_2$	$\frac{1}{3}(1,0)+\frac{2}{3}(1,1)=$ $=(1,\frac{2}{3})$			
$K_1\,B_2$				
$K_1\,K_2$				

13.2.zīm.

Varam spēli pierakstīt arī normālformā (13.2.zīmējums), taču necentīsimies tabulu aizpildīt — šajā spēlē tīrajās stratēģijās Neša līdzsvara nav.

Šai spēlei iespējama arī cita interpretācija: 1.spēlētājs ar varbūtību $\frac{1}{3}$ ražo labu produkciju un ar varbūtību $\frac{2}{3}$ sliktu produkciju. Abos gadījumos viņam pastāv iespēja reklamēties (B_1 vai B_2) vai to nedarīt (K_1 vai K_2). 2.pēlētājs ir interpretējams kā potenciālais konkurents, viņam ir jāizlemj, vai iesaistīties tirgū (H_1 vai H_2) vai to nedarīt (W_1 vai W_2).

Spēles atrisinājums

Par to, ka Neša līdzsvara nav, var pārliecināties sekojošā veidā: 1.spēlētāja optimālā reakcija uz otrā spēlētāja gājienu (H_1H_2) ir

$$R_1(H_1H_2) = (B_1K_2),$$

savukārt 2.spēlētāja optimālā reakcija uz 1.spēlētāja gājienu (B_1K_2) ir

$$R_2(B_1K_2) = (H_1W_2).$$

Neša līdzsvara gadījumā te būtu jābūt abpusējai sakritībai. Pārbaudot pārējos spēlētāju gājienus un nosakot pretspēlētāja optimālās reakcijas, var pārliecināties, ka šajā spēlē tīrajās stratēģijās Neša līdzsvara nav.

Pieņemsim, ka mums ir zināma 1.spēlētāja uzvedības stratēģija:

$\sigma_{11}(K_1) = k_1 = P(K_1|1.1)$ =varbūtība, ar kādu 1.spēlētājs izvēlas gājienu K_1, ja viņš atrodas informācijas apgabalā 1.1,

$\sigma_{11}(B_1) = b_1 = P(B_1|1.1)$=varbūtība, ar kādu 1.spēlētājs izvēlas gājienu B_1, ja viņš atrodas informācijas apgabalā 1.1,

$\sigma_{12}(K_2) = k_2 = P(K_2|1.2)$=varbūtība, ar kādu 1.spēlētājs izvēlas gājienu K_2, ja viņš atrodas informācijas apgabalā 1.2,

$\sigma_{12}(B_2) = b_2 = P(B_2|1.2)$=varbūtība, ar kādu 1.spēlētājs izvēlas gājienu B_2, ja viņš atrodas informācijas apgabalā 1.2.

Tā kā darbojamies ar varbūtību sadalījumu, tad jāizpildās sakarībām, ka $k_1 = 1 - b_1$ un $k_2 = 1 - b_2$.

Tagad noteiksim 2.spēlētāja optimālo uzvedības stratēģiju attiecībā uz pirmā spēlētāja uzvedības stratēģiju σ_1.

Ja 2.spēlētājs atrodas informācijas apgabalā 2.1, tad viņš var izrēķināt varbūtības, ar kādām viņš atrodas mezglos x un y:

$$P(x|2.1) = P(x|x \text{ vai } y) = \frac{P(x)}{P(x \text{ vai } y)} = \frac{\frac{1}{3}k_1}{\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2} = \frac{k_1}{k_1 + 2k_2},$$

$$P(y|2.1) = P(y|x \text{ vai } y) = \frac{P(y)}{P(x \text{ vai } y)} = \frac{2k_2}{k_1 + 2k_2},$$

un var izrēķināt sagaidāmo ieguvumu:

$$\begin{aligned} E(U_2|2.1) &= 0 \cdot P(x|2.1) \cdot \sigma_{21}(H_1) + 1 \cdot P(x|2.1) \cdot \sigma_{21}(W_1) + \\ &\quad +1 \cdot P(y|2.1) \cdot \sigma_{21}(H_1) + 0 \cdot P(y|2.1) \cdot \sigma_{21}(W_1) = \\ &= P(x|2.1) \cdot \sigma_{21}(W_1) + P(y|2.1) \cdot (1 - \sigma_{21}(W_1)) = \\ &= \frac{k_1 \cdot \sigma_{21}(W_1) + 2k_2 \cdot (1 - \sigma_{21}(W_1))}{k_1 + 2k_2} = \\ &= \frac{(k_1 - 2k_2) \cdot \sigma_{21}(W_1) + 2k_2}{k_1 + 2k_2}. \end{aligned}$$

Tā kā 2.spēlētājs cenšas sagaidāmo ieguvumu no $\sigma_{21}(W_1)$ maksimizēt, tad viņa optimālā reakcija informācijas apgabalā 2.1 ir:

$$\begin{cases} \sigma_{21}(W_1) = 1, & k_1 - 2k_2 > 0, \\ \sigma_{21}(W_1) = 0, & k_1 - 2k_2 < 0, \\ \sigma_{21}(W_1) \in [0, 1], & k_1 - 2k_2 = 0. \end{cases}$$

Ja 2.spēlētājs atrodas informācijas apgabalā 2.2, tad viņš var izrēķināt varbūtības, ar kādām viņš atrodas mezglos u un v:

$$P(u|2.2) = \frac{b_1}{b_1 + 2b_2}, \qquad P(v|2.2) = \frac{2b_2}{b_1 + 2b_2},$$

sagaidāmais ieguvums tad ir:

$$E(U_2|2.2) = \frac{(b_1 - 2b_2) \cdot \sigma_{22}(W_2) + b_2}{b_1 + 2b_2}.$$

2.spēlētājs cenšas arī šo sagaidāmo labumu no $\sigma_{22}(W_2)$ maksimizēt, un viņa optimālā reakcija informācijas apgabalā 2.2 ir:

$$\begin{cases} \sigma_{22}(W_2) = 1, & b_1 - 2b_2 > 0, \\ \sigma_{22}(W_2) = 0, & b_1 - 2b_2 < 0, \\ \sigma_{22}(W_2) \in [0, 1], & b_1 - 2b_2 = 0. \end{cases}$$

