

Latvijas Universitāte  
Fizikas un matemātikas fakultāte  
Matemātiskās analīzes katedra

Inese Bula

# FRAKTĀLĀ ĢEOMETRIJA



**LEKCIJU KONSPEKTS — 2009**

(Darbā ir sastopamas bildes no interneta bez atsaucis uz atbilstošo vietni)

# SATURS

Kursa prasības	3
Nodaļa Nr.1: Ievads	4
Nodaļa Nr.2: Klasiskie fraktāļi	10
Nodaļa Nr.3: Fraktālā dimensija	23
Nodaļa Nr.4: $L$ -sistēmas	45
Nodaļa Nr.5: Saspiedējattēlojumi un Hausdorfa metrika	53
Nodaļa Nr.6: Metrisku telpu transformācijas	67
Nodaļa Nr.7: Iteratīvu funkciju sistēmas	77
Nodaļa Nr.8: Džūlija kopas un Mandelbrota kopa — fraktāļi kompleksajā plaknē	90

# KURSA PRASĪBAS

## KURSA ANOTĀCIJA

Kursa mērķis ir iepazīstināt studentus ar dinamisko sistēmu brīnišķīgajām sekām — fraktālo ģeometriju. Fraktālā ģeometrija pēta komplicētas apakškopas ģeometriski vienkāršās telpās (tādās kā  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^2$  un  $\mathbf{C}$ ). Determinētā fraktālā ģeometrija fokusējas uz tādu apakškopu pētījumiem, kuras tiek iegūtas ar vienkāršām telpas ģeometriskām transformācijām. Kursā paredzēts iepazīties ar labi zināmiem fraktāļiem (Serpinska trīsstūris, Koha likne, Džūlija kopas, Mandelbrota kopa, u.c.), noskaidrot fraktāļu īpašības, iemācīties konstruēt fraktāļus.

## REZULTĀTI

Beidzot kursu, jāorientējas kursa jēdzienos un problemātikā: jāzin ievērojamākie fraktāļi, jāpārzina telpu transformāciju veidi, jāprot konstruēt fraktāļi, jāzin fraktālās ģeometrijas lietojumi.

## PRASĪBAS KREDĪTPUNKTU IEGŪŠANAI

1. Jāizpilda semestra laikā uzdotie mājas darbi, laikā līdz eksāmenam jāatrada visu mājas darbu atrisinājumi rokrakstā (10%).
2. Gala pārbaudījumā jānokārto rakstisks tests (jautājumi un uzdevumi par semestra laikā apgūto), kas arī nosaka gala vērtējumu (90%).

## LITERATŪRA

### Mācību pamatliteratūra

1. M.Barnsley, Fractals everywhere. 2nd ed., Academic Press, Morgan Kaufmann, 1993.
2. A.Bunde, S.Havin (ed.), Fractals in Science. Springer-Verlag, 1995.

### Papildliteratūra

3. H.O.Peitgen, H.Juergens, D.Saupe, Chaos. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science, 2nd ed., Springer-Verlag, 2004.
4. Chaos und Fraktale/mit Einf. von H.Juergens. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, 1989.
5. R.M.Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers, 1995 (krieviski: R.Kronover, Fraktali i haos v dinamiesskih sistemah, Tehnosfera, Maskava, 2006).

### Periodika, interneta resursi

6. CHAOS (starptautisks žurnāls)
7. <http://classes.yale.edu/fractals/>
8. <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>
9. <http://www.ultrafractal.com/showcase.htm>

# NODAĻA NR. 1

## Ievads

**Anotācija.** Fraktāļa jēdziens. Vēsture. B.Mandelbrots. Fraktāļa definīcijas. Pašlīdzības veidi. Fraktāļu veidi. Fraktāļi kā māksla.

Termins "fraktālis" ir radies no latīņu valodas: darbības vārda 'frangere' — lauzt un īpašības vārda 'fractus' — daļveida, neregulārs. Šo terminu izveidoja 1975.gadā Benuā Mandelbrots (*Benoit Mandelbrot*), kurš tad arī tiek uzskatīts par fraktālās ģeometrijas pamatlicēju.

B.Mandelbrots ir dzimis Polijā, Varšavā, 1924.gada 20.novembrī Lietuvas ebreju ģimenē. 1936.gadā ģimene pārceļas uz Parīzi, kur dzīvoja un strādāja Benuā tēvocis Szolems Mandelbrots, kurš piederēja pie plaši pazīstamās matemātiķu grupas ar nosaukumu Bourbaki. Kad B.Mandelbrots ieguva doktora grādu matemātikā, viņš devās prom no Parīzes uz ASV, kur 1958.gadā sāka strādāt IBM izpētes centrā Ņujorkā. (B.Mandelbrota mājas lapa: <http://www.math.yale.edu/mandelbrot>)



1.1.zīm. B.Mandelbrots

Fraktālās ģeometrijas pirmsākumi meklējami jau 17.gadsimtā, kad vācu matemātiķis un filozofs Leibnics apskatīja rekursīvu pašlīdzību (kļūdaini uzskatot, ka tikai taisne ir pašlīdzīga šādā nozīmē). 1872.gadā K.Veierštrāss

deva piemēru funkcijai, kura ir nepārtraukta, bet kura nav nevienā punktā diferencējama, — šodien šādas funkcijas grafiku mēs sauktu par faktāli. 1904.gadā zviedrs Helge fon Kohs (*Helge von Koch*) deva ģeometrisku definīciju līdzīgai funkcijai, kuru tagad dēvē par Koha līkni un kas ir viens no determinētajiem fraktāļiem. 1915.gadā poļu matemātiķis Vaclavs Serpinski (*Waclaw Sierpinski*) konstruēja īpašu trīsstūri, vēlāk arī četrstūri (paklāju).

Ap 1920.gadu funkciju uzvedību kompleksajā plaknē sāka pētīt franču matemātiķi Pjērs Fatū (*Pierre Fatou*) un Gastons Džūlija (*Gaston Julia*). Tomēr viņu fascinējošie darbi palika nezināmi vēl ilgu laiku citu matemātiķu vidū. 1945.gadā B.Mandelbrotu viņa tēvocis iepazīstināja ar Džūlijas darbiem, bet Mandelbrots tolaik tam nepievērsa lielu ievēribu. Uzmanību šim darbam Mandelbrots pievērsa 70-tajos gados, kad viņš strādāja IBM Vatsona Pētniecības laboratorijā ASV, kur viņam bija pieejami vismodernākie datori. Tas ļāva veikt sarežģītus aprēķinus un ar datorprogrammas palīdzību tika radīti pirmie grafiskie attēli. Var teikt, ka fraktāļu ģeometrijas tapšanā nenoliedzami visnozīmīgākā loma bija tieši datoriem. Šīs darbības rezultātā tad arī radās 1982.gadā B.Mandelbrota darbs "Dabas fraktāļu ģeometrija" (*The Fractal Geometry of Nature*), kas uzskatāms par pirmo nopietno darbu jaunajā matemātikas virzienā — fraktālā ģeometrija.

Literatūrā ir sastopamas vairākas fraktāļa jēdziena definīcijas. Šeit tiek piedāvāti trīs varianti.

<http://www.termini.lv> Lielā terminu vārdnīca (pievienots 1998.g., LZA Terminoloģijas komisija):

**Fraktālis** — attēlā ietverta ģeometriskā figūra (kontūra), kas precīzi saglabā savu apveidu neatkarīgi no tā, kā tiek palielināts vai samazināts pats attēls (piem., krasta līnija, mākonis, koks, u.c.).

<http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/fractals/fracintro>:

B.Mandelbrota def.: **Fraktālis** ir neregulāra vai sadrumstalota forma, kuru var sadalīt mazākās daļās tā, ka jauniegūtās daļas ir sākotnējās formas samazināta izmēra kopijas.

Formāla matemātiska def.: **Fraktālis** ir punktu kopa, kuras fraktālā dimensija ir lielāka par tās topoloģisko dimensiju.

Tomēr neviena no iepriekšējām definīcijām netiek uztverta kā vispārpieņemta definīcija, jo katra no tām neietver kādu no objektiem, kuru vajadzētu saukt par fraktāli.

Parasti ar jēdzienu "fraktālis" saprot tādu kopu  $F$ , kurai piemīt vairākas specifiskas īpašības:

- \* kopa  $F$  ir ar smalku struktūru, t.i., tā satur daļas patvaļīgi mazā mērogā. jo vairāk attēls tiek palielināts, jo precīzāk redzama tā struktūra;
- \*  $F$  ir pārāk neregulāra, lai to varētu apskatīt tradicionālās ģeometrijas

valodā gan globāli, gan lokāli;

★ bieži kopai  $F$  ir kāda no pašlīdzības formām (stingra, daļēja vai statistiska);

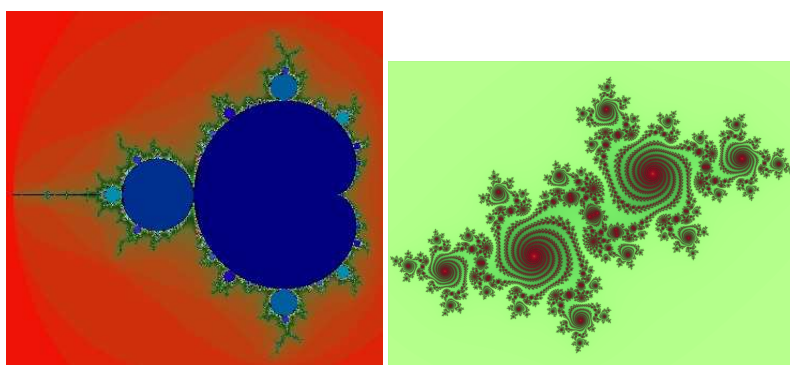
★ parasti kopas  $F$  fraktālā dimensija ir lielāka par tās topoloģisko dimensiju;

★ bieži vien kopa  $F$  tiek definēta vienkāršā veidā (piemēram, rekursīvi).

Pēc fraktāļu izveides veida tos var iedalīt:

1) iteratīvas funkciju sistēmas (piem., Kantora kopa, Serpinska paklājs, Koha sniegpārsla);

2) *escape-time* fraktāļi (piem., Mandelbrota kopa, pildītās Džūlija kopas);



1.2.zīm. Mandelbrota kopa un viena no Džūlija kopām

3) gadījuma fraktāļi (piem., Brauna kustība, dabas fraktāļi).

Fraktāļi var tikt iedalīti atkarībā no to **pašlīdzības pakāpes**:

★ stingra pašlīdzība (*exact self-similarity*) — fraktālis ir identisks jebkurā mērogā. Fraktāļi, kuri definēti ar iteratīvām funkciju sistēmām, ir stingri pašlīdzīgi.

★ daļēja pašlīdzība (*quasi-self-similarity*) — fraktālis ir aptuveni identisks dažādos mērogos. Daļēji pašlīdzīgi fraktāļi satur mazākas visa fraktāļa kopijas sagrozītā un deformētā formā. Parasti *escape-time* fraktāļi ir daļēji pašlīdzīgi.

★ statistiska pašlīdzība (*statistical self-similarity*) — vājākā pašlīdzības forma. Fraktālis ir identisks tikai zināmās mēroga robežās. Visi gadījuma fraktāļi ir statistiski pašlīdzīgi.

Vēl visus fraktāļus iedala divās lielās grupās: determinētie fraktāļi (*deterministic fractals*) un gadījuma fraktāļi (*random fractals*).

Determinētie fraktāļi tiek veidoti, izmantojot matemātiskas konstrukcijas. Būtībā tie ir iterāciju (rekursīva algoritma) rezultāts. Formāli par fraktāli var saukt tikai tādu objektu, kuram iterācijas ir izpildītas bezgalīgi

daudzas reizes. Figūras, kuras veidojas iterāciju laikā, dēvē par pirmsfraktāļiem (*prefractals*) lielumā  $k$ , kur  $k$  norāda izpildīto iterāciju skaitu. Redzes izšķirtspējas dēļ pēc zināma skaita iterācijas soļiem iegūtais pirmsfraktāļa attēls jau sakrītīs ar īstā fraktāļa attēlu. Determinētie fraktāļi ir Kantora kopa, Koha likne, Serpinska trīsstūris un paklājs, arī Mandelbrota kopa un Džūlija kopas.

Gadījuma fraktāļiem ir daudz lielāka praktiska nozīme nekā determinētajiem. Gadījuma fraktāļi bieži tiek modelēti un pēc tam analizēti tādās nozarēs kā ķīmija, fizika, bioloģija. Būtiska gadījuma fraktāļu iezīme ir tā, ka fraktāļa veidošanās procesā ir iesaistīts nejaušības moments. Līdz ar to viena un tā paša procesa rezultātā var tikt iegūti atšķirīgi fraktāļi. Gadījuma fraktāļi pamatā ir dabas fraktāļi, tādi kā papardes lapa, zibens šautra, krasta līnija, kalnu kontūras, asinsvadu sistēma, bronhu sazarojums.

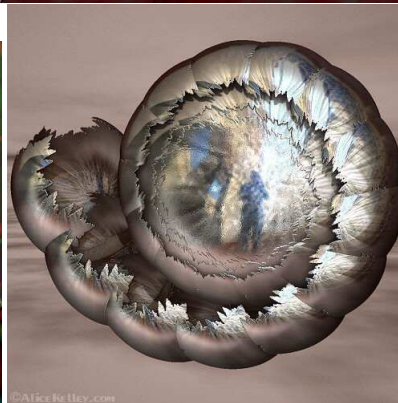
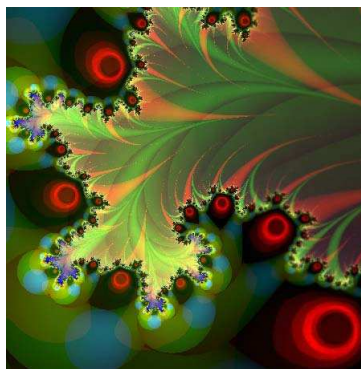




1.3.zīm. Dabas fraktāļi

Fraktālās ģeometrijas konstrukcijas var ieraudzīt daudzos mākslas darbos un kultūras pieminekļos. Taču apzināti veidotas fraktāļu konstrukcijas kā mākslas darbi ir radušās nesen. Šobrīd daudzās interneta vietnēs var atrast fraktāļu galerijas, kur apskatāmas acij tīkamas un sirdi aizkustinošas fraktāļu gleznas. Šajā determinēto fraktāļu izveidē pamatlomu spēlē datora dotās iespējas. Par labākajām bildēm tiek piešķirtas arī prēmijas.





1.4.zīm. Darbi no fraktāļu galerijām

Divas galeriju adreses internetā:

<http://www.fractalism.com/fractals/geometry.htm>

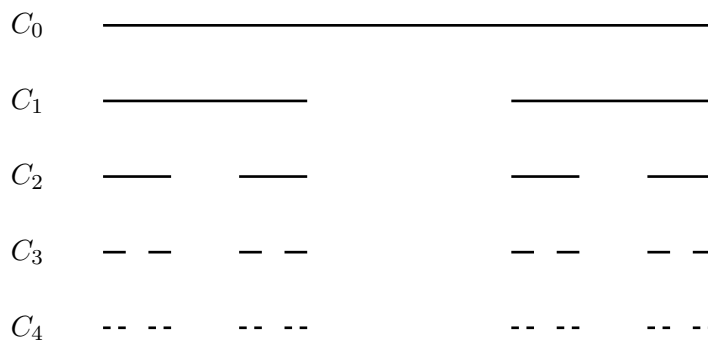
[http://www.dmoz.org/Science/Math/Chaos\\_and\\_Fractals/Fractal\\_Art/](http://www.dmoz.org/Science/Math/Chaos_and_Fractals/Fractal_Art/)

## NODAĻA NR. 2

### Klasiskie fraktāļi

**Anotācija.** Klasisko fraktāļu piemēri: Kantora putekļi, Serpinska trīsstūris (*Sierpinski Triangle or Gasket*), Serpinska paklājs (*Sierpinski Carpet*), Mengera sūklis (*Menger Sponge*), Koha līkne un sniegpārslīņa (*Koch Curve and Snowflake*), Dürera piecstūris (*Durer pentagon*), Dāvida fraktālis (*David Fractal*), Pitagora koks (*Pythagorean Tree*), to konstrukcija un dažas īpašības. Paskāla trīsstūris. Peāno līknes.

Klasiskā Kantora kopa jeb **Kantora putekļi** nosaukta Georga Kantora vārdā, kurš šo kopu aprakstījis 1883.gadā. Patiesībā Kantora putekļu eksistenci pirms tam jau bija konstatējis Henrijs Smits (*Henry Smith*) 1875.gadā vai pat ātrāk. Kantora putekļu fraktālajām īpašībām ir milzīga nozīme, jo daudzi zināmie fraktāļi ir tuvi radnieki šai kopai.



2.1. zīm.

Kantora kopas parasti konstruē iteratīvā procesā. Sāk ar intervālu  $C_0 = [0; 1]$ , no kura vidus izņem vaļēju kopu  $] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} [$ , tad paliek firmsfraktālis  $C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$ . Nākošajā solī tiek izslēgta vidējā trešdaļa no atlikušajiem 2 intervāliem, t.i., izslēdz intervālus  $] \frac{1}{9}; \frac{2}{9} [$  un  $] \frac{7}{9}; \frac{8}{9} [$ , tad  $C_2 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$ . Šo procesu var turpināt, izslēdzot vidējo trešdaļu no at-

likušajiem intervāliem katrā solī (2.1.zīmējumā parādīti Kantora vidējās trešdaļas kopas konstrukcijas pirmie četri soļi). Robežkopu  $C$ , kuru var iegūt kā kopu  $C_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , šķēlumu, tad arī sauc par Kantora kopu jeb Kantora putekļiem.

Kantora kopai piemīt vairākas interesantas īpašības;

1. Kantora kopa nesatur intervālus — šādas kopas sauc par galīgi nesakarīgām kopām (*totally disconnected*).

2. Intervālu, kuri tika izmesti no kopas  $C$  konstrukcijas gaitā, garumu summa ir precīzi vienāda ar 1. Proti, pirmā izmestā intervāla garums ir  $\frac{1}{3}$ . Lai iegūtu  $C_2$ , tika izmesti divi intervāli, kur katra garums ir  $(\frac{1}{3})^2$ , u.t.t. Tādā gadījumā izmesto intervālu garumu summa ir:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Varētu iedomāties, ka kopā  $C$  nekas daudz nav palicis no sākotnējās kopas  $C_0$ , bet tā tas nebūt nav.

3. Pārsteidzošu rezultātu dod Kantora kopas un vienības intervāla salīdzinājums, jo nākas secināt, ka abu kopu apjomi ir vienādi. Divām kopām ir vienāds apjoms, ja eksistē viennozīmīga atbilstība (bijekcija) starp šo kopu punktiem. Galīgu kopu salīdzināšana ir triviāla. Bet bezgalīgu kopu salīdzināšana pēc apjoma nav tik vienkārša (Ievērojiet, ka intervāls  $[0; 1]$  ir ar tādu pašu apjomu kā divreiz garākais intervāls  $[0; 2]$ ! Šajā gadījumā bijekcija ir  $f(x) = 2x$ ,  $x \in [0; 1]$ ).

Pirms pierādīsim pamatteorēmu par Kantora kopas apjomu, noskaidrosim, kā var pierakstīt vienības intervāla  $[0; 1]$  punktu  $x$  skaitīšanas sistēmā ar bāzi  $N$ ,  $N \geq 2$ . Sadalīsim intervālu  $[0; 1]$  skaitā  $N$  vienādos intervālos, kura katra garums ir  $\frac{1}{N}$ . Sanumurēsim šos intervālus no 0 līdz  $N - 1$ . Ja izrādās, ka punkts  $x$  pieder intervālam ar numuru 5, tad pieņemsim, ka  $x_1 = 5$ . Pēc tam sadalīsim šo intervālu  $N$  intervālos, kur katra intervāla garums ir  $\frac{1}{N^2}$ . Sanumurējam atkal šos intervālus no 0 līdz  $N - 1$  un precizējam, kurā intervālā atrodas punkts  $x$ : ja punkts  $x$  atrodas intervālā ar numuru 3, tad pieņemsim, ka  $x_2 = 3$ . Turpinot šo procedūru, iegūsim bezgalīgu virkni  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , kur katra  $x_n$  vērtība norāda intervālu, kurš satur punktu  $x$  sadalīšanas procedūras  $n$ -tajā solī. Skaitli  $x$  tādējādi var pierakstīt bezgalīgas virknes veidā, kur

$$x = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N^2} + \frac{x_3}{N^3} + \dots,$$

katram tādām izvirkņiem atbilst punkts no intervāla  $[0; 1]$ . Īsi šādu

punktu var pierakstīt

$$x = 0.x_1x_2x_3\dots \quad (\text{pie bāzes } N),$$

to sauc par skaitļa  $x$  pierakstu skaitīšanas sistēmā pie bāzes  $N$ . Decimālā sistēmā, kurā mēs esam raduši pierakstīt skaitļus, ir speciālgadījums skaitīšanas sistēmai (šeit bāze 10).

Pievērsīsim uzmanību dažiem skaitīšanas sistēmu matemātiskajiem aspektiem. Vispirms ievērosim, ka dažiem skaitļiem ir vairāk nekā viens izvirzījums skaitīšanas sistēmā pie bāzes  $N$ . Tie ir skaitļi izskatā  $\frac{j}{N^k}$ , kur  $j$  un  $k$  ir pozitīvi veseli skaitļi. Šādiem skaitļiem var uzrādīt divus izvirzījumus skaitīšanas sistēmā pie bāzes  $N$ : viens beidzas ar bezgalīgi daudzām 0, bet otrs ar bezgalīgi daudziem  $N - 1$ . Piemēram,  $x = \frac{1}{2}$  divnieku sistēmā var pierakstīt

$$\frac{1}{2} = 0.10000000\dots \quad \text{vai} \quad \frac{1}{2} = 0,01111111\dots$$

Jebkurš cits skaitlis, kas atšķirīgs no  $\frac{j}{N^k}$ , ir pierakstāms skaitīšanas sistēmā pie bāzes  $N$  vienā vienīgā veidā.

**Teorēma 2.1.** Kantora kopas  $C$  apjoms ir vienāds ar intervāla  $[0; 1]$  apjomu (tātad kontinuums).

**Pierādījums.** Mums ir nepieciešams atrast viennozīmīgu atbilstību (jeb bijekciju) starp kopas  $C$  un kopas  $[0; 1]$  punktiem. Šim nolūkam būs nepieciešams apskatīt bināro (bāze 2) un triādisko (bāze 3) skaitīšanas sistēmu punktiem no intervāla  $[0; 1]$ . Lai izvairītos no divdomības gadījumos, kad punktam ir divi izvirzījumi apskatāmajās skaitīšanas sistēmās, vienosimies izvēlēties to izvirzījumu, kurš beidzas ar vieniniekiem binārajā sistēmā un beidzas ar divniekiem triādiskajā sistēmā.

Ievērosim, ka punkts nokļūst Kantora kopā  $C$  tad un tikai tad, ja triādiskajā pieraksta sistēmā nav vieninieku, tas ir, pierakstā ir tikai 0 un 2. Tādā gadījumā meklējamā attiecība starp  $C$  punktiem un vienības intervāla punktiem tiek realizēta, aizvietojojot skaitļa  $x$  visus 2 triādiskajā sistēmā ar 1. Tādā veidā iegūtais binārais pieraksts definē reālu skaitli  $y$ . Piemēram, ja  $x \in C$  ir izskatā  $x = 0.2022022002\dots$  (triādiskajā sistēmā), tad  $y = 0.1011011001\dots$  (binārajā sistēmā). Aprakstītā procedūra definē viennozīmīgu atbilstību starp  $x \in C$  un  $y \in [0; 1]$ . ■

4. Kantora kopa ir slēgta un ierobežota (telpā  $\mathbf{R}$  šādas kopas saucam par kompaktām), tā ir galīgi nesakarīga kopa (skat. 1.punktu) un tā ir perfekta kopa, t.i., katrs kopas punkts ir tās robežpunkts (atgādināsim, punktu  $x_0 \in \mathbf{R}$  sauc par kopas  $A \subset \mathbf{R}$  robežpunktu, ja katram  $\delta > 0$  eksistē tāds punkts  $a \in A \cap ]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ , ka  $a \neq x_0$ ). Dažkārt Kantora kopu definē ar šīm

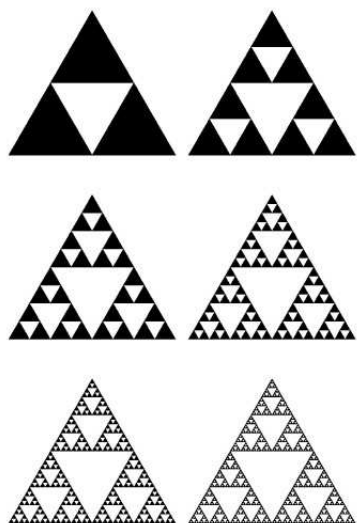
trim īpašībām un pēc tam pierāda, ka Kantora putekli ir Kantora kopa. Minētās īpašības garantē, ka jebkuras kopas telpā  $\mathbf{R}$ , kuras ir kompaktas, perfektas un galīgi nesakarīgas, ir savstarpēji transformējamas viena par otru (izomorfās kopas). Bet tajā pašā laikā atšķirīgām Kantora kopām var atšķirties fraktālās dimensijas.

**Serpinska trīsstūris (siets)** (*Sierpinski Triangle or Gasket or Sieve*)



2.2.zīm. V.Serpinski

Sekojošu konstrukciju devis poļu matemātiķis Vaclavs Serpinski (*Waclaw Sierpinski*) (1882-1969): sākumā ir dots regulārs trīsstūris. Ērtības labad var pieņemt, ka trīsstūra malas garums ir viena vienība. Savienojot visu malu viduspunktus, iegūsim atkal regulāru trīsstūri, kuru izgriežam ārā no sākotnējā trīsstūra. Paliiek trīs mazāki trīsstūri, kuru malu garumi ir  $\frac{1}{2}$  vienības. Nākošajā solī atkārtojam šo procedūru ar katru no trim trīsstūriem, rezultātā iegūsim 9 regulārus trīsstūrus ar malas garumu  $(\frac{1}{2})^2$ . Turpinot šo procedūru,  $n$ -tajā solī mēs iegūsim  $3^n$  regulārus trīsstūrus, kuru malas garums ir  $(\frac{1}{2})^n$ . Ja pieļaujam, ka procedūru var atkārtot bezgalīgi daudzas reizes, tad kā robežgadījumu iegūsi Serpinska trīsstūri.



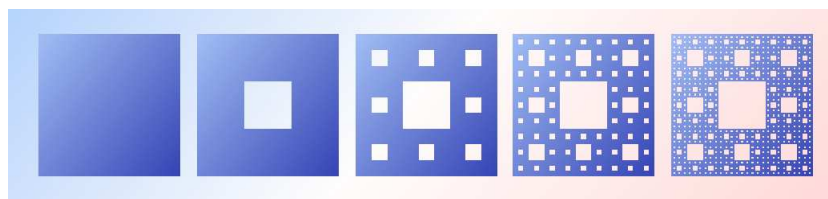
2.3.zīm. Serpinska trīsstūra pirmās 6 iterācijas

Ievērosim, ka Serpinska trīsstūris ir stingri pašlīdzīgs, jo jebkura tā daļa ir līdzīga kopumam. Vēl vairāk, laukumu, kuri konstrukcijas gaitā tika izgriezti ārā, summa ir vienāda ar sākotnējā trīsstūra laukumu  $A$ . Proti, pirmajā solī tika izgriezta  $\frac{1}{4}A$ , otrajā solī tika izgriezti 3 trīsstūri, kuru laukumi ir  $(\frac{1}{4})^2 A$ , utt. Tātad izgriezto laukumu summa ir

$$\frac{1}{4}A + 3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + 3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 A + \dots = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = A.$$

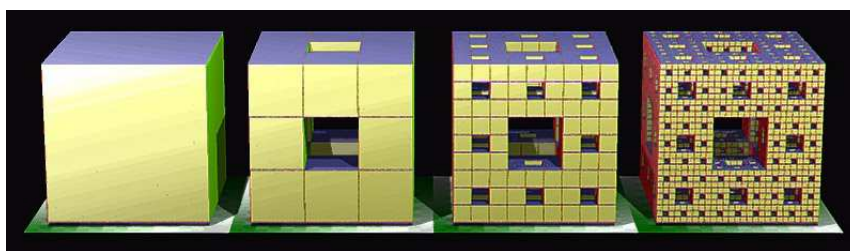
Līdz ar to Serpinska trīsstūra laukums ir 0.

Serpinskis klasisko fraktāļu galerijai ir pievienojis vēl vienu objektu — **Serpinska paklāju** (*Sierpinski Carpet*). Šajā gadījumā 0.solis ir kvadrāts plaknē. Tas tiek sadalīts 9 mazos kvadrātiņos, no kuriem vidējo izņem ārā. Process tiek atkārtots bezgalīgi daudzas reizes.



2.4.zīm. Serpinska paklāja pirmās 4 iterācijas

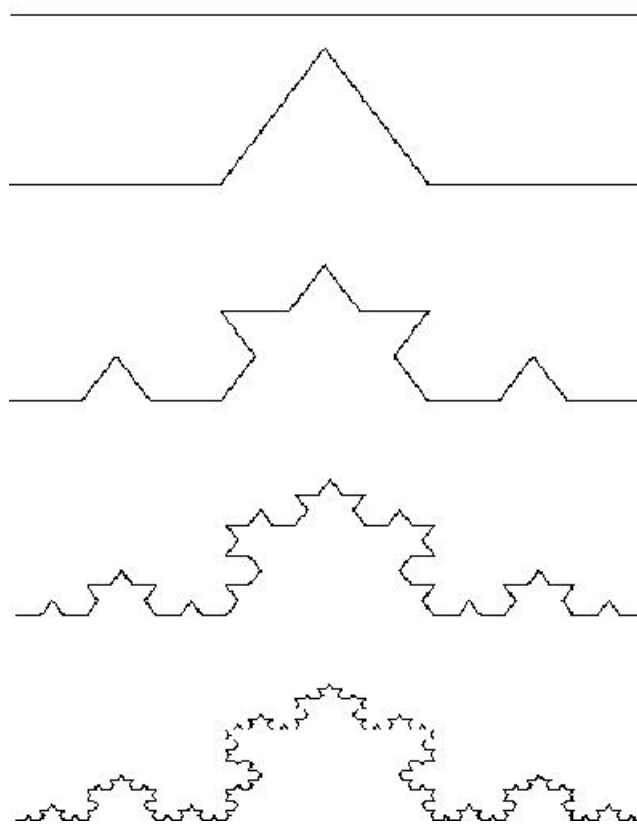
Ar līdzīgu konstrukciju kā Serpinska paklājs ir izveidots **Mengera sūklis** (*Menger Sponge*), kuru tā autors K.Mengers (*Karl Menger*) izdomāja 1926.gadā.



2.5.zīm. Mengera sūkļa pirmās 3 iterācijas

Šajā gadījumā sākumā ir vienības kubs. Šis kubs tiek sadalīts 27 mazākos kubiņos un 1.solī (1.iterācijā) no tā tiek izņemts ārā vidējais centrālais kubs un tam pieguļošie 6 kubi. 2.iterācijā katrs no atlikušajiem 20 kubiem atkal tiek sadalīts 27 mazākos kubos, no kuriem 7 tiek izņemti ārā. Tā šis process tiek turpināts bezgalīgi un robežgadījumā iegūtais objekts ir Mengera sūklis. Var pierādīt, ka Mengera sūkļa tilpums ir ar mēru 0.

Viens no visbiežāk minētajiem determinētajiem fraktāļiem ir **Koha līkne** (*Koch Curve*). Zviedru matemātiķis Helge fon Kohs (*Helge von Koch*) to izveidoja 1904.gadā. Pieņemsim, ka sākumā dots nogrieznis  $K_0$ . 1.solī izņemsim no šī nogriežņa ārā vidējo trešdaļu un pievienosim klāt divas tādas pašas trešdaļas kā tas redzams 2.6.zīmējumā. Iegūto kopu apzīmēsim ar  $K_1$ . Atkārtosim doto procedūru bezgalīgi daudzas reizes, katrā iterācijā nogriežņa vidējo trešdaļu aizvietojo ar diviem citiem tāda paša garuma nogriežņiem.  $n$ -tajā solī iegūto figūru apzīmēsim ar  $K_n$ . Intuitīvi ir skaidrs, ka līkņu virkne  $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$  konverģē uz kaut kādu robežlīkni  $K$  (teorētiski tas būtu jāpierāda; tāpat arī iepriekš apskatītajos fraktāļu gadījumos).



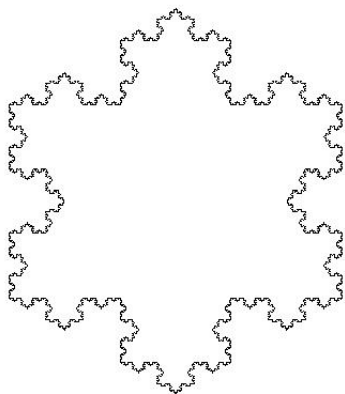
2.6.zīm. Koha līknes veidošana (pirmie četri soļi)

Koha līknei piemīt viena svarīga īpašība — tā ir bezgalīgi gara. Proti, ja mēs pieņemam, ka sākotnējais nogrieznis  $K_0$  ir vienu vienību garš, tad līknes  $K_1$  garums ir  $\frac{4}{3}$ , bet  $K_2$  garums ir  $\frac{4^2}{3^2}$ . Turpinot aprēķinus, iegūsim, ka  $n$ -tajā solī iegūtās līknes  $K_n$  garums ir  $\frac{4^n}{3^n}$ . Robežgadījumā iegūsim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = +\infty.$$

Savietojot kopā 3 Koha līknes, iegūst noslēgtu līkni, kuru sauc par **Koha sniegpārslīņu** (*Koch Snowflake*). Interessants ir fakts, ka sniegpārslīņa acīmredzami ierobežo galīgu laukumu, bet tās perimetrs ir bezgalīgi liels.

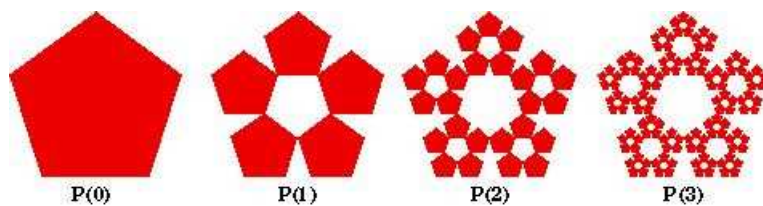




2.7.zīm. Koha sniegpārslīņa

Parasti matemātiskās analīzes kursā apskatītās līknes ir gludas vai gabaliem gludas un tām ir galīgs garums (par ko var pārliecināties ar integrāļa palīdzību). B.Mandelbrots ir publicējis vairākus interesantus darbus, kuros pētījis Lielbritānijas krasta līnijas mērīšanas problēmu. Modelēšanu viņš veicis ar fraktālu likni, kura līdzīga Koha liknei, bet kuras veidošanā ietverts gadījuma moments, kas raksturīgs dabai. Rezultātā iegūts, ka līknes, kura apraksta krasta līniju, garums ir bezgalīgs.