Gadījumā, ja $k_1 - 2k_2 \neq 0$ un $b_1 - 2b_2 \neq 0$, 2.spēlētāja optimālā reakcija ir tīrā stratēģija. Bet mēs jau zinām, ka tīrajās stratēģijās nav līdzsvara. Tāpēc mūsu interesi izraisa gadījums, ja

$$k_1 - 2k_2 = 0 \text{ un } b_1 - 2b_2 = 0.$$

Tā kā dotais varbūtību sadalījums ir

$$k_1 = 1 - b_1,$$
$$k_2 = 1 - b_2,$$

tad pirmā vienādība $k_1 - 2k_2 = 0$ noved pie pretrunas, jo no šīs vienādības seko vienādības $1 - b_1 = 2 \cdot (1 - b_2)$ izpilde, bet:

$$2b_2 = 1 + b_1 > b_1,$$

tad $b_1 - 2b_2 < 0$ un tālab šajā gadījumā 2.spēlētāja optimālā reakcija ir $\sigma_{22}(W_2) = 0$, t.i., informācijas apgabalā 2.2 tiks izvēlēts gājiens H_2, tad 1.spēlētāja optimālā reakcija informācijas apgabalā 1.2 ir izvēlēties gājienu K_2 (šī izvēle viņam garantē ieguvumu 1 vai 3, kur tanī pašā laikā B_2 izvēle dotu 0 ieguvumu), bet tas nozīmē, ka $\sigma_{12}(K_2) = k_2 = 1$. Pēdējā vienādība kopā ar $k_1 - 2k_2 = 0$ dod izteiksmi $k_1 = 2$, kas nevar būt, jo darbojamies ar varbūtībām.

Tā kā $b_1 = 1 - k_1$ un $b_2 = 1 - k_2$, tad no otrās vienādības

$$b_1 - 2b_2 = 1 - k_1 - 2 + 2k_2 = 2k_2 - k_1 - 1 = 0$$

seko, ka $2k_2 = 1 + k_1 > k_1$ jeb $2k_2 - k_1 > 0$, jeb arī $k_1 - 2k_2 < 0$. 2.spēlētāja optimālā reakcija informācijas apgabalā 2.1 šādā gadījumā ir $\sigma_{21}(W_1) = 0$ jeb $\sigma_{21}(H_1) = 1$. Attiecīgi 1.spēlētāja optimālā reakcija informācijas apgabalā 1.1 ir $\sigma_{11}(B_1) = b_1 = 1$ (šī izvēle viņam garantē ieguvumu 1 vai 3, kur tanī pašā laikā K_1 izvēle dotu 0 ieguvumu). Tā kā $b_1 - 2b_2 = 0$, tad no šejienes seko, ka $b_2 = \sigma_{21}(B_2) = \frac{1}{2}$.

Tātad 1.spēlētāja uzvedības stratēģija Neša līdzsvara situācijā ir:

$$\sigma_{11}(K_1) = 1 - b_1 = 0, \quad \sigma_{11}(B_1) = 1,$$

$$\sigma_{12}(K_2) = 1 - b_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{12}(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Par 2.spēlētāja stratēģijām līdzsvarā mēs zinām, ka:

$$\sigma_{21}(W_1) = 0, \quad \sigma_{21}(H_1) = 1.$$

Tā kā 1.spēlētājs informācijas apgabalā 1.2 gājienus K_2 un B_2 izvēlas ar vienādām varbūtībām, tad abi šie gājieni viņam ir vienādi labi, tāpēc

$$E(U_2|K_2) = E(U_2|B_2).$$

No šejienes seko, ka

$$1 \cdot \sigma_{21}(H_1) + 3 \cdot \sigma_{21}(W_1) = 0 \cdot \sigma_{22}(H_2) + 2 \cdot \sigma_{22}(W_2) \text{ jeb}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 + 2 \cdot \sigma_{22}(W_2).$$

Iegūsim, ka $\sigma_{22}(W_2) = \frac{1}{2}$ un $\sigma_{22}(H_2) = 1 - \sigma_{22}(W_2) = \frac{1}{2}$.

Tātad galarezultātā 2.spēlētājs, ja 1.spēlētājs pasūta kūkas, tad viņš paliek kafejnīcā, bet, ja 1.spēlētājs pasūta alu, tad, piemēram, met monētu, lai izšķirtos par savu rīcību.

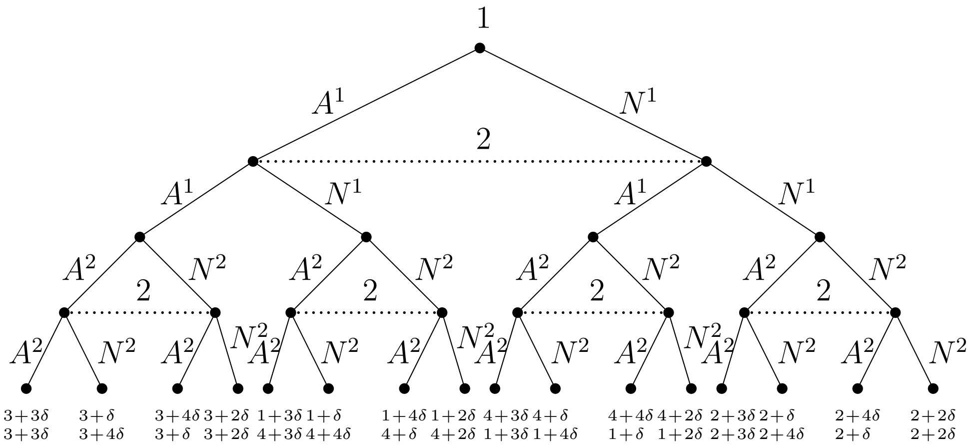
LEKCIJA NR. 14

ATKĀRTOTĀS SPĒLES

Galīgi daudz reizes atkārtota spēle
Bezgalīgi daudz reizes atkārtota spēle
Spēles līdz bankrotam

Galīgi daudz reizes atkārtota spēle

DEFINĪCIJA. Ja pamatspēle G tiek atkārtota ar tiem pašiem spēlētājiem vismaz otru reizi, tad spēles G atkārtojumus visus kopā sauc par atkārtoto spēli Γ. G atkārtojumi tiek saukti par periodiem, un tos mēs apzīmēsim ar $t = 1, 2, ...$



14.1.zīm.

Spēļu teorijas kursu mēs sākām ar cietuma dilemmas analīzi. Mēs to apskatījām kā vienreizēja notikuma spēli. Bet tikpat labi varam pieļaut tādu gadījumu, kad spēles situācija tiek atkārtota otru reizi. Šādas spēles ekstensīvā forma dota 14.1.zīmējumā, pie tam ieguvumi šādā spēlē nav gluži tie paši, kas vienreizēja notikuma spēlē. Atkārtotās spēlēs laika gaitā ieguvumi mainās.

Tā kā mēs zinām, ka vienreizējā notikuma spēlē līdzsvaru dod stratēģiju pāris (N, N) ar ieguvumu $(2; 2)$, tad apakšspēlēs (otrajā laika periodā) attiecīgi kopā būs 4 Neša līdzsvari (N^2, N^2) ar ieguvumiem $(3 + 2\delta; 3 + 2\delta)$, $(1 + 2\delta; 4 + 2\delta)$, $(4 + 2\delta; 1 + 2\delta)$, $(2 + 2\delta; 2 + 2\delta)$. Savukārt tādā gadījumā vienreizējās spēles Neša līdzsvaru dos stratēģiju pāris (N^1, N^1) ar ieguvumu $(2+2\delta; 2+2\delta)$. Ja spēle atkārtotos vairāk nekā 2 reizes, tad ar šādu te pašu "atmugurisko" spriedumu palīdzību mēs secinātu, ka atkārtotās spēles Neša līdzsvaru veido gājieni, abiem spēlētājiem izvēlēties N. Jautājums paliek tikai tāds, kāds būs spēlētāju ieguvums, piemēram, pēc 100 reizes atkārtotas spēles? Varam to izrēķināt:

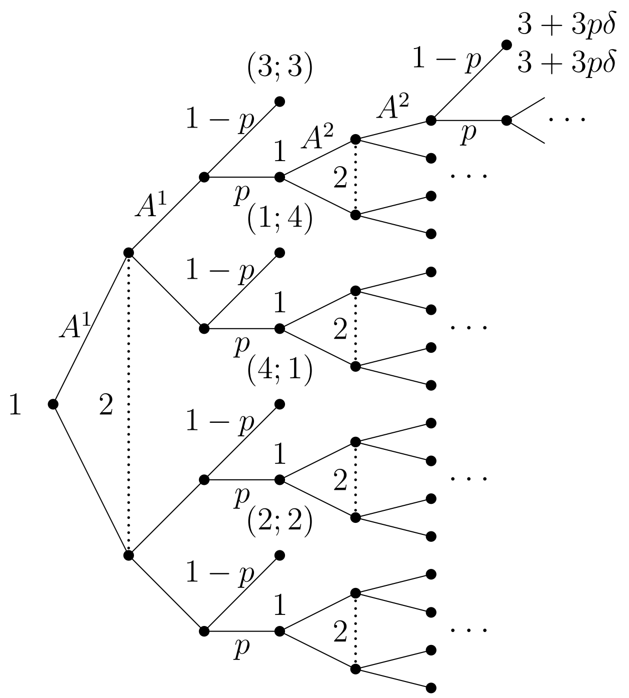
$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + ... + 2\delta^{99} = 2(1 + \delta + \delta^2 + ... + \delta^{99}) = 2 \cdot \frac{1 - \delta^{100}}{1 - \delta}$$

(pie pieņēmuma, ka $\delta < 1$).

Bezgalīgi daudz reizes atkārtota spēle

Iepriekš apskatītā spēle bija tāda, kurā tās spēlētāji zina, cik reizes spēle tiks atkārtota. Varam apskatīt arī tādas spēles, kuras ar noteiktu varbūtību tiek atkārtotas noteiktu skaitu reižu. Piemēram, 14.2.zīmējumā parādīts tās pašas cietuma dilemmas spēles koks divos laika periodos, kur otrais laika periods risinās ar varbūtību p, bet ar varbūtību $1 - p$ spēle pēc pirmā laika perioda ir jau noslēgusies. Spēle ar tādu pašu varbūtību p pēc otrā laika perioda var turpināties tālāk. Principā tā ir spēle ar bezgalīgi daudziem mezgliem (pastāv varbūtība, ka spēle turpinās visu laiku tālāk) un tajā spēlētājiem ir bezgalīgi daudz stratēģiju. Un tomēr šo spēli var mēģināt analizēt.

Noskaidrosim, kādu ieguvumu var sasniegt, ja visu laiku abi spēlētāji izvēlas gājienu A. 3 ir ieguvums par spēli pirmajā laika periodā, par atkārtoto spēli ieguvums pieaug par 3δ, bet tā kā atkārtotā spēle ir ar varbūtisku raksturu, tad ieguvums pēc otrā laika perioda ir $3 + p \cdot 3\delta$.



14.2.zīm.