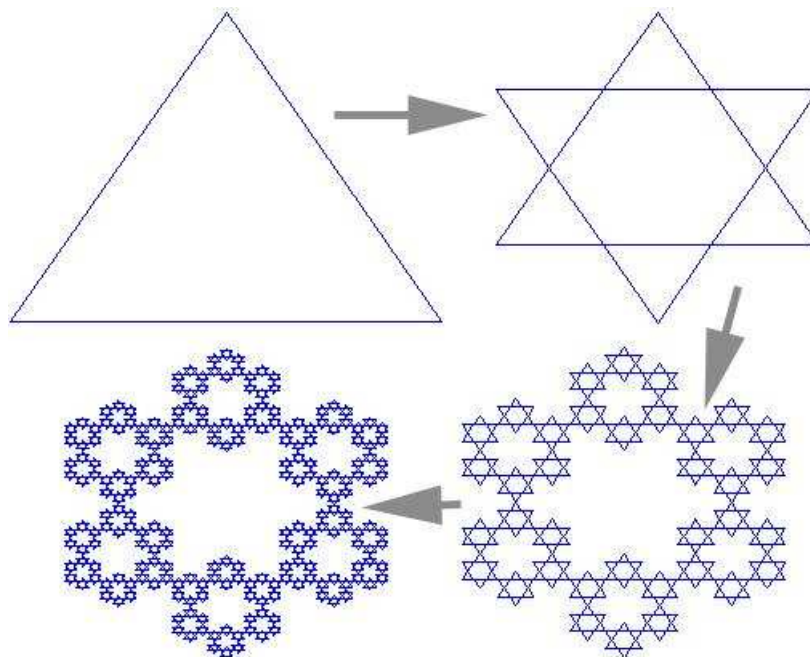
Piecus gadsimtus atpakaļ mākslinieks Albrehts Dūriers (*Albrecht Duerer*) ir uzzīmējis fraktāli (precīzāk, pirmsfraktāli), kura pamatā ir regulārs piecstūris. Pirmajā iterācijā piecstūris ir sadalīts sešos mazākos piecstūros un piecos izolētos trīsstūros, šie trīsstūri tiek izmesti no zīmējuma (skat.2.6.zīm.). Šī procedūra tiek turpināta tālāk ar katru jauno piecstūri bezgalīgi daudzas reizes, rezultātā robežgadījumā iegūstot fraktāli — **Dūrera piecstūri** (*Duerer pentagon*).



2.8.zīm. Dūrera piecstūra pirmās 3 iterācijas

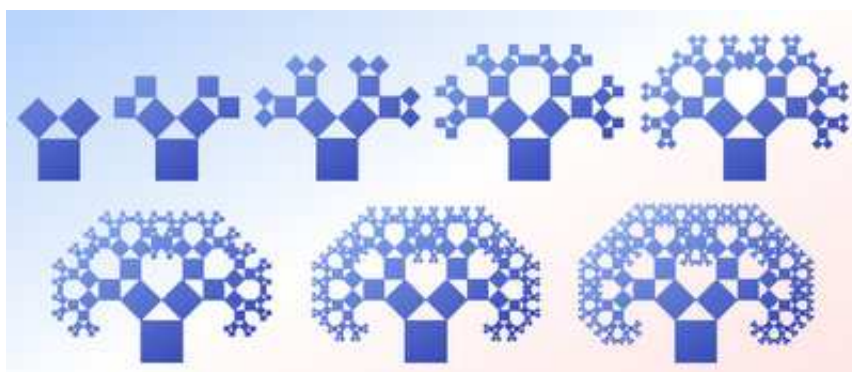
Līdzīgu konstrukciju var veikt ar regulāru sešstūri, kuru sadala sešos mazākos regulāros sešstūros, sešos trīsstūros un ar Dāvida zvaigzni centrā.

Trīsstūrus un Dāvida zvaigzni izņem no zīmējuma. Konstrukciju atkārto ar katru palikušo regulāro sešstūri, robežgadījumā iegūstot tā saukto Dāvida fraktāli. Ar Dāvida fraktāli literatūrā diezgan bieži saprot arī citādā veidā konstruētu fraktāli, tā pamatā ir trīsstūris (skat.2.7.zīm.).



2.9.zīm. Dāvida fraktāļa pirmās 3 iterācijas

Vēl viens brīnišķīgs fraktālis tika radīts 1957.gadā, tā autors ir vācu matemātiķis A.E.Bosmans (*Bosman*) (1891-1961). Sākuma stāvoklī ir dots kvadrāts; pirmajā iterācijā augšējai malai tiek pievienots trīsstūris (kurš pats neietilpst fraktāļa zīmējumā), uz kura brīvajām malām tiek uzkonstruēti kvadrāti (skat. 2.8.zīm.). Konstrukciju bezgalīgi daudzas reizes turpinot, robežgadījumā tiek iegūts fraktālis, kas nosaukts par **Pitagora koku** (*Pythagorean tree*). Šeit ir iespējamās variācijas par tēmu — trīsstūris var nebūt vienādsānu, tad izveidosies koks ar "nošķiebtu" lapotni.



2.10.zīm. Pitagora koka konstrukcija

Apskatīsim Paskāla trīsstūri. Ja mēs uztveram katru skaitli kā iezīmētu šūnā un ja iekrāsojam visas tās šūnas, kurās atrodas nepāra skaitļi, tad iegūsim 2.9.zīmējumu (tajā parādītas pirmās 16 rindīņas). Ļoti pārsteidzoši, bet ieraudzīt mēs varam Serpinska trīsstūra konstrukcijas gaitu!

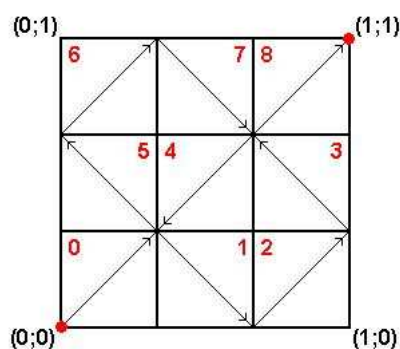
1															
1	1														
1	2	1													
1	3	3	1												
1	4	6	4	1											
1	5	10	10	5	1										
1	6	15	20	15	6	1									
1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	186	715	1287	1716	1716	1287	715	186	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

2.11.zīm. Paskāla trīsstūris

Kā mēs redzēsīm vēlāk, tad Koha liknei un citām nepārtrauktām līknēm plaknē, kuras iegūtas iterāciju veidā, fraktālā dimensija būs starp skaitļiem 1

un 2. Dabīgi rodas jautājums, vai varētu eksistēt izņēmuma gadījums ar dimensiju 2? Izrādās atbilde ir pozitīva un tās risinājums atrodams jau tālajā 1890.gadā. Tad Džuzepe Peāno bija piedāvājis konstrukciju nepārtrauktai līknei, kura ir definēta vienības intervālā un vērtību kopa ir kvadrāts plaknē. Līkni plaknē pieņemts saukt par **Peāno līkni** jeb līkni, kas aizpilda plakni. Peāno līkne it kā nav fraktālis pēc Mandelbrota definīcijas, bet tanī pašā laikā tā ir interesants piemērs funkcijai, kas attēlo kopu ar dotu dimensiju par kopu, kuras dimensija ir lielāka.

Apzīmēsim ar  $I = [0; 1]$  un  $S = I \times I$ , t.i.,  $S = \{(x, y) \mid x, y \in I\}$ . Konstrukcijā tiek izmantots vienības intervāla  $I$  skaitļu izvirzījums skaitīšanas sistēmā pie bāzes 9. Pirmajā solī sadala kopu  $S$  deviņos vienādos kvadrātiņos, sanumurējot tos no 0 līdz 8. Nepārtrauktā līkne  $P_1(x)$ ,  $x \in I$ , kas šķērso visus kvadrātiņus, sākas punktā  $(0; 0)$  un iet caur punktiem  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}; 0)$ ,  $(1; \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ ,  $(0; \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{1}{3}; 1)$ ,  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ , beidzas punktā  $(1; 1)$ . Iegūtā lauztā līnija ir konstrukcijas pirmā iterācija.



2.12.zīm. Peāno līknes konstrukcija — redzama pirmā iterācija  $P_1(x)$

Tālāk katrs no deviņiem kvadrātiņiem tiek sadalīts deviņos vienādos mazākos kvadrātiņos, caur kuriem nepārtrauktā līkne  $P_2(x)$  tiek definēta analogi kā pirmajā iterācijā. Atkārtojot aprakstīto konstrukciju bezgalīgi daudzas reizes, katrā no reizēm sadalot katru kvadrātiņu deviņos mazākos kvadrātiņos, konstruējot līkni caur visiem apakškvadrātiņiem tā, lai tās galapunkti sakristu, robežgadījumā iegūsim līkni, kura aizkrāso visu vienības kvadrātu.

Peāno līkni var definēt ar attēlojumu, kurš piekārto punktam  $x \in I$ , kas pierakstīts sistēmā pie bāzes 9 izskatā  $0.x_1x_2x_3x_4\dots$ , punktu  $P(x) \in S$  pēc šāda likuma:

$P(x)$  atrodas kvadrātā ar indeksu  $x_1$  pēc pirmās iterācijas,

$P(x)$  atrodas kvadrātā ar indeksu  $x_1x_2$  pēc otrās iterācijas,

$P(x)$  atrodas kvadrātā ar indeksu  $x_1x_2x_3$  pēc trešās iterācijas, utt.

**Teorēma 2.2.** Peāno līkne ir nepārtraukta funkcija, kas attēlo vienības intervālu  $I$  vienības kvadrātā  $S$ ; pie tam attēlojumu iterāciju virkne  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$ ,... konverģē:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x), \quad x \in I.$$

**Pierādījums.** Mēs pierādīsim stiprāku apgalvojumu nekā tikai robežas eksistenci. Proti, mēs konstatēsim faktu, ka konverģence ir vienmērīga, no tā seko, ka robežfunkcija ir nepārtraukta. Vienmērīgās konverģences konstatēšanai izmantosim Koši kritēriju šādā formā:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbf{N} > 0 \forall m, n \in \mathbf{N} : m > n > K \forall x \in I : d(P_m(x), P_n(x)) < \varepsilon,$$

kur  $d(P_m(x), P_n(x))$  ir Eiklīda attālums starp diviem dotajiem punktiem.

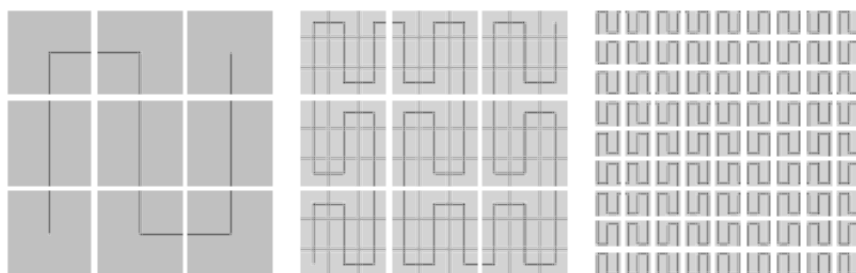
Pieņemsim, ka  $0 < n < m$ . Apskatīsim vienības kvadrāta tīklu, kurš izvietots pār punktiem  $\{(\frac{k}{3^n}, \frac{l}{3^n}), 0 \leq k, l \leq 3^n\}$ . Pieņemsim, ka  $N = 3^{2n}$  un punkti  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$  sadala nogriežni  $[0; 1]$  vienāda garuma intervālos skaitā  $3^{2n}$ . Ievērosim, ka  $P_n(x)$  pārvietojas pa tīkla  $G_n$  kvadrāta diagonāli, mainoties  $x$  no  $x_j$  līdz  $x_{j+1}$ . No otras puses  $P_m(x)$  noteikti atrodas tanī pašā kvadrātā, ja  $m > n$ , tāpēc visiem  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ :

$$d(P_m(x), P_n(x)) < \frac{\sqrt{2}}{3^n}.$$

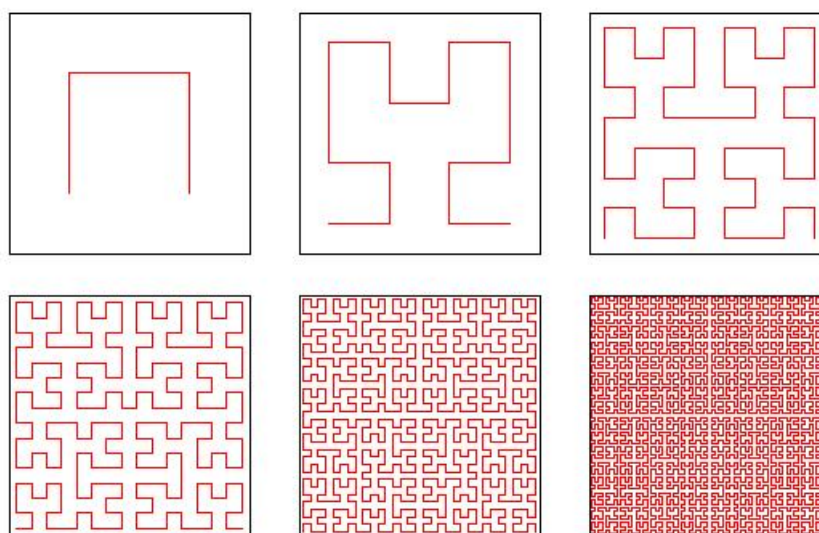
Izdarītie spriedumi nav atkarīgi no tā, kuram tieši intervālam  $[x_j, x_{j+1}]$  pieder punkts  $x$ , t.i., augstāk pierakstītā nevienādība ir spēkā visiem  $x \in I$ . Tādējādi fiksētam  $\varepsilon > 0$  izvēloties atbilstošo  $K$  no nosacījuma  $\frac{\sqrt{2}}{3^K} < \varepsilon$ , mēs konstatēsim Koši kritērija izpildīšanos. ■

Peāno līkne nenodrošina viennozīmīgu atbilstību starp kopu  $I$  un  $S$  punktiem. To principā nevar izdarīt ar nepārtrauktas funkcijas palīdzību. Punktam, kurš atrodas uz kopējas divu kvadrātiņu malas, atbilst divi nogriežņa punkti. Vēl vairāk, vienam punktam, kas ir četru kvadrātiņu kopējā virsotne, atbilst nogriežņa četri atšķirīgi punkti.

Par Peāno līknēm parasti sauc visas tādas līknes, kuru robežgadījums aizpilda visu kvadrātu. Viens no tādiem variantiem redzams 2.13.zīmējumā. 2.14.zīmējumā redzamās līknes konstrukcijas ideja pieder D.Hilbertam.



2.13.zīm. Peāno līknes konstrukcija



2.14.zīm. Hilberta līknes konstrukcija

# NODAĻA NR. 3

## Fraktālā dimensija

**Anotācija.** Topoloģiskā dimensija. Fraktālās dimensijas (*fractal dimension or similarity dimension*) jēdziens. Piemēri. Fraktālās dimensijas noteikšana. Lineāla dimensija. Kastīšu dimensija.

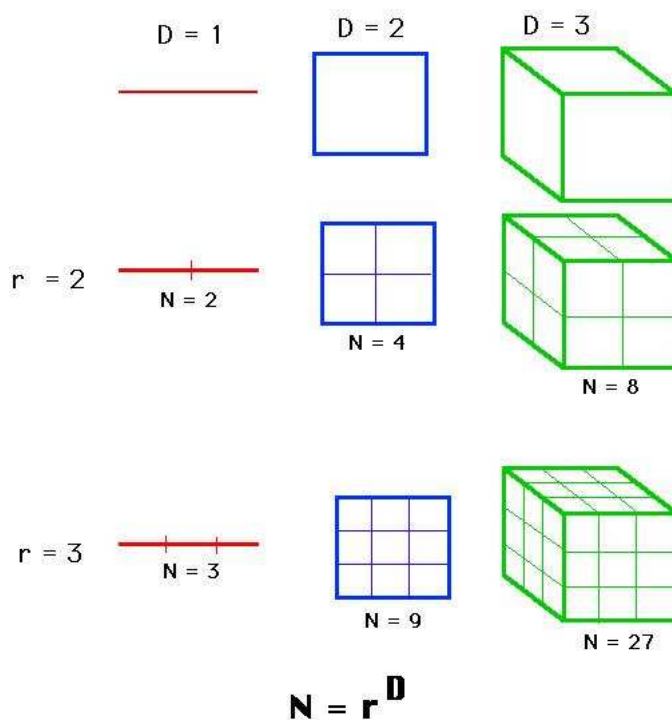
Iepriekš tika minēts, ka pašlīdzība ir svarīga fraktālu īpašība. Taču šāda īpašība piemīt arī taisnei, kvadrātam, kubam un daudzām citām figūrām, kuras pieņemts neuzskatīt par fraktāliem. Tamī pašā laikā ir tādas kopas, kuras nav stingri pašlīdzīgas, bet kuras uzskatāmas par fraktāliem. Tas nozīmē, ka vajadzētu atrast kādu citu raksturojumu, kas piemīt fraktāliem, bet kas nav ne-fraktāliem. Viena no iespējām ir izmantot fraktāla matemātisko definīciju, kas saka, ka fraktālim fraktālā dimensija ir lielāka par topoloģisko dimensiju. Tātad šajā nodaļā noskaidrosim, kāda ir atšķirība starp šiem dimensiju jēdzieniem. Vēl jāatzīmē, ka minētie divi dimensiju veidi nav vienīgie, ar kuriem raksturojamas kopas.

**Definīcija 3.1.** Saka, ka kopai  $A$  ir *topoloģiskā dimensija*  $0$ , ja jebkuram kopas  $A$  punktam eksistē tāda apkārtne, kuras robeža nešķēļas ar kopu  $A$ . Saka, ka kopai  $A$  ir *topoloģiskā dimensija*  $k > 0$ , ja jebkuram kopas  $A$  punktam eksistē tāda apkārtne, kuras robežas šķēļums ar kopu  $A$  ir kopa ar topoloģisko dimensiju  $k - 1$  un  $k$  ir mazākais pozitīvais veselais skaitlis, kuram šī īpašība izpildās.

Veselo skaitļu, racionālo skaitļu un iracionālo skaitļu kopas ir pazīstamākās kopas ar dimensiju  $0$ . Arī Kantora kopas topoloģiskā dimensija ir  $0$ . Plaknē jebkurai kopai, kas sastāv no izolētiem punktiem, topoloģiskā dimensija ir  $0$ . Ar topoloģisko dimensiju  $1$  ir taisne un riņķa līnija, jo gan vienas, gan otras kopas jebkura punkta apkārtnes robežas šķēļums ar pašu kopu ir divi izolēti punkti, bet kopas ar diviem punktiem topoloģiskā dimensija ir  $0$ . Topoloģiskā dimensija  $2$  ir plaknes figūrām diskam, kvadrātam, u.t.t.

Apskatīsim trīs pašlīdzīgas labi pazīstamas figūras: nogriežni, kvadrātu un kubu. Samazinot divas reizes nogriežņa garumu, iegūsim divas tā samazinātas

kopijas; ja samazināsim sākotnējā nogriežņa garumu trīs reizes, iegūsim trīs kopijas. Savukārt kvadrātā ietilpst četras kopijas, kuru malas garums ir divreiz mazāks kā sākotnējā kvadrāta malas garums; ja kopijas malas garums trīsreiz mazāks — būs 9 kopijas. Līdzīgi varam aplūkot kubu, tanī ietilpst 8 kopijas ar divreiz mazākām malām un 27 kopijas ar trīsreiz mazākām malām.



3.1.zīm.  $N$  — kopiju skaits,  $r$  — mērogošanas konstante

Apzīmēsim ar  $N$  kopiju skaitu un ar  $r$  skaitli, kas rāda, cik reizes samazināta figūra (skatīt 3.1.zīmējumu), tad iegūtos rezultātus varam apkopot tabulā:

figūra	dimensija	$r$	$N$
nogrieznis	1	2	$2 = 2^1$
nogrieznis	1	3	$3 = 3^1$
kvadrāts	2	2	$4 = 2^2$
kvadrāts	2	3	$9 = 3^2$
kubs	3	2	$8 = 2^3$
kubs	3	3	$27 = 3^3$



Pēdējā tabulas kolonna uzskatāmi atspoguļo sakarību, kura pastāv starp figūras kopiju skaitu samazinātajā mērogā un tās dimensiju: kopiju skaits ir vienāds ar mērogošanas konstanti kāpinātu topoloģiskajā dimensijas pakāpē  $D$ , t.i.,

$$N = r^D.$$

No šīs formulas var izrēķināt dimensiju  $D$ , ja zinām kopiju skaitu  $N$  un mērogošanas konstanti  $r$ :

$$D = \frac{\ln N}{\ln r}. \quad (3.1)$$

Kā redzams, šī dimensijas noteikšanas formula (3.1) atrod topoloģisko dimensiju nogrieznim, kvadrātam, kubam. Formulu (3.1) izmantosim arī pašlīdzīgu kopu dimensiju noteikšanai, atrasto lielumu sauksim par apskatāmās kopas **fraktālo dimensiju** (saka arī — līdzības dimensija) (*fractal dimension or similarity dimension*). Jēdziens par fraktālo dimensiju pirmo reizi parādījies jau 1919.gadā F.Hausdorfa darbā, tomēr tikai Mandelbrots apvienoja šīs idejas un uzsāka sistemātisku fraktālu pētīšanu. Jēdzienu par fraktālo dimensiju Mandelbrots izveidoja 1977.gadā.

Aprēķināsim iepriekšējā nodaļā apskatīto determinēto fraktālu fraktālās dimensijas!

Fraktālās dimensijas noteikšanai pašlīdzīgām kopām jākonstatē pirmajā iterācijā iegūto sākotnējās kopas kopiju skaits  $N$  un jāfiksē mērogošanas konstante  $r$ . Tā klasiskās Kantora kopas jeb putekļu (jeb vidējās trešdaļas Kantora kopas) gadījumā pirmajā iterācijā kopiju skaits ir  $N = 2$  un tās abas ir  $r = 3$  reizes mazākas kā sākotnējais nogrieznis, tāpēc

$$D(\text{vidējās trešdaļas Kantora kopa}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63.$$

Ja tiek apskatīta vidējās piektdaļas Kantora kopa (t.i., no nogriežņa vidus pirmajā iterācijā tiek izslēgts nogrieznis, kura garums ir viena piektdaļa no visa nogriežņa garuma), tad kopiju skaits gan būs  $N = 2$ , bet mērogošanas konstante ir cita. Šajā gadījumā katrs no palikušajiem nogriežņiem ir  $\frac{2}{5}$  no sākotnējā nogriežņa, tāpēc mērogošanas konstante ir  $r = \frac{5}{2}$ , citiem vārdiem sakot, palikušie nogriežņi ir divas ar pusi reizes īsāki kā sākotnējais nogrieznis, tālab

$$D(\text{vidējās piektdaļas Kantora kopa}) = \frac{\ln 2}{\ln \frac{5}{2}} \approx 0,756.$$

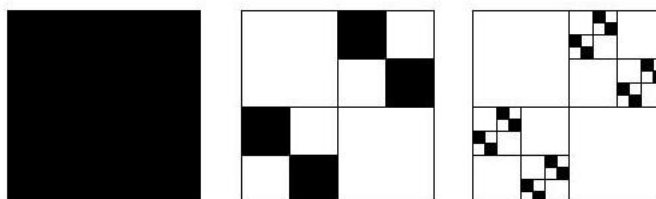
Skaidrs, ka izmetot no nogriežņa ļoti mazu tā daļu, fraktālā dimensija pieaugs! Piemēram, ja izmetam no nogriežņa vienu simtdaļu tā garuma, tad palikušo

nogriežņu garums ir  $\frac{99}{2 \times 100}$  no sākotnējā nogriežņa garuma, t.i.,  $N = 2$  un  $r = \frac{200}{99}$ , tad

$$D(\text{vidējās simtdaļas Kantora kopa}) = \frac{\ln 2}{\ln \frac{200}{99}} \approx 0,986.$$

Rodas jautājums, vai eksistē Kantora kopa ar dimensiju 1? Atbilde ir pozitīva, taču šī kopa atrodas telpā  $\mathbf{R}^2$  (un tāpēc ir fraktālis). 0.solī tiek apskatīts vienības kvadrāts. Katrā nākamajā solī esošie kvadrāti tiek aizstāti ar 4 mazākiem kvadrātiņiem (skat. 3.2.zīmējumu). Robežgadījumā iegūsim Kantora kopu  $K_C$  (tā patiešām ir Kantora kopa, jo tā ir kompakta (slēgta un ierobežota  $\mathbf{R}^2$  apakškopa), galīgi nesakarīga (t.i., nesatur intervālus) un perfekta (katrs kopas punkts ir tās robežpunkts)). Šajā gadījumā  $N = 4$  un mērogošanas konstante arī ir  $r = 4$ , jo mazā kvadrātiņa malas garums ir 4 reizes mazāks kā sākotnējā kvadrāta malas garums, tādējādi

$$D(\text{Kantora kopa } K_C \text{ (plaknē)}) = \frac{\ln 4}{\ln 4} = 1.$$



3.2.zīm. Kantora kopas konstrukcija, kuras fraktālā dimensija ir 1.

Serpinska trīsstūra pirmajā iterācijā tiek iegūti  $N = 3$  trīsstūrīši, kuru malu garumi ir uz pusi mazāki kā sākotnējam trīsstūrim, t.i.,  $r = 2$ , tāpēc

$$D(\text{Serpinska trīsstūris}) = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585.$$

Serpinska paklāja pirmajā iterācijā ir  $N = 8$  kvadrāta kopijas, kuru malas ir  $r = 3$  reizes mazākas kā sākotnējam četrstūrim, tātad

$$D(\text{Serpinska paklājs}) = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,893.$$

Mengerā sūkļa gadījumā pirmajā iterācijā tiek iegūtas  $N = 20$  kuba kopijas, kur kubu malas garums ir 3 reizes mazāks par sākotnējā kuba

malas garumu, t.i.,  $r = 3$ :

$$D(\text{Mengeras sūklis}) = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,73.$$

Koha liknei pirmajā iterācijā tiek iegūtas  $N = 4$  sākotnējā nogriežņa kopijas, kuras ir  $r = 3$  reizes mazākas par sākotnējo nogriezni, tāpēc

$$D(\text{Koha līkne}) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Pārsteidzoši, bet tieši tāpat var spriest par Koha sniegpārslīņas fraktālo dimensiju.

Dürera piecstūra gadījums ir sarežģītāks, jo jānoskaidro, cik reizes mazāka ir piecstūra mala pirmajā iterācijā. Veidojot 2.8.zīmējumu, netika norādīts, kādi izmēri ir izgrieztajiem trīsstūriem un kā panākt, ka visi pieci palikušie piecstūri ir vienādi. Izrādās, ka trīsstūra garākās malas attiecība pret īsāko malu veido tā saucamo zelta šķēlumu (*golden ratio*), proti,  $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Tātad katrā iterācijā piecstūru malas garums tiek samazināts  $1 + g$  reizes. Līdz ar to Dürera piecstūra fraktālā dimensija ir

$$D(\text{Dürera piecstūris}) = \frac{\ln 5}{\ln(1+g)} = \frac{\ln 5}{\ln(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2})} \approx 1,67.$$

2.9.zīmējumā redzamās Dāvida zvaigznes pirmajā iterācijā sākotnējā trīsstūra malu var uztvert kā sadalītu 3 vienādās daļās un pirmajā iterācijā katrai malai ir pievienoti divi nogriežņi, kur katrs no tiem ir trešdaļa no sākotnējā trīsstūra malas. Domājot līdzīgi kā par Koha līkni un sniegpārslīņu, varam ņemt  $N = 5$  un  $r = 3$ , tad

$$D(\text{Dāvida fraktālis no 2.9.zīm.}) = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1,465.$$

Principā iepriekš izstrādāto ideju par kopiju skaitīšanu ar noteiktu mērogu var vispārināt un aplūkot pat tādus fraktāļus, kas nav pašlīdzīgi. Tāpēc turpmākajā apskatīsim metrisku telpu  $(X, d)$ . Pieņemsim, ka  $A$  ir netukša kompakta telpas  $X$  apakškopa. Fiksēsim skaitli  $\varepsilon > 0$ . Ar  $B(x, \varepsilon)$  apzīmēsim slēgtu lodi, kuras rādiuss ir  $\varepsilon$  un centrs atrodas punktā  $x \in X$ . Apzīmēsim ar  $N(A, \varepsilon)$  tādu veselu skaitli, kas ir mazākais iespējamais slēgto ložu  $B(x, \varepsilon)$ ,  $x \in X$ , skaits, kas ir nepieciešams, lai pārklātu kopu  $A$ . Tas ir,

$$N(A, \varepsilon) = \text{tāds mazākais pozitīvais vesels skaitlis } N, \text{ ka } A \subset \bigcup_{n=1}^N B(x_n, \varepsilon),$$

kur ložu centri  $\{x_n | n = 1, 2, \dots, N\} \subset X$ .

Vai tāds skaitlis eksistē? Jā, jo kopa  $A$  ir kompakta. Proti, ja izveidojam kopas  $A$  pārklājumu ar vaļējām lodēm, kuru rādiusi ir  $\varepsilon$  un centri atrodas kopas  $A$  punktos, tad kopas  $A$  kompaktības dēļ no jebkura vaļēja pārklājuma var izvēlēties galīgu apakšpārklājumu, kas pārklāj kopu  $A$ . Izveidojot pārklājumu no apakšpārklājuma lodēm, kas tiek apskatītas kā slēgtas lodes, iegūsim pārklājumu ar slēgtām lodēm. Pieņemsim, ka šis pārklājums sastāv no  $\tilde{N}$  slēgtām lodēm. Pieņemsim, ka ar  $C$  apzīmēts kopas  $A$  pārklājums pie lielākais  $\tilde{N}$  slēgtām lodēm ar rādiusu  $\varepsilon$ . Tad  $C$  satur vismaz vienu lodi. Pieņemsim, ka funkcija  $f : C \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \tilde{N}\}$  tiek definēta šādi:

$$f(c) = \text{ložu skaits pārklājumā } c \in C.$$

Tad  $\{f(c) | c \in C\}$  ir pozitīvu veselu skaitļu galīga kopa, no kuras var izvēlēties mazāko veselo skaitli  $N(A, \varepsilon)$ .

Intuitīvā ideja fraktāla dimensijas atrašanai ir šāda: mēs varētu teikt, ka kopai  $A$  ir fraktālā dimensija  $D$ , ja

$$\exists C > 0 : N(A, \varepsilon) \approx C\varepsilon^{-D}. \quad (3.2)$$

Aptuvenības zīme šeit lietota tādā nozīmē, ka abu pušu funkciju attiecība,  $\varepsilon$  tiecoties uz 0, tiecas uz 1. Ja no (3.2) izsakām  $D$ , iegūsim:

$$\ln N(A, \varepsilon) \approx \ln C + D \ln \varepsilon^{-1} \text{ jeb } D \approx \frac{\ln N(A, \varepsilon) - \ln C}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ievērosim, ka dalījums  $\frac{\ln C}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$  tiecas uz 0, ja  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Definīcija 3.2.** Pieņemsim, ka  $A$  ir metriskas telpas  $(X, d)$  netukša kompakta apakškopa. Pieņemsim, ka katram  $\varepsilon > 0$  ar  $N(A, \varepsilon)$  tiek apzīmēts mazākais skaits slēgto ložu ar rādiusu  $\varepsilon > 0$ , kurš nepieciešams, lai pārklātu kopu  $A$ . Ja robeža

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

eksistē, tad iegūto robežskaitli  $D$  sauc par kopas  $A$  **fraktālo dimensiju**.

Kā šī definīcija saskaņojas ar iepriekš zināmo un aprēķināto?

Apskatīsim, piemēram, **izolētu punktu**  $a$  telpā  $\mathbf{R}^2$ , t.i.,  $A = \{a\}$ . Tad katram  $\varepsilon > 0$  izpildās  $N(A, \varepsilon) = 1$ . No šejienes seko, ka

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 0.$$

Tātad punkta fraktālā dimensija ir 0, kas sakrīt ar topoloģisko dimensiju.

Apskatīsim **vienības nogriezni**:  $A = [0; 1]$ . Izvēlēsimies  $\varepsilon > 0$ . Šeit varam ložu skaitu atkarībā no rādiusa  $\varepsilon$  definēt ar vienādību

$$N(A, \varepsilon) = - \left\lceil -\frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil, \text{ kur ar } \lceil \cdot \rceil \text{ apzīmēta reāla skaitļa veselā daļa.}$$

Tā kā visiem  $0 < 2\varepsilon < 1$  izpildās

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\ln \frac{1}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} \leq \frac{\ln(-\lceil -\frac{1}{2\varepsilon} \rceil)}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} = \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} \leq \\ &\leq \frac{\ln(\frac{1}{2\varepsilon} + 1)}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} = \frac{\ln \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} = \frac{\ln(1+2\varepsilon) - \ln 2\varepsilon}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} = \frac{\ln(1+2\varepsilon) + \ln \frac{1}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{2\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1, \end{aligned}$$

tad pēc teorēmas par robežpāreju nevienādībās ("divu policistu teorēma") seko, ka

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1.$$

Tātad esam pierādījuši, ka vienības nogriežņa fraktālā dimensija ir 1.

Veikt pierādījumu ar patvaļīga izskata  $\varepsilon > 0$  dažkārt ir ļoti apgrūtināši, tāpēc nākamajās teorēmās parādīsim, kā to vienkāršot.

**Teorēma 3.1.** Pieņemsim, ka  $A$  ir netukša kompakta metriskas telpas  $(X, d)$  apakškopa. Definēsim katram naturālam  $n = 1, 2, \dots$  atbilstošu skaitli  $\varepsilon_n = Cr^n$ , kur  $0 < r < 1$  un  $C > 0$ . Ja robeža

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(A, \varepsilon_n))}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}$$

eksistē, tad  $D$  ir kopas  $A$  fraktālā dimensija.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka atrasti tādi skaitļi  $r$  un  $C$ , kā norādīts teorēmas nosacījumos, un izveidota virkne  $E = \{\varepsilon_n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Definēsim  $f(\varepsilon) = \max\{\varepsilon_n \in E | \varepsilon_n \leq \varepsilon\}$ . Pieņemsim, ka  $\varepsilon \leq r$ . Tad

$$f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \frac{f(\varepsilon)}{r} \text{ un } N(A, f(\varepsilon)) \geq N(A, \varepsilon) \geq N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r}).$$

Tā kā  $\ln x$  ir augoša pozitīva funkcija, ja  $x \geq 1$ , tad

$$\frac{\ln N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r})}{\ln \frac{1}{f(\varepsilon)}} \leq \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(A, f(\varepsilon))}{\ln \frac{r}{f(\varepsilon)}}. \quad (3.3)$$

Pieņemsim, ka  $N(A, \varepsilon) \rightarrow \infty$ , ja  $\varepsilon \rightarrow 0$  (pretējā gadījumā pierādījums pabeigts). Nevienādības (3.3) labās puses robeža ir šāda:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, f(\varepsilon))}{\ln \frac{r}{f(\varepsilon)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{r}{\varepsilon_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln r + \ln \frac{1}{\varepsilon_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}.$$

Savukārt nevienādības (3.3) kreisās puses robeža ir šāda:

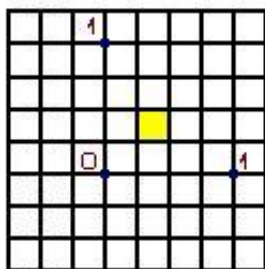
$$\frac{\ln N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r})}{\ln \frac{1}{f(\varepsilon)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_{n-1})}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_{n-1})}{\ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{\varepsilon_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}.$$

Ja  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tad (3.3) labā un kreisā puse konverģē uz vienu un to pašu vērtību. Pēc robežpārejas nevienādības teorēmas ("divu policistu teorēmas") tad eksistē arī (3.3) vidējās izteiksmes robeža, kas vienāda ar to pašu vērtību. ■

**Teorēma 3.2** (Kastiņu skaitīšanas teorēma (*The Box Counting Theorem*)). Pieņemsim, ka  $A$  ir netukša kompakta  $\mathbf{R}^m$  apakškopa ar Eiklīda metriku. Pārklāsim  $\mathbf{R}^m$  ar slēgtiem kvadrātiem ar malas garumu  $\frac{1}{2^n}$  (skatīt, piemēram, 3.2.zīmējumu, šeit  $n = 2$  un  $m = 2$ ). Apzīmēsim ar  $N_n(A)$  kvadrātu skaitu ar malas garumu  $\frac{1}{2^n}$ , kuri pārklāj kopu  $A$ . Ja robeža

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_n(A))}{\ln 2^n}$$

eksistē, tad  $D$  ir kopas  $A$  fraktālā dimensija.