Bezgalīgi daudz reižu atkārtotās spēles ieguvums būs:

$$E_A(U_i) = 3 + 3p\delta + 3p^2\delta^2 + ... = 3(1 + p\delta + (p\delta)^2 + ... + (p\delta)^n + ...) =$$

$$= \frac{3}{1 - p\delta},\ i = 1, 2,$$

(pie nosacījuma, ka $\delta < 1$). Ja abi spēlētāji izlemj, ka izdarīs gājienu A tik ilgi, kamēr pretspēlētājs neizdara gājienu N, tad šāds lēmums noved pie tā, ka visu spēles laiku abi spēlētāji izdara gājienu A. Bet, ja 1.spēlētājs nolemj līdz kaut kādam laika periodam t izdarīt gājienu A, pēc tam N, tad

$$E(U_1) = 3 + 3p\delta + ... + 3(p\delta)^{t-2} + 4(p\delta)^{t-1} + 2(p\delta)^t + ... + 2(p\delta)^{t+k} + ... =$$

$$= \frac{3(1 - (p\delta)^{t-1})}{1 - p\delta} + 4(p\delta)^{t-1} + \frac{2(p\delta)^t}{1 - p\delta} =$$

$$= \frac{3+(p\delta)^{t-1}(1-2p\delta)}{1-p\delta},$$

šis lielums $E(U_1)$ būs lielāks par $E_A(U_1)$, ja $1 - 2p\delta > 0$. Tādējādi esam parādījuši, ka bezgalīgi atkārtotu spēļu gadījumā ieguvumu noteikšana, kā arī Neša līdzsvara atrašana būs sarežģītāka nekā parastajā situācijā.

Spēles līdz bankrotam

Apskatīsim tādas spēles, kurās ir daži ierobežoti resursi. Katrā spēles solī resursi vienam no spēlētājiem samazinās par vienu vienību. Uzvar tas, kurš iztērē sava pretinieka resursus (liek tam bankrotēt). Iespējams arī cits variants, kad katrā spēles solī spēlētājs laimē punktu; tad uzvarēs tas spēlētājs, kurš pirmais savāks fiksētu punktu skaitu. Skaidrs, ka pirmajā gadījumā abu spēlētāju kopējo resursu lielums samazinās par viens, līdz ar to abas šīs spēles vienmēr beigsies pēc noteikta soļu skaita.

Saprātīgi risināt šīs spēles, virzoties no beigām uz sākumu. Kopējā ideja slēpjas tanī apstāklī, ka katru soli var apskatīt kā atsevišķu spēli. Kad stratēģijas šim solim ir izvēlētas, tad laimestu var noteikt vai kā parastu ieguvumu (ja daudzsoļu spēle ir pabeigta), vai kā pienākumu izspēlēt nākošo spēles soli.

Tā kā parasti mums ir darīšana ar matemātiskajām cerībām, tad mēs varam pienākumu izpēlēt nākamo spēles soli aizstāt ar atsevišķās spēles vērtībām.

Piemērs. Apskatīsim spēli ar matricu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & a_{12} \end{pmatrix}, \tag{14.1}$$

kur ar Γ_1 un Γ_2 ir apzīmētas iespējas izspēlēt divas spēles ar šādām matricām

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

Ja spēļu Γ_1 un Γ_2 vērtības ir v_1 un v_2, tad matemātiskās cerības perspektīvā spēlēt šīs spēles ir vienādas ar vērtībām v_1 un v_2. Tāpēc matricu (14.1) varam aizmainīt ar matricu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{12} \end{pmatrix}. \tag{14.3}$$

Tagad var atrisināt spēli ar matricu (14.3), tās atrisinājums dos mums optimālās stratēģijas un spēles (14.1) vērtības.

Tāpēc spēles līdz bankrotam analīzi sāksim ar visu to spēļu analīzi, kuras abi spēlētāji uzsāk ar tikai vienu resursa vienību. Tā kā tādai spēlei ir jābeidzas tūlīt pēc viena soļa, tad to var ātri atrisināt. Izmantojot šīs spēles vērtības, mēs varam pēc tam atrisināt visas tās spēles, kurās abu spēlētāju resursu kopējais lielums ir trīs vienības. Šie atrisinājumi dod iespēju atrisināt spēles ar četrām resursu vienībām, pēc tam ar piecām, u.t.t.

Vispārīgi runājot, spēlēm ar nelieliem resursu daudzumiem (t.i., spēlēm, kuras beidzas pēc neliela soļu skaita) vērtības un optimālās stratēģijas var atrast tieši. Spēlēm ar lielu soļu skaitu katrā solī var izvest vērtību rekurences vienādojumus. Šie rekurences vienādojumi parasti ir diferenču vienādojumu formā, kurus dažreiz var viegli atrisināt, bet citkārt atrisināt grūti. Ja izdodas atrisināt šo diferenču vienādojumu, tad spēles vērtību katrā solī var izmantot optimālo stratēģiju atrašanai. Ja diferenču vienādojumu atrisināt nevar, tad vienalga var izrādīties, ka iespējams atrast saprātīgus tuvinājumus spēles vērtībām un optimālajām stratēģijām.

Piemērs. (Inspekcijas spēle) I spēlētējs (pārkāpējs) vēlas veikt kaut kādu aizliegtu rīcību, kuru viņš var izdarīt kādā no N laika periodiem. II spēlētājs (inspektors) vēlas novērst aizliegto darbību, viņš var veikt tikai vienu inspekciju šajos laika periodos. Ieguvums ir 1, ja aizliegtā darbība tiek realizēta un netiek konstatēta; ieguvums ir -1, ja pārkāpējs tiek pieķerts (tas būs tajā gadījumā, ja aizliegtās darbības realizācija notiek tajā pašā laika periodā, kad inspektors veic pārbaudi); ieguvums vienāds ar 0, ja pārkāpējs neizdara aizliegto darbību vispār.

Pirmajā spēles periodā (pirmajā solī) katram spēlētājam ir divas alternatīvas. I spēlētājs var veikt aizliegto darbību un var to nedarīt, tāpat II spcēlētājs var inspcēt un var to nedarīt. Ja I spēlētājs realizē darbību un II spēlētājs inspicē, tad spēle tiek pabeigta un ieguvums ir -1. Ja I spēlētājs realizē darbību, bet II spēlētājs neveic inspekciju, arī tad spēle ir pabeigta un tās ieguvums ir 1. Ja I spēlētājs neveic darbību, bet II spēlētājs veic inspekciju, tad I spēlētājs var veikt aizliegto darbību nākošajā laika periodā (pie pieņēmuma, ka $N > 1$), tāpēc ieguvums ir tāpat 1. Ja I spēlētājs neveic aizliegto darbību un II spēlētājs neinspicē, tad mēs varam pāriet uz nākamo spēles soli, kas atšķiras no iepriekšējā tikai ar to, ka līdz spēles beigām paliek mazāk laika periodu. Tādējādi spēles pirmā soļa matrica izskatās šāda:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{14.4}$$

Tas ļauj rekursīvi definēt

$$v_n = \mathrm{val} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{14.5}$$

kur val A nozīmē spēles ar matricu A vērtību. Skaidrs, ka $v_{N-1} < 1$; seko, ka matricai (14.5) nav sedlu punkta (t.i., nav tāda stratēģiju pāra, kuram atbilstošais matricas elements a_{ij} būtu vienlaicīgi lielākais savā kolonnā un mazākais savā rindā). Tad var izmantot šādu rezultātu:

Teorēma. Ja A ir (2×2)-matricu spēle, kurai nav sedlu punkta, tad tās vienīgās optimālās stratēģijas un spēles vērtcību var aprēķināt pēc formulām:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T},$$
$$y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T},$$
$$v = \frac{|A|}{JA^*J^T},$$

kur A^* ir A piesaistītā matrica, $|A|$ ir matricas A determinants un $J = (1; 1)$.

Varam izmantot šīs teorēmas pēdējo formulu un iegūt diferenču vienādojumu

$$v_N = \frac{v_{N-1} + 1}{-v_{N-1} + 3}, \tag{14.6}$$

kas kopā ar sākumnosacījumu

$$v_1 = 0 \tag{14.7}$$

definē v_N. Šo vienādojumu var atrisināt ar substitūciju

$$t_N = \frac{1}{v_N - 1}, \tag{14.8}$$

kas dod jaunu diferenču vienādojumu

$$t_N = t_{N-1} - \tfrac{1}{2}, \tag{14.9}$$
$$t_1 = -1. \tag{14.10}$$

Šim vienādojumam ir atrisinājums

$$t_N = -\frac{N+1}{2},$$

no kurienes iegūsim

$$v_N = \frac{N-1}{N+1}. \tag{14.11}$$

Tādējādi (14.11) dod iespēju atrast spēles vērtību katrā spēles solī. Tad mēs varam izskaitļot optimālās stratēģijas katram spēlētājam katrā solī. Konkrētāk, spēles (14.3) matrica ir šāda

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{N-2}{N} \end{pmatrix}. \tag{14.12}$$

Augstāk minētās teorēmas formulas ļauj atrast optimālās stratēģijas visiem $N \geq 2$

$$x^N = (\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}),$$

$$y^N = (\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}). \blacksquare$$

LEKCIJA NR. 15

STOHASTISKĀS SPĒLES

Stohastiskās spēles jēdziens

Šeit apskatītās spēles ir līdzīgas atkārtotajām spēlēm, bet ir arī savas atšķirības. Šajās spēlēs ir tikai galīgs skaits notikumu, bet spēle var atgriezties atpakaļ pie kāda jau iepriekš sasniegta notikuma, tāpēc teorētiski šāda spēle var turpināties bezgalīgi ilgi. Pie tam katrā spēles gājienā parasti tiek noteikts ieguvums, tāpēc teorētiski arī bezgalīgi liels ieguvums ir iespējams. Taču spēles noteikumi paredz randomizāciju, kura garantē, ka pie jebkuras stratēģiju izvēles bezgalīgas partijas iespējamības varbūtība ir 0 un ieguvuma matemātiskā cerība ir galīga.

Stohastiskā spēle tiek uzdota ar p "spēles elementu" kopumu jeb spēles pozīciju Γ_k aprakstu. Katrs no spēles elementiem ir matrica ar izmēriem $m_k \times n_k$, kuras elementi ir šādā izskatā:

$$\alpha_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl}\Gamma_l, \tag{15.1}$$

$$q_{ij}^{kl} \geq 0, \tag{15.2}$$

$$\sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} < 1. \tag{15.3}$$

Izteiksmē (15.1) definētais elements α_{ij}^k nozīmē, ja k-tajā spēles elementā I spēlētājs izvēlas savu i-to tīro stratēģiju, bet II spēlētājs izvēlas savu j-to tīro stratēģiju, tad ieguvums ir vienāds ar a_{ij}^k, pie tam ar varbūtību q_{ij}^{kl} visiem $l = 1, 2, ..., , p$ tiek izspēlēts l-tais spēles elements, bet ar varbūtību

$$q_{ij}^{k0} = 1 - \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \tag{15.4}$$

partija tiek pabeigta. Nosacījums (15.3) nozīmē, ka katrā spēles solīvarbūtība, ka partija beigsies, ir pozitīva. Tādējādi varbūtība, ka spēle būs bezgalīga, ir vienāda ar 0 un ieguvuma matemātiskā cerība ir galīga.

DEFINĪCIJA. Visiem $k = 1, 2, ..., p$ un visiem veseliem skaitļiem $t > 0$ *I spēlētāja stratēģija* ir m_k-vektoru x^{kt} kopums, kas apmierina nosacījumus

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_i^{kt} = 1, \tag{15.5}$$

$$x_i^{kt} \geq 0. \tag{15.6}$$

Analoģiski tiek definēta *II spēlētāja stratēģija*, kura ir n_k-vektoru y^{kt} kopums. Stratēģiju sauksim par *stacionāru*, ja visiem k vektori x^{kt} nav atkarīgi no t.

Īsi sakot, skaitlis x_i^{kt} ir varbūtība, ka I spēlētājs spēles t-tajā solī spēles elementā Γ_k izvēlēsies savu i-to tīro stratēģiju. Tā kā elements Γ_k var tikt izspēlēts vairākas reizes, tad I spēlētājam nav noteikti jāizmanto viena un tā pati varbūtība katru reizi, kad šis elements tiek izspēlēts. Ja tomēr spēlētājs izvēlas vienu un to pašu randomizācijas shēmu, kad tiek izspēlēts šis spēles elements, tad saka, ka stratēģija ir stacionāra. Dabīgi, ka no vienkāršības viedokļa raugoties, stacionāra stratēģija ir vislabākā.