3.3.zīm. Slēgti kvadrāti ar malas garumu  $\frac{1}{2^n}$  pārklāj  $\mathbf{R}^2$ ; šeit  $n = 2$ .

**Pierādījums.** Ievērosim, ka  $m = 1, 2, 3, \dots$ , izpildās nevienādības

$$2^{-m} N_{n-1} \leq N(A, \frac{1}{2^n}) \leq N_{k(n)} \text{ visiem } n = 1, 2, 3, \dots,$$

kur  $k(n)$  ir mazākais vesels skaitlis  $k$ , kurš apmierina nosacījumu  $k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \log_2 m$ . Pirmā nevienādība ir pareiza, jo lode ar rādiusu  $\frac{1}{2^n}$  pārklāj lielākais  $2^m$  režģa kvadrātus ar malas garumu  $\frac{1}{2^{n-1}}$ . Otra nevienādība seko no fakta, ka kvadrātu ar malas garumu  $s$  var ievietot lodē ar rādiusu

$r$ , ja  $r^2 \geq (\frac{s}{2})^2 + (\frac{s}{2})^2 + \dots + (\frac{s}{2})^2 = m \cdot (\frac{s}{2})^2$  (pēc Pitagora teorēmas). Tā kā  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 1$ , tad

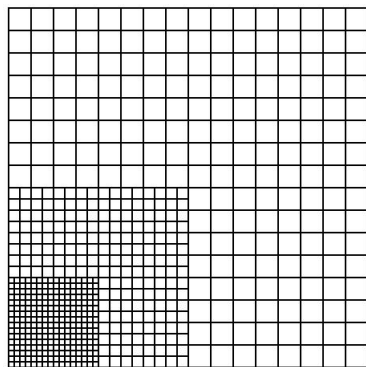
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{k(n)}}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{k(n)} \ln N_{k(n)}}{\ln 2^n \ln 2^{k(n)}} = D.$$

Tad arī

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{-m} N_{n-1}}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{n-1}}{\ln 2^{n-1}} = D,$$

Teorēmas 3.2 apgalvojums seko no Teorēmas 3.1, izvēloties  $r = \frac{1}{2}$ . ■

Apskatīsim **vienības kvadrātu**  $K_{\square} \subset \mathbf{R}^2$  (skatīt 3.4.zīmējumu). Tas tiek pārklāts ar kvadrātiem, kuru malas garumi ir  $\frac{1}{2^n}$ . Varam saskaitīt, ka  $N_1(K_{\square}) = 4$ ,  $N_2(K_{\square}) = 16$ ,  $N_3(K_{\square}) = 64$ ,  $N_4(K_{\square}) = 256, \dots$ ,  $N_n(K_{\square}) = 4^n$ , kur  $n = 1, 2, 3, \dots$



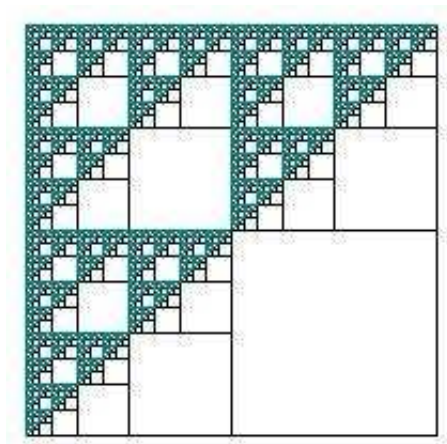
3.4.zīm. Vienības kvadrāta sadalījums mazākos kvadrātos.

No iepriekšējās Teorēmas 3.2 seko, ka

$$D(K_{\square}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n(K_{\square})}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = 2.$$

Tātad vienības kvadrāta fraktālā dimensija ir 2, kas sakrīt ar iepriekš zināmo topoloģisko dimensiju.

Pieņemsim, ka **Serpinska trīsstūra**  $S$  malas garums ir viena vienība un tas novietots plaknē kā 3.5.zīmējumā. Veidosim Serpinska trīsstūra pārklājumu ar kvadrātiem, kuru malas garumi ir  $\frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$



3.5.zīm. Serpinska trīsstūra pārklāšana ar kvadrātiem.

Varam ieraudzīt, ka  $N_1(S) = 3$  (kvadrātu ar malas garumu  $\frac{1}{2}$  skaits, kas pārklāj visu Serpinska trīsstūri),  $N_2(S) = 9$ ,  $N_3(S) = 27$ ,  $N_4(S) = 81$  un vispārīgā gadījumā  $N_n(S) = 3^n$ . No Teorēmas 3.2 seko, ka

$$D(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n(S)}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Vienkāršosim vēl vairāk fraktālās dimensijas aprēķināšanas iespējas, pieļausim, ka  $\frac{1}{2}$  vietā var būt jebkurš skaitlis no  $]0; 1[$ .

**Teorēma 3.3.** Pieņemsim, ka  $0 < r < 1$ . Apskatīsim  $\mathbf{R}^n$  apakškopu  $S$ , kur  $n = 1, 2, 3$ . Robeža

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^k}}$$

eksistē tad un tikai tad, ja eksistē fraktālā dimensija  $D(C)$ , pie tam

$$D(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^k}}. \quad (3.4)$$

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $0 < \varepsilon < r$ , un pieņemsim, ka  $k$  ir tik liels pozitīvs vesels skaitlis, ka

$$r^{k+1} < \varepsilon \leq r^k.$$

Tādā gadījumā  $N(r^k) \leq N(\varepsilon) \leq N(r^{k+1})$ . Tā kā naturālais logaritms ir augoša funkcija un  $0 < r < 1$  seko, ka

$$\ln \frac{1}{r^k} \leq \ln \frac{1}{\varepsilon} < \ln \frac{1}{r^{k+1}} \quad \text{un} \quad \ln N(r^k) \leq \ln N(\varepsilon) \leq \ln N(r^{k+1}).$$



Tādēļ

$$\frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^k} + \ln \frac{1}{r}} = \frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^{k+1}}} \leq \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(r^{k+1})}{\ln \frac{1}{r^k}} = \frac{\ln N(r^{k+1})}{\ln \frac{1}{r^{k+1}} - \ln \frac{1}{r}}.$$

Ja viena no sekojošajām robežām eksistē, tad eksistē arī pārējās,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^k} + \ln \frac{1}{r}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r^{k+1})}{\ln \frac{1}{r^{k+1}} - \ln \frac{1}{r}}.$$

Tādēļ  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r^k)}{\ln \frac{1}{r^k}}$  eksistē tad un tikai tad, ja eksistē  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ , un, ja tā ir, tad abas robežas ir vienādas. ■

Apskatīsim **vidējās trešdaļas Kantora kopu**  $C$ . Kopa  $C$  tiek iegūta no intervāla  $[0; 1]$ , izslēdzot ārā vidējo trešdaļu, tad vidējo trešdaļu no katra atlikušā intervāla, utt. Katrā nakamajā solī ir divas reizes vairāk intervālu kā iepriekšējā un katrs intervāls ir viena trešdaļa no iepriekšējā intervāla garuma. Tā kā  $N(\frac{1}{3}) = 2$ , tad  $N(\frac{1}{3^k}) = 2^k$  katram  $k \geq 1$ . Izvēloties  $r = \frac{1}{3}$  Teorēmā 3.3, atradīsim, ka

$$D(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\frac{1}{3^k})}{\ln \frac{1}{3^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{k \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

**Piezīme.** Apskatīsim kopu

$$A = \{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\}.$$

Interesanti atzīmēt, ka kopas  $A$  topoloģiskā dimensija ir 0 (izolētu punktu kopa), bet fraktālā dimensija ir  $\frac{1}{2}$ . Kā to var iegūt?

Ievērosim, ka starpība starp diviem sekojošiem skaitļiem ir

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Izvēlēsimies tādu  $\varepsilon$ , lai

$$\frac{1}{k(k-1)} \leq \varepsilon < \frac{1}{(k-1)(k-2)}.$$

Pirmajā tuvinājumā  $\varepsilon \approx \frac{1}{k^2}$  jeb  $k \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Lai pārklātu kopu  $\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{k-1}\}$ , mums nepieciešami  $(k-1)$  intervāli (jeb  $k-1 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ) ar garumu

$2\varepsilon$ , kuri centrēti šajos punktos. Atlikušos punktus  $\{\frac{1}{k}; \frac{1}{k+1}; \dots; 0\}$  var pārklāt ar  $\frac{1}{2k\varepsilon}$  (jeb  $\frac{1}{2k\varepsilon} \approx \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}$ ) intervāliem ar garumu  $2\varepsilon$ . Tātad kopējais intervālu ar garumu  $2\varepsilon$  skaits, lai pārklātu kopu  $A$ , ir

$$N(A, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Tad pēc Definīcijas 3.2 iegūsim, ka

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \varepsilon}{\ln 1 - \ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln \varepsilon}{-\ln \varepsilon}$$

Veidojas robežu nenoteiktība  $\frac{\infty}{\infty}$ , var lietot Lopitāla teorēmu un iegūt:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Kas notiek ar fraktālo dimensiju kopā, ja kopa tiek deformēta? Nākošā teorēma parādīs, ka metriski ekvivalentām kopām ir vienādas fraktālās dimensijas. Bet pirms tam noskaidrosim, ko vispār nozīmē metriski ekvivalentas telpas.

**Definīcija 3.3. Divas metrikas**  $d_1$  un  $d_2$  telpā  $X$  sauc par **ekvivalentām**, ja eksistē divas tādas konstantes  $0 < c_1 < c_2 < \infty$ , ka

$$\forall(x, y) \in X \times X \quad c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y).$$

**Definīcija 3.4. Divas metriskas telpas**  $(X_1, d_1)$  un  $(X_2, d_2)$  sauc par **metriski ekvivalentām**, ja eksistē tāda bijekcija  $h : X_1 \rightarrow X_2$ , ka metrika  $\tilde{d}$  telpā  $X_1$ , kas definēta ar sakarību

$$\forall x, y \in X_1 \quad \tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)),$$

ir ekvivalenta metrikai  $d_1$ .

Piemēram, telpa  $X_1 = [1; 2]$  ar metriku  $\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) = |x - y|$  ir metriski ekvivalenta telpai  $X_2 = [0; 1]$  ar metriku  $\forall x, y \in X_2 : d_2(x, y) = 2|x - y|$ . Šajā gadījumā var izvēlēties  $h(x) = x - 1$ . Tad

$$\tilde{d}_1(h(x), h(y)) = d_2(h(x), h(y)) = 2|(x - 1) - (y - 1)| = 2|x - y|.$$

Šī metrika ir ekvivalenta metrikai  $d_1(x, y)$ , ja izvēlas konstantes, piemēram, šādas:  $c_1 = \frac{1}{4}$  un  $c_2 = 3$ , t.i.,  $\forall(x, y) \in X_1 \times X_1$

$$c_1 d_1(x, y) = \frac{1}{4} |x - y| \leq \tilde{d}_1(x, y) = 2|x - y| \leq c_2 d_1(x, y) = 3|x - y|.$$

**Teorēma 3.4.** Pieņemsim, ka metriskas telpas  $(X_1, d_1)$  un  $(X_2, d_2)$  ir metriski ekvivalentas. Pieņemsim, ka  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$  ir bijekcija, kas nodrošina telpu ekvivalenci. Pieņemsim, ka  $A_1 \subset X_1$  ir netukša kompakta kopa, kuras fraktālā dimensija ir  $D$ . Tad kopai  $A_2 = \theta(A_1)$  arī ir fraktālā dimensija  $D$ , t.i.,  $D(A_1) = D(\theta(A_2))$ .

**Pierādījums.** Tā kā divas telpas  $(X_1, d_1)$  un  $(X_2, d_2)$  ir ekvivalentas, ko nodrošina transformācija  $\theta$ , tad eksistē divas tādas konstantes  $e_1 > 0$  un  $e_2 > 0$ , ka

$$\forall x, y \in X_1 \quad e_1 d_2(\theta(x), \theta(y)) < d_1(x, y) < e_2 d_2(\theta(x), \theta(y)). \quad (3.5)$$

Nemazinot vispārīgumu, varam pieņemt, ka  $e_1 < 1 < e_2$ . No (3.5) seko, ka

$$\forall x, y \in X_1 \quad d_2(\theta(x), \theta(y)) < \frac{d_1(x, y)}{e_1}.$$

Savukārt no šejienes seko, ka

$$\forall x \in X_1 \quad \theta(B(x, \varepsilon)) \subset B(\theta(x), \frac{\varepsilon}{e_1}). \quad (3.6)$$

No skaitļa  $N(A_1, \varepsilon)$  definīcijas ir zināms, ka eksistē tāda punktu kopa  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset X_1$ , kur  $N = N(A_1, \varepsilon)$ , ka slēgto ložu kopa

$$\{B(x_n, \varepsilon) | n = 1, 2, 3, \dots, N(A_1, \varepsilon)\}$$

veido  $A_1$  pārklājumu. Tad kopu sistēma

$$\{\theta(B(x_n, \varepsilon)) | n = 1, 2, 3, \dots, N(A_1, \varepsilon)\}$$

veido  $A_2$  pārklājumu. No (3.6) iekļāvuma seko, ka

$$\{B(\theta(x_n), \frac{\varepsilon}{e_1}) | n = 1, 2, 3, \dots, N(A_1, \varepsilon)\}$$

veido  $A_2$  pārklājumu. Tātad

$$N(A_2, \frac{\varepsilon}{e_1}) \leq N(A_1, \varepsilon).$$

Ja  $\varepsilon < 1$ , tad

$$\frac{\ln N(A_2, \frac{\varepsilon}{e_1})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(A_1, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

No šejienes tālāk seko, ka

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_2, \frac{\varepsilon}{e_1})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_1, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = D(A_1). \quad (3.7)$$

(Šeit pieraksta  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\tilde{\varepsilon} \in ]0; \varepsilon[}$  vietā rakstīts  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0}$ , līdzīgi tālāk pieraksta  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\tilde{\varepsilon} \in ]0; \varepsilon[}$  vietā rakstīts  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ .)

Tagad meklēsim nevienādību pretējā virzienā. No nevienādības (3.5) seko, ka

$$\forall x, y \in X_2 \quad d_1(\theta^{-1}(x), \theta^{-1}(y)) < e_2 d_2(x, y).$$

Tas ļauj sacīt, ka

$$\forall x \in X_2 \quad \theta^{-1}(B(x, \varepsilon)) \subset B(\theta^{-1}(x), e_2 \varepsilon),$$

nošejienes seko:

$$N(A_1, e_2 \varepsilon) \leq N(A_2, \varepsilon).$$

Tādēļ, ja  $\varepsilon < 1$ , izpildās nevienādība

$$\frac{\ln N(A_1, e_2 \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(A_2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Savukārt no šejienes seko, ka

$$D(A_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_1, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_1, e_2 \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (3.8)$$

Kombinējot (3.7) un (3.8), iegūsim

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = D(A_1) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

No pēdējās vienādības seko, ka

$$D(A_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = D(A_1),$$

kas arī noslēdz pierādījumu. ■

Nākošā definīcija paplašina Definīcijas 3.2, tā definē fraktālo dimensiju plašākai kopu saimei.

**Definīcija 3.2'.** Pieņemsim, ka  $A$  ir (pilnas) metriskas telpas  $(X, d)$  netukša kompakta apakškopa. Pieņemsim, ka katram  $\varepsilon > 0$  ar  $N(\varepsilon)$  tiek

apzīmēts mazākais skaits slēgto ložu ar rādiusu  $\varepsilon > 0$ , kurš nepieciešams, lai pārklātu kopu  $A$ . Ja robeža

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\tilde{\varepsilon} \in ]0; \varepsilon[} \frac{\ln N(\tilde{\varepsilon})}{\ln \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}}$$

eksistē, tad iegūto robežskaitli  $D$  sauc par kopas  $A$  **fraktālo dimensiju**.

Var pierādīt, ka Definīcija 3.2' ir saskaņota ar Definīciju 3.2: ja kopai eksistē fraktālā dimensija un tā ir  $D$  saskaņā ar Definīciju 3.2, tad kopai ir tā pati fraktālā dimensija  $D$  saskaņā ar Definīciju 3.2'. Plašākā definīcija nodrošina fraktālās dimensijas jēdziena izmantošanu dažos tādos gadījumos, kuros iepriekšējā Definīcija 3.2 nebija lietojama.

Ērtības labad pieraksta  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\tilde{\varepsilon} \in ]0; \varepsilon[}$  vietā turpmāk rakstīsim  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0}$ .

**Teorēma 3.5.** Apskatīsim telpu  $\mathbf{R}^m$  ar Eiklīda metriku. Tad jebkurai netukšai un kompaktai kopai  $A \subset \mathbf{R}^m$  eksistē fraktālā dimensija  $D(A)$ . Pieņemsim, ka  $B \subset A$  ir netukša un kompakta kopa. Apzīmēsim ar  $D(B)$  kopas  $B$  fraktālo dimensiju. Tad

$$0 \leq D(A) \leq D(B) \leq m.$$

**Pierādījums.** Mēs pierādījumu veiksime gadījumam  $m = 2$ . Telpā  $\mathbf{R}^2$  eksistē tāds kvadrāts  $K$ , ka  $A \subset K$ . No šejienes seko, ka visiem  $\varepsilon > 0$ :  $N(A, \varepsilon) \leq N(K, \varepsilon)$ . Tādējādi visiem  $\varepsilon$ , kuri  $0 < \varepsilon < 1$ , izpildās nevienādības:

$$0 \leq \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(K, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Tādā gadījumā

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(K, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Labās puses robeža eksistē un ir vienāda ar 2, tad arī kreisās puses robeža eksistē un ir ierobežota no augšas ar 2. Tātad fraktālā dimensija  $D(A)$  ir definēta un ierobežota no augšas ar 2. Pēc definīcijas  $D(A) \geq 0$ .

Ja  $A$  un  $B$  ir netukšas un kompaktas kopas un  $A \subset B$ , tad pēc iepriekš pierādītā kopām  $A$  un  $B$  eksistē fraktālās dimensijas. Aizvietojojot iepriekšējā pierādījumā  $K$  ar  $B$ , varam pierādīt, ka  $D(A) \leq D(B)$ . ■

Nākošā teorēma var palīdzēt izskaitļot fraktālo dimensiju divu kopu apvienojumam.

**Teorēma 3.6.** Apskatīsim telpu  $\mathbf{R}^m$  ar Eiklīda metriku. Pieņemsim, ka  $A, B \subset \mathbf{R}^m$  ir netukšas un kompaktas kopas. Pieņemsim, ka kopa  $A$  ir tāda, kuras fraktālo dimensiju var izskaitļot ar formulu

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Pieņemsim, ka ar  $D(B)$  un  $D(A \cup B)$  ir atbilstoši apzīmētas kopu  $B$  un  $A \cup B$  fraktālās dimensijas. Pieņemsim, ka  $D(B) < D(A)$ . Tādā gadījumā

$$D(A \cup B) = D(A).$$

**Pierādījums.** No iepriekšējās Teorēmas 3.5 seko, ka  $D(A \cup B) \geq D(A)$ . Atliek parādīt, ka  $D(A \cup B) \leq D(A)$ . Sāksim ar novērojumu, ka visiem  $\varepsilon > 0$ , izpildās

$$N(A \cup B, \varepsilon) \leq N(A, \varepsilon) + N(B, \varepsilon).$$

Seko, ka

$$\begin{aligned} D(A \cup B) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A \cup B, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \varepsilon) + N(B, \varepsilon))}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \\ &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon) + \ln(N(A, \varepsilon) + N(B, \varepsilon)) - \ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{N(B, \varepsilon)}{N(A, \varepsilon)}\right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Pierādījums tiks pabeigts parādot, ka  $\frac{N(B, \varepsilon)}{N(A, \varepsilon)}$  ir mazāks par 1, ja  $\varepsilon$  ir pietiekoši mazs. Tad pēdējās izteiksmes otrais saskaitāmais ir vienāds ar 0, bet pirmais konverģē uz  $D(A)$ .

Ievērosim, ka

$$\sup_{\tilde{\varepsilon} < \varepsilon} \frac{\ln N(B, \tilde{\varepsilon})}{\ln \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}}$$

ir dilstoša funkcija ar pozitīvu mainīgo  $\varepsilon$ . Tāpēc pietiekoši maziem  $\varepsilon > 0$  izpildās

$$\frac{\ln N(B, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} < D(A).$$

Tā kā norādītās daļas robeža eksistē, seko, ka visiem pietiekoši maziem  $\varepsilon > 0$  izpildās

$$\frac{\ln N(B, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} < \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} < D(A).$$

Tas ļauj secināt, ka visiem pietiekoši maziem  $\varepsilon > 0$

$$\frac{N(B, \varepsilon)}{N(A, \varepsilon)} < 1. \blacksquare$$

Šeit apskatītās nav vienīgās fraktāļu dimensiju definīcijas. Plaši izplatītas ir arī citas dimensijas definīcijas, no kurām dažas var pielietot tikai atsevišķām fraktāļu klasēm, piemēram, līknēm.

Daudzās dimensiju definīcijās ir ietverta ideja par mēru mērogā  $\varepsilon$ . Visiem  $\varepsilon$  tiek mērīta kopa un tiek ignorētas neregularitātes, kuras ir mazākas par  $\varepsilon$ , tad mērījumi tiek salīdzināti, mērīšana tiek atkārota, aizvien mazākam  $\varepsilon$  (t.i.,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Apskatīsim plaknes līkni  $F$ . Ar  $N_\varepsilon(F)$  apzīmēsim lineālu skaitu, kas nepieciešams, lai pārklātu līkni  $F$ . Teiksim, ka līknes  $F$  **lineāla dimensija** ir  $s$ , ja eksistē tādas konstantes  $c$  un  $s$ , ka

$$N_\varepsilon(F) \approx c\varepsilon^{-s}.$$

Logaritmējot abas izteiksmes puses, iegūsim

$$\ln N_\varepsilon(F) \approx \ln c - s \ln \varepsilon = \ln c + s \ln \varepsilon^{-1},$$

no kurienes, ja  $\varepsilon \rightarrow 0$ , iegūsim lineāla dimensiju  $s$ :

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{\ln \varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

Lineāla metodi bieži izmanto tieši līkņu, kas ir fraktāļi, dimensiju noteikšanai, piemēram, krasta līnijas dimensijas noteikšanai. Metodes apraksts ir atrodams 1967.gada B.Mandelbrota darbā "How Long is the Coast of Great Britain? Statistical Self Similarity and Fractional Dimension", *Sciences*, V.155, P.636-638. Šajā rakstā konstatēta pārsteidzoša īpašība, ka krasta līnijas izmērītais garums ir atkarīgs no mēroga izvēles. Empīriskā pārlicība liek domāt, ka jo mazāka būs mērvienība, jo garāks būs izmērītais garums. Ja krasta līnija tiks mērīta kilometros, tiks iegūts īsāks rezultāts nekā, ja mērīšana tiktu veikta ar mazu lineālu. Tiek skaitīts noteikta garuma lineālu daudzums, kas nepieciešams no līknes sākuma līdz beigām. Tā kā lineālam ir noteikts garums, mērot līknes garumu, noteikti tiks izlaisti daži līknes posmi, kuri neiekļaujas lineāla garumā. Līdz ar to iegūtais līknes garums būs mazāks par patieso. Tomēr empīriskie pētījumi parāda likumsakarību, proti, izmērītais garums tiecas uz noteiktu robežu, kamēr mēroga vienība tiecas uz 0. Empīriski lineāla dimensiju iegūst, apskatot aizvien īsākus lineālus un

sastādot novērojumu tabulu — lineālu skaits  $N_\varepsilon(F)$ , kas nepieciešams, lai pārklātu krasta līniju, atkarībā no lineāla garuma  $\varepsilon$ . Apskatot dalījumu

$$\frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}$$

tiek izdarīts secinājums par krasta līnijas (līknes  $F$ ) aptuveno fraktālo lineāla dimensiju. Tā Lielbritānijas krasta līnijas fraktālā dimensija ir apmēram 1,25, bet Norvēģijas — apmēram 1,52.



3.6.zīm. Lielbritānijas krasta pārklāšana ar lineāliem.

[http://www.absoluteastronomy.com/topics/How\\_Long\\_Is\\_the\\_Coast\\_of\\_Britain%3F\\_Statistical\\_Self-Similarity\\_and\\_Fractional\\_Dimension#encyclopedia](http://www.absoluteastronomy.com/topics/How_Long_Is_the_Coast_of_Britain%3F_Statistical_Self-Similarity_and_Fractional_Dimension#encyclopedia)

**Kastīsu skaitīšanas** vai **kastīšu dimensija** ir viena no visplašāk lietotajām dimensiju definīcijām. Tās popularitāte izskaidrojama ar iespēju relatīvi vienkārši veikt matemātiskos aprēķinus un empīrisko novērtējumu.

Pieņemsim, ka  $F$  ir netukša slēgta un ierobežota  $\mathbf{R}^n$  apakškopa un  $N_\varepsilon(F)$  ir mazākais kopu skaits ar diametru vienādu vai mazāku par  $\varepsilon$ , ar kuru var pārklāt kopu  $F$ . **Apakšējās** un **augšējās** kopas  $F$  **kastīšu dimensijas**



attiecīgi tiek definētas ar apakšējām un augšējām robežām:

$$\underline{\dim} F = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

$$\overline{\dim} F = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

Ja abas dimensijas sakrīt, kopīgā vērtība tiek saukta par kopas  $F$  **kastīšu skaitīšanas dimensiju** vai **kastīšu dimensiju**:

$$\dim F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}. \quad (3.9)$$

Turpmāk pieņemsim, ka  $0 < \varepsilon < 1$ , lai  $-\ln \varepsilon > 0$ .

Ekstistē vēl citas ekvivalentas kastīšu dimensijas definīcijas, kuras dažkārt ir ērtāk izmantot. Aplūkosim kubu saimi —  $\varepsilon$ -tīklu telpā  $\mathbf{R}^n$ , t.i., kubus formā

$$[m_1\varepsilon, (m_1 + 1)\varepsilon] \times \dots \times [m_n\varepsilon, (m_n + 1)\varepsilon],$$

kur  $m_1, \dots, m_n$  ir veseli skaitļi. (Ievērojiet, ka  $\mathbf{R}^1$  kubs ir intervāls un  $\mathbf{R}^2$  kubs ir kvadrāts. Vārds "kubs" tiek lietots, runājot telpas  $\mathbf{R}^n$  gadījumā, nešķirojot speciālgadījumus, kuros ir savi nosaukumi.) Pieņemsim, ka  $N'_\varepsilon(F)$  ir  $\varepsilon$ -tīkla kubu skaits, kas pārklāj kopu  $F$ . Tikpat labi var izvēlēties patvaļīgas kopas ar diametru  $\varepsilon\sqrt{n}$ , kuras pārklāj kopu  $F$ ; ja mazākais skaits, kas nepieciešams, lai to izdarītu, ir  $N_{\varepsilon\sqrt{n}}(F)$ , tad

$$N_{\varepsilon\sqrt{n}}(F) < N'_\varepsilon(F).$$

Ja  $\varepsilon\sqrt{n} < 1$ , tad

$$\frac{\ln N_{\varepsilon\sqrt{n}}(F)}{-\ln(\varepsilon\sqrt{n})} \leq \frac{\ln N'_\varepsilon(F)}{-\ln \sqrt{n} - \ln \varepsilon},$$

un, rēķinot robežas, kad  $\varepsilon \rightarrow 0$ , iegūsim

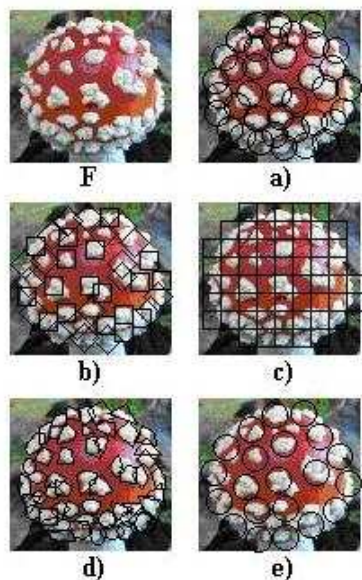
$$\underline{\dim} F \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}, \quad (3.10)$$

$$\overline{\dim} F \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}. \quad (3.11)$$

No otras puses, jebkura no kopām ar diametru, kas nepārsniedz  $\varepsilon$ , ir pārklāta ar  $3^n$  kubiem no tīkla ar malas garumu  $\varepsilon$  (t.i., ņem kubu, kas satur kādu kopas punktu, un visus tā kaimiņus). Līdz ar to

$$N'_\varepsilon(F) \leq 3^n N_\varepsilon(F),$$

izrēķinot logaritmus un robežu, kad  $\varepsilon \rightarrow 0$ , iegūsim pretējas nevienādības (3.10) un (3.11), kas pamato vienādību esamību. Tātad, rēķinot kastīšu dimensiju kopai  $F$ ,  $N_\varepsilon(F)$  — patvaļīgu kopu ar diametru  $\varepsilon$  skaits, kas pārklāj kopu  $F$  — vietā var ņemt  $N'_\varepsilon(F)$  —  $\varepsilon$ -tīkla kubu skaitu, kas pārklāj kopu  $F$ .



3.7.zīm.  $F$  — mušmires baltie plankumi, kas redzami fotoattēlā;

a) pārklājums mušmires plankumiem ar slēgtām lodēm ar dotu rādiusu  $\varepsilon$ ;

b) pārklājums mušmires plankumiem ar slēgtiem kvadrātiem ar dotu malas garumu  $\varepsilon$ ;

c) pārklājums mušmires plankumiem ar kvadrātu, kuru malas garums ir  $\varepsilon$ , tīklu;

d) pārklājums mušmires plankumiem ar patvaļīgām kopām, kuru diametrs ir mazāks vai vienāds ar  $\varepsilon$ ;

e) mušmires plankumu pārklāšana ar disjunktām slēgtām lodēm ar rādiusu  $\varepsilon$  un centriem plankumos.

Šī definīcijas versija plaši tiek lietota empīriski. Lai atrastu kastīšu dimensiju plaknes kopai  $F$ , tiek uzzīmēts tīkls no kvadrātiem (skatīt 3.7.zīmējuma c) gadījumu) vai kastītēm ar malas garumu  $\varepsilon$  un tiek atrasts skaitlis  $N_\varepsilon(F)$ , apskatot gadījumus daudzām pietiekami mazām  $\varepsilon$  vērtībām. Dimen-

siju varētu noteikt aptuveni kā skaitlis  $s$  no formulas

$$s \approx \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{\ln \varepsilon^{-1}},$$

apskatot aizvien mazākus  $\varepsilon$ . Diemžēl praktiski ir neiespējami apskatīt aizvien mazākus  $\varepsilon$ . Toties, ja Dekarta koordinātu sistēmā atliekam uz  $x$  ass  $\ln \varepsilon^{-1}$  vērtības un uz  $y$  ass  $\ln N_\varepsilon(F)$  vērtības, tad taisnes, kura vislabāk apraksta iegūtos punktus plaknē, virziena koeficients ir uztverams kā dotās kopas kastīšu (fraktālās) dimensijas tuvinājums.

Apskatītā definīcija sniedz kastīšu dimensijas interpretāciju. Tīkla kvadrātu ar malas garumu  $\varepsilon$  skaits, kas pārklāj kopu, norāda, cik ļoti izvērsta vai neregulāra ir kopa, kad to aplūko  $\varepsilon$  mērogā. Turpretīm dimensija norāda, cik strauji neregularitāte pieaug, kad  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Cita kastīšu dimensijas definīcija tiek iegūta, ja par  $N_\varepsilon(F)$  tiek ņemts mazākais skaits no patvaļīgiem kubiem telpā  $\mathbf{R}^n$  ar malas garumu  $\varepsilon$ , kurš nepieciešams, lai pārklātu kopu  $F$ . Definīcijas ekvivalence izriet no tā fakta, ka visiem kubiem ar malas garumu  $\varepsilon$  diametrs ir  $\varepsilon\sqrt{n}$ , un no tā, ka visas kopas ar diametru, kas nepārsniedz  $\varepsilon$ , ir iekļaujamas kubā ar malas garumu  $\varepsilon$ .

Līdzīgi tiktu iegūtas tās pašas vērtības, ja kastīšu dimensijas definīcijā par  $N_\varepsilon(F)$  tiktu ņemts slēgto ložu ar rādiusu  $\varepsilon$  skaits, kas nepieciešams, lai pārklātu kopu  $F$ .

Ne tik acīmredzama ekvivalence ir kastīšu dimensijas definīcijai, ja  $N_\varepsilon(F)$  ir lielākais skaits tādām disjunktām (varētu teikt — atdalāmām) lodēm, kuru rādiuss ir  $\varepsilon$  un centri kopā  $F$ . Apzīmēsim šo skaitu ar  $N'_\varepsilon(F)$  un pieņemsim, ka  $B_1, B_2, \dots, B_{N'_\varepsilon(F)}$  ir šīs disjunktās lodes ar rādiusu  $\varepsilon$  un centriem kopas  $F$  punktos. Ja punkts  $x$  pieder kopai  $F$ , tad  $x$  jāatrodas kādā no lodēm vai arī  $x$  ir jāatrodas attālumā, kas nepārsniedz  $\varepsilon$ , no kaut kādām lodēm, jo citādi lode ar centru  $x$  un rādiusu  $\varepsilon$  var tikt pievienota, palielinot disjunktā ložu saimi. Tādējādi lodes skaitā  $N'_\varepsilon(F)$ , kuru centri sakrīt ar  $B_i$  centriem, bet rādiusi ir  $2\varepsilon$  (toties diametri  $4\varepsilon$ ), pārklāj kopu  $F$ , tāpēc

$$N_{4\varepsilon} \leq N'_\varepsilon(F). \quad (3.12)$$

Ar  $U_1, U_2, \dots, U_k$  apzīmēsim patvaļīgu kopu saimi, kurā ietilpstošo kopu diametri ir mazāki vai vienādi ar  $\varepsilon$  un kura pārklāj kopu  $F$ . Tā kā  $U_j$  jāpārklāj disjunktā ložu  $B_i$  centri, tad katra no lodēm  $B_i$  satur vismaz vienu kopu  $U_j$ .  $B_i$  ir disjunktas, tādēļ  $U_j$  ir vismaz tikpat daudz, cik kopu  $B_i$ . Līdz ar to

$$N'_\varepsilon(F) \leq N_\varepsilon(F). \quad (3.13)$$

Aprēķinot logaritmus un atbilstošās robežas no (3.12) un (3.13), redzēsīm, ka kastīšu dimensija nemainās, ja  $N_\varepsilon(F)$  — patvaļīgu kopu ar diametru  $\varepsilon$  skaits, kas pārklāj kopu  $F$  — vietā var ņemt  $N'_\varepsilon(F)$  — disjunktas (atdalāmas) lodes ar rādiusiem  $\varepsilon$  un centriem kopas  $F$  punktos.

Tādējādi mūsu rīcībā ir kopas  $F$  vairākas ekvivalentas kastīšu dimensijas definīcijas, ko apraksta robeža (3.9) (ja vien tā eksistē), kuras atšķiras ar to, kādas kopas tiek saskaitītas, t.i.,  $N_\varepsilon(F)$  var būt

- a) mazākais slēgto ložu ar rādiusu  $\varepsilon$  skaits, kuras pārklāj kopu  $F$ ;
- b) mazākais kubu ar malas garumu  $\varepsilon$  skaits, kuri pārklāj kopu  $F$ ;
- c) to  $\varepsilon$ -tīkla kubu skaits, kuri šķēršas ar kopu  $F$ ;
- d) mazākais kopu ar diametru mazāku vai vienādu ar  $\varepsilon$  skaits, kuras pārklāj kopu  $F$ ;
- e) lielākais skaits no disjunktām (atdalāmām) lodēm ar rādiusiem  $\varepsilon$  un centriem kopā  $F$ .

Ilustrācija augstāk apskatītajiem gadījumiem ir parādīta 3.7.zīmējumā plaknes situācijai ( $F \subset \mathbf{R}^2$ ).

Dažādu ģeometrisku fraktāļu un dabas fraktāļu fraktālās dimensijas ir atrodamas vietnē:

[http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_fractals\\_by\\_Hausdorff\\_dimension](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)

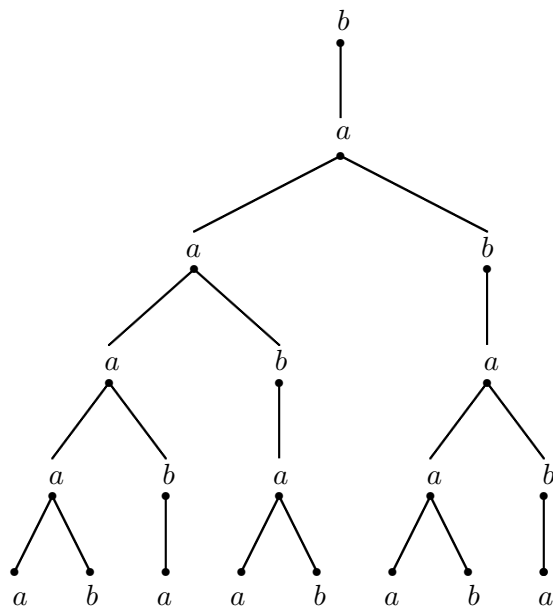
Piemēram, te var atrast jau iepriekš apskatītos fraktāļus, bet te atrodams arī fraktālās dimensijas novērtējums cilvēka smadzeņu virsmai — 2,79 un plaušu virsmai — 2,97.

# NODAĻA NR. 4

## *L*-sistēmas

**Anotācija.** A.Lindenmajers (*Lindenmayer*). *L*-sistēmu jēdziens. *L*-sistēmu izmantošana fraktāļu konstrukcijā.

1968.gadā biologs Aristīds Lindenmajers (*Aristid Lindenmayer*) (1925.-1989.) izveidoja *L*-sistēmas jēdzienu. Viņš studēja aļģu izaugsmi laika gaitā un meklēja ceļus, kā pārbaudīt izstrādāto teoriju par noteikta tipa aļģu uzvedību. A.Lindenmajers uzskatīja, ka šo aļģu šūnas var atrasties vienā no diviem stāvokļiem: augšana (*b*) vai reprodukcija (vairošanās jeb sadalīšanās) (*a*). Aļģe augšanas stāvoklī izaug līdz reprodukcijas stāvoklim, bet aļģe, kas atrodas reprodukcijas stāvoklī sadalās par divām šūnām, no kurām viena ir augšanas stāvoklī, bet otra reprodukcijas stāvoklī. Šāds attīstības modelis parādīts 4.1.zīmējumā.



4.1. zīm.

Lindenmajera gramatiku (*Lindenmayer Grammar*) — pierakstu, kas atspoguļo objekta uzvedības likumsakarības, mēdz saukt par  $L$ -sistēmu (*L-system*).  $L$ -sistēmas jēdziens cieši saistīts ar pašlīdzīgiem fraktāļiem. Sākumā  $L$ -sistēmas tika izmantotas ne tikai bioloģijas selekcijas modeļos, bet arī formālo valodu pētījumos. Ar to palīdzību var konstruēt daudzus pazīstamākos pašlīdzīgos fraktāļus, ieskaitot Koha sniegpārslīņu un Serpinska paklāju. Arī dažas citas konstrukcijas (piemēram, Peāno un Hilberta līknes) ir iekļaujamas šajā sistēmā.  $L$ -sistēmas paver bezgalīgu ceļu, kā izveidot daudzveidīgus jaunus fraktāļus. Tas ir iemesls, kāpēc šīs sistēmas guvušas plašu lietojumu datorgrafikā, lai konstruētu fraktāļveidīgus kokus un augus.

$L$ -sistēmas grafiskā izpildē izmanto tā saucamo bruņurupuču grafiku (*turtle graphics*). Punkts (bruņurupucis) pārvietojas pa monitoru diskrētiem soļiem, likumsakarīgi iekrāsojot savas pēdas, bet nepieciešamības gadījumā var pārvietoties arī bez zīmēšanas. Mūsu rīcībā ir trīs parametri  $(x, y, \alpha)$ , kur  $(x, y)$  ir bruņurupuča koordinātas, bet  $\alpha$  norāda virzienu, kurā bruņurupucis skatās. Bruņurupucis ir apmācīts izpildīt komandu virkni, kas uzdots ar kodētu vārdu, kura burti tiek lasīti no kreisās uz labo pusi. Kodētais vārds ietver sevī  $L$ -sistēmas darba rezultātu un var būt veidots no šādiem burtiem:

- $F$  — pārvietoties uz priekšu par vienu soli, uzzīmējot sliedi;
- $b$  — pārvietoties uz priekšu par vienu soli, nezīmējot sliedi;
- [ — atvērt zaru;
- ] — aizvērt zaru;
- + — palielināt leņķi  $\alpha$  par  $\theta$ ;
- — samazināt leņķi  $\alpha$  par  $\theta$ .

Soļa garums  $L$  un leņķis  $\theta$  tiek uzdoti darba sākumā un paliek nemainīgi bruņurupuča pārvietošanās laikā. Ja sākuma virziena leņķis  $\alpha$  (leņķis tiek mērīts no pozitīvās koordinātu ass pretēji pulksteņrādītāju virzienam) nav norādīts, tad tiek pieņemts, ka tas ir 0.

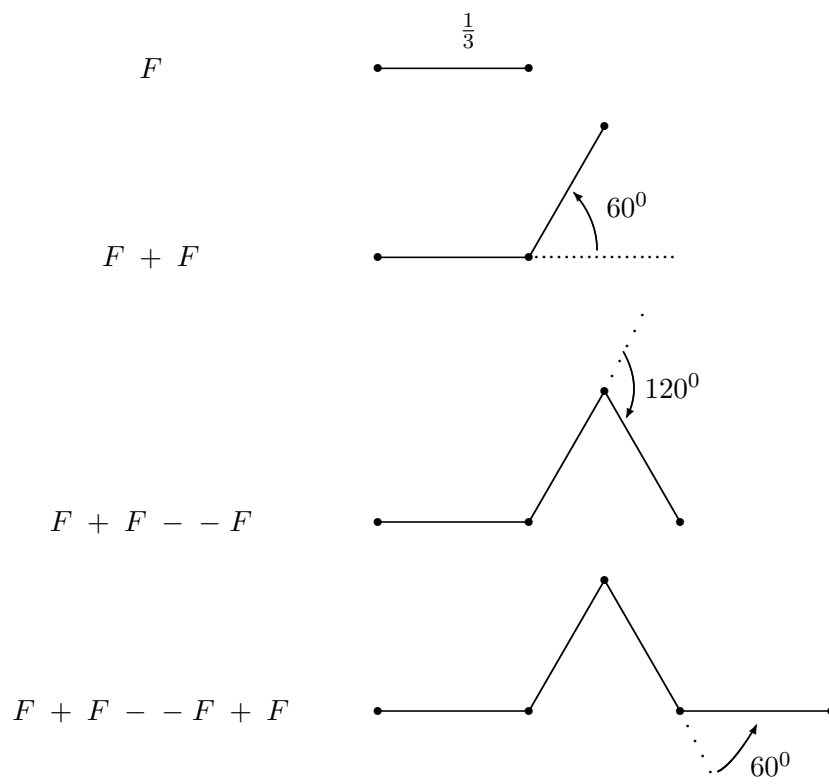
Formāli runājot, determinēta  $L$ -sistēma sastāv no alfabēta, sākuma vārda (*initiator*), ko sauc arī par Aksiomu (*axiom*), un Veidošanas Likuma (*production rule*), kurš norāda, kā jāpārveido vārds pārejot no viena līmeņa uz otru (no iterācijas uz iterāciju).

**Piemērs 4.1.** Aplūkosim Koha līknes un sniegpārslīņas pamatelementus konstrukcijai ar  $L$  sistēmu. Šajā gadījumā  $L$ -sistēmu apraksta:

- ★ pagriešanas leņķis  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ;
- ★ soļa garums  $L = \frac{1}{3}$ ;
- ★ Aksioma:  $F$ ;
- ★ Veidošanas Likums:  $F + F - -F + F$ .

Veidošanas Likums saka, ka jānomaina jebkura līnija (precīzāk,  $F$ , pieņemot,

ka tas ir taisnes nogrieznis vienu vienību garš) ar virkni  $F + F - -F + F$ .  
Kā tas notiek, redzams 4.2.zīmējumā.



4.2. zīm.

$L$ -sistēma, kas rezultātā dod Koha sniegpārslīņu (2.7.zīmējums), ir šāda:

- ★ pagriešanas leņķis  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ;
- ★ soļa garums  $L = \frac{1}{3}$ ;
- ★ Aksioma:  $F + +F + +F$ ;
- ★ Veidošanas Likums:  $F - F + +F - F$ .

Aksiomas  $F + +F + +F$  grafiskais attēls ir regulārs trīsstūris: Bruņurupucis veic vienu soli uz priekšu, tad leņķis  $\alpha$  tiek palielināts par  $\frac{2\pi}{3}$  un bruņurupucis izdara vēl vienu soli uz priekšu, atkal tekošais leņķis tiek palielināts par  $\frac{2\pi}{3}$  un bruņurupucis izdara vēl vienu soli.

Pirmajā iterācijā katrs burts  $F$  sākuma vārdā  $F + +F + +F$  tiek aizvietots ar  $F - F + +F - F$ , rezultātā tiek iegūts:

$$(F - F + +F - F) + +(F - F + +F - F) + +(F - F + +F - F).$$

Noņemot iekavas, būs vārds:

$$F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F.$$

Atkārtojot šo procesu, otrajā iterācijā dabūsim:

$$\begin{aligned} & F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + \\ & F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + \\ & F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F + + F - F. \end{aligned}$$

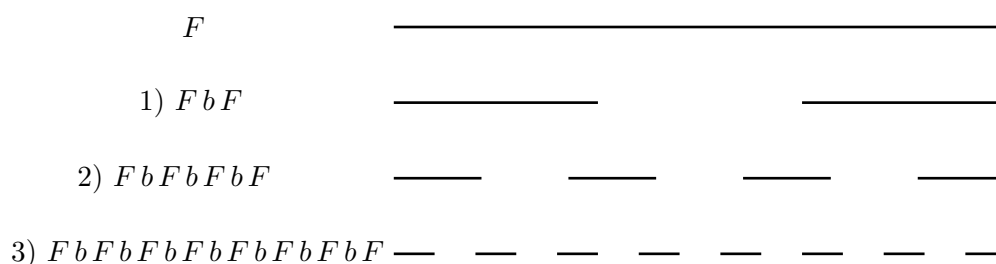
Atkārtojot procesu bezgalīgi daudzas reizes (bet realitātē — redzes izšķirtspējas robežās), gala rezultātā iegūsim Koha sniegpārslīņu. ■

Koha liknes un sniegpārslīņas gadījumā bija diezgan acīmredzami, cik garš soļa garums ir jāizvēlas bruņurupucim katrā iterācijā. Katrā iterācijā mēs samazinājam garumu trīs reizes, bet situācija var būt sarežģītāka daudzos citos gadījumos. Nav vispārīgas teorijas, kas noteiktu, kā jāizvēlas mērogs veidojamajai liknei. Tāpēc vienīgais praktiskais ceļš, lai darbotos, ir izdarīt sākumā pieņēmumu par patvaļīgu soļa garumu, teiksim viena vienība; tad izskaitļot kopumā bruņurupuča komandu virknes grafisko interpretāciju un tad izvēlēties tādu mērogu, lai varētu ērti redzēt attēlu monitorā vai uz izdrukātās lapas.

**Piemērs 4.2.** Šajā piemērā konstruēsim vidējās trešdaļas Kantora kopu. Atkal sākumā izvēlēsimies taisnes nogriežni, kurš tiks sadalīts trijās vienādās daļās un vidējā daļa tiks izgriezta ārā. Šis process tiek atkārtots bezgalīgi daudzas reizes. Lai iegūtu  $L$ -sistēmu, mēs noformēsim šo procedūru ar likumu  $FbF$  (t.i., mēs aizvietosim taisnes nogriežni ar trim nogriežņiem, no kuriem vidējais netiks uzzīmēts). Tātad  $L$ -sistēma ir:

- \* soļa garums  $L = \frac{1}{3}$ ;
- \* Aksioma:  $F$ ;
- \* Veidošanas Likums:  $FbF$ .

4.3.zīmējumā ir redzamas šīs  $L$ -sistēmas pirmās trīs iterācijas.

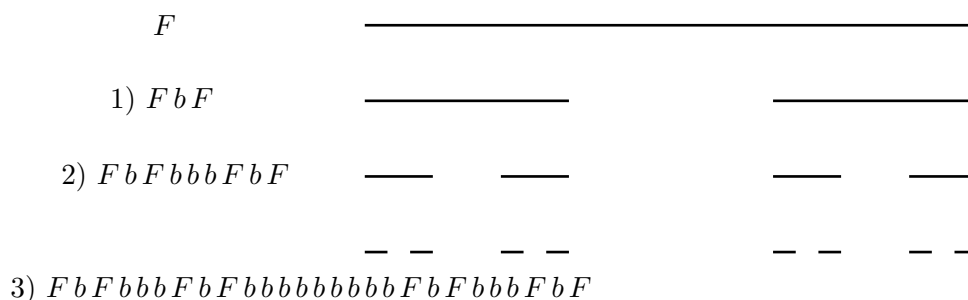


4.3. zīm.



Skaidrs, ka tas nav tas, ko mēs gribējām ieraudzīt. Kur meklējama kļūda? Aplūkosim otro iterāciju uzmanīgāk. Varam novērot, ka vidējā neuzzīmētā intervāla garums ir par mazu: tas ir trīs reizes mazāks, kā tam vajadzētu būt. Šo neuzzīmēto intervālu reprezentē dotajā  $L$  sistēmā viens pats simbols  $b$ . Šis atsevišķais simbols  $b$  ir iegūts no tā  $b$ , kurš tika radīts jau pirmajā iterācijā. Acīmredzot to vajadzētu aizvietot ar triju simbolu virkni  $bbb$  (tas reprezentētu trīs reizes garāku tukšumu kā viens pats  $b$ ). Līdz ar to vidējās trešdaļas Kantora kopas  $L$ -sistēmā ir jānorāda gan tas likums, kas norāda, ar ko aizvietosies nākamajās iterācijās simbols  $F$ , gan likums, kas norāda, ar ko aizvietosies  $b$ . Rezultātā iegūsim:

- ★ soļa garums  $L = \frac{1}{3}$ ;
- ★ Aksioma:  $F$ ;
- ★ Veidošanas Likums:  $F \rightarrow FbF$  un  $b \rightarrow bbb$ .



Patiešām, 4.4.zīmējums rāda sagaidāmo rezultātu. Šis vienkāršais piemērs demonstrē, ka ir viegli iespējams kļūdīties, veidojot atbilstošu  $L$ -sistēmu konkrētam piemēram. ■

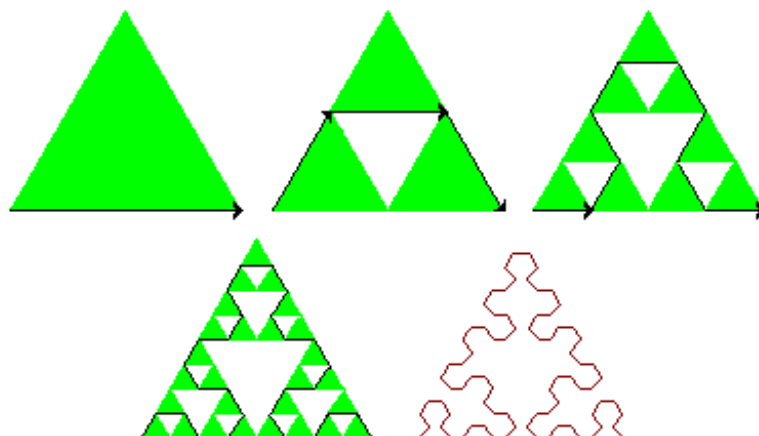
**Piemērs 4.3.** Interesanti, ka ar līknes palīdzību var konstruēt Serpinska trīsstūri, šīs konstrukcijas galamērķi gan sauc savādāk — Serpinska bulta (*Sierpinski Arrowhead*). 4.5.zīmējumā redzams, kā šī līkne veidojas. Serpinska bultas veidošanu var aprakstīt arī ar  $L$ -sistēmu, bet tad nepieciešams sarežģītāks veidošanas likums kā iepriekšējos gadījumos. Acīmredzami, ka pagriešanas leņķis šeit būs  $\theta = 60^\circ$ . Tad mēs varam 4.5.zīmējuma otrā attēla līkni aprakstīt ar  $+F - F - F+$ . Pirmais un pēdējais simbols  $+$  ir nepieciešams, lai bruņurupucis prastu izvēlēties piemērotu virzienu pirmajai un nākamajai iterācijai. Apzīmēsim šo simbolu virkni ar  $L$ . Tad pēc definīcijas bruņurupucis interpretēs šo simbolu  $L$  kā virkni  $+F - F - F+$ . 4.5.zīmējuma trešā attēla līkni varētu aprakstīt ar  $+R - L - R+$ , kur  $R$  tiek interpretēts kā  $-F + F + F-$ . Kombinējot apzīmējumus, nonāksim

pie šādas  $L$ -sistēmas:

★ Aksioma:  $L$ ;

★ Veidošanas Likums:  $L \rightarrow +R - L - R+, R \rightarrow -L + R + L-, + \rightarrow +, - \rightarrow -$ ;

★ pagriešanas leņķis  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .



4.5.zīm. Serspinska bultas konstrukcija.

Apskatītā  $L$ -sistēma 1.iterācijā dod simbolu virkni

$$+R - L - R+$$

(4.5.zīmējuma otrā attēla līkni),

2.iterācijā dod simbolu virkni

$$+ - L + R + L - - + R - L - R + - - L + R + L - +$$

(4.5.zīmējuma trešā attēla līkne),

bet 3.iterācijai atbilst simbolu virkne

$$\begin{aligned} &+ - + R - L - R + + - L + R + L - + + R - L - R + - - + \\ &- L + R + L - - + R - L - R + - - L + R + L - + - - \\ &+ R - L - R + + - L + R + L - + + R - L - R + - + \end{aligned}$$

(4.5.zīmējuma ceturtnā attēla līkne). Protams, tā var turpināt bezgalīgi, ļaujot lasītājam pašam stādīties priekšā gala rezultātu. ■

**Piemērs 4.4.** Šūnu virknes aizstāšana ar simbolu virkni ir viegli saprotama, bet kā mēs varētu reprezentēt sazarotu struktūru (piemēram, tāda

ir tipiska kokiem) ar simbolu virkni, kas ir tikai lineārs simbolu saraksts? Šai problēmai ir vienkāršs risinājums: mēs izveidosim jaunu simbolu, kas apzīmēs sazarošanās punktu — to mēs apzīmēsim ar kreiso iekavu [. Šai kreisajai iekavai jāskan ar atbilstošu noslēdzošo labo iekavu ], kas norāda, ka šajā punktā zarošanās definīcija ir pabeigta. Piemēram, apskatīsim simbolu virkni

$$ABA[BBAA][CCBB]ABA[AABB]ABA.$$

Izmetot ārā sazarošanās daļu, pāri paliek virkne

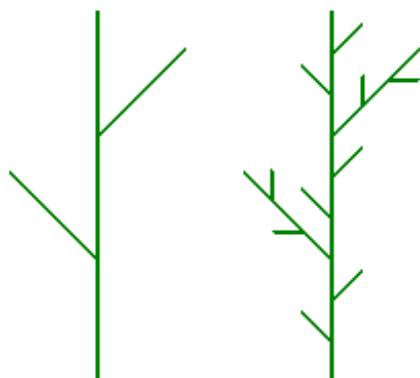
$$ABAABAABA,$$

kura reprezentē auga stumbra daļu, no kuras izaug trīs zari.

Kā bruņurupucis interpretēs jaunus simbolus? Vispirms, sastopoties ar simbolu [, viņam ir jāatceras tā tagadējā pozīcija un virziens. Tehniski izsakoties, bruņurupuča stāvoklis tiek ierakstīts atmiņā un saglabāts. Tad tiek uzzīmēts zars, vienkārši interpretējot iekavās esošo komandu virkni. Zarošanās beigas norāda simbols ]. Tad bruņurupucim ir jāatgriežas atpakaļ uz to sazarošanās punktu, kurš noglabāts atmiņā.

Apskatīsim dažus vienkāršus piemērus. Vispirms apskatīsim kādu zālaugu. Tam būs stumbrs ar trīs segmentiem un diviem galvenajiem zariem. Jebkurš segments un jebkurš zars izskatīsies tāds pats (t.i., tie sastāvēs no trim mazākiem segmentiem un diviem zariem). Atbilstošā  $L$ -sistēma ir šāda:

- ★ Aksioma:  $F$ ;
- ★ Veidošanas Likums:  $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$ ;
- ★ pagriešanas leņķis  $\theta = 45^\circ$ .



4.6.zīm.  $L$ -sistēmas (zālaugs) pirmās divas iterācijas.

4.6.zīmējumā redzamas divas pirmās iterācijas. Pirmais iterācijai atbilst simbolu virkne

$$F[+ F]F[- F]F,$$

bet otrās iterācijas aprakstu veido simbolu virkne:

$$F[+ F]F[- F]F[+ F[+ F]F[- F]F]F[+ F]F[- F]F[- F[+ F]F[- F]F]F[+ F]F[- F]F.$$

Turpinot tālāk, šis augs "apaugs" ar sīkākām zariņiem-lapiņām, kļūstot aizvien līdzīgāks dabā redzamajiem.

Lai gūtu vēl lielāku realitātes iespaidu, var pieļaut iespēju, ka sazaršanās notiek atšķirīgi dažādiem zariem (t.i., katram ir savs veidošanās likums) vai sazaršanās notiek ar zināmu varbūtību (*stochastic plant*). ■

Dažu  $L$ -sistēmu aprakstu un darbību var atrast  
<http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-03b/projects-03b/skinner/index.htm>

## NODAĻA NR. 5

### Saspiedējattēlojumi un Hausdorfa metrika

**Anotācija.** Saspiedējattēlojums. Saspiešanas koeficients (Lipšica konstante). Nekustīgais punkts. Nekustīgā punkta eksistences teorēma (Banaha teorēma) un daži svarīgi novērtējumi. Hausdorfa attāluma  $D$  divas ekvivalentas definīcijas. Hausdorfa attālums ir metrika. Telpas  $(H, D)$  pilnība un kompaktība.

Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa.

**Definīcija 5.1.** Attēlojumu  $T : X \rightarrow X$  sauc par **saspiedējattēlojumu** (*contraction mapping*), ja eksistē tāds skaitlis  $s$ :  $0 < s < 1$ , ka

$$\forall x, y \in X \quad d(T(x), T(y)) \leq sd(x, y).$$

Skaitli  $s$  sauc par **saspiešanas koeficientu**. Saspiedējattēlojums ir speciālgadījums vispārīgākam gadījumam, kur  $0 < s < \infty$ , — to sauc par **Lipšica attēlojumu** un  $s$  tad dēvē par **Lipšica konstanti**. Tādējādi varam teikt, ka saspiedējattēlojums ir Lipšica attēlojums ar Lipšica konstanti, kas mazāka par 1.

Viegli pārlicināties, ka diferencējama reālā mainīgā funkcija  $f(x)$  ir Lipšica attēlojums, ja visiem  $x \in \mathbf{R}$ :  $|f'(x)| \leq s < \infty$ . Ja pie tam esam konstatējuši faktu, ka  $s < 1$ , tad  $f$  ir saspiedējattēlojums. Piemēram,  $f(x) = \frac{2}{3} \sin x$  ir saspiedējattēlojums kopā  $\mathbf{R}$ , jo  $|f'(x)| = \frac{2}{3} \cos x$  un  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ . Interessants piemērs ir funkcija  $\cos x$  intervālā  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , tas nav saspiedējattēlojums slēgtajā intervālā, jo tad  $s = 1$ , bet jebkuram  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  funkcija  $\cos x$  ir saspiedējattēlojums intervālā  $[0; \alpha]$ .

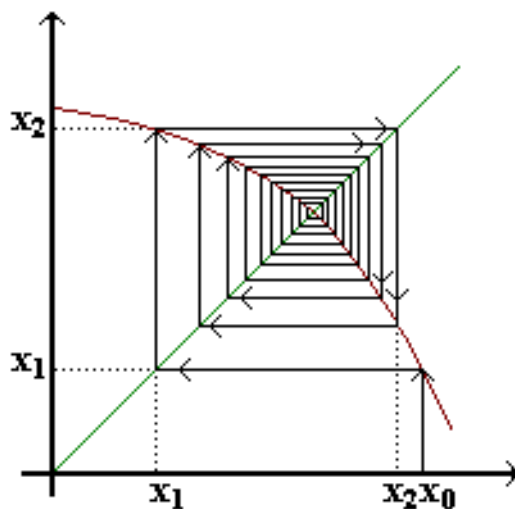
Saspiedējattēlojumu teorijas pamatrezultāti ir saistīti ar nekustīgo punktu teoriju. Punktu  $x \in X$  sauc par attēlojuma  $f : X \rightarrow X$  **nekustīgo punktu**, ja  $f(x) = x$ . Nekustīgā punkta jēdzienam ir liela nozīme matemātikā, kaut arī tā varbūt tas neizskatās no pirmā acumirkļa. Nekustīgā punkta metode ir pamatinstruments matemātiskajā analizē, lai pierādītu eksistences teorēmas.

Ar tās palīdzību var, pirmkārt, pierādīt dažādu vienādojumu (algebrisku, diferenciālvienādojumu, integrālvienādojumu, u.c.) atrisinājumu eksistenci, un otrkārt, konstruēt šo atrisinājumu. Piemēram, plaši pazīstamā Ņūtona metode, kas meklē vienādojuma saknes, balstās uz nekustīgā punkta eksistenci. Mēs šīs teorijas rezultātus izmantosim, lai pierādītu kopu virknes robežas eksistenci (precīzāk, konvergenci uz fraktāli), un izstrādāsim vispārīgu shēmu dažāda veida fraktāļu konstrukcijai.

Pieņemsim, ka  $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ ,  $f$  ir diferencējama un  $\forall x \in [a; b] : |f'(x)| \leq s < 1$ , t.i.,  $f$  ir saspīdējattēlojums. Iterāciju metode, kas atrod nekustīgo punktu, ir sekojoša. Apzīmēsim ar  $x_0$  patvaļīgu punktu no intervāla  $[a; b]$ . Konstruēsim iterāciju virkni:

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$$

Teorēma 5.1, kuru pierādīsim tālāk, apgalvo, ka  $x_n$  konverģē uz nekustīgo punktu  $x_f$ , pie tam ir tikai viens vienīgs nekustīgais punkts. Konverģences procesu var attēlot grafiski ar tā saucamo grafisko analīzi jeb tīklveida diagrammu. Diagramma tiek veidota šādi: sākam punktā  $(x_0, x_1)$ , pārvietojamies uz punktu  $(x_1, x_1)$ , pēc tam uz  $(x_1, x_2)$ , utt. Vispārīgi runājot, pārejam no punkta  $(x_{n-1}, x_n)$  uz  $(x_n, x_n)$ , pēc tam uz  $(x_n, x_{n+1})$ . Attēlojot šos soļus zīmējumā, ieraudzīsim konverģences procesa  $n \rightarrow \infty$  grafisko reprezentāciju (skatīt 5.1.zīmējumu).



5.1.zīm. Tīklveida diagramma (jeb grafiskā analīze).

Protams, uzskatāms zīmējums iespējams tikai reālvērtīgas funkcijas gadījumā. Tomēr precīzi tāds pats analītiskais rezultāts ir spēkā jebkuram saspiedējattēlojumam, kurš definēts pilnā metriskā telpā.

**Lemma 5.1.** Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa,  $T : X \rightarrow X$  — saspiedējattēlojums ar konstanti  $s$ ,  $x_0 \in X$  — patvaļīgs punkts. Apskatīsim iterāciju procesu  $x_k = T(x_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Tādā gadījumā visiem  $k$  izpildās nevienādība

$$d(x_0, x_k) \leq \frac{1}{1-s} d(x_0, x_1).$$

**Pierādījums.** Vairākas reizes izmantojot trīsstūra nevienādību, iegūsim:

$$d(x_0, x_k) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{k-1}, x_k).$$

Katru labās puses locekli  $d(x_i, x_{i+1})$  varam novērtēt šādi:

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &= d(T(x_{i-1}), T(x_i)) \leq \\ &\leq sd(x_{i-1}, x_i) = sd(T(x_{i-2}), T(x_{i-1})) \leq \\ &\leq s^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) \leq \dots \leq s^i d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ievietosim šos novērtējumus nevienādībā un, izmantojot ģeometriskās progresijas summas formulu, iegūsim

$$\begin{aligned} d(x_0, x_k) &\leq d(x_0, x_1) + sd(x_0, x_1) + s^2 d(x_0, x_1) + \dots + s^{k-1} d(x_0, x_1) = \\ &= d(x_0, x_1)(1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1}) \leq \\ &\leq d(x_0, x_1)(1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1} + \dots) = \\ &= \frac{1}{1-s} d(x_0, x_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nākošā teorēma izmanto pilnas metriskas telpas jēdzienu. Atgādināsim svarīgākās definīcijas.

**Definīcija 5.2.** Metrisku telpu  $(X, d)$  sauc par **pilnu metrisku telpu**, ja jebkura telpas  $X$  Košī virkne konverģē uz telpas  $X$  punktu.

**Definīcija 5.3.** Metriskas telpas  $(X, d)$  virkni  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sauc par **Košī virkni**, ja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n, m > N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Mūsu gadījumā ir svarīgi zināt, ka telpa  $\mathbf{R}^n$  ar Eiklīda metriku, t.i., attālums starp jebkuriem diviem telpas punktiem  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$  ir definēts ar vienādību

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

ir pilna metriska telpa. Pie tam apakškopa  $X$  telpā  $\mathbf{R}^n$  ar Eiklīda metriku ir pilna metriska telpa tad un tikai tad, ja  $X$  ir slēgta kopa.

Telpa  $\mathbf{R}^n$  ir pilna metriska telpa arī ar citām metrikām, piemēram, ar maksimuma metriku, kas definēta šādi:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^2 \\ d_{max}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

vai režģa jeb moduļu metriku, kas definēta šādi:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^2 \\ d_{|\cdot|}(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Racionālo skaitļu kopa nav pilna metriska telpa, jo eksistē Košī virkne no racionāliem skaitļiem, kura konverģē, bet robeža nav racionāls skaitlis. Piemēram, tāda virkne ir

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Šī virkne konverģē uz iracionālu skaitli  $\frac{\pi}{4}$ .

**Teorēma 5.1.** (poļu matemātiķa S.Banaha (1892-1945) teorēma) Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir pilna metriska telpa un  $T : X \rightarrow X$  ir saspiedējattēlojums. Tādā gadījumā attēlojumam  $T$  eksistē telpā  $X$  viens vienīgs nekustīgais punkts, t.i.,

$$\exists x^* \in X : T(x^*) = x^*.$$

Kā arī iterāciju virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , kas veidota šādi:

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

jebkuram sākumpunktam  $x_0 \in X$  konverģē uz nekustīgo punktu  $x^*$ , t.i.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

**Pierādījums.** Vispirms pierādīsim unitāti, proti, ja nekustīgais punkts eksistē, tad tas ir viens vienīgs. Apzīmēsim ar  $s$  attēlojuma  $T$  saspiešanas koeficientu. Pieņemsim, ka attēlojumam  $T$  eksistē divi nekustīgie punkti  $x^*$  un  $x^0$ , tad

$$d(x^*, x^0) = d(T(x^*), T(x^0)) \leq s d(x^*, x^0).$$

Tā kā  $s < 1$ , tad nevienādība var izpildīties tikai tad, ja attālumi ir 0, t.i.,  $x^* = x^0$ .



Izvēlēsīmies patvaļīgu punktu  $x_0 \in X$  un pierādīsim, ka iterāciju virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , kas veidota ar sakarību  $x_n = T(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ir Košī virkne.

Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq s d(x_{n-1}, x_n) = s d(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})) \leq \\ &\leq s^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) = \dots \leq s^n d(x_0, x_1) = s^n d(x_0, T(x_0)). \end{aligned}$$

Tāpēc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq \\ &\leq (s^n + s^{n+1} + \dots + s^{n+m-1}) d(x_0, T(x_0)) = \\ &= \frac{s^n - s^{n+m}}{1-s} d(x_0, T(x_0)) < \frac{s^n}{1-s} d(x_0, T(x_0)). \end{aligned}$$

Tā kā  $0 < s < 1$ , tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s^n}{1-s} d(x_0, T(x_0)) = 0,$$

un tāpēc jebkuram  $\varepsilon > 0$  eksistē tāds  $N \in \mathbf{N}$ , ka visiem  $n > N$  izpildās nevienādība

$$\frac{s^n}{1-s} d(x_0, T(x_0)) < \varepsilon.$$

Bet tādā gadījumā visiem  $n > N$  un visiem  $m \geq 0$  izpildīsies nevienādība

$$d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon,$$

t.i., virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ir Košī virkne. Tā kā telpa  $X$  ir pilna metriskā telpa, tad šī Košī virkne konverģē uz punktu  $x^* \in X$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^* \in X.$$

Attēlojuma  $T$  nepārtrauktības dēļ, izpildās robežvienādības

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x^*).$$

Tātad  $x^* = f(x^*)$ , t.i.,  $x^*$  ir  $T$  nekustīgais punkts.

Pārejot uz robežu ( $m \rightarrow \infty$ ) augstāk pierādītajā nevienādībā

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{s^n}{1-s} d(x_0, T(x_0)),$$

iegūsim novērtējumu

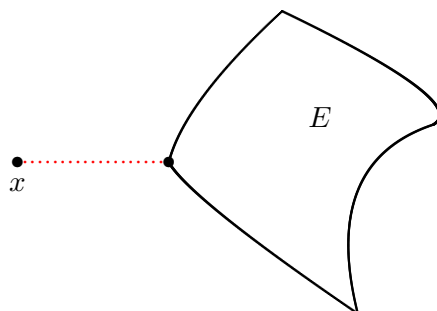
$$d(x_n, x^*) \leq \frac{s^n}{1-s} d(x_0, T(x_0)). \quad \blacksquare$$

Viens no galvenajiem fraktāļu teorijas matemātiskajiem aspektiem ir jautājums par noteikta tipa kopu virknes konverģenci uz fraktāli. Piemēram, lai konstruētu Serpinska trīsstūri, mēs izvēlamies slēgtu trīsstūri, no kura katrā iterācijā izslēdzam iekšējo vidējo trīsstūri, iegūstot aproksimējošu kopu. Liekas pilnīgi skaidrs, ka robežkopa patiešām ir fraktālis.