Ja ir dots stratēģiju pāris, tad ieguvuma matemātisko cerību var izrēķināt jebkuram $k = 1, 2, ..., p$ pie pieņēmuma, ka pirmajā spēles solī tiks izspēlēts spēles elements Γ_k. Tādējādi ieguvuma matemātisko cerību stratēģiju pārim var apskatīt kā p-vektoru. Tad var definēt optimālās stratēģijas un spēles vērtību, pie tam spēles vērtība būs p-vektors $v = (v_1, v_2, ..., v_p)$.

Skaidrs, ja vērtību vektors eksistē, tad iespējams spēles elementu Γ_k aizmainīt ar v_k vērtību. No šejienes seko, ka eksistē

$$v_k = \operatorname{val} B_k, \tag{15.7}$$

kur B_k ir $(m_k \times n_k)$-matrica ar elementiem (b_{ij}^k), kurus atrod pēc formulas

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} b_{ij}^{kl} v_i, \tag{15.8}$$

un ar $\operatorname{val} B$ tiek apzīmēta spēles vērtība matricas B gadījumā.

Tā pagaidām ir nepilnīga definīcija, jo mums ir jāparāda, ka eksistē tieši viens vektors $(v_1, v_2, ..., v_p)$, kas apmierina vienādojumus (15.7) un (15.8).

LEMMA. Pieņemsim, ka $A = (a_{ij})$ un $B = (b_{ij})$ ir tādas divas $(m \times n)$-matricas, kas apmierina nosacījumu

$$\exists k \quad a_{ij} < b_{ij} + k, \quad i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{15.9}$$

Tādā gadījumā $\operatorname{val} A < \operatorname{val} B + k$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $v = \operatorname{val} B$ un y ir II spēlētāja optimālā stratēģija spēlē B (t.i., $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \leq v$, $i = 1, 2, ..., m$). Tādā gadījumā visiem i izpildās

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j + k \sum_{j=1}^{n} y_j \leq v + k,$$

tādējādi y ir augšēja robeža zaudējumam spēlē A, kura ir mazāka par $v+k$. ■

Atrisinājuma eksistence un unitāte

TEORĒMA. Eksistē tieši viens vektors, kas apmierina nosacījumus (15.7) un (15.8).

Pierādījums. Vispirms pierādīsim unitāti. Pieņemsim, ka eksistē divi tādi vektori v un w, kas apmierina minētās prasības. Pieņemsim, ka k ir tās vektora koordinātas numurs, kuram starpība $|v_k - w_k|$ ir vislielākā, un pieņemsim, ka $v_k - w_k = c > 0$.

Definēsim divas matricas B_k un $\overline{B}_k$ ar vienādībām

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{kl} v_l, \quad \overline{b}_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{kl} w_l.$$

Skaidrs, ka

$$|b_{ij}^k - \overline{b}_{ij}^k| \leq \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{kl} |v_l - w_l| < c$$

un no iepriekšējās Lemmas seko, ka

$$\operatorname{val} B_k < \operatorname{val} \overline{B}_k + c.$$

Bet tā kā pēc definīcijas v un w abi apmierina (15.7) un (15.8), tad

$$v_k < w_k + c.$$

Bet mēs pieņēmām, ka $v_k - w_k = c$. Šī pretruna noslēdz unitātes pierādījumu.

Tagad pierādīsim eksistenci. Šajā nolūkā konstruēsim vektoru virkni, kura konverģēs uz prasīto vērtību vektoru. Virkni definēsim induktīvi:

$$v^0 = (0, 0, ..., 0), \tag{15.10}$$

$$b_{ij}^{kr} = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l^r,\ r = 1, 2, ..., \tag{15.11}$$

$$v_k^{r+1} = \operatorname{val} B_k^r = \operatorname{val}(b_{ij}^{kr}). \tag{15.12}$$

Nepieciešams pierādīt, pirmkārt, ka vektoru virkne $v^r = (v_1^r, ..., v_p^r)$ konverģē, un, otrkārt, robežai piemīt nepieciešamās prasības (15.7) un (15.8). Apzīmēsim

$$s = \max_{k,i,j} \left\{ \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \right\}. \tag{15.13}$$

Saskaņā ar (15.3) un ievērojot, ka indeksu k, i, j kopas ir galīgas, iegūsim, ka $s < 1$. Ja mēs apzīmējam

$$t_r = \max_k \{ |v_k^{r+1} - v_k^r| \},$$

tad, izmantojot Lemmu, var pierādīt, ka $t_r \leq s\, t_{r-1}$, tāpēc $t_r \leq s^r t_0$. No šejienes seko, ka vektoru v^r virkne ir Košī virkne un tālab tā konverģē. Apzīmēsim šo robežu ar v. Tagad pieņemsim, ka

$$w_k = \operatorname{val} B_k = \operatorname{val}(b_{ij}^k),$$

$$\text{kur} \qquad b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l.$$

Parādīsim, ka visiem k izpildās vienādība $w_k = v_k$. Izvēlēsimies katram patvaļīgam $\varepsilon > 0$ tik lielu r, lai visiem k izpildītos nevienādības

$$|v_k^r - v_k| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \tag{15.14}$$

$$|v_k^{r+1} - v_k| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \tag{15.15}$$

No (15.14) un Lemmas seko, ka visiem k izpildās nevienādība $|v_k^{r+1} - w_k| < \frac{\varepsilon}{2}$; šī nevienādība kopā ar (15.15) nozīmē, ka visiem k izpildās

$$|w_k - v_k| < \varepsilon.$$

Tā kā ε ir brīvi fiksēts, tad robežpārejā $\varepsilon \to 0$ iegūsim, ka $v_k = w_k$.