Pirmais uzdevums — noskaidrot, ko nozīmē kopu virknes robeža. Šādam nolūkam nepieciešams definēt atbilstošu metriku mūs interesējošo kopu telpā. Metriku, kuru mēs tūlīt definēsim, sauc par Hausdorfa metriku. Hausdorfa metrika tiek definēta **kopā  $H$  — telpas  $\mathbf{R}^n$  visu netukšo un kompakto kopu kopā**. Tādēdādi kopas  $H$  punkti ir kompaktas kopas. Telpā  $\mathbf{R}^2$  kopas  $H$  punkti ir slēgtas plaknes figūras kā, piemēram, trīsstūris, riņķis, kā arī Serpinska trīsstūris un daudzi citi fraktāļi. Kompaktas kopas prasība neierobežos mūsu iegūstamos rezultātus, jo visās mūsu konstrukcijās mēs izmantosim tieši kompaktas kopas (atcerieties, ka telpā  $\mathbf{R}^n$  kompakta kopa ir sinonīms slēgtai un ierobežotai kopai), pie tam, izrādās, ka robežkopas — fraktāļi — vienmēr ir kompaktas kopas. Neskatoties uz to, ka par pamatmetriku telpā  $\mathbf{R}^n$  mēs izmantojam Eiklīda metriku, definīcijas un teorēmas no šīs nodaļas būs lietojamas patvaļīgai pilnai metrikai. Principā katrai pilnai metriskai telpai ar to metriku, kas rada telpas pilnību, atbilst kaut kāda Hausdorfa metrika kopā  $H$ .

Definēsim attālumu starp punktu  $x \in \mathbf{R}^n$  un kopu  $E \subset \mathbf{R}^n$  šādi (5.2.zīmējums ilustrē situāciju telpā  $\mathbf{R}^2$ )

$$dis(x, E) = \min\{d(x, y) \mid y \in E\}.$$



5.2. zīm.

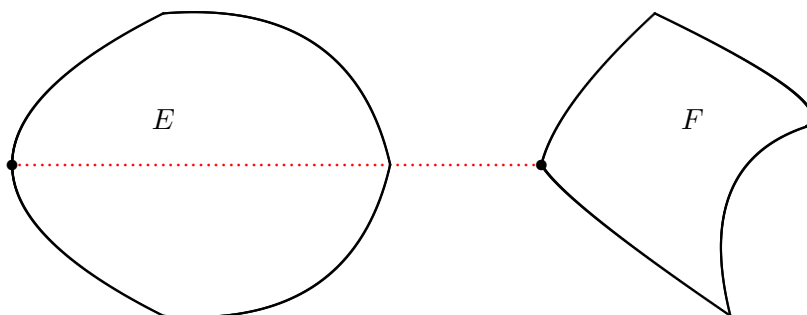
**Piezīme.** Attālumu šeit un tālāk šajā nodaļā nevajadzētu automātiski interpretēt kā metriku. Daži attālumi, ko mēs šeit apskatīsim, neapmierina metrikas aksiomas. ■

Precīzi matemātiski runājot,  $dis(x, E)$  definīcijā *min* vietā parasti lieto

*inf*. Bet, tā kā mēs apskatām tikai kompaktas kopas  $E$ , tad  $\inf\{d(x, y) \mid y \in E\}$  sakrīt ar  $\min\{d(x, y) \mid y \in E\}$ .

Vispārināsim attāluma jēdzienu no punkta līdz kopai, apskatot attālumu starp divām kompakām kopām  $E$  un  $F$ , definējot to šādi (5.3.zīmējums ilustrē situāciju telpā  $\mathbf{R}^2$ ):

$$dis(E, F) = \max\{dis(x, F) \mid x \in E\}.$$



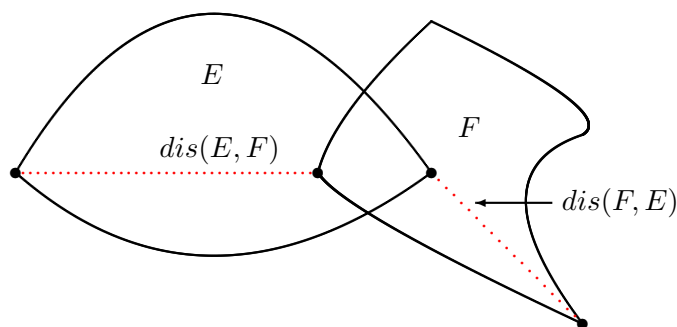
5.3. zīm.

Precīzi matemātiski runājot,  $dis(E, F)$  definīcijā *max* vietā parasti lieto *sup*. Bet atkal, tā kā mēs apskatām tikai kompaktas kopas  $E$  un  $F$ , tad  $\sup\{d(x, F) \mid x \in E\}$  sakrīt ar  $\max\{d(x, F) \mid x \in E\}$ . Pie tam vienmēr eksistē tādi punkti  $x_0 \in E$  un  $y_0 \in F$ , ka  $dis(E, F) = d(x_0, y_0)$ .

Dabīgi jautāt, vai attālums  $dis(E, F)$  ir metrika? Acīmredzami tā nav. Neizpildās jau pati pirmā metriks aksioma gadījumā, ja  $E \subset F$  un  $E \neq F$ , jo tad  $dis(E, F) = 0$ . Acīmredzami, ka neizpildās arī simetrijas aksioma.

**Definīcija 5.4.** Pieņemsim, ka  $E, F \in H$ . Par **Hausdorfa attālumu** starp kopām  $E$  un  $F$  sauc skaitli

$$D(E, F) = \max\{dis(E, F), dis(F, E)\}.$$



5.4. zīm.

Mēs pierādīsim, ka Hausdorfa attālums ir metrika, pārbaudot metrikas aksiomas. Bet dažas pierādījuma nianšes tiek atstātas lasītāja ziņā kā vingrinājumi, proti, var pierādīt, ka

- 1) ja  $E \subset F$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ , tad  $dis(x, F) \leq dis(x, E)$ ;
- 2) ja  $E \neq F$ , tad  $dis(E, F) \neq 0$  vai arī  $dis(F, E) \neq 0$ ;
- 3) ja  $E, F, G \in H$ , tad  $dis(E \cup F, G) = \max\{dis(E, G), dis(F, G)\}$ .

**Teorēma 5.2.** Hausdorfa attālums ir metrika visu telpas  $\mathbf{R}^n$  netukšo un kompakto kopu kopā  $H$ .

**Pierādījums.**  $D(E, F) \geq 0$  — šī īpašība seko no  $dis(E, F)$  un  $dis(F, E)$  definīcijām, abi šie lielumi ir nenegatīvi.

Ja  $E = F$ , tad acīmredzami, ka  $D(E, F) = 0$ . Savukārt, ja  $D(E, F) = 0$ , tad pēc Hausdorfa attāluma definīcijas tas iespējams tikai tad, ja  $dis(E, F) = 0 = dis(F, E)$ . Saskaņā ar piebildi 2 pirms teorēmas seko, ka  $E = F$ .

$D(E, F) = D(F, E)$  — seko tieši no Hausdorfa attāluma definīcijas.

Atliek pierādīt trīsstūra nevienādību, t.i., jebkurām kopām  $E, F, G \in H$  jāizpildās nevienādībai

$$D(E, G) \leq D(E, F) + D(F, G).$$

Vispirms parādīsim, ka jebkurām kopām  $E, F, G \in H$  izpildās nevienādības

$$\begin{aligned} dis(E, G) &\leq dis(E, F) + dis(F, G) \text{ un} \\ dis(G, E) &\leq dis(G, F) + dis(F, E). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ievērosim, ka visiem nenegatīviem skaitļiem  $a, b, c, d$  izpildās

$$\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}.$$

Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} D(E, G) &= \max\{dis(E, G), dis(G, E)\} \leq \\ &\leq \max\{dis(E, F) + dis(F, G), dis(G, F) + dis(F, E)\} \leq \\ &\leq \max\{dis(E, F), dis(F, E)\} + \max\{dis(F, G), dis(G, F)\} = \\ &= D(E, F) + D(F, G). \end{aligned}$$

Pierādīsim pirmo no (5.1) nevienādībām, otru var pierādīt analogi. Pieņemsim, ka  $x \in E$ . Tad

$$dis(x, G) = \min\{d(x, y) \mid y \in G\}.$$

Katram  $z \in F$  izpildās:

$$\begin{aligned} dis(x, G) &\leq \min\{d(x, z) + d(z, y) \mid y \in G\} \leq \\ &\leq d(x, z) + \min\{d(z, y) \mid y \in G\} \leq \\ &\leq dis(x, F) + \max\{dis(z, G) \mid z \in F\} \leq \\ &\leq dis(x, F) + dis(F, G). \end{aligned}$$

Tā kā nevienādības ir patiesas jebkuram  $x \in E$ , tad

$$dis(E, G) \leq dis(E, F) + dis(F, G). \quad \blacksquare$$

Paskatīsimies, kā var izmantot Hausdorfa metriku. Pieņemsim, ka  $(X, d)$  ir metriska telpa. Atgādināsim, ka telpas  $X$  punktu virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  konverģē uz punktu  $x \in X$  metrikas  $d$  nozīmē, ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ . Ja punkti ir netukšas kompakas kopas  $E_n$  un  $E$  un tiek izmantota Hausdorfa metrika, tad apgalvojums par konverģenci būs pierakstāms šādi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} D(E_n, E) = 0.$$

Praksē noskaidrot Hausdorfa attālumu starp divām kopām var nebūt vienkārši. Praksē tiek izmantota alternatīva pieeja, kas ļauj dziļāk saprast Hausdorfa metrikas jēdzienu.

Apskatīsim patvaļīgu kopu  $E \subset \mathbf{R}^n$  un fiksēsim skaitli  $r > 0$ . **Kopas  $E$  paplašinājums par rādiusu  $r$** , kuru apzīmē ar  $E + r$ , tiek definēts kā vektoru summa  $E + \overline{B}(0, r)$ , kur  $\overline{B}(0, r)$  ir slēgta lode ar rādiusu  $r$  un centru koordinātu sākumpunktā. To var pierakstīt arī citā ekvivalentā veidā

$$E + r = \bigcup_{x \in E} \overline{B}(x, r).$$

Dažkārt literatūrā paplašinājumu definē ar vaļēju ložu palīdzību, bet definīcija ar slēgtām lodēm atvieglina pierādīt nākamo rezultātu.

**Teorēma 5.3.** Pieņemsim, ka  $E$  un  $F$  ir divas netukšas kompakas  $\mathbf{R}^n$  apakškopas un  $\varepsilon > 0$ . Tad Hausdorfa attālums apmierina sakarību:

$$D(E, F) \leq \varepsilon \Leftrightarrow (E \subset F + \varepsilon \text{ un } F \subset E + \varepsilon).$$

**Pierādījums.** Mēs parādīsim, ka  $dis(E, F) \leq \varepsilon$  tad un tikai tad, ja  $E \subset F + \varepsilon$ . Ievērojot simetriju, novērtējums  $dis(F, E) \leq \varepsilon$  izpildās tad un tikai tad, ja  $F \subset E + \varepsilon$ .

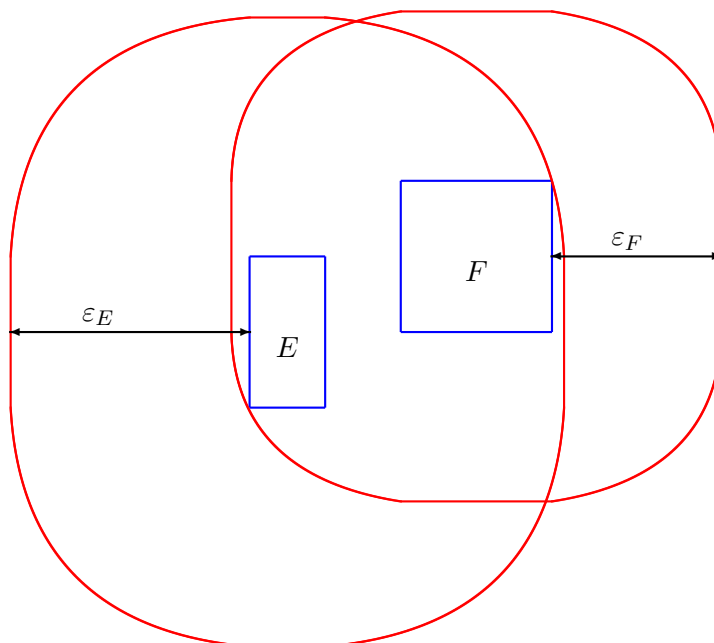
Pieņemsim, ka  $dis(E, F) \leq \varepsilon$ . Tādā gadījumā jebkurai kopai  $x \in E$  izpildās  $dis(x, F) \leq \varepsilon$ , no šejienes seko, ka  $x \in F + \varepsilon$ , tāpēc  $E \subset F + \varepsilon$ .

No otras puses, ja  $E \subset F + \varepsilon$ , tad katram  $x \in F$  eksistē tāds punkts  $y \in E$ , ka  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . no šejienes seko, ka  $dis(x, F) \leq \varepsilon$  visiem  $x \in F$ , un tāpēc  $dis(E, F) \leq \varepsilon$ . ■

Ievērojot Teorēmu 5.3, Hausdorfa attālumu starp divām kopām var ekvivalenti definēt šādi:

**Definīcija 5.5.** Pieņemsim, ka  $E, F \in H$ . Par **Hausdorfa attālumu** starp kopām  $E$  un  $F$  sauc skaitli

$$D(E, F) = \min\{\varepsilon > 0 \mid E \subset F + \varepsilon \text{ un } F \subset E + \varepsilon\}.$$



5.5. zīm.

5.5.zīmējumā apskatītas divas kopas  $E$  un  $F$ , kuru kontūras uzzīmētas ar zilu krāsu. Ar sarkanu krāsu iezīmētas to apkārtnu robežas, ar kurām izpildās iekļāvumi (ar mazākajām iespējamajām  $\varepsilon_E$  un  $\varepsilon_F$  vērtībām)

$$F \subset E + \varepsilon_E \text{ un } E \subset F + \varepsilon_F.$$

Tā kā  $\varepsilon_E > \varepsilon_F$ , tad  $F \subset E + \varepsilon_E$  un  $E \subset F + \varepsilon_E$ . Tātad šajā gadījumā  $D(E, F) = \varepsilon_E$ .

**Teorēmas 5.3 Sekas 5.1.** Pieņemsim, ka  $E$  un  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ir netukšas kompaktas kopas telpā  $\mathbf{R}^n$ . Tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$$

Hausdorfa metrikas nozīmē tad un tikai tad, ja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N : E_n \subset E + \varepsilon \text{ un } E \subset E_n + \varepsilon.$$

**Sekas 5.2.** Pieņemsim, ka  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ir netukšas kompaktas kopas telpā  $\mathbf{R}^n$ , kas sakārtotas iekļāvuma secībā:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

Tādā gadījumā kopa

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

ir netukša un kompakta un eksistē robeža

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$$

Hausdorfa metrikā.

**Pierādījums.** Izvēlēsimies katrā kopā  $E_n$  punktu  $x_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Tā kā visi šie punkti pieder kopai  $E_1$ , kura ir kompakta kopa, tad kopas kompaktibas dēļ punktu virkne  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  satur konverģentu apakšvirkni  $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x.$$

Tā kā  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$  un  $x_n \in E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tad katram  $k = 1, 2, 3, \dots$  visi virknes locekļi  $\{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \dots\}$  pieder kopai  $E_{n_k}$ . Virkne  $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$  konverģē uz punktu  $x$ , kopa  $E_{n_k}$  ir slēgta kopa (jebkura kompakta kopa ir slēgta kopa!) , tāpēc  $x \in E_{n_k}$  jebkuram  $n$ , t.i.,

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}.$$

Bet kopu iekļāvuma dēļ ir spēkā vienādība

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

tātad

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \text{ un } \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset.$$

Slēgtu kopu šķēlums ir slēgta kopa; kompakta kopas slēgta apakškopa ir kompakta kopa, tātad kopa  $E$  ir netukša kompakta kopa.

Lai pierādītu kopu virknes konverģenci Hausdorfa metrikā, saskaņā ar Sekām 5.1 nepieciešams pierādīt, ka

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N : E_n \subset E + \varepsilon \text{ un } E \subset E_n + \varepsilon.$$

Tā kā kopas sakārtotas iekļāvuma secībā, tad  $E \subset E_n$ , tāpēc jāpierāda tikai  $E_n \subset E + \varepsilon$ . Kopa  $E + B(0, \varepsilon)$  (šeit  $B(0, \varepsilon)$  ir vaļēja lode ar centru punktā 0 un rādiusu  $\varepsilon$ ) ir vaļēju ložu apvienojums, tāpēc tā ir vaļēja kopa un ietilpst kopā  $E + \varepsilon$ . Tā kā kompaktu kopu, kas iekļaujas viena otrā, šķēlums ietilpst vaļējā kopā, tad arī pašas kompakta kopas ietilpst vaļējā kopā. Tādējādi kompakta kopas  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , iekļaujas kopā  $E + \varepsilon$ . ■

Tikko pierādītajām sekām ir cieša saistība ar tiem fraktāļiem, kuri tiek veidoti, izmetot katrā iterācijā noteiktu vaļēju kopu no sākotnējās kopas. Piemēram, tāda ir Kantora kopa, arī Serpinska trīsstūris un paklājs. Saskaņā ar Sekām 5.2 katrā konstrukcijas solī iegūtās kopas veido konverģentu kopu virkni Hausdorfa metrikā, kuras robeža ir netukša un kompakta kopa, vienā gadījumā tā ir Kantora kopa (putekļi), otrā Serpinska trīsstūris vai paklājs.

**Teorēma 5.4.** Pieņemsim, ka  $H$  ir visu netukšo un kompakto  $\mathbf{R}^n$  apakškopa kopa un  $D$  ir Hausdorfa metrika. Tādā gadījumā telpa  $(H, D)$  ir pilna metriska telpa.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ir telpas  $H$  tāda punktu (katrs punkts ir netukša kompakta kopa!) virkne, kura apmierina Koši kritēriju Hausdorfa metrikā, tas nozīmē, ka

$$\exists M > 0 \quad D(A_1, A_n) < M, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

tāpēc

$$A_n \subset A_1 + M.$$

Definēsim kopu:

$$E_n = \overline{(A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(svītra virs apvienojuma nozīmē kopas slēgumu, t.i., tā ir mazākā slēgtā kopa, kas satur kopu apvienojumu).



Kopas  $E_n$  ir slēgtas un ierobežotas telpā  $\mathbf{R}^n$ , tātad tās ir kompaktas kopas. Apzīmēsim

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Tā kā kopas  $E_n$  ir sakārtotas iekļāvuma secībā, tad no Sekām 5.2 seko, ka kopu virkne  $E_n$  konverģē uz kopu  $E$  Hausdorfa metrikā, ja  $n \rightarrow \infty$ . Parādīsim, ka  $E$  ir arī kopu virknes  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  robeža Hausdorfa metrikā, t.i.,

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n. \quad (5.2)$$

Izvēlēsimies patvaļīgu  $\varepsilon > 0$ . Eksistē tāds naturāls skaitlis  $N_1$ , ka visiem  $n > N_1$  izpildās

$$E \subset E_n + \varepsilon \text{ un } E_n \subset E + \varepsilon.$$

Otrais iekļāvums nozīmē, ka visiem  $n > N_1$

$$(A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots) \subset E + \varepsilon,$$

t.i.,  $A_n \subset E + \varepsilon$ . Tā kā  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  apmierina Košikritēriju Hausdorfa metrikā, tad eksistē tāds naturāls skaitlis  $N_2$ , ka visiem  $n, m > N_2$  izpildās

$$A_n \subset A_m + \varepsilon \text{ un } A_m \subset A_n + \varepsilon.$$

Fiksēsim  $n > N_2$ . Jebkuram  $m > N_2$  būs spēkā

$$\begin{aligned} (A_m \cup A_{m+1} \cup A_{m+2} \cup \dots) &\subset A_n + \varepsilon, \\ E_m = \overline{(A_m \cup A_{m+1} \cup A_{m+2} \cup \dots)} &\subset A_n + \varepsilon, \\ E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m &\subset A_n + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tādējādi, ja  $n > \max\{N_1, N_2\}$ , tad  $A_n \subset E + \varepsilon$  un  $E \subset A_n + \varepsilon$ , kas arī nozīmē (5.2) izpildīšanos. ■

Telpas  $\mathbf{R}^n$  ar Eiklīda metriku apakškopa ir kompakta tad un tikai tad, ja tā ir slēgta un ierobežota. Patvaļīgas metriskas telpas  $(X, d)$  gadījumā kopu sauc par **kompaktu kopu**, ja jebkurai telpas  $X$  punktu virknei  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eksistē tāda apakšvirkne  $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ , kura konverģē uz telpas  $X$  punktu  $x \in X$ . Var parādīt, ka šī definīcija ir ekvivalenta ar augstākminēto, ja  $X \subset \mathbf{R}^n$ .

Var pierādīt, ja  $X$  apakškopa ir kompakta kopa, tad tā ir slēgta un ierobežota, var parādīt, ka tā ir arī pilna telpa, bet pretējā virzienā ar šiem nosacījumiem ir par maz, lai apgalvotu, ka kopa ir kompakta. Vispārīgā

gadījumā apgrieztajam apgalvojumam nepieciešams pilnīgas ierobežotības jēdziens. Metrisku telpu  $(X, d)$  sauc par **pilnīgi ierobežotu**, ja jebkuram  $r > 0$  telpā  $X$  eksistē galīgs  $r$ -tīkls, t.i., eksistē tāda kopa  $A \subset X$ , ka

$$\forall x \in X \exists y \in A \quad d(x, y) < \varepsilon.$$

Viegli pārlicināties, ka jebkura pilnīgi ierobežota kopa ir ierobežota. Bet pretējs apgalvojums nav patiess: eksistē tādas ierobežotas kopas, kuras nav pilnīgi ierobežotas. (skatīt L.D.Kudravcev, Kurs matematičeskogo analiza, T.3, Moskva, Visšaja škola, krievu val.) Ir spēkā apgalvojums: metriska telpa  $(X, d)$  ir kompakta tad un tikai tad, ja tā ir pilna metriska telpa un pilnīgi ierobežota.

Ņemot vērā iepriekš pierādītos rezultātus par Hausdorfa metriku un ies-tarpinājumu par kompakām telpām (kopām), var secināt

**Teorēma 5.5.** Pieņemsim, ka  $A$  ir telpas  $\mathbf{R}^n$  kompakta kopa un  $K$  ir visu kopas  $A$  netukšo kompakto apakškopu kopa, tad metriskā telpa  $(K, D)$  ( $D$  — Hausdorfa metrika) ir kompakta telpa.

# NODAĻA NR. 6

## Metrisku telpu transformācijas

**Anotācija.** Lineāra transformācija. Pārbīde. Afīna transformācija. Izometrija. Līdzības transformācija ar līdzības koeficientu  $r$ . Rīmaņa sfēra. Mēbiusa transformācija.

Fraktālā ģeometrija pēta sarežģītas kopas ģeometriski vienkāršās telpās kā  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^2$  un  $\mathbf{C}$ . Determinētajā fraktālajā ģeometrijā tiek apskatītas tādas telpu apakškopas, kuras tiek veidotas ar samērā vienkāršām ģeometriskām transformācijām, kuras attēlo telpu sevī. Vienkārša ģeometriskā transformācija ir tāda, kuru bez grūtībām var aizstāt vai paskaidrot ar kādu citu. Parasti to var pilnīgi precizēt ar nedaudzu parametru kopu. Piemēram, telpas  $\mathbf{R}^2$  afīnās transformācijas var aprakstīt ar  $2 \times 2$  matricām un 2-dimensionāliem vektoriem.

Vispārīgā gadījumā transformācijas var apskatīt metriskā telpā  $(X, d)$ . Par **transformāciju** telpā  $X$  sauc funkciju  $f : X \rightarrow X$ , kura katram punktam  $x \in X$  piekārt tieši vienu punktu  $f(x) \in X$ . Ja  $S \subset X$ , tad  $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ . Transformāciju sauc par **injekciju**, ja jebkuri  $x, y \in X$ , kuriem  $f(x) = f(y)$ , ir vienādi:  $x = y$ .  $f$  ir **sirjekcija**, ja  $f(X) = X$ . Saka, ka funkcijai  $f$  eksistē **inversā** funkcija, ja tā ir injekcija un sirjekcija; šajā gadījumā iespējams definēt inverso funkciju (jeb transformāciju)  $f^{-1} : X \rightarrow X$  ar vienādību:  $f^{-1}(y) = x$ , kur  $x$  ir tas vienīgais punkts, kuram  $y = f(x)$ .

Neskatoties uz to, ka piemēros mēs apskatīsim plaknes transformācijas (t.i., no telpas  $\mathbf{R}^2$  telpā  $\mathbf{R}^2$ ), visi rezultāti ir vispārināmi  $n$ -dimensiju telpām  $\mathbf{R}^n$ .

**Definīcija 6.1.** Attēlojumu  $L$  sauc par telpas  $\mathbf{R}^n$  **lineāru transformāciju** (*linear transformation*) telpā  $\mathbf{R}^m$ , ja jebkuriem  $x, y \in \mathbf{R}^n$  un jebkuriem skalāriem  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  izpildās

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y).$$

Piemēram, plaknes lineāra transformācija ir

$$L(x, y) = (5x - y, 2x + 3y), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Matricu formā šo transformāciju var pierakstīt šādi:

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

**Teorēma 6.1.** Pieņemsim, ka  $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  ir lineāra transformācija. Tādā gadījumā eksistē tāda matrica  $A$  ar izmēriem  $m \times n$ , ka

$$L(x) = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (6.1)$$

**Pierādījums.** Apskatīsim telpas  $\mathbf{R}^n$  standartbāzi

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

un vektoru  $x \in \mathbf{R}^n$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Tādā gadījumā

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n.$$

Un izmantojot linearitātes nosacījumu (6.1), iegūsim

$$L(x) = x_1 L(e_1) + x_2 L(e_2) + x_3 L(e_3) + \dots + x_n L(e_n).$$

Vektori  $L(e_1), L(e_2), L(e_3), \dots, L(e_n)$  ir kolonnu vektori ar izmēru  $m \times 1$ , jo  $L$  vērtības pieder telpai  $\mathbf{R}^m$ . No šiem kolonnu vektoriem varam sastādīt  $m \times n$  matricu  $A$ . Veicot matricu reizināšanu, redzams, ka  $L(x) = Ax$ :

$$Ax = [L(e_1) \ L(e_2) \ \dots \ L(e_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = L(x). \blacksquare$$

Lineārās transformācijas viena no svarīgākajām īpašībām ir tā, ka transformācija nogriežņus pārveido par nogriežņiem. Lai par to pārliecinātos, apskatīsim vektorfunkciju

$$S(t) = ty + (1 - t)x, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

tā, mainoties  $t$ , izstaigā nogriežni no punkta  $x$  līdz punktam  $y$ . Pieņemsim, ka  $L$  ir lineāra transformācija. Pēc lineāras transformācijas definīcijas, būs spēkā vienādība

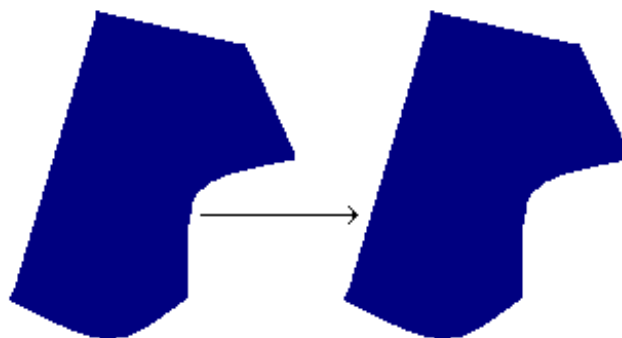
$$L(ty + (1 - t)x) = tL(y) + (1 - t)L(x).$$

Tātad transformācija  $L$  pārveido nogriežni  $[x; y]$  par nogriežni  $[L(x); L(y)]$ . Pie tam kreiso orģināla nogriežņa galapunktu  $x$  attēlo par kreiso galapunktu attēla nogrieznī un labo orģināla nogriežņa galapunktu  $y$  attēlo par labo galapunktu attēla nogrieznī. Sasummējot šo informāciju, varam secināt, ka lineāra plaknes transformācija  $L$  attēlos trīsstūri ar virsotnēm  $x, y, z$  par trīsstūri ar virsotnēm  $L(x), L(y)$  un  $L(z)$ , pie tam orģināla trīsstūra iekšējie punkti transformēsies par otra trīsstūra iekšējiem punktiem.

**Definīcija 6.2.** Attēlojumu  $T$  sauc par telpas  $\mathbf{R}^n$  **pārbīdi** vai **pārnesi** (*translation*), ja jebkuram  $x \in \mathbf{R}^n$  un dotam konstantam vektoram  $a \in \mathbf{R}^n$

$$T(x) = x + a.$$

Pārbīdes  $T$  lietojums patvaļīgai kopai telpā  $\mathbf{R}^n$  nozīmē, ka šī kopa pārvietosies (pārbīdīsies) par vektoru  $a$  (6.1.zīmējumā apskatīta figūras pārbīde telpā  $\mathbf{R}^2$ ).



6.1.zīm. Pārbīde  $T(x) = x + a$ .

**Definīcija 6.3.** Lineāru transformāciju un tai sekojošu pārbīdi sauc par telpas  $\mathbf{R}^n$  **afīnu transformāciju** (*affine transformation*).

Ņemot vērā iepriekš teikto, jebkuru afīnu transformāciju  $T$  telpā  $\mathbf{R}^n$  var definēt matricu formā šādi:

$$T(x) = Ax + a, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Telpas  $\mathbf{R}^2$  gadījumā afīnā transformācija izskatīsies matricu formā šādi:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

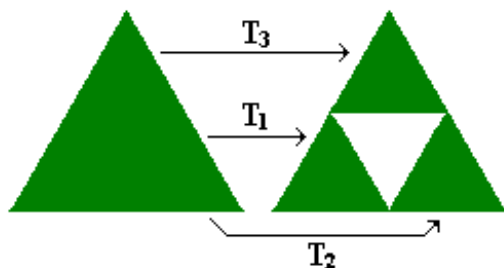
Matricu  $A$  var pierakstīt arī formā

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix},$$

kur  $(r_1, \theta_1)$  ir punkta  $(\alpha_1, \alpha_2)$  polārās koordinātas un  $(r_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$  ir punkta  $(\beta_1, \beta_2)$  polārās koordinātas.

Mēs izmantosim afīnās transformācijas, lai konstruētu fraktālus ar iteratīvu funkciju sistēmu palīdzību, par to precīzāk runāsim nākamajā nodaļā. Serpinska trīsstūra afīnās transformācijas parādītas 6.2.zīmējumā, bet matricu formā tās izskatās šādi:

$$\begin{aligned} T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



6.2.zīm. Serpinska trīsstūra afīnās transformācijas.

Acīmredzami, ka tādas transformācijas kā pārbīde, pagriešana un atspoguļošana attiecībā pret kādu no asīm, saglabā attālumus. Minētie pārveidojumi ir izometrijas speciālgadījumi.

**Definīcija 6.4.** Transformāciju  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  sauc par **izometriju** (Eiklīda metrikā  $d$ ), ja visiem  $x, y \in \mathbf{R}^n$  izpildās vienādība

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y).$$

Izometrija telpā  $\mathbf{R}^n$  ir vienmēr afīna transformācija, tas nav ieraugāms uzreiz no dotās definīcijas, tāpēc mēs to pierādīsim.

Atgādināsim, ka divu vektoru  $x, y \in \mathbf{R}^n$  **skalārais reizinājums** ir

$$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

un divi nenulles **vektori**  $x, y$  ir **perpendikulāri** (vai **ortognāli**) tad un tikai tad, ja to skalārais reizinājums ir 0:  $(x, y) = 0$ . Kopu, kas sastāv no  $n$  pa pāriem ortognāliem vektoriem, kuru garumi ir viena vienība, sauc par **telpas ortonormētu bāzi**. Kvadrātiskas matricas  $Q$  ar kārtu  $n$  kolonnas veido ortonormētu bāzi, ja  $Q^T Q = Q Q^T = I$ , kur  $I$  ir vienības matrica ar kārtu  $n$  (vieninieki uz diagonāles, pārējie elementi 0). Kvadrātisku matricu ar kārtu  $n$ , kuras kolonnas veido ortonormētu bāzi, sauc par **ortognālu matricu**.

**Lemma 6.1.** Ja telpā  $\mathbf{R}^n$  izometrijas  $T$  nekustīgais punkts ir 0 (t.i.,  $T(0) = 0$ ), tad  $T$  saglabā skalāro reizinājumu, t.i.,

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad (T(x), T(y)) = (x, y).$$

**Pierādījums.** Vispirms atgādināsim, ka par vektora  $x \in \mathbf{R}^n$  Eiklīda normu sauc skaitli

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots x_n^2}.$$

Matemātskajā analizē tiek pierādīta vienādība, kā skalāro reizinājumu var izteikt ar vektoru normām:

$$(x, y) = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} (T(x), T(y)) &= \frac{1}{2} (\|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\|T(x) - T(0)\|^2 + \|T(y) - T(0)\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = \\ &= (x, y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorēma 6.2.** Izometrija  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  ir afīna transformācija un eksistē tāda ortognāla matrica  $Q$  un kolonnas vektors  $b$ , ka

$$T(x) = Qx + b.$$

**Pierādījums.** Apzīmēsim  $b = T(0)$  un  $T_1(x) = T(x) - b$ . Tādā gadījumā  $T_1$  arī ir izometrija, pie tam  $T_1(0) = 0$ . Pēc Lemmas 6.1 attēlojums  $T_1$  saglabā skalāro reizinājumu un līdz ar to arī normu.

Apskatīsim telpas  $\mathbf{R}^n$  standartbāzi  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , kura, protams, ir ortonormēta bāze. No iepriekšējām piezīmēm seko, ka vektori

$$q_1 = T_1(e_1), q_2 = T_1(e_2), \dots, q_n = T_1(e_n)$$

arī veido telpas  $\mathbf{R}^n$  ortonormētu bāzi. Jebkuru telpas  $\mathbf{R}^n$  vektoru  $x$  vienā vienīgā veidā var pierakstīt kā lineāru kombināciju ar šiem ortonormētajiem bāzes vektoriem:

$$x = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_n q_n,$$

pie tam izvirzījuma koeficienti ir izsakāmi ar skalāro reizinājumu

$$a_i = (x, q_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tādā gadījumā  $T_1(x)$  var pierakstīt šādi:

$$T_1(x) = \sum_{i=1}^n (T_1(x), q_i) q_i = \sum_{i=1}^n (T_1(x), T_1(e_i)) q_i = \sum_{i=1}^n (x, e_i) q_i.$$

Tātad transformācija  $T_1$  ir  $x$  lineāra funkcija. Pie tam, ievērosim, ka  $T_1$  pierakstu matricas izskatā veido izteiksme

$$T_1(x) = Qx,$$

kur  $Q$  ir ortognāla matrica, kas sastādīta no kolonnas vektoriem  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Tādējādi  $T$  ir afīna transformācija:

$$T(x) = T_1(x) + b = Qx + b. \quad \blacksquare$$

Izometrijas vispārinājums ir līdzības transformācija, ar kuras palīdzību var tikt iegūti daudzi fraktāļi.

**Definīcija 6.5.** Transformāciju  $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  sauc par **līdzības transformāciju ar līdzības koeficientu**  $r$ , ( $r > 0$ ), ja

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad d(S(x), S(y)) = r d(x, y).$$



Nākošā teorēma parādīs, kāds ir līdzības transformācijas vispārējais izskats telpā  $\mathbf{R}^n$ .

**Teorēma 6.3.** Līdzības transformācija  $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  ar līdzības koeficientu  $r > 0$  ir afīna transformācija, kuru var pierakstīt šādi:

$$S(x) = rQx + b,$$

kur  $Q$  ir ortognāla matrica un  $b$  ir kolonnas vektors.

**Pierādījums.** Apzīmēsim  $T(x) = \frac{1}{r}(S(x) - S(0))$  un  $b = S(0)$ . Tādā gadījumā  $T$  ir izometrija, pie tam  $T(0) = 0$ . Pēc Teorēmas 6.2 izometriju  $T$  var pierakstīt šādi:

$$T(x) = Qx,$$

kur  $Q$  ir ortognāla matrica. Tad

$$S(x) = rQx + S(0) = rQx + b. \quad \blacksquare$$

Plaknes afīnās transformācijas var aprakstīt arī ar komplekso skaitļu palīdzību. Divu kompleksu skaitļu  $z_1 = x_1 + iy_1$  un  $z_2 = x_2 + iy_2$  saskaitīšana un reizināšana tiek definēta ar formulām

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Par kompleksa skaitļa  $z = x + iy$  kompleksi saistīto skaitli sauc  $\bar{z} = x - iy$ .

Vektoru telpu  $\mathbf{R}^2$  var apskatīt kā kompleksu skaitļu kopu

$$\mathbf{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\},$$

izveidojot viennozīmīgu atbilstību starp abām kopām

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + iy.$$

Tad saskaitīšanas un reizināšanas ar skalāru darbības starp vektoriem aizvietojas ar saskaitīšanu un reizināšanu starp atbilstošajiem kompleksajiem skaitļiem. Afīnas transformācijas piemērs kompleksajos skaitļos ir funkcija ( $a = a_1 + ia_2$ ,  $b = b_1 + ib_2 \in \mathbf{C}$  — konstantes,  $z = x + iy \in \mathbf{C}$  — mainīgais)

$$L(z) = az + b.$$

Šī transformācija matricu formā pierakstāma šādi:

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Ne visas afīnās transformācijas var pierakstīt formā  $L(z) = az + b$ . Patvaļīga afīna transformācija kompleksajā pierakstā ir izskatā

$$L(z) = az + b\bar{z} + c,$$

kur  $a, b, c$  ir kompleksas konstantes.

Afīnu transformāciju plaknē realizācijai ar kompleksajiem skaitļiem ir zināmas priekšrocības raugoties no programmēšanas viedokļa. Algoritmu izpilde būtiski vienkāršojas, ja tiek izmantota tāda programmēšanas valoda, kurā iebūvēta komplekso skaitļu aritmētika. Pie tam, komplekso skaitļu pieraksts atvieglo ģeometrisku interpretāciju pateicoties tam, ka ar kompleksajiem skaitļiem ērti strādāt polārajā koordinātu sistēmā:

$$z = x + iy = r^{i\theta},$$

kur  $r$  ir skaitļa  $z$  modulis vai absolūtā vērtība, proti,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , bet  $\theta$  sauc par  $z$  argumentu, tas ir leņķis (ar precizitāti  $2\pi$ ) starp  $Ox$  asi un vektoru, kas savieno koordinātu sākumpunktu ar punktu  $(x, y)$  (izpildās sakarības  $\cos \theta = \frac{a}{r}$  un  $\sin \theta = \frac{b}{r}$ ).

Divu kompleksu skaitļu  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  un  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  reizinājums izsakāms ar formulu

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Tādējādi, ja mēs fiksejam kompleksu skaitli  $a = r e^{i\theta}$ , kur  $\theta$  — patvaļīgs leņķis, bet  $0 < r < 1$ , tad afīnā transformācija  $L(z) = az + b$  būs saspiedēj-attēlojums ar saspiešanas koeficientu  $r$ . Ģeometriski šīs transformācijas iedarbību uz figūru plaknē var stādīt priekšā vairāku soļu veidā:

1. pagriezt figūru attiecībā pret  $Ox$  asi par leņķi  $\theta$ ,
2. samazināt (saspīest) figūru koordinātu sākumpunkta virzienā  $\frac{1}{r}$  reizes,
3. pārbīdīt figūru par vektoru  $b$ .

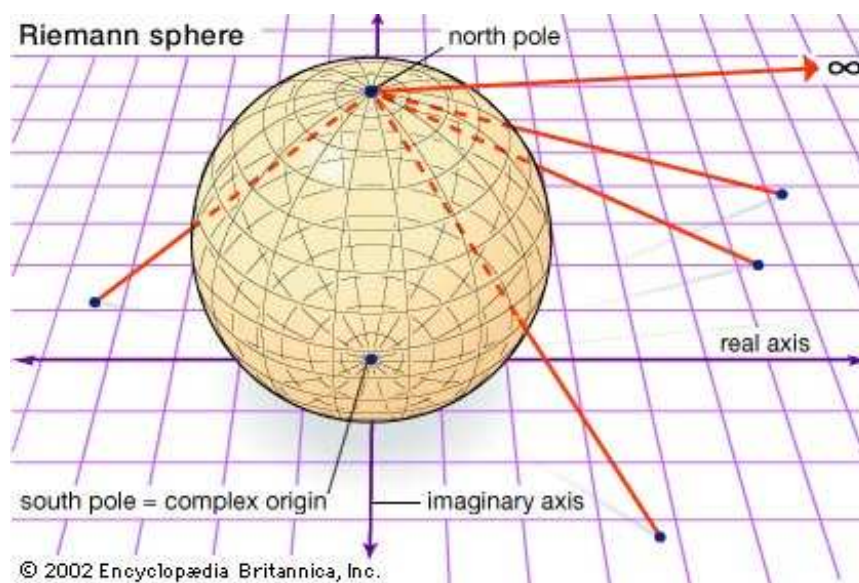
Serpinska trīsstūra transformācijas kompleksajā formā izskatīsies šādi:

$$\begin{aligned} T_1(z) &= \frac{1}{2}z, \\ T_2(z) &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ T_3(z) &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Apskatīsim vēl vienu interesantu transformāciju veidu. Mēbiusa transformācija ir definēta paplašinātajā kompleksajā plaknē (t.i., kompleksajiem skaitļiem tiek pievienots klāt bezgalīgi tālais punkts):  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ . Lai saprastu tādu konstrukciju, apskatīsim kompleksos skaitļus kā punktus uz sfēras — Rīmaņa sfēras. Dažos gadījumos komplekso skaitļu sfēriskā reprezentācija

atvieglina pierādījumus. Sfēriskās reprezentācijas principālā priekšrocība ir tā, ka tā satur bezgalīgi tālo punktu. Šis jēdziens tiek apzīmēts ar  $\infty$  un tiek uztverts kā viens no kopas  $\overline{\mathbb{C}}$  punktiem.

Lai definētu Rīmaņa sfēru, lietojam stereografisko projicēšanas metodi, tā ir tā pati metode, ko dažkārt lieto, lai uzzīmētu pasaules karti. Lai labāk situāciju vizualizētu, iedomāsimies sfēru ar diametru 1 un tās centrs atrodas telpas  $\mathbf{R}^3$  punktā  $(0; 0; \frac{1}{2})$ .  $xy$ -plakne reprezentē komplekso plakni un pieskaras sfērai punktā  $(0; 0; 0)$  jeb dienvidpolā (skatīt 6.3.zīmējumu).



6.3.zīm. Rīmaņa sfēra.

Ziemeļpola koordinātas telpā  $\mathbf{R}^3$  ir  $(0; 0; 1)$ . Ja mēs velkam staru no Ziemeļpola uz punktu kompleksajā plaknē, tad tas krusto sfēru tieši vienā punktā, kurš atšķiras no  $(0; 0; 1)$ . Ja mēs velkam staru uz punktu, kura modulis lielāks par 1, tad stars krusto sfēras augšējo daļu. Ja mēs velkam staru uz punktu, kurš atrodas uz riņķa līnijas ar rādiusu 1, tad stars krusto sfēru ekvatorā. Ja mēs velkam staru uz punktu, kura modulis ir mazāks par 1, tad stars krusto sfēras apakšējo daļu. Lai iegūtu atbilstību starp punktiem uz sfēras un punktiem kompleksajā plaknē, mēs piekārtosim katram kompleksajam skaitlim to punktu uz sfēras, caur kuru iet stars, kas savieno  $(0; 0; 1)$  ar doto plaknes komplekso skaitli. Ģeometriski acīmredzami, ka šis piekārtojums ir injekcija un surjekcija starp visiem kompleksās plaknes punktiem un punktiem uz sfēras, izņemot  $(0; 0; 1)$ . Ja mēs piekārtosim

punktam  $(0; 0; 1)$  bezgalīgi tālo punktu  $\infty$ , tad atbilstība ir injekcija un surjekcija starp sfēras punktiem un  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ . Tāpēc par Rīmaņa sfēru runā kā par paplašināto komplekso plakni. Funkcijas uz Rīmaņa sfēras tiek definētas, izmantojot parasto  $\mathbf{C}$  algebru ar divām papildus īpašībām. Ja  $f$  ir funkcija, kas definēta kompleksās plaknes apakškopā, tad

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

ja vien šī robeža eksistē. Kā arī, ja

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty, \text{ tad } f(a) = \infty.$$

**Definīcija 6.6.** Transformāciju  $M : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  sauc par **Mēbiusa transformāciju** (*Möbius transformation*), ja

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

kur  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  un  $ad - bc \neq 0$ . Ja  $c \neq 0$ , tad  $M(-\frac{d}{c}) = \infty$  un  $M(\infty) = \frac{a}{c}$ . Ja  $c = 0$ , tad  $M(\infty) = \infty$ .

Mēbiusa transformācijai ir vairākas interesantas īpašības. Pirmkārt, tā vienmēr attēlo riņķa līnijas uz Rīmaņa sfēras par riņķa līnijām. Tā kā kompleksās plaknes taisne kļūst par riņķa līniju caur  $\infty$  paplašinātajā kompleksajā plaknē, tad no šejienes seko, ka kompleksās plaknes riņķa līnijas un taisnes tiek attēlotas par kompleksās plaknes riņķa līnijām un taisnēm. To var ieraudzīt, pamanot, ka katru Mēbiusa transformāciju var uzrakstīt kā kompozīciju  $M(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$  no vienkāršākām transformācijām formā

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{d}{c} && \text{— pārbīde par } \frac{d}{c}, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} && \text{— inversā funkcija un refleksija} \\ &&& \text{(atspoguļojums attiecībā pret reālo asi)} \\ f_3(z) &= \left( \frac{-(ad-bc)}{c^2} \right) \cdot z && \text{— izstiepšana un rotācija} \\ f_4(z) &= z + \frac{a}{c} && \text{— pārbīde par } \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Piemēram, transformācija

$$T(z) = \frac{(1+2i)z+1}{(1-2i)z+1}$$

attēlo kompleksās plaknes reālo asi par vienības riņķa līniju.

# NODAĻA NR. 7

## Iteratīvu funkciju sistēmas

**Anotācija.** Iteratīvu funkciju sistēmas jēdziens. Atraktors. Atraktora eksistence. Fraktāļu konstrukcija ar IFS palīdzību paketē MATHEMATICA. Kondensācijas transformācija. Kondensācijas kopa. IFS ar kondensācijas transformāciju. Identiskais attēlojums. Kolāžas.

Šajā nodaļā mēs iepazīsimies ar vienu no lielākajiem fraktāļu konstruēšanas sasniegumiem — iteratīvu funkciju sistēmām. Matemātiskos aspektus tika izstrādājis Austrālijas matemātiķis *John Hutchinson* 1981.gadā, bet pati metode kļuvusi plaši pazīstama, pateicoties *Michael F. Barnsley* grāmatai "*Fractals everywhere*", kas pirmo reizi publicēta 1988.gadā. Iteratīvu funkciju sistēmas izmantošana dod labu matemātisko bāzi daudzu klasisko fraktāļu matemātiskai izpētei un vispārinājumiem.

Jēdziens "iteratīvu funkciju sistēma" ir uztverams kā sinonīms jēdzienam "*Multiple Reduction Copy mashine*" (saīsināti MRCM), kas tiek izmantots vairāk praktiskajos lietojumos.

Taču jāņem vērā, ka ar iteratīvu sistēmu palīdzību iegūtais rezultāts (to mēdz saukt par atraktoru) ne vienmēr ir fraktālis. Tā var būt jebkāda kompakta kopa, ieskaitot nogriezni vai kvadrātu. Tanī pašā laikā iteratīvo funkciju sistēmu apguve ir svarīga fraktāļu ģeometrijā, jo ar šo sistēmu palīdzību var konstruēt bezgalīgi daudz dažādus fraktāļus.

Pieņemsim, ka  $H$  ir visu netukšo, slēgto un ierobežoto telpas  $\mathbf{R}^2$  apakškopu sistēma. Pieņemsim, ka  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ir telpas  $\mathbf{R}^2$  saspiedējattēlojumu saime ar saspiešanas koeficientiem  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Definēsim funkciju  $F$  šādi:

$$\forall S \in H \quad F(S) = F_1(S) \cup F_2(S) \cup \dots \cup F_n(S).$$

Mēs sauksim  $F$  par funkciju  $F_1, F_2, \dots, F_n$  apvienojumu (literatūrā šī funkcija pazīstama ar nosaukumu *Hutchinson operator*). Ja  $F_1(S), F_2(S), \dots, F_n(S)$  ir disjunktas kopas, izņemot varbūt robežpunktus, un  $S = F(S)$ , tad kopu  $S$  sauc par **pašlīdzīgu**.

**Definīcija 7.1.** Iteratīvu funkciju sistēma (saīsināti IFS) sastāv no

- 1) kopas  $E_0 \in H$ , kuru
- 2) saspiedējattēlojumi  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ar saspiešanas koeficientiem  $s_1, s_2, \dots, s_n$  attēlo telpā  $\mathbf{R}^2$ , un
- 3) funkciju  $F_1, F_2, \dots, F_n$  apvienojuma  $F$  iterācijām attiecībā uz kopu  $E_0$ :  $E_1 = F(E_0), E_2 = F(E_1), \dots, E_n = F(E_{n-1}), \dots$ .

IFS teorijas pamatzdevums ir noskaidrot, kādos gadījumos IFS izveido robežkopu  $E$ :  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  Hausdorfa metrikas konverģences nozīmē. Ja robeža eksistē, tad to sauc par IFS **atraktoru**. Atraktors bieži vien ir fraktālis, bet ne vienmēr.

Matemātiskās idejas, kuras ir nepieciešamas konverģencei, tika izstrādātas 5.nodaļā. Vajadzētu tikai pierādīt, ka  $F$  ir saspiedējattēlojums telpā  $(H, D)$ . Tādā gadījumā atraktors  $E$  ir attēlojuma  $F$  nekustīgais punkts.

**Lemma 7.1.** Pieņemsim, ka  $F_1$  ir saspiedējattēlojums (ar koeficientu  $s_1$ ) telpā  $\mathbf{R}^2$  ar Eiklīda metriku  $d$ , tad tas ir saspiedējattēlojums arī telpā  $H$  (t.i., visu netukšo, slēgto un ierobežoto telpas  $\mathbf{R}^2$  apakškopu sistēma) ar Hausdorfa metriku  $D$ .

**Pierādījums.** Izvēlamies  $A, B \in H$ . Pierādīsim, ka jebkuram  $a \in A$  eksistē tāds  $b \in B$ , ka  $d(a, b) = \text{dis}(a, B)$ . Lai to pierādītu, ievērosim, ka kopa  $G = \{d(a, x) \mid x \in B\}$  ir ierobežota no apakšas ar 0. Ja reālu skaitļu apakškopa ir ierobežota no apakšas, tad tai eksistē lielākā apakšējā robeža  $\delta \geq 0$ . Tad  $\text{dis}(a, B) = \delta$ . Turklāt eksistē tāda virkne  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  kopā  $B$ , ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, b_n) = \delta$ .

Tā kā  $B$  ir slēgta un ierobežota (kompakta kopa metriskā telpā), tad eksistē tāda  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  apakšvirkne  $(b_{n_i})_{i \in \mathbf{N}}$ , kura konverģē uz  $b \in B$ . Tādā gadījumā

$$d(a, b) \leq d(a, b_{n_i}) + d(b_{n_i}, b).$$

Tā kā  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(a, b_{n_i}) = \delta$  un  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(b_{n_i}, b) = 0$ , tad  $d(a, b) \leq \delta$ . Bet pēc  $\delta$  definīcijas  $d(a, b) \geq \delta$ , tāpēc  $d(a, b) = \delta = \text{dis}(a, B)$ .

Ja  $F_1$  ir saspiedējattēlojums (ar koeficientu  $s_1$ ) telpā  $\mathbf{R}^2$  ar Eiklīda metriku  $d$ , tad

$$d(F_1(a), F_1(b)) \leq s_1 d(a, b) = s_1 \text{dis}(a, B) \leq s_1 D(A, B).$$

Tā kā jebkuram  $a$  ir atrodams tāds  $b$ , ka izpildās  $d(F_1(a), F_1(b)) \leq s_1 D(A, B)$ , tad  $D(F(A), F(B)) \leq s_1 D(A, B)$ . ■

**Lemma 7.2.** Pieņemsim, ka  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ir telpas  $\mathbf{R}^2$  saspiedējattēlojumu saime ar saspiešanas koeficientiem  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Tad apvienojuma

funkcija  $F$

$$\forall S \in H \quad F(S) = F_1(S) \cup F_2(S) \cup \dots \cup F_N(S)$$

ir saspiedējattēlojums ar saspiešanas koeficientu

$$s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

**Pierādījums.** Ievērosim, ka jebkurai kompaktai kopai  $A$  izpildās  $a \in A + r$  tad un tikai tad, ja eksistē tāds elements  $b \in A$ , ka  $d(a, b) \leq r$ . No šejienes seko, ja  $A \subset B + r$ , tad jebkuram attēlojumam  $F_i$  izpildās

$$F_i(A) \subset F_i(B) + s_i r.$$

Pēc definīcijas nevienādība Hausdorfa metrikā  $D(A, B) \leq \varepsilon$  ir ekvivalenta ar pierakstu kopu valodā (Teorēma 5.3)

$$A \subset B + \varepsilon \text{ un } B \subset A + \varepsilon.$$

Pieņemsim, ka  $r = D(A, B)$ . Ja  $A \subset B + r$ , tad

$$F_i(A) \subset F_i(B) + s_i r, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tātad

$$F(A) \subset F(B) + sr.$$

Ja apmainam vietām  $A$  ar  $B$ , iegūsim

$$F(B) \subset F(A) + sr.$$

Tādējādi

$$D(F(A), F(B)) \leq sr = sD(A, B). \quad \blacksquare$$

Apvienojot visu, kas uzrakstīts šajā nodaļā un 5.nodaļā, varam izdarīt slēdzienu

**Teorēma 7.1.** Ja  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ir telpas  $\mathbf{R}^2$  saspiedējattēlojumu saime, tad apvienojuma saspiedējattēlojumam  $F$  eksistē viens vienīgs atraktors  $A \in H$  un jebkurai kopai  $B \in H$  iterāciju virkne  $F^n(B)$  konverģē uz  $A$  Hausdorfa metrikā.

Pierādītie rezultāti ir vispārināmi arī telpas  $\mathbf{R}^n$  gadījumā, tikai ilustrācijas mēs apskatīsim tomēr telpā  $\mathbf{R}^2$ .

Praktisku fraktāļa attēla izveidi ar iteratīvajām funkciju sistēmām aplūkosim paketē MATHEMATICA (šeit noderīga ir *C.Getz* un *J.Hemstedt* grāmatas

” *Graphics with MATHEMATICA. Fractals, Julia Sets, Patterns and Natural Forms*”, Elsevier, 2004, 5.nodaļa). Atkarībā no MATHEMATICA versijas, var rasties nepieciešamība speciāli no interneta adreses

<http://ckw.phys.ncku.edu.tw/public/pub/Notes/Mathematica/Maeder/ProgrammingInMathematica/?C=M;O=A>

izkopēt *R.Maeder* paketes (makrokomandas) `AffineMaps.m` un `IFS.m` un iekopēt tās MATHEMATICA darba lapā. Pēc tam jāņem vērā, ka komanda

$$\text{AffineMap}[\phi, \psi, r, s, e, f]$$

ģenerē afīnu attēlojumu ar rotācijas leņķiem  $\phi, \psi$ , saspiešanas koeficientiem  $r, s$  un pārbīdes vektora koordinātām  $e$  un  $f$ . Komanda

$$\text{AffineMap}[\text{matrix}]$$

izmanto  $2 \times 3$  matricu, lai ģenerētu afīnu attēlojumu.

Apskatīsim trīsstūri ar virsotnēm  $(0; 0)$ ,  $(3; 2)$ ,  $(2; 5; 0; 5)$ . Kā uz šo trīsstūri iedarbojas šādas afīnas funkcijas

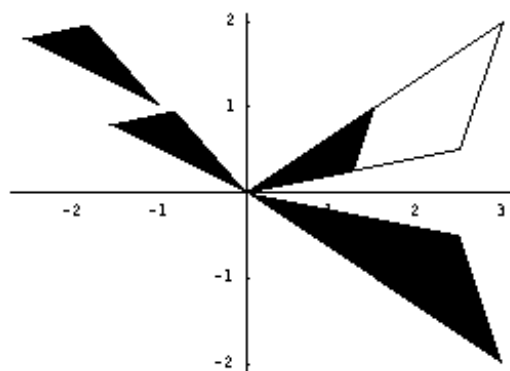
$$\text{AffineMap}[0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0]$$

$$\text{AffineMap}[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 0.5, 0.5, 0, 0]$$

$$\text{AffineMap}[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 0.5, 0.5, -1, 1]$$

$$\text{AffineMap}[0, 0, 1, -1, 0, 0]$$

tas redzams 7.1.zīmējumā.



7.1.zīm. Afīnu funkciju iedarbība.

Savukārt komanda

$$\text{IFS}[\{\text{maps...}\}, \{\text{options...}\}]$$

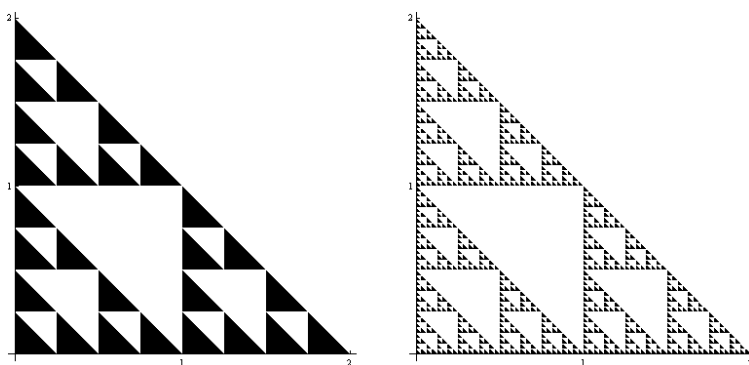


izveido iteratīvu funkciju sistēmu.

Ja abas augstāk minētās komandas ir Jūsu rīcībā, tad, piemēram, komandu

```
ifs1=IFS[{AffineMap[0,0,0.5,0.5,0,0],AffineMap[0,0,0.5,0.5,1,0],
        AffineMap[0,0,0.5,0.5,0,1]};
D1=Polygon[{{0,0},{0,2},{2,0}}];
t[x_,n_]:=Graphics[Nest[ifs1,x,n],Axes→True,AspectRatio→1,
        AxesOrigin→{0,0},Ticks→{{1,2},{1,2}}];
Show[GraphicsArray[t[D1,3],t[D1,6]]]
```

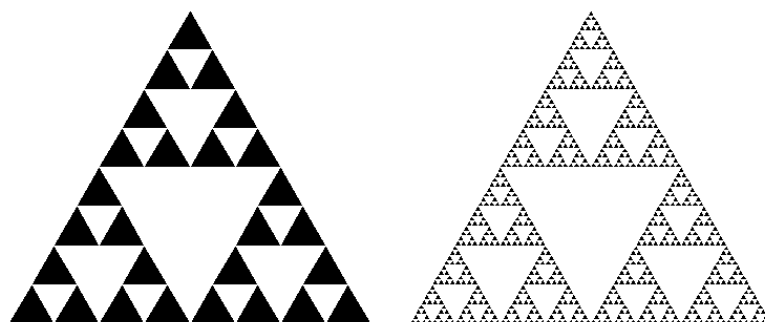
darbības rezultātā tiks izveidoti Serpinska (taisna leņķa) trīsstūra divi pirmfraktāļi (3.iterācija un 6.iterācija), .



7.2.zīm. Serpinska (taisnleņķa) trīsstūra 3. un 6.iterācija.

Mazliet pamainot pārbīdes vektorus un par sākuma kopu izvēloties regulāru trīsstūri, iegūsim tādu Serpinska trīsstūri, kādu apskatījām šī kursa sākumā (2.3.zīmējums). Šeit arī esam atmetuši koordinātu asis.

```
ifs1=IFS[{AffineMap[0,0,0.5,0.5,0,0],AffineMap[0,0,0.5,0.5,0.5,0],
        AffineMap[0,0,0.5,0.5,0.25,√3/4]};
D1=Polygon[{{0,0},{0.5,0},{1,√3/2}}];
t[x_,n_]:=Graphics[Nest[ifs1,x,n],AspectRatio→Automatic,PlotRange→All];
Show[GraphicsArray[{t[D1,3],t[D1,6]}]]
```



7.3.zīm. Serpinska (regulāra) trīsstūra 3. un 6.iterācija.

No iepriekš aprakstītās teorijas seko, ka neatkarīgi no poligona izvēles IFS konverģē uz vienīgo nekustīgo punktu — noteikta izskata kopu. Tā, piemēram, ja iepriekšējā gadījumā nomainīsim poligonu pret četrstūri

$$D1 = \text{Polygon}[\{\{0, 0\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{0, 2\}\}];$$

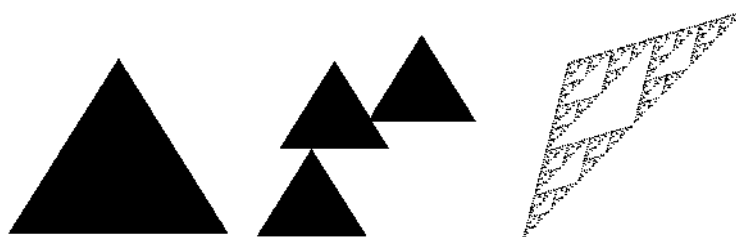
tad galarezultātā iegūsim to pašu fraktāli. 7.4.zīmējumā redzamā 7.iterācija daudz neatšķiras no 7.3.zīmējuma 6.iterācijas attēla, abos gadījumos konverģence notiek uz vienu un to pašu kopu — Serpinska trīsstūri.



7.4.zīm. Serpinska trīsstūra 0., 3. un 7.iterācija.

Vēl viena iespēja izveidot savādāku Serpinska trīsstūri ir aizstājot kādu no affīno attēlojumu pārbīdes vektora koordinātām ar komandu `Random[]`, kas ģenerē patvaļīgu skaitli vienības intervālā. Zemāk apskatītajā piemērā aizstātas ir divas koordinātas un iegūtais rezultāts (precīzāk, pamatpoligons, 1.iterācija un 6.iterācija) redzami 7.5.zīmējumā.

```
ifs1=IFS[{AffineMap[0,0,0.5,0.5,0,0],AffineMap[0,0,0.5,0.5,0.5,Random[]],
AffineMap[0,0,0.5,0.5,Random[], $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ]}}];
D1=Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {0.5,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ }}];
t[x_, n_]:=Graphics[Nest[ifs1,x,n],AspectRatio→Automatic,PlotRange→All];
Show[GraphicsArray[{t[D1,0],t[D1,1],t[D1,6]}]]
```



7.5.zīm. Serpinska trīsstūra 0., 1. un 6.iterācija ar randomizētiem afīno attēlojumu koeficientiem.

Tālāk apskatīsim vēl citas idejas, kas kopā ar IFS, var palīdzēt konstruēt dažāda veida fraktālus. Piemēram, viena no idejām ir Pitagora koka (2.10.zīmējums) konstrukcijā — šeit konstrukcijas  $n$ -tajā solī tiek pievienots kaut kas klāt, pilnībā saglabājot iepriekšējā  $n - 1$  soļa konstrukciju.

Apskatīsim atkal netukšo, slēgto un ierobežoto telpas  $\mathbf{R}^2$  apakškopu kopu  $H$  ar Hausdorfa metriku  $D$ .

**Definīcija 7.2.** Pieņemsim, ka  $C \in H$ . Attēlojumu  $T_C : H \rightarrow H$  sauc par **kondensācijas transformāciju** (*condensation transformation*), ja

$$\forall A \in H \quad T_C(A) = C.$$

Šajā gadījumā kopu  $C$  sauc par **kondensācijas kopu** (*condensation set*).

Pēc definīcijas jāsecina, ka  $T_C$  ir telpā  $H$  konstants attēlojums, bet fraktālu teorijā attēlojumam dots cits vārds.

Ievērosim, ka kondensācijas transformācija  $T : H \rightarrow H$  ir saspiedējattēlojums metriskā telpā  $(H, D)$  ar saspiešanas koeficientu 0:

$$\forall A, B \in H \quad D(T(A), T(B)) = D(C, C) = 0,$$

kā saspiedējattēlojumam tam ir viens vienīgs nekustīgais punkts telpā  $(H, D)$ , proti, kondensācijas kopa. Tādā gadījumā Teorēma 7.1 ir vispārināma tādām IFS, kuras satur kondensācijas transformācijas.

**Teorēma 7.2.** Pieņemsim, ka dota IFS, kas sastāv no saspiedējattēlojumiem  $T_1, T_2, \dots, T_m$  ar saspiešanas koeficientiem  $s_1, s_2, \dots, s_m$  un kondensācijas transformācijas  $T_0$ . Tad attēlojumu apvienojums

$$\forall A \in H \quad T(A) = \cup_{n=0}^m T_n(A)$$

ir saspiedējattēlojums pilnā metriskā telpā  $(H, D)$  ar saspiešanas koeficientu  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  un jebkurai kopai  $A \in H$  iterāciju virkne  $C_1 =$

$T(A)$ ,  $C_2 = T(C_1) = T^2(A), \dots$ ,  $C_n = T(C_{n-1}) = T^n(A), \dots$  konverģē uz vienu vienīgu kopu (jeb atrektoru)  $E$ .

Lietojumos nozīmīgāka var izrādīties šāda teorēma:

**Teorēma 7.3.** Pieņemsim, ka  $\tau : H \rightarrow H$  ir saspiedējattēlojums un  $Id$  ir telpas  $\mathbf{R}^2$  identiskais attēlojums (t.i., jebkuram  $x \in \mathbf{R}^2$  :  $Id(x) = x$ , tad arī jebkurai kopai  $C \in H$  :  $Id(C) = C$ ). Apzīmēsim  $\omega = Id \cup \tau$ . Tādā gadījumā

1) jebkurai kopai  $A \in H$  virkne  $(\omega^n(A))_{n \in \mathbf{N}}$  Hausdorfa metrikā konverģē uz kādu kopu  $E \in H$ ;

2) jebkurai citai kopai  $B \in H$  ( $A \neq B$ ) virkne  $(\omega^n(B))_{n \in \mathbf{N}}$  Hausdorfa metrikā konverģē iespējams uz kādu citu kopu  $F \in H$ .

**Pierādījums.** Fiksēsim patvaļīgu kopu  $A \in H$ .

Pieņemsim, ka  $C_A$  ir telpā  $H$  kondensācijas transformācija ar kondensācijas kopu  $A$ , t.i., jebkurai kopai  $V$  izpildās  $C_A(V) = A$ , un apzīmēsim  $v = C_A \cup \tau$ . Tā kā  $C_A$  un  $\tau$  ir saspiedējattēlojumi, tad tāds ir arī  $v$ , tāpēc tam pēc Banaha teorēmas ir tāds viens vienīgs nekustīgais punkts  $E \in H$ , ka visām kopām  $V \in H$  virkne  $(v^n(V))_{n \in \mathbf{N}}$  konverģē uz  $E$ .

Mēs parādīsim, ka visiem  $n \in \mathbf{N}$  izpildās vienādība  $\omega^n(A) = v^n(A)$ . Tad no šejienes sekos, ka  $(\omega^n(V))_{n \in \mathbf{N}}$  konverģēs uz  $E$ .

Ar indukciju pierādīsim, ka  $\omega^n(A) = A \cup \tau(A) \cup \dots \cup \tau^n(A)$ .

Indukcijas bāze  $n = 1$  izpildās, jo

$$\omega^1(A) = Id(A) \cup \tau(A) = A \cup \tau(A).$$

Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās pie  $n \in \mathbf{N}$ :

$$\omega^n(A) = A \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^n(A). \quad (7.1)$$

Tad

$$\begin{aligned} \omega^{n+1}(A) &= \omega(\omega^n(A)) = \\ &= Id(\omega^n(A)) \cup \tau(\omega^n(A)) = \\ &= \omega^n(A) \cup \tau(A \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^n(A)) = \quad (\text{pēc (7.1)}) \\ &= \omega^n(A) \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^{n+1}(A) = \\ &= A \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^n(A) \cup \tau^{n+1}(A). \end{aligned}$$

Līdzīgi ar matemātisko indukciju var parādīt, ka  $v^n(A)$  ir tādas pašas vērtības.

Indukcijas bāze izpildās:  $v^1(A) = C_A(A) \cup \tau(A) = A \cup \tau(A)$ .

Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās pie  $n \in \mathbf{N}$ :

$$v^n(A) = A \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^n(A). \quad (7.2)$$

Tad

$$\begin{aligned}
 v^{n+1}(A) &= v(v^n(A)) = \\
 &= C_A(v^n(A)) \cup \tau(v^n(A)) = \\
 &= A \cup \tau(A \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^n(A)) = \quad (\text{pēc (7.2)}) \\
 &= A \cup \tau(A) \cup \tau^2(A) \cup \dots \cup \tau^n(A) \cup \tau^{n+1}(A).
 \end{aligned}$$

Otro teorēmas daļu var konstatēt ar vienkārša piemēra palīdzību kaut vai telpas  $\mathbf{R}$  situācijā ( $\mathbf{R}^2$  gadījums būs apskatīts zemāk piemēros). Pieņemsim, ka  $A = \{1\}$  un  $B = \{2\}$ , un  $\tau(x) = \frac{x}{2}$ . Tad

$$\omega^n(A) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \right\} \cup \{0\}, \text{ ja } n \rightarrow \infty,$$

kamēr

$$\omega^n(B) = \left\{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \right\} \cup \{0\}, \text{ ja } n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

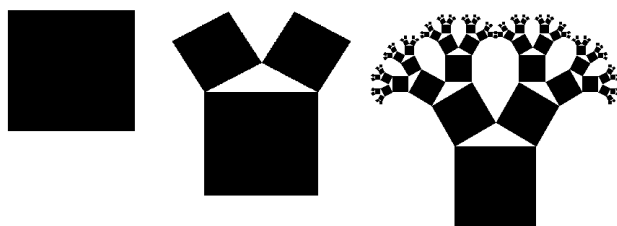
Praktiskajā realizācijā ar afinām funkcijām paketē MATHEMATICA Teorēma 7.2 nozīmē, ka sākumā uzdots poligons ir kāda no attēlojumu kondensācijas kopām, t.i., afīnais attēlojums uz šo kopu iedarbojas kā identiskais attēlojums. Kā piemēru apskatīsim Pītagora koka konstrukciju, to realizē šādas MATHEMATICA komandas

```

fr1[x_, n_] := Show[Graphics[Nest[IFS[{AffineMap[0,0,1,1,0,0],
AffineMap[30°, 30°, 1/√3, 1/√3, 0, 1],
AffineMap[-30°, -30°, 1/√3, 1/√3, 0.5, 1 + √(1/12) ]}], x, n]],
Axes → False, AspectRatio → Automatic, AxesOrigin → {0, 0}];
P1 = Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {1, 1}, {0, 1}}];
Show[GraphicsArray[{fr1[P1, 0], fr1[P1, 1], fr1[P1, 6]}]]

```

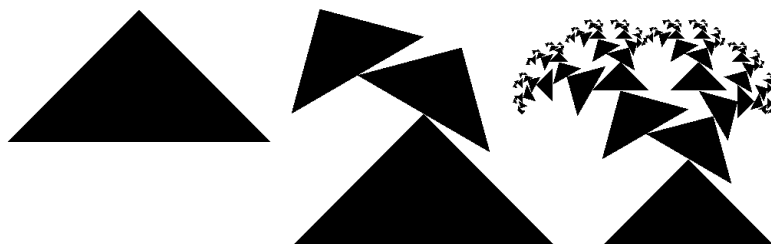
Kā attēlu iegūsim 7.6.zīmējumu.