Teorēmas otrā daļa ir konstruktīva. Tā dod iespēju aproksimēt spēles elementu Γ_k vērtības efektīvā veidā. Ja mēs pieņemam, ka spēle turpināsies kā stohastiska, kamērtā nebūs izspēlēta r reizes, bet pēc tam tā beidzas (ja vien tā jau nav beigusies), tad mēs iegūsim bankrota spēli, kas nav stohastiska. Ja mēs atrisināsim šo bankrota spēli ar bankrota spēļu metodēm, tad mēs iegūsim v^r vērtību un optimālās stratēģijas matricas spēlēs B_k^r. Skaitlim s, kurš definēts ar formulu (15.13), piemīt tāda īpašība: varbūtība, ka spēle turpināsies vairāk kā r soļus, lai arī kādas stratēģijas netiktu izvēlētas, nepārsniedz s^r. Tādējādi, ja r ir pietiekoši liels, tad s^r kļūst salīdzinoši mazs, un mēs varam aproksimēt stohastisko spēli ar tādu spēli, kas tiek noškelta (pabeigta) pēc r soļiem. Tāda ir arī vektoru virknes v^r jēga. Pie tam noškelto spēļu opti mālās stratēģijas x^{kr} un y^{kr} konverğē uz optimālajām stacionārajām stratēģijām stohastiskajā spēlē.

Piemērs

I un II spēlētājam kopā ir piecas naudas vienības. Katrā spēles solī I spēlētājs izvēlas vai nu ğērboni, vai nu kapeiku; II spēlētājs, nezinot I spēlētāja izvēli, izdara analoğisku izvēli. Ja izvēles sakrīt, tad II spēlētājs maksā I spēlētājam vai nu trīs, vai vienu vienību atkarībā no tā, kas ticis izvēlēts, ğērbonis vai kapeika. Ja izvēles nesakrīt, I spēlētājs maksā II spēlētājam divas vienības. Pēc katra soļa tiek mesta monēta, lai noteiktu, vai turpināt spēli vai ne; pie tam spēle tiek pabeigta, kā tikai viens no spēlētājiem ir bankrotējis. Mēs pieņemam vēl vienu papildus nosacījumu — neviens no spēlētājiem nevar maksāt vairāk nekā viņam pieder.

Šo spēli var stādīties priekšā ar sekojošiem četriem spēles elementiem Γ_k, kur k ir tas lielums, kas pieder I spēlētājam dotā soļa sākumā,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 + \dfrac{\Gamma_4}{2} & -1 \\ -1 & 1 + \dfrac{\Gamma_2}{2} \end{pmatrix}, \tag{15.16}$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 + \dfrac{\Gamma_3}{2} \end{pmatrix}, \tag{15.17}$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 + \dfrac{\Gamma_1}{2} \\ -2 + \dfrac{\Gamma_1}{2} & 1 + \dfrac{\Gamma_4}{2} \end{pmatrix}, \tag{15.18}$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 + \dfrac{\Gamma_2}{2} \\ -2 + \dfrac{\Gamma_2}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.18}$$

Ja mēs izmantojam induktīvās formulas (15.10)-(15.12), tad kā vērtību sākuma tuvinājumus mēs iegūsim

$$\begin{aligned} v^0 &= (0; 0; 0; 0), \\ v^1 &= (0,33; -0,13; -0,29; -0,5), \\ v^2 &= (0,26; -0,19; -0,29; -0,53), \\ v^3 &= (0,26; -0,19; -0,31; -0,55), \\ v^4 &= (0,26; -0,19; -0,32; -0,55), \end{aligned}$$

un v^4 ir vērtību vektors ar precizitāti divas zīmes aiz komata. Tagad varam izmantot v^4, lai atrastu optimālās stratēģijas katrā no spēles elementiem. Tātad

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2,72 & -1 \\ -1 & 0,91 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0,84 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1,87 \\ -1,87 & 0,72 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2,1 \\ -2,1 & 1 \end{pmatrix},$$

un šīm matricu spēlēm atbilst šādas optimālās stratēğijas

$$\begin{array}{ll} x^1 = (0,34;\, 0,66), & y^1 = (0,34;\, 0,66), \\ x^2 = (0,38;\, 0,62), & y^1 = (0,38;\, 0,62), \\ x^3 = (0,40;\, 0,60), & y^1 = (0,40;\, 0,60), \\ x^4 = (0,50;\, 0,50), & y^1 = (0,50;\, 0,50). \end{array}$$

Šie vektori ir arī optimālās (stacionārās) stratāğijas stohastiskajā spēlē. ■

MĀJAS DARBU UZDEVUMI

1.uzdevums.
Izdomāt divu personu spēli, kur katram ir trīs stratēģijas. Sastādīt ieguvumu matricu kāda Jūsuprāt tā varētu būt), mēģināt noteikt dominējošās stratēģijas un Neša līdzsvaru vai līdzsvarus.

2.uzdevums.
Pircējs (2.spēlētājs) ir atnācis uz tirgu nopirkt ābolus. Pārdevējs (1.spēlētājs) izmanto tādus svarus, ka viņam ir iespējamas divas stratēģijas:
· godīgi nosvērt 1 kg ābolu;
· apmānīt pircēju par 200 gramiem.

Pircējam arī ir divas stratēģijas:
· ticēt pārdevējam, samaksāt naudu un aiziet;
· nosvērt nopirktos ābolus uz kontrolsvariem un gadījumā, ja tiek konstatēta krāpšanās, pieprasīt atlīdzību.

Pieņemot, ka ieguvumu matricā situācija godīgs pārdevējs un viņam ticošs pircējs tiek interpretēta ar $(0, 0)$,

1) sastādīt ieguvumu matricu;
2) noskaidrot Neša līdzsvaru;
3) noskaidrot dominējošo stratēģiju līdzsvaru;
4) noskaidrot maxmin-stratēģiju atrisinājumu.