7.6.zīm. Pītagora koka konstrukcija (poligons, 1. un 6.iterācija).

Bet jāņem vērā, ka rezultāts būs atšķirīgs, ja poligona vietā izvēlēsimies citu figūru nevis kvadrātu (Teorēma 7.3!). Tas novērojams 7.7.zīmējumā, kurš izveidots tieši ar tām pašām MATHEMATICA komandām kā 7.6.zīmējums, tikai poligons ir trīsstūris:

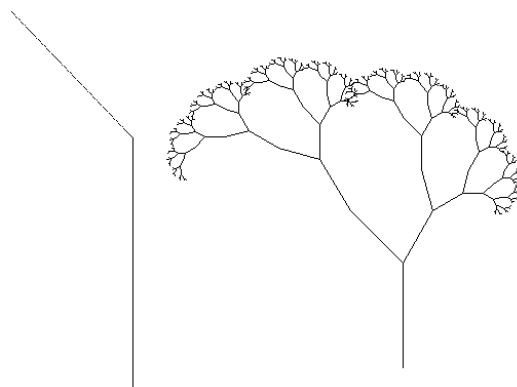
```
P1=Polygon[{{0,0},{2,0},{1,1}}]
```



7.7.zīm. "Pitagora koka" konstrukcija (poligons, 1. un 6.iterācija), ja sākuma kopa ir trīsstūris.

Bet IFS ar kondensācijas transformāciju var tikt labi izmantoti, lai konstruētu fraktāļus, kas līdzīgi dabas objektiem. Piemēram, ja poligona vietā izvēlas līkni, tad rezultātā var iegūt kādu zālaugu (7.8.zīmējums).

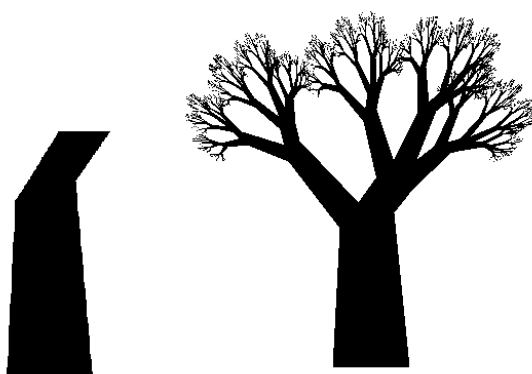
```
fr1[x_, n_]:=Show[Graphics[Nest[IFS[{{AffineMap[0,0,1,1,0,0],
AffineMap[30°, 30°, 1/√3, 1/√3, -0.5, 1.5],
AffineMap[-30°, -30°, 1/√3, 1/√3, 0, 1]}},x,n]],
Axes→False,AspectRatio→Automatic,AxesOrigin→ {0,0}];
P1=Line[{{0,0},{0,1},{-0.5,1.5}}]
Show[GraphicsArray[{{fr1[P1,0],fr1[P1,6]}]]]
```



7.8.zīm. Zālaugs (poligons un 6.iterācija).

Koku ziemā iegūsim, ja poligona vietā izvēlēsimies kādu vertikālu daudzstūri. Piemērs redzams zemāk. Vēl var pamainīt saspiešanas koeficientus uz negatīviem skaitļiem un būs vēl interesantāki fraktāļu koki.

```
fr1[x_, n_] := Show[Graphics[Nest[IFS[{AffineMap[0, 0, 1, 1, 0, 0],
AffineMap[40°, 40°, 0.4, 0.6, 0.1, 1.8],
AffineMap[15°, 15°, 0.3, 0.5, 0.6, 2.3],
AffineMap[-25°, -25°, 0.3, 0.5, 0.7, 2.5],
AffineMap[-50°, -50°, 0.3, 0.5, 0.6, 2.3]}], x, n]],
Axes → False, AspectRatio → Automatic, AxesOrigin → {0, 0}];
P1 = Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {0.8, 2}, {1.2, 2.5}, {0.6, 2.5}, {0.1, 1.8}}];
Show[GraphicsArray[{{fr1[P1, 0], fr1[P1, 6]}]]]
```



7.8.zīm. Koka konstrukcija (poligons un 6.iterācija).

Apskatīsim uzdevumu, kas ir pretējs IFS atraktora atrašanai. Pieņemsim, ka mūsu rīcībā ir kaut kāds attēls, un ir nepieciešams atrast afīno saspiedējattēlojumu saimi, kurai dotais attēls ir atraktors. Šādu uzdevumu atrisināšanai ir liela nozīme praktiskos lietojumos, kas sastīti ar attēlu saspiešanu un pārraidi. Viena no attēlu saspiešanas iespējām varētu būt tāda, ka doto attēlu sadala vairākos mazākos attēlos, kurus var uztvert kā kaut kādas IFS atraktorus. Tā kā jebkuru afīno attēlojumu nosaka tikai seši koeficienti, tad pilnu attēlu principā var nokodēt ar samērā mazu afīno koeficientu skaitu. Tad var pārraidīt koeficientus, bet attēlu var iegūt ar šiem koeficientiem izpildot noteiktu IFS algoritmu.

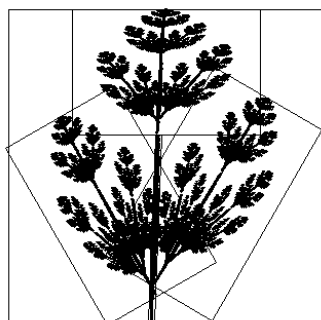
Piemēram, ja nepieciešams pārraidīt Serpinska trīsstūri ar izmēriem  $512 \times 512$ . Neizmantojot saspiešanu, nepieciešams pārraidīt 262 144 biti lielu informāciju (nuli vai vieninieku katram pikselim). No otras puses, ja mēs pārraidītu tikai 18 afīnos koeficientus, kas atbilst trim afīnajām transformācijām,

tad varētu pilnībā atjaunot oriģinālo zīmējumu. Šajā gadījumā tiktu sasniegta saspiešana  $262\,144 : 18 = 14\,563 : 1$ .

Līdz ar to rodas jautājums, kā atrast afīno saspiedējattēlojumu saimi dotam atraktoram. Šeit mēs tikai pieskarsimies šai jaunajai pētījumu nozarei, apskatot vienu no metodēm — kolāžas metodi, kas balstīta uz elementārām fraktālu īpašībām.

Pieņemsim, ka kaut kāds attēls  $X$  ietver sevī apvienojumu (**kolāžu**) no  $N$  kopām, kuras nešķeļas un kuras saistītas ar  $X$  ar līdzības transformācijām  $T_1, T_2, \dots, T_m$  ar līdzības koeficientiem  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , kuri mazāki par 1. Tādā gadījumā  $X$  ir IFS atraktors nosauktajiem attēlojumiem. Piemēram, Serpīnska trīsstūris ir kolāža no trim sevis kopijām, kas samazinātas uz pusi. Zemāk redzamajā 7.9.zīmējumā arī redzamo attēlu var uzskatīt par kolāžu no trim dotā attēla kopijām (tās ievilkta taisnstūros).

```
collage1[x_, n_]:=Graphics[Nest[IFS[{AffineMap[-2°, -2°, 0.02, 0.6, -0.14, -0.8],
AffineMap[0, 0, 0.6, 0.4, 0, 1.2],
AffineMap[-30°, -30°, 0.4, 0.7, 0.6, -0.35],
AffineMap[30°, 30°, 0.4, 0.65, -0.7, -0.5]}], x, n],
Axes→False, AspectRatio→Automatic, AxesOrigin→ {0, 0}];
Show[collage1[Point[{0, 0}], 8]]
```



7.9.zīm. Kolāža.

Vispārīgi runājot, var izmantot ne tikai līdzības transformācijas. Protams, viens no sarežģītākajiem jautājumiem ir afīno attēlojumu atrašana. Bet pievērsīsimies problēmas galvenajam matemātiskajam aspektam. Novērtēsim Hausdorfa attālumu starp doto attēlu un konstruēto atraktoru. Šādu novērtējumu dod nākamā teorēma.

**Teorēma 7.4.** Pieņemsim, ka  $A$  ir netukša kompakta kopa (dotais attēls),  $T_1, T_2, \dots, T_m$  ir saspiedējattēlojumu saime ar saspiešanas koeficien-



tiem  $s_1, s_2, \dots, s_m, E$  ir IFS vai IFS ar kondensācijas transformāciju atraktors, kas saistīts ar minētajiem attēlojumiem un  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ . Ja dotam  $\varepsilon > 0$  izpildās nevienādība

$$D(A, \cup_{i=1}^m T_i(A)) < \varepsilon,$$

tad

$$D(A, E) < \frac{\varepsilon}{1-s}.$$

Teorēma prasa atrast tādu IFS, kuras atraktors ir tuvu vai izskatās tuvu dotajai kopai; ir nepieciešams censties atrast tādu saspiedējattēlojumu transformāciju saimi piemērotā telpā, lai dotās kopas attēla kolāža ar transformācijām būtu tuvu dotajai kopai, kur tuvums tiek mērīts Hausdorfa metrikā.

Vienkāršs piemērs telpā  $\mathbf{R}$  ar Eiklīda metriku. Ievērosim, ka  $[0; 1] = [0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; 1]$ . Par atraktoru varam uzskatīt kopu  $[0; 1]$ , ja atrodami tādi saspiedējattēlojumi  $T_1, T_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , kuriem  $T_1([0; 1]) = [0; \frac{1}{2}]$  un  $T_2([0; 1]) = [\frac{1}{2}; 1]$ . Tādi attēlojumi ir  $T_1(x) = \frac{1}{2}x$  un  $T_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ . Vienības intervāls ir kolāža no divām mazākām sevis kopijām.

## NODAĻA NR. 8

### Džūlija kopas un Mandelbrota kopa — fraktāli kompleksajā plaknē

**Anotācija.** Pildītās Džūlija kopas un Džūlija kopas, to konstrukcija un dažas īpašības. Mandelbrota kopa, dažas tās īpašības. Konstruēšana ar MATHEMATICA.

Šajā nodaļā nedaudz iepazīsimies ar visslavenākajiem fraktāļiem — Džūlija kopām un Mandelbrota kopu.

Franču matemātiķis Gastons Džūlija (*Gaston Julia*) (1893-1978) savu 199 lapaspuses biezo meistardarbu sarakstīja 25 gadu vecumā (*Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, *J.Math.Pure Appl.*, V.4, 1918, 47-245). Taču tā pa īstam šis darbs tika ierauzīts un novērtēts krietni vēlāk.

Pieņemsim, ka  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , kur  $\mathbf{C}$  ir komplekso skaitļu kopa. Par punkta  $z_0 \in \mathbf{C}$  **orbītu**  $O(z_0)$  sauc kopu, kas sastāv no paša punkta un visām tā iterācijām pie attēlojuma  $f$ :

$$O(z_0) = \{ z_0, f(z_0), f^2(z_0), f^3(z_0), \dots \}.$$

**Definīcija 8.1.** Par attēlojuma  $f$  **pildīto Džūlija kopu** (*filled Julia set*) sauc kopu

$$K(f) = \{ z \in \mathbf{C} \mid O(z) \text{ ir ierobežota kopa} \}.$$

Attēlojuma  $f$  **Džūlija kopa**  $J(f)$  ir pildītās Džūlija kopas  $K(f)$  robeža vai ekvivalenti to var definēt kā robežu "izbēgušo punktu" kopai (*escape set*)

$$E = \{ z \in \mathbf{C} \mid |f^n(z)| \rightarrow \infty, \text{ ja } n \rightarrow \infty \}.$$

Parasti funkciju klase, kurai tiek apskatīti šie jēdzieni, ir kvadrātiskie attēlojumi  $Q_c(z) = z^2 + c$ , kur  $c$  ir kompleksa konstante. Atbilstošo pildīto

Džūlija kopu apzīmēsim ar  $K_c$  un Džūlija kopu ar  $J_c$ . Var pierādīt, ka jebkurš kompleksais 2.pakāpes polinoms  $P(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$  ir topoloģiski saistīts ar kvadrātisku komplekso attēlojumu formā  $Q_c(z) = z^2 + c$  ar noteiktu  $c$  vērtību. Ja  $\alpha \neq 0, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ , tad par saites attēlojumu  $h$  starp  $Q_c$  un  $P$  der  $h(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$ . Tāpēc, lai veiktu kvadrātisku polinomu izpēti telpā  $\mathbf{C}$ , pietiek apskatīt polinomus  $Q_c$ . Vispārīgā gadījumā var pierādīt šādu rezultātu:

**Teorēma 8.1.** Pieņemsim, ka  $f$  ir diferencējama kompleksa funkcija un  $p$  ir tās periodisks punkts ar pirmperiodu  $k$ . Ja  $|(f^k)'(p)| < 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtne, kuras punkti ar funkcijas  $f^k$  iterācijām konverģē uz punktu  $p$  (t.i.,  $p$  ir pievelkošs periodisks punkts). Ja  $|(f^k)'(p)| > 1$ , tad eksistē tāda punkta  $p$  apkārtne, kuras visi punkti ar funkcijas  $f^k$  iterācijām iziet ārpus šīs apkārtnes (t.i.,  $p$  ir atgrūdošs periodisks punkts).

**Piemērs 8.1.** Apskatīsim funkciju  $Q_0(z) = z^2$ . Vienīgie nekustīgie punkti (nekustīgie punkti ir periodiski punkti ar periodu 1!) ir 0 un 1. Tā kā  $Q_0'(0) = 0$  un  $Q_0'(1) = 2$ , tad 0 ir pievelkošs nekustīgais punkts un 1 ir atgrūdošs nekustīgais punkts.

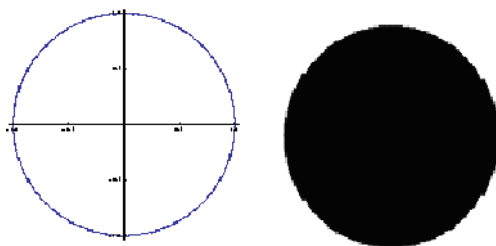
Ja  $z = re^{\theta i}$ , tad

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= (re^{\theta i})(re^{\theta i}) = r^2 e^{2\theta i}, \\ Q_0^2(z) &= r^4 e^{4\theta i}, \\ &\dots, \\ Q_0^n(z) &= r^{2^n} e^{2^n \theta i}. \end{aligned}$$

Tā kā  $|Q_0^n(z)| = r^{2^n}$ , tad

$$\begin{aligned} z \text{ tiek pievilkts } 0 &\Leftrightarrow |z| < 1 \text{ un} \\ z \text{ tiek atgrūsts} &\Leftrightarrow |z| > 1. \end{aligned}$$

Līdz ar to  $K_0$  ir vienības riņķis, bet  $J_0$  ir vienības riņķa līnija kompleksajā plaknē (8.1.zīmējums).



8.1.zīm.  $J_0$  un  $K_0$ .

Ja  $|z| = 1$ , funkcijas  $Q_0$  dinamika kļūst interesantāka. Ar  $S$  apzīmēsim vienības riņķa līniju. Tad varam rakstīt  $Q_0 : S \rightarrow S$ . Pieņemsim, ka  $\arg(z) = \theta$ . Tad  $\arg(Q_0(z)) = 2\theta$ ; iegūstam riņķa līnijas dubultošanas attēlojumu. Šis attēlojums ir haotisks, tāpēc  $Q_0(z) = z^2$  ir haotisks attēlojums kopā  $S$ . ■

Kompleksas funkcijas gadījumā teiksim, ka punkta orbīta ir *ierobežota*, ja eksistē tāds pozitīvs reāls skaitlis, ka jebkurš orbītas punkta modulis ir mazāks par šo reālo skaitli. Nākošais apgalvojums parāda, ka funkcijas  $Q_c$  orbītas ir sadalāmas divās kopās: tādās, kas ir ierobežotas, un tādās, kuras konverģē uz bezgalību.

**Teorēma 8.2.** Kompleksa skaitļa orbīta pie kompleksa kvadrātiska polinoma iterācijām ir vai nu ierobežota vai arī punkts atrodas bezgalības stabilitātes kopā.

**Pierādījums.** Tā kā visi kompleksie kvadrātiskie polinomi ir topoloģiski saistīti ar funkcijām formā  $Q_c(z) = z^2 + c$ , tad ir pietiekami apgalvojumu pierādīt tikai šai polinomu saimei.

Iepriekš tikām pierādījuši, ka apgalvojums izpildās funkcijai  $Q_0(z) = z^2$ . Pieņemsim, ka  $c$  ir nenulles kompleksss skaitlis un  $Q(z) = z^2 + c$ . Vispirms parādīsim, ja  $w$  ir tāds kompleksss skaitlis, ka  $|w| > |c| + 1$ , tad  $w$  ir bezgalības stabilitātes kopā.

Tā kā  $Q(w) = w^2 + c$ , tad

$$|Q(w)| = |w^2 + c| \geq |w^2| - |c| \geq (|c| + 1)^2 - |c| = |c|^2 + |c| + 1.$$

Apskatīsim funkcijas  $Q$  otro iterāciju punktā  $w$ :

$$\begin{aligned} |Q^2(w)| &= |Q(Q(w))| = |(Q(w))^2 + c| \geq |Q(w)|^2 - |c| \geq (|c|^2 + |c| + 1)^2 - |c| = \\ &= |c|^4 + 2|c|^3 + 3|c|^2 + |c| + 1 \geq 3|c|^2 + |c| + 1. \end{aligned}$$

Turpinot šādi tālāk, ar matemātisko indukciju var parādīt, ka

$$|Q^n(w)| \geq (2^n - 1)|c|^2 + |c| + 1.$$

Tā kā labā puse tiecas uz bezgalību, kad  $n$  tiecas uz bezgalību, tad arī kreisā puse tiecas uz bezgalību un  $w$  atrodas bezgalības stabilitātes kopā, ja  $|w| > |c| + 1$ . Savukārt, ja

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad |Q^n(w)| > |c| + 1,$$

tad saskaņā ar iepriekš pierādīto  $w \in W^S(\infty)$ . Pretējā gadījumā

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |Q^n(w)| \leq |c| + 1,$$

t.i., punkta  $w$  iterācijas ir ierobežotas. ■

**Teorēma 8.3** (Izbēgšanas kritērijs (*the Escape Criterion*)). Ja

$$|z| > \max\{2, |c|\},$$

tad  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_c^n(z)| = \infty$ .

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $z \in \mathbf{C}$  un  $|z| > \max\{2, |c|\}$ , tad

$$\begin{aligned} |Q_c(z)| = |z^2 + c| &\geq |z^2| - |c| \geq \\ &\geq |z|^2 - |c| > \\ &> |z|^2 - |z| = \quad (\text{jo } |z| > |c|) \\ &= |z|(|z| - 1). \end{aligned}$$

Tā kā  $|z| > 2$ , tad eksistē tāds  $\eta > 0$ , ka  $|z| - 1 = 1 + \eta$ . Savietojot ar iepriekš atrasto nevienādību, iegūsim

$$|Q_c(z)| > (1 + \eta)|z|.$$

Ar matemātisko indukciju pēc iterāciju skaita  $n$  tad var secināt, ka

$$|Q_c^n(z)| > (1 + \eta)^n |z|$$

un tālab  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_c^n(z)| = \infty$ . ■

**Pildītās Džūlija kopas zīmēšanas algoritms** (vienkāršākais variants)

Apzīmēsim  $r(c) = \max\{|c|, 2\}$  — šo skaitli sauc par  $Q_c$  **sliekšņa rādiusu** (*threshold radius*). Ievērosim, ka pēc Teorēmas 8.3 jebkuram  $z \in \mathbf{C}$  eksistē tāda iterācija  $k \in \mathbf{N}$ , ka  $|Q_c^k(z)| > r(c)$ ; acīmredzami, ka šajā gadījumā punkta  $z$  orbīta "aizbēg" uz bezgalību un tāpēc  $z \notin K_c$ . Ņemot vērā šo piezīmi, var izveidot algoritmu, kurš ģenerē kopu  $K_c$ .

Izvēlamies riņķi ar centru koordinātu sākumpunktā un rādiusu  $r(c)$  un izveidojam šajā riņķī tīklu ar noteiktu soļa garumu (var izvēlēties arī kvadrātu ar viduspunktu koordinātu sākumpunktā un ar malām, kuras divreiz lielākas par  $r(c)$ ). Nofiksējam vislielāko pieļaujamo iterāciju skaitu  $N$ . Tad pārstaiģājam tīkla acis  $z$ , meklējam šo punktu iterācijas un veicam šādu darbību:

1. ja  $\exists k \leq N: |Q_c^k(z)| > r(c)$ , tad iekrāsojam punktu  $z$  baltu (vai — neiekrašojam vispār);

2. ja  $\forall k \leq N: |Q_c^k(z)| \leq r(c)$ , tad iekrāsojam punktu  $z$  melnu.

Iekrāsotie punkti melnajā krāsā veido pildītās Džūlija kopas aproksimāciju.

■ Definēsim

$$L_0 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r(c)\}.$$

Apzīmēsim

$$L_{-1} = Q_c^{-1} = \{z \in \mathbf{C} \mid Q_c(z) \in L_0\}.$$

Var apgalvot, ka  $L_{-1} \subset L_0$ . Ja tā nebūtu, tad eksistētu tāds  $\omega \in L_{-1} \setminus L_0$ , kuram  $|\omega| > r(c)$ . Pēc Izbēgšanas kritērija seko, ka  $|Q_c(\omega)| > |\omega| > r(c)$ , kas ir pretrunā ar  $Q_c(\omega) \in L_0$ .

Definēsim kopas

$$L_{-2} = Q_c^{-1}(L_{-1}), L_{-3} = Q_c^{-1}(L_{-2}), \dots, L_{-n-1} = Q_c^{-1}(L_{-n}) \dots$$

Tad jebkura kopa  $L_{-n}$  ir netukša, jo tā satur vismaz divus  $Q_c$  nekustīgos punktus (tie ir vienādojuma  $z^2 + c = z$  saknes  $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4c} \in L_0$ ). Izpildās arī iekļāvums

$$L_0 \supset L_{-1} \supset L_{-2} \supset \dots \supset L_{-n} \supset \dots$$

un katra no kopām  $L_{-n}$  ir slēgta un ierobežota. Turklāt

$$K_c = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{-n} \quad (\text{Hausdorfa metrikā}).$$

Ievērosim, ka  $Q_c^{-1}(K_c) = K_c$ , jo  $L_{-n-1} = Q_c^{-1}(L_{-n})$ . Bez tam, tā kā  $Q_c$  ir sirjekcija, tad  $Q_c(K_c) = K_c$ , t.i.,  $K_c$  ir invarianta kopa pret attēlojumu  $Q_c$ . Līdzīgas īpašības var pierādīt arī attiecībā uz kopu  $J_c$ . Iegūtais apkopots šādā teorēmā:

**Teorēma 8.4.** Kopas  $K_c$  un  $J_c$  ir netukšas, slēgtas, ierobežotas un invariantas apakškopas kopā  $\mathbf{C}$ .

Lai padarītu  $K_c$  zīmējumu interesantāku, var katru no  $L_{-n}$  kopām iekrāsot atšķirīgā krāsā vai arī  $L_{-2n}$  iekrāsot melnu, bet  $L_{-2n-1}$  baltu,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; te parādās variāciju iespējas.

Tālāk analizēsim kopu  $K_c$  struktūru. Nākošā lemma dos izpratni par  $K_n$  izskatu.

**Lemma 8.1.** Pieņemsim, ka  $\Gamma$  ir gluda (*smooth*), vienkārša (*simple*) un slēgta (*closed*) likne (*curve*) telpā  $\mathbf{C}$ . Tad kopai

$$Q_c^{-1}(\Gamma) = \{\omega \in \mathbf{C} \mid Q_c(\omega) \in \Gamma\}$$

ir šādas īpašības:

1. ja  $c$  atrodas  $\Gamma$  iekšienē, tad  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  arī ir gluda, vienkārša un slēgta līkne. Eksistē injekcija starp  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  iekšieni un  $\Gamma$  iekšieni.
2. ja  $c$  atrodas uz  $\Gamma$  robežas, tad  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  ir gluda, astoņniekam līdzīga līkne. Eksistē injekcija starp abu pušu iekšienēm un  $\Gamma$  iekšieni.
3. ja  $c$  atrodas ārpus  $\Gamma$ , tad  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  sastāv no divām slēgtām gludām līknēm un eksistē injekcija starp abu iekšienēm un  $\Gamma$  iekšieni.

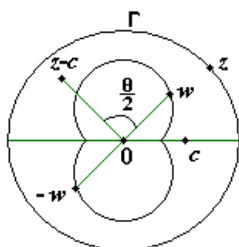
**Pierādījuma shēma.** Vispirms par terminoloģiju. Pieņemsim, ka  $I \subset \mathbf{R}$  ir reālu skaitļu intervāls. Par līkni sauc nepārtrauktu funkciju  $\Gamma : I \rightarrow X$ , kur vispārīgā gadījumā  $X$  ir topoloģiska telpa. Līkni sauc par vienkāršu, ja tā ir injekcija, t.i.,  $\forall x, y \in I: \Gamma(x) = \Gamma(y) \Rightarrow x = y$ . Līkni sauc par slēgtu, ja  $I = [a; b]$  un  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ . Par gludu līkni sauc tādu līkni  $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , kura ir nepārtraukti diferencējama (šajā gadījumā  $X = \mathbf{R}^n$  un līkni var uztvert kā vektorfunkciju) un kurai atvasinājuma modulis ir atšķirīgs no 0 jebkuram intervāla  $I$  punktam.

Šeit apskatīsim tikai ieskicētu gadījumu, ja  $\Gamma$  ir riņķa līnija. Pieņemsim, ka  $z \in \Gamma$  un  $z - c = |z - c| e^{i\theta}$ . Tad

$$\omega = \pm \sqrt{z - c} = \pm \sqrt{|z - c|} e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

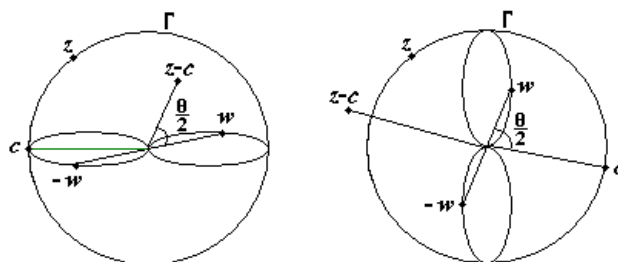
Trīs minētie gadījumi tad izskatās šādi:

1. ja  $c$  atrodas  $\Gamma$  iekšienē, tad attēlojums  $z - c$  pārbīda riņķa līnijas centru no sākumpunkta uz  $\Gamma$  iekšieni. Tāpēc  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  izskatās kā 8.2.zīmējumā.



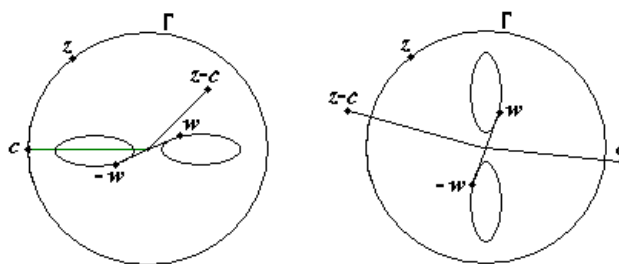
8.2.zīm.

2. ja  $c$  atrodas uz  $\Gamma$  robežas, tad attēlojums  $z - c$  pārbīda riņķa līnijas centru no sākumpunkta par punktu uz riņķa līniju, precīzāk, par  $-c$  un mēs iegūstam riņķa līniju  $\tilde{\Gamma}$ , kura iet caur sākumpunktu. Tad  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  izskatās kā 8.3.zīmējumā.



8.3.zīm.

3. ja  $c$  atrodas ārpus  $\Gamma$ , tad attēlojums  $z - c$  pārbīda  $\Gamma$  par riņķa līniju  $\tilde{\Gamma}$ , kuras centrs atrodas ārpusē. Šajā gadījumā  $Q_c^{-1}(\Gamma)$  izskatās kā 8.4.zīmējumā.



8.3.zīm.

**Definīcija 8.2.** Kopu  $B \subset \mathbf{C}$  sauc par **sakarīgu** (*connected*), ja tā nav apvienojums no divām disjunktām vaļējām netuksām  $\mathbf{C}$  apakškopām. Kopu  $B \subset \mathbf{C}$  sauc par **ceļveidīgi sakarīgu** (*pathwise connected*), ja jebkuriem diviem punktiem  $z_1$  un  $z_2$  no  $B$  eksistē tāda nepārtraukta funkcija  $F : I = [a; b] \rightarrow B$ , ka  $f(a) = z_1$  un  $f(b) = z_2$ . Šo funkciju  $F$  sauc par **ceļu** no  $z_1$  uz  $z_2$ .

Ceļveidīgi sakarīga kopa vienmēr ir sakarīga kopa, bet ne jebkura sakarīga kopa ir ceļveidīgi sakarīga. Gadījumā, ja  $B$  ir vaļēja kopa, tad šie jēdzieni ir ekvivalenti.

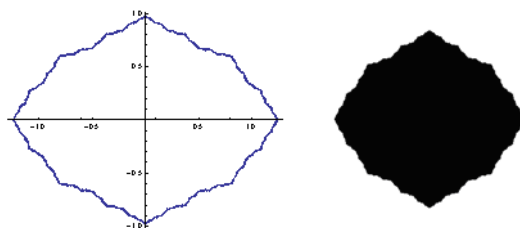
**Teorēma 8.5.** Ir spēkā šādi divi apgalvojumi:

1. Ja  $0 \in K_c$ , tad Džūlija kopa  $J_c$  ir ceļveidīgi sakarīga.
2. Ja  $0 \notin K_c$ , tad Džūlija kopa  $J_c$  ir pilnīgi nesakarīga un ir Kantora kopa.

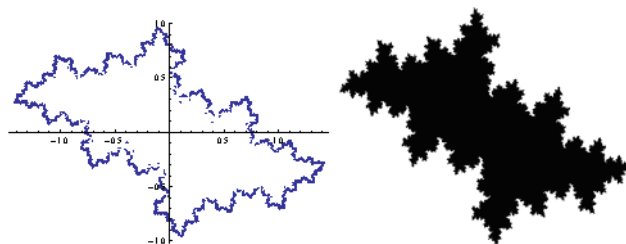


(Kopu sauc par pilnīgi nesakarīgu, ja tās vienīgās netukšās sakarīgās apakškopas ir viena punkta kopas.)

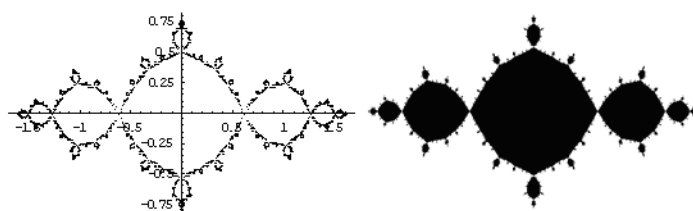
Džūlija kopas izskats var būt ļoti atšķirīgs dažādām  $c$  vērtībām.  $J_c$  var būt vienkārša slēgta līkne, tā var būt sarežģītāka izskata līkne, tā var būt līkne, kura neiekļauj kopu ar iekšieni un  $J_c$  var būt pilnīgi nesakarīga kopa un Kantora kopa. Džūlija kopa ir simetriska attiecībā pret koordinātu sākumpunktu. Daži piemēri apskatīti tālākajos zīmējumos.



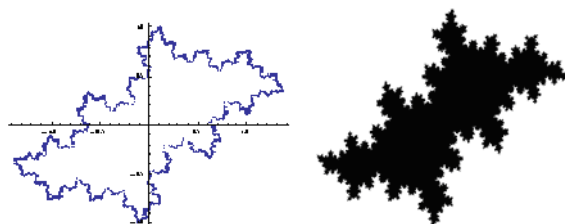
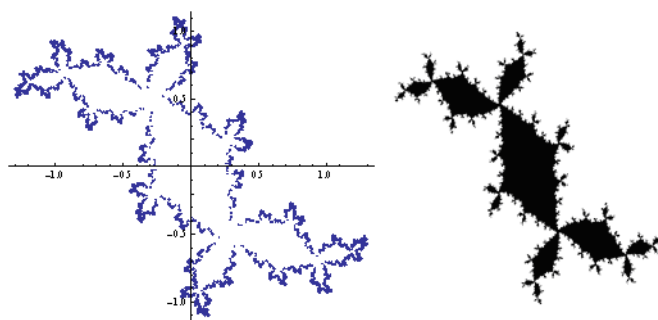
8.5.zīm.  $J_{-0.3}$  un  $K_{-0.3}$ .



8.6.zīm.  $J_{-0.5+0.5i}$  un  $K_{-0.5+0.5i}$ .

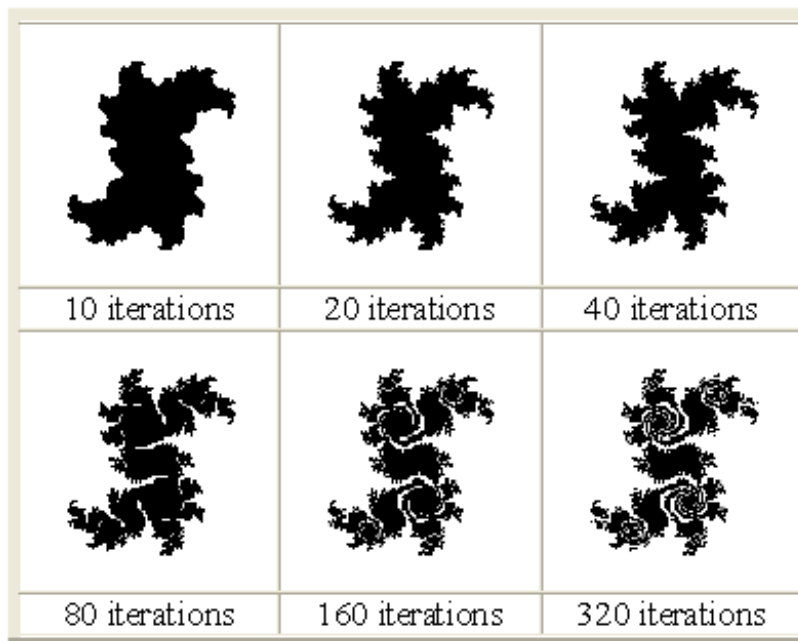


8.7.zīm.  $J_{-1}$  un  $K_{-1}$ .

8.8.zīm.  $K_{-1.3}$ .8.9.zīm.  $K_{-1.6}$ .8.10.zīm.  $J_{-0.39-0.58i}$  un  $K_{-0.39-0.58i}$  (*the Siegel disk*).8.11.zīm.  $J_{-0.1+0.8i}$  un  $K_{-0.1+0.8i}$  (*the Douady Rabbit*).