3.uzdevums.
Dota spēle **A**:
1.gājiens: spēlētājs 1 izvēlas skaitli x no kopas $\{1; 2\}$.
2.gājiens: spēlētājs 2, zinot, kādu skaitli izvēlējies spēlētājs 1, izvēlas skaitli y no kopas $\{1; 2\}$.
3.gājiens: spēlētājs 1, zinot, kādu skaitli izvēlējies spēlētājs 2, un atceroties, ko pats izvēlējies 1.gājienā, izvēlas z no kopas $\{1; 2\}$.
Pēc tam, kad izvēlēti trīs skaitļi x, y, z, spēlētājs 2 maksā spēlētājam 1 summu

$M(x, y, z)$, kur

$$\begin{aligned} M(1,1,1) &= -2, & M(2,1,1) &= 5,\\ M(1,1,2) &= -1, & M(2,1,2) &= 2,\\ M(1,2,1) &= 3, & M(2,2,1) &= 2,\\ M(1,2,2) &= -4, & M(2,2,2) &= 6. \end{aligned}$$

Dota spēle **B**:

1.gājiens: spēlētājs 1 izvēlas skaitli x no kopas $\{1; 2\}$.

2.gājiens: spēlētājs 2, zinot, kādu skaitli izvēlējies spēlētājs 1, izvēlas skaitli y no kopas $\{1; 2\}$.

3.gājiens: spēlētājs 1, nezinot, kādu skaitli izvēlējies spēlētājs 2, un atceroties, ko pats izvēlējies 1.gājienā, izvēlas z no kopas $\{1; 2\}$.

Pēc tam, kad izvēlēti trīs skaitļi x, y, z, spēlētājs 2 maksā spēlētājam 1 summu $M(x, y, z)$, kur samaksa noteikta kā spēlē **A**.

Jūsu uzdevums:

1) Attēlot abas spēles ekstensīvajā formā!

2) Kā vēl varētu izmainīt spēles **A** gaitu, lai spēles ekstensīvajā formā saglabātos spēles **A** koks, bet izmainītos informācijas kopas?

3) Uzrādīt spēlēs **A** un **B** Neša līdzsvarus, ja tādi eksistē!

4.uzdevums.

Harijam ir 200 Ls, viņš gribētu savu naudu uz vienu gadu noguldīt bankā. Viņš domā, ka ar varbūtību 0,1 banka šī gada laikā var bankrotēt, bet ar varbūtību 0,9 tas nenotiks. Cik lieliem ir jābūt bankas procentiem, lai Harijs, kurš ir riska neitrāls, vēlētos savu naudu noguldīt bankā?

5.uzdevums.

Divi fermeri audzē vienādas šķirnes zemenes (homogēna prece).

x — kopējais zemeņu daudzums noteiktās mērvienībās,

x_i, $i = 1, 2$, — fermera raža.

Darba izmaksas ir $K_i = x_i^2$, $i = 1, 2$.

Kopējais pieprasījums tirgū pēc zemenēm ir $x = 60 - 0,5p$, kur p ir preces cena.

Cik daudz zemeņu viņiem ir jāpiegādā, lai gūtu maksimālo peļņu? Kādai jābūt cenai p? Cik liela ir peļņa?

6.uzdevums.
Uzņēmējs plāno ienākumu palielināšanos par E naudas vienībām, ja vien viņa klientiem tiks izdalīts reklāmas prospekts. Viņš uzaicina darbā studentu, lai tas izdalītu prospektu, un ir gatavs viņam maksāt attalgojumu $L < E$. Tā kā students var prospektu arī vienkārši aizmest prom, tad uzņēmējs brīdina, ka viņš veiks kontroli. Studentam ir jāizšķiras: aizmest vai izdalīt? Ja viņš prospektu izdala, tad arī viņam rodas zināmi izdevumi $M < L$. Ja uzņēmējs veic kontroli, tad tā viņam izmaksās $K > L$ naudas vienības. Ja kontroles rezultātā tiek konstatēts, ka students nav prospektus izdalījis, tad students samaksu nesaņem. Uzņēmējam ir jāizšķiras: veikt kontroli vai nē. Abi ir riska neitrāli un abiem vienlaicīgi jāizšķiras, kā rīkoties.

Jūsu uzdevums:
1) aprakstīt situāciju matricu formā;
2) atrast Neša līdzsvaru jauktajās stratēģijās un interpretēt rezultātus;
3) kas mainīsies, ja $M \geq L$?

7.uzdevums.
Pieņemsim, ka cietuma dilemmas ieguvumus apraksta šāda matrica:

2.spēlētājs 1.spēlētājs	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(-8, -8)$	$(0, -10)$
s_{12}	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Noskaidrot Neša līdzsvaru spēles jauktajā turpinājumā!

8.uzdevums.
Divas personas ir iesaistītas disputā.

1.persona nezin, vai 2.persona ir vāja vai stipra, viņa pieņem, ka ar varbūtību α 2.persona ir stipra.

2.persona ir pilnībā informēta.

Abas personas var strīdēties vai piekrist. Personas ieguvums ir 0, ja tā piekrīt, un ieguvums ir 1, ja tā strīdas, bet oponents piekrīt; ja abi strīdas, tad ieguvums ir $(-1; 1)$, ja 2.persona ir stipra, un $(1; -1)$, ja 2.persona ir vāja.

Formulējiet šo situāciju kā Beijesa spēli un atrodiet tās Neša līdzsvaru, ja $\alpha < \frac{1}{2}$.

9.uzdevums.
1.spēlētājs sastāv no diviem ağentiem: Spēlētāja un Partnera. Spēlētājam un 2.spēlētājam tiek dotas divas kārtis "jaunākā"un "vecākā". Abi uzskata, ka kārtis sadalītas vienādi. Spēlētājs ar vecāko kārti saņem dolāru no spēlētāja ar jaunāko kārti un viņam ir iespēja vai nu spēli pabeigt vai turpināt partiju. Ja partija turpinās, Partneris, nezinot kāršu sadalījumu (un iegūto summu) var ieteikt Spēlētājam mainīties ar 2.spēlētāja kārti vai saglabāt savu kārti. Atkal spēlētājs ar "vecāko" kārti iegūst dolāru no otra, kuram ir "jaunāka" kārts.

Uzzīmēt spēles koku un norādīt 1.spēlētāja ieguvumu pie katra galamezgla!

10.uzdevums.
Aizpildiet 13.2.zīmējuma tabulu un noskaidrojiet, ka nav Neša līdzsvara tīrajās stratēğijās!