Zīmējumu kvalitāte ir atkarīga no izpildīto iterāciju skaita. Iepriekš redzami zīmējumi ir iegūti ar MATHEMATICA palīdzību, izpildot nelielu

skaitu iterāciju, tāpēc nav uzskatāmi par precīziem Džūlija kopu attēlojumiem. 8.12.zīmējumā redzams, kā atšķiras pildītās Džūlija kopas attēls (pie  $c = 0.36237 + 0.32i$ ), mainoties iterāciju skaitam (attēls iegūts no <http://eldar.mathstat.uoguelph.ca/dashlock/ftax/Julia.html>).



8.12.zīm.  $K_{0.36237+0.32i}$  attēls, atkarībā no iterāciju skaita.

Tajā pašā interneta vietnē atrodams precīzāks  $K_{0.36237+0.32i}$  attēls, kurš iegūts, izpildot 600 iterācijas (8.13.zīmējums).



8.13.zīm.  $K_{0.36237+0.32i}$  attēls, iegūts ar 600 iterācijām.

Kā realizēt MATHEMATICA? Džūlija kopu var iegūt ar šādu komandu palīdzību:

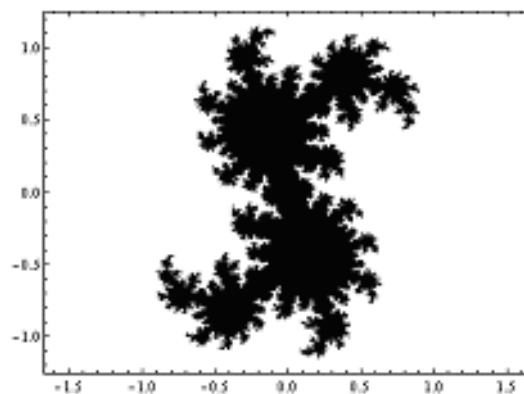
```
w[z_]:= {sqrt[z-k], -sqrt[z-k]};
julia[c_, z_, m_]:=ListPlot[{Re[#],Im[#]}&@Nest[Flatten[
(Map[w, #].k->c),1]&,{z},m],
AspectRatio->Automatic,Prolog->PointSize[0.004]];
julia[-0.39-0.58I,2+I,15]
```

Konkrētajā gadījumā tiks iegūt 8.10.zīmējuma Džūlija kopa  $J_{-0.39-0.58i}$ . Lai iegūtu citas Džūlija kopas, pēdējā rindīnā jānomaina pirmais kompleksais skaitlis, kurš atbilst  $c$  vērtībai. Otrs skaitlis norāda, ar kādu punktu ir veiktas iterācijas, bet trešais skaitlis norāda iterāciju skaitu. Kā jau minēts augstāk, 8.5.-8.11.zīmējumos iterāciju skaits nav liels.

Lai iegūtu pildītās Džūlija kopas attēlu, var izmantot šādu MATHEMATICA komandu virkni:

```
DensityPlot[Length[FixedPointList[#^2+0.377-0.248I &,x+I y,50,
SameTest->(Abs [#] > 2.0&)]],{x,-1.6,1.6}, {y,-1.2,1.2},
PlotPoints->100,AspectRatio->Automatic,
ColorFunction->(If[# >= 1,RGBColor[0,0,0],RGBColor[1,1,1]]&)]
```

Šeit  $c$  vērtība ir norādīta pirmajās iekavās. Iegūtais attēls redzams 8.14.zīmējumā.



8.14.zīm.  $K$

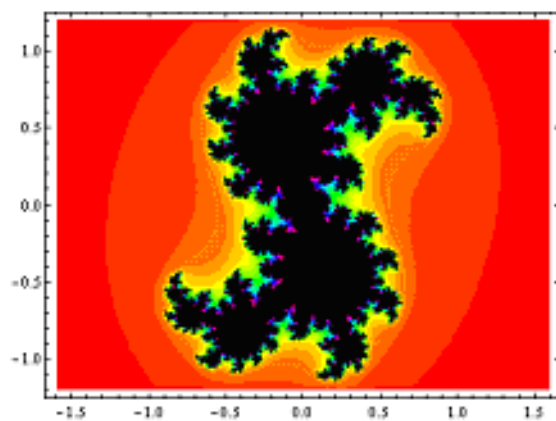
Arī krāsainu attēlu var iegūt ar MATHEMATICA palīdzību. Komandas, kas dod 8.15.zīmējumā redzamo attēlu, ir šādas:

```
DensityPlot[Length[FixedPointList[#^2+0.377-0.248I &,x+I y,50,
```

```

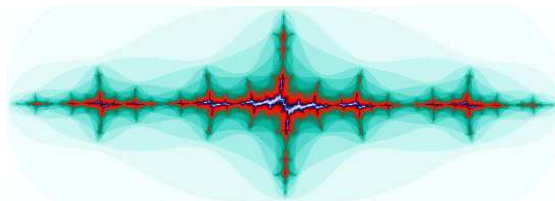
SameTest→(Abs[#2] > 2&)], {x, -1.6, 1.6}, {y, -1.2, 1.2},
PlotPoints→100, AspectRatio→Automatic,
ColorFunction→(If[# ≥ 1, RGBColor[0, 0, 0], Hue[#]] &)

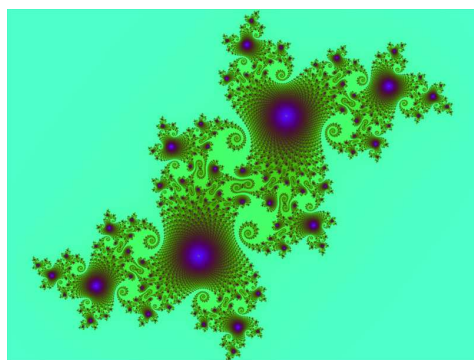
```

8.15.zīm. *K*.

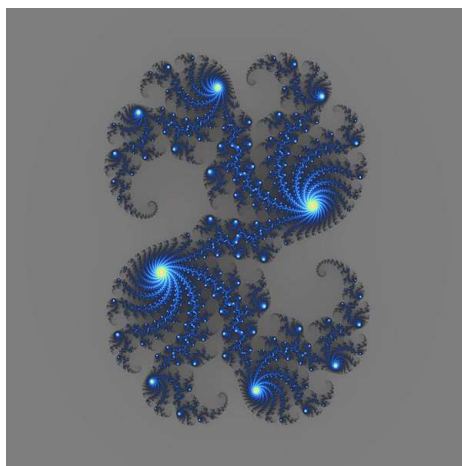
Aizstājot skaitļus 50 un 100, pieaugs attēla kvalitāte un tas precīzāk aproksimēs atbilstošo pildīto Džūlija kopu.

Daži citi zīmējumi no [http://commons.wikimedia.org/wiki/Julia\\_set](http://commons.wikimedia.org/wiki/Julia_set)

8.16.zīm. Uzminiet, pie kādas  $c$  vērtības?



8.17.zīm.  $K_{-0.15684-0.64971i}$ .

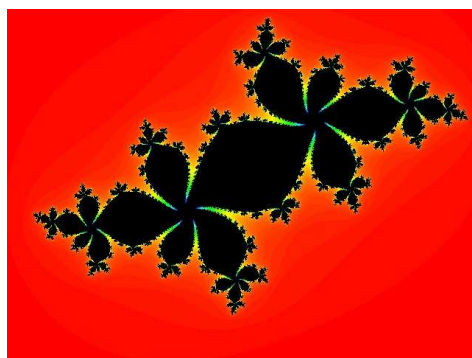
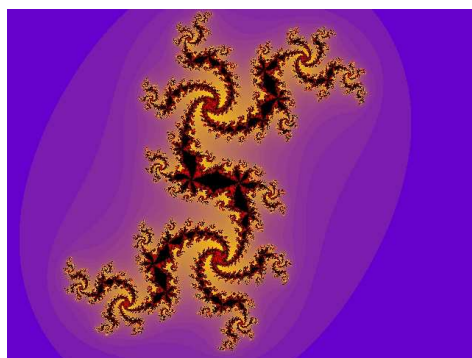


8.18.zīm.  $K_{0.285+0.013i}$ .

n vēl daži no <http://users.erols.com/ziring/mandel.html>



8.19.zīm.  $K_{-0.824-0.1711i}$

8.20.zīm.  $K_{-0.4961+0.5432i}$ 8.21.zīm.  $K_{0.300283+0.48857i}$ 

Mandelbrota kopa salīdzinājumā ar Džūlija kopām ir daudz komplicētāka kopa, bet arī daudz pievilcīgāka un interesētāka kopa. To atklāja 1970.gadu beigās Benuā Mandelbrots. Kvadrātiskas attēlojumu saimes  $Q_c(z) = z^2 + c$  gadījumā **Mandelbrota kopa**, kuru apzīmēsim ar  $M$ , ir izvietota parametra  $c$  telpā un to var definēt šādi:

$$M = \{c \in \mathbf{C} \mid O(0) \text{ ir ierobežota orbīta pie } Q_c\}.$$

Citiem vārdiem sakot, Mandelbrota kopa  $M$  sastāv no tām parametru  $c$  vērtībām, kurām atbilstošās punkta 0 orbītas pie funkcijas  $Q_c$  netiecas uz bezgalību. Dabīgi rodas jautājums, kāpēc interesējamies tieši par punkta 0 orbītām un ko mēs varam par tām pateikt? Idejas atbildei dod iepriekš apskatītā Teorēma 8.5, no kuras varam konstatēt šādu **dihotomijas principu**:

**Sekas Teorēmai 8.5** (*Principle of Dichotomy*) Kvadrātiskai attēlojumu saimei  $Q_c(z) = z^2 + c$  izpildās viens no diviem gadījumiem:

1.  $c \in M$  un atbilstošā Džūlija kopa  $J_c$  ir ceļveidīgi sakarīga (*pathwise connected*) vai
2.  $c \notin M$  un atbilstošā Džūlija kopa  $J_c$  ir pilnīgi nesakarīga (var pierādīt, ka tā ir Kantora kopa).

Šīs sekas dod noderīgu Mandelbrota kopas raksturojumu. Varam teikt, ka

$$M = \{c \in \mathbf{C} \mid J_c \text{ ir ceļveidīgi sakarīga kopa}\}.$$

Bet kāpēc mēs interesējamies tieši par punkta 0 orbītām? Atbildi dod šāda teorēma:

**Teorēma 8.6.** (var būt *Fatou, Julia* kā autori ???) Pieņemsim, ka  $P$  ir polinoms un  $z_0$  ir pievelkošs polinoma  $P$  periodisks punkts. Tad eksistē tāds polinoma kritiskais punkts, kura orbīta neiziet ārpus punkta  $z_0$  pievilksanas apgabala (saka, ka šāds kritiskais punkts ietilpst  $z_0$  stabilitātes kopā).

**Sekas Teorēmai 8.6.** Ja polinomam  $Q_c$  eksistē pievelkošs periodiskais punkts, tad  $c \in M$ .

Pierādījumu var atrast *R.L.Devaney* grāmatas *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, sec.ed., Westview Press, 2003, 281-282.lapaspusēs.

Atcerēsimies, ka punktu  $z_0$  sauc par funkcijas  $f$  kritisko punktu, ja  $f'(z_0) = 0$ . Atliek pamanīt, ka 0 ir vienīgais kvadrātiskā polinoma  $Q_c(z) = z^2 + c$  kritiskais punkts.

Tālāk izstrādāsim Mandelbrota kopas zīmēšanas algoritmu un mēģināsim iegūt sapratni par zīmējuma īpašībām. Vispirms parādīsim, ka Mandelbrota kopa ietilpst noteiktā ierobežotā kompleksās plaknes apgabalā.

**Teorēma 8.7.** Mandelbrota kopa ietilpst slēgtā riņķī ar rādiusu 2 un centru punktā 0, t.i.,

$$M \subset \{c \mid |c| \leq 2\}.$$

**Pierādījums.** Pierādījums no pretējā. Pieņemsim, ka  $|c| > 2$ . Ja  $|z| \geq |c|$ , tad

$$|Q_c(z)| = |z^2 + c| = |z| \left| z + \frac{c}{z} \right| \geq |z| \left( |z| - \frac{|c|}{|z|} \right) \geq |z|(|c| - 1) = k|z|,$$

where  $k = |c| - 1 > 1$ . Tādā gadījumā:

$$Q_c(0) = c,$$

$$|Q_c^2(0)| = |Q_c(c)| \geq |c|k,$$

...

$$|Q_c^{n+1}(0)| \geq |c|k^n.$$



Pēdējo nevienādību var pamatot ar matemātisko indukciju: indukcijas bāze ir izpildīta; ja tiek izdarīts induktīvais pieņēmums  $|Q_c^n(0)| \geq |c|k^{n-1}$ , tad

$$|Q_c^{n+1}(0)| = |Q_c(Q_c^n(0))| \geq |Q_c^n(0)|k \geq |c|k^n.$$

No iegūtās nevienādības seko, ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_c^{n+1}(0)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |c|k^n = \infty,$$

tas nozīmē, ka  $c \notin M$ , tādēļ kopa  $M$  var saturēt punktus tikai no riņķa ar rādiusu 2 un centru punktā 0. ■

**Mandelbrota kopas  $M$  zīmēšanas algoritms** (vienkāršākais variants)

1. Fiksējam pieļaujamo iterāciju skaitu  $N$ .
2. Izvēlamies režģi kompleksajā plaknē kvadrāta ar virsotnēm

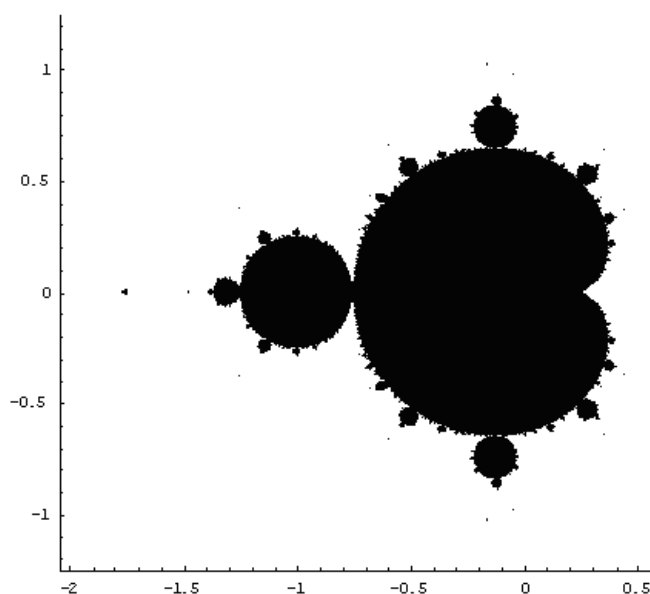
$$(-2; -2), (-2; 2), (2; 2), (2; -2).$$

3. Katram  $c$  no režģa izskaitļojam punkta 0 pirmās  $N$  iterācijas

$$\{Q_c(0), Q_c^2(0), \dots, Q_c^N(0)\}.$$

4. Ja  $\exists k \leq N$ , ka  $Q_c^k(0)$  pamet fiksēto kvadrātu, tad  $c \notin M$ , un šo  $c$  iekrāsojam baltu (vai neiekrašojam vispār). Ja  $\forall k \leq N$  iterācijas  $Q_c^k(0)$  neiziet ārpus fiksētā kvadrāta, tad pieņemam, ka  $c \in M$ , un šo  $c$  iekrāsojam melnu.

Šī algoritma rezultātā tiks iegūts atbilstošs zīmējums, kas uzskatāms par vienu no Mandelbrota kopas aproksimācijām (skatīt 8.22.zīmējumu). Jo lielāku iterāciju skaitu algoritma sākumā izvēlēsimies, jo precīzāka būs aproksimācija. Tāpat zīmējuma kvalitāte būs atkarīga no režģa izvēles.



8.22.zīm. Mandelbrota kopa

Veiksim tālāk Mandelbrota kopas analīzi, precizējot, kādas kompleksās parametra vērtības  $c$  noteikti pieder šai kopai. 8.22.zīmējumā redzams, ka Mandelbrota kopa satur kreisajā pusē riņķi un labajā pusē kardoīdu. Kardoīdas iekšieni piederšie  $c$  visi ir tādi, ka  $Q_c(z)$  eksistē pievelkošs nekustīgais punkts. Lai to pierādītu, pieņemsim, ka  $z^*$  ir  $Q_c(z)$  pievelkošs nekustīgais punkts. Tad pēc Teorēmas 8.6. Sekām  $c \in M$ . Bez tam

$$Q_c(z) = z^2 + c = z \text{ un} \quad (8.1)$$

$$|Q'_c(z)| = |2z| < 1.$$

Šādu punktu robeža ir  $|z| = \frac{1}{2}$  vai  $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Ievietojot šīs  $z$  vērtības nekustīgo punktu atrašanās vienādībā (8.1), iegūsim

$$c = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta},$$

šis vienādojums apraksta kardoīdu, ja  $\theta$  mainās no 0 līdz  $2\pi$ . (Tas atbilst  $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , polāro koordinātu sistēmā.) Tātad visas parametra vērtības  $c$ , kurām  $Q_c(z)$  eksistē pievelkošs nekustīgais punkts, atrodas kardoīdas iekšienē; šī kardoīda krusto  $x$  asi pie  $c = \frac{1}{4}$  (ja  $\theta = 0$ ) un pie  $c = -\frac{3}{4}$  (ja  $\theta = \pi$ ).

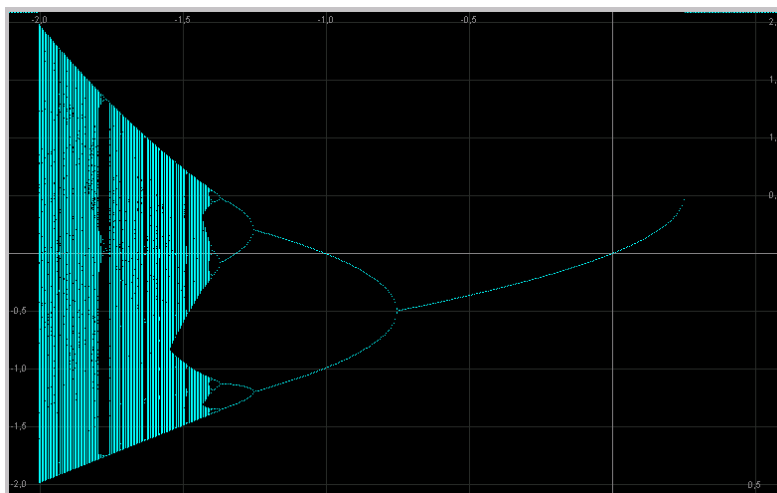
Ievērosim, ka no (8.1) nekustīgie punkti ir

$$z_1^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad \text{un} \quad z_2^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Tātad

$$Q'_c(z_1^*) = 1 - \sqrt{1 - 4c} \quad \text{un} \quad Q'_c(z_2^*) = 1 + \sqrt{1 - 4c},$$

tāpēc  $z_2^*$  ir vienmēr atgrūdošs nekustīgais punkts, bet  $z_1^*$  ir pievelkošs visām tām  $c$  vērtībām, kurām  $|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$ . Šī pēdējā nevienādība izpildās visiem tādiem reāliem skaitļiem  $c$ , kuriem  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ . Punktā  $c = \frac{1}{4}$  varam ieraudzīt *saddle node bifurcation*. Šī situācija precīzi atbilst reālā attēlojuma  $Q_c(x) = x^2 + c$ ,  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ , bifurkāciju diagrammai, kurā redzams viens zars (skatīt 8.23.zīmējumu).



8.23.zīm.  $Q_c(x) = x^2 + c$  bifurkāciju diagramma (pakete *Phaser 3.0*)

Bet  $z_1^*$  zaudē pievilksanas spējas, ja  $c < -\frac{3}{4}$ , un parādās pievelkošs cikls ar periodu 2 (t.i., funkcijai ir periodisks punkts ar periodu 2 un šajā punktā funkcijas otrās kārtas iterācijas atvasinājums pēc moduļa ir mazāks par 1). Lai atrastu visus pievelkošos ciklus ar periodu 2, ir jāatrod  $Q_c^2(z)$  nekustīgie punkti. Proti, ir jāatrisina vienādojums

$$(z^2 + c)^2 + c = z \quad \text{vai} \quad (z^2 + z + 1 + c)(z^2 + c - z) = 0.$$

(Funkcijas  $Q_c(z)$  otrajai iterācijai  $Q_c^2(z)$  ir jāiet caur nekustīgajiem punktiem, t.i.,  $z^2 + c - z = 0$ , tāpēc  $(z^2 + c)^2 + c - z$  dalās ar  $z^2 + c - z$  bez atlikuma un dalījums ir vienāds ar  $z^2 + z + 1 + c$ .)

Vienādojuma

$$z^2 + z + 1 + c = 0 \quad (8.2)$$

saknes  $\tilde{z}_1$  un  $\tilde{z}_2$  ir  $Q_c(z)$  periodiskie punkti ar periodu 2 (veido ciklu), tāpēc

$$\tilde{z}_1^2 + c = \tilde{z}_2 \quad \text{un} \quad \tilde{z}_2^2 + c = \tilde{z}_1.$$

Tā kā

$$(Q_c^{(2)})'(z) = ((z^2 + c)^2 + c)' = 2(z^2 + c)2z = 4z(z^2 + c),$$

tad

$$(Q_c^{(2)})'(\tilde{z}_1) = 4\tilde{z}_1(\tilde{z}_1^2 + c) = 4\tilde{z}_1\tilde{z}_2.$$

Tiesi tāpat otra periodiskā punkta gadījumā:

$$(Q_c^{(2)})'(\tilde{z}_2) = 4\tilde{z}_2(\tilde{z}_2^2 + c) = 4\tilde{z}_1\tilde{z}_2.$$

Pēc Vjeta teorēmas vienādojuma (8.2) sakņu reizinājums ir vienāds ar vienādojuma brīvo locekli, t.i.,

$$\tilde{z}_1\tilde{z}_2 = 1 + c.$$

Lai periodiskie punkti ar periodu 2 būtu pievelkoši, funkcijas otrās iterācijas atvasinājumam periodiskajā punktā pēc moduļa jābūt mazākam par 1 (Teorēma 8.1), t.i.,

$$|(Q_c^{(2)})'(\tilde{z}_1)| = |(Q_c^{(2)})'(\tilde{z}_2)| = |4\tilde{z}_1\tilde{z}_2| = |4(1 + c)| < 1.$$

Tādējādi parametra  $c$  vērtības, kurām eksistē pievelkošs  $Q_c(z)$  cikls ar periodu 2, atrodas riņķa  $|1 + c| = \frac{1}{4}$  iekšienē. Šī riņķa centrs ir punktā  $(-1; 0)$  un rādiuss ir  $\frac{1}{4}$ . Uz  $x$  ass šis riņķis atrodas starp  $-\frac{5}{4}$  un  $-\frac{3}{4}$ , bifurkāciju diagrammā 8.23.zīmējumā ir redzami divi zari, ja  $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$ .

Kā redzams 8.22.zīmējumā bez kardoīdas un riņķa Mandelbrota kopa satur daudzus dažādus izvirzījumus (starus un sīpolus (*rays and bulbs*)). Ņemot palīgā bifurkāciju diagrammu no 8.23.zīmējuma, var izdarīt secinājumu, ka katram Mandelbrota kopas izvirzījumam atbilst noteikts fragments bifurkāciju diagrammā, kas pasaka, ka noteikts izvirzījums ir to parametru  $c$  vērtību kopa, kurām eksistē  $Q_c(z)$  noteikta perioda periodisku punktu kopa, kura ir pievelkoša.

Teorēma 8.6 apgalvo, ja  $\tilde{z}$  ir kompleksa polinoma periodisks punkts, tad tas pievelk kritisko punktu. Kvadrātiskajam attēlojumam  $Q_c(z)$  vienīgais

kritiskais punkts ir 0. Izvēlamies kādu no Mandelbrota kopas izvirzījumiem un orientējoši nosakām tā centru  $\tilde{c}$ . Tādā gadījumā orbīta  $\{Q_{\tilde{c}}^n(0)\}$  tiek pievilktā noteiktam ciklam, kuru var noteikt skaitļošanas veidā (eksperimentā ar datoru). Tām  $c$  vērtībām, kuras tuvu izvirzījumu robežai, skaitļošanas analīze kļūst aizvien grūtāka. Analītiska cikla noteikšana daudzos gadījumos var būt sarežģīta.

Mandelbrota kopa ir simetriska attiecībā pret reālo asi, jo  $z^2 + c$  ir topoloģiski saistīts attēlojums ar  $z^2 + \bar{c}$  ( $\bar{c} = a - bi$  ir kompleksā skaitļa  $c = a + bi$  saistītais kompleksais skaitlis), tāpēc to dinamika ir vienāda.

Zīmējot Mandelbrota kopu, ir jābūt ļoti akurātam, lai no redzētā attēla nevarētu izdarīt aplamus secinājumus, jo gan dators, gan cilvēks pieļauj skaitļošanas kļūdas un īpaši tādas rodas pie noapaļošanas. Ja zīmējot Mandelbrota kopu izvēlēts slikts režģis vai tiek veikts neliels skaits iterāciju, tad var izveidot tādu zīmējumu, kurā Mandelbrota kopa sastāv no vairākām atdalītām kopām, bet tā tas nedrīkstētu būt.

**Teorēma 8.8.** Mandelbrota kopa ir sakarīga.

Pēc Definīcijas 8.2 tas nozīmē, ka Mandelbrota kopa nav apvienojums no disjunktām vaļējām kopām. Teorēmas pierādījums balstās uz ideju, ka Mandelbrota kopu var apskatīt kā Rīmaņa sfēras  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  apakškopu, izmantojot stereografisko projekcijas metodi. Tad Mandelbrota kopa ir sakarīga, ja tās papildinājums kopā  $\bar{\mathbf{C}}$  ir sakarīga kopa, t.i., ja tajā nav "caurumu". Rīmaņa teorēma par attēlojumiem apgalvo, ka tāda sakarīga kopa, kas nav visa kompleksā plaknē, ir homeomorfa vienības riņķim. Ir spēkā arī Rīmaņa teorēmas par attēlojumiem apgriezts apgalvojums: eksistē attēlojums no vienības riņķa  $\Delta = \{z \mid |z| \leq 1\}$  Mandelbrota kopas  $M$  papildinājumā (uz sfēras), tāpēc  $M$  papildinājums ir sakarīga kopa. Minētais attēlojums  $\Psi : \Delta \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$  tiek definēts šādi:

$$\Psi(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$$

Attēlojums  $\Psi$  parāda iespēju, kā uzzīmēt Mandelbrota kopu ar citu metodi nekā iepriekš tika aprakstīts. Attēlojuma  $\Psi$  sākuma daļa  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  attēlo vienības riņķa  $\Delta$  iekšieni par tā ārieni, pretējā orientācijā, pie tam centru 0 attēlojot par  $\infty$ . Pakāpju rindas  $b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$  locekļi pievieno mazas deformācijas, padarot  $M$  ārienes attēlu pie  $\Psi$  par  $\Delta$  ārieni. Riņķa līnijas  $|z| = r$ ,  $r < 1$ , attēls pie  $\Psi$  ir vienkārša slēgta līkne, kas ierobežo apgabalu, kurā atrodas  $M$ .

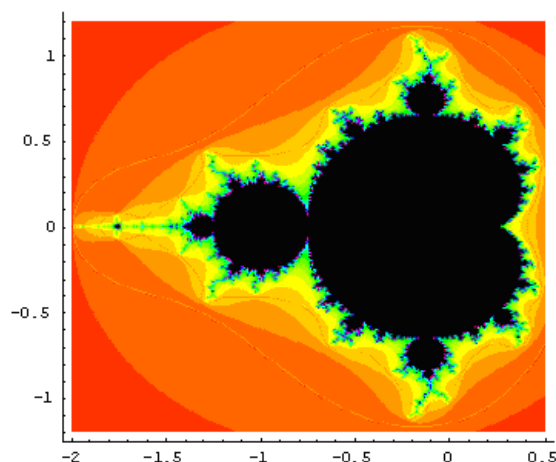
Paketē MATHEMATICA Mandelbrota kopas zīmējumu var iegūt ar šādu komandu palīdzību:

```
DensityPlot[Length[FixedPointList[#^2+x+Iy &,x+I y,50,
SameTest→(Abs[#2] > 2.0&)], {x, -2, 0.5}, {y, -1.2, 1.2},
Mesh→False,AspectRatio→Automatic,Frame→False,Axes→True,
PlotPoints→300, ColorFunction→(If[# ≥ 1,RGBColor[0,0,0],Hue[#]]&)]
```

Šajā gadījumā ir izmantots vienkāršākais zīmēšanas variants, pārstaigājot parametra  $c$  iespējamo punktu kopu, proti, reālās vērtības no  $-2$  līdz  $0.5$  un imaginārās vērtības no  $-1.2$  līdz  $1.2$ . Iterāciju rēķināšana tiek apstādināta, ja

- 1) iterāciju skaitam nepārsniedzot skaitu 50, iterācijas vērtība ir lielāka vai vienāda ar 2 (Teorēma 8.7, kā arī novērojums, ka punkta  $0$  un punkta  $c$  orbīta pie  $Q_c$  konverģē uz vienu un to pašu robežu:  $0, c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \dots$ ) — šajā gadījumā  $c$  nepieder Mandelbrota kopa, bet, lai iegūtu krāsaināku zīmējumu, atkarībā no tā, cik iterācijas ir izpildītas, punktu iekrāso noteiktā krāsā;
- 2) iterāciju skaits sasniedz 50 un iterāciju vērtības ir mazākas par 2 — šajā gadījumā tiek uzskatīts, ka  $c$  pieder Mandelbrota kopai un punkts tiek iekrāsots melnā krāsā.

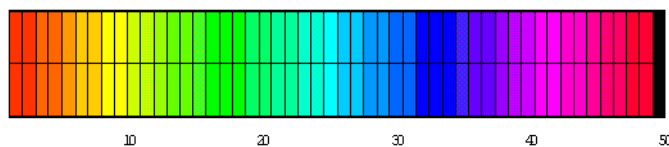
Izpildīto komandu rezultātā iegūtais attēls redzams 8.24.zīmējumā.



8.24.zīm. Mandelbrota kopa

8.25.zīmējumā redzamās krāsu joslas norāda uz izpildīto iterāciju skaitu, pie kura iterācijas vērtība ir lielāka vai vienāda par 2 un tādējādi pamet Mandelbrota kopas apkārtni. Krāsu joslu var iegūt ar šādām MATHEMATICA komandām:

```
DensityPlot[x, {x, 1, 50}, {y, 0, 1}, PlotPoints -> {50, 2}, AspectRatio -> 0.1,
ColorFunction -> (If [# >= 1, RGBColor[0, 0, 0], Hue[#]] &)]
```

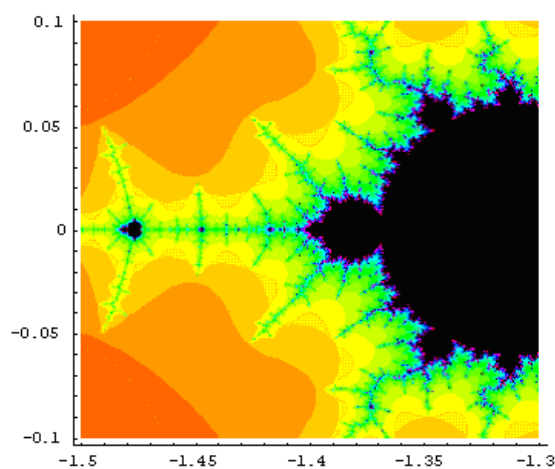


8.25.zīm. Krāsas, kas parāda, pēc cik iterācijām  $c$  pamet Mandelbrota kopas apkārtni ( $\geq 2$ )

Saglabājot šo krāsu spektru, bet atšķirīgs ir iterāciju skaits, veidoti nākamie četri zīmējumi.

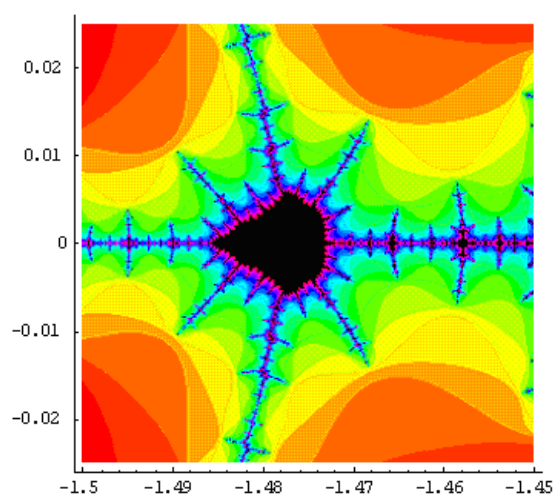
Mandelbrota kopa tiek uzskatīta par daļēji pašlīdzīgu. To var novērot, apskatot aizvien tuvāk un tuvāk dažādus kopas izvirzījumus. Nākamie zīmējumi iegūti ar tām pašām MATHEMATICA komandām kā pati Mandelbrota kopa, tikai mainīts apskatāmais apgabals, iterāciju skaits un režģa blīvums.

8.26.zīmējumā  $c$  izvēlēts no taisnstūra, kuram reālā daļa ir no  $-1.5$  līdz  $-1.3$  un imaginārā daļa no  $-0.1$  līdz  $0.1$ , iterāciju skaits — 100, *PlotPoints* — 300.



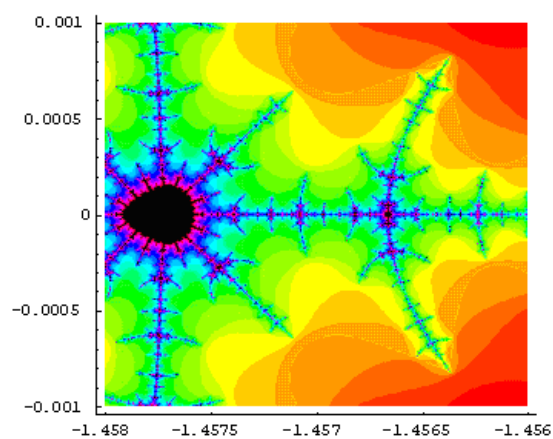
8.26.zīm. Mandelbrota kopas daļa

8.27.zīmējumā  $c$  izvēlēts no taisnstūra, kuram reālā daļa ir no  $-1.5$  līdz  $-1.45$  un imaginārā daļa no  $-0.025$  līdz  $0.025$ , iterāciju skaits — 200, *PlotPoints* — 300.



8.27.zīm. Mandelbrota kopas daļa

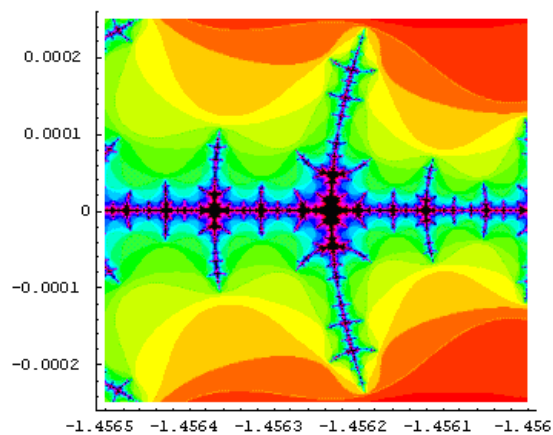
8.28.zīmējumā  $c$  izvēlēts no taisnstūra, kuram reālā daļa ir no  $-1.458$  līdz  $-1.456$  un imaginārā daļa no  $-0.001$  līdz  $0.001$ , iterāciju skaits — 300, *PlotPoints* — 350.



8.28.zīm. Mandelbrota kopas daļa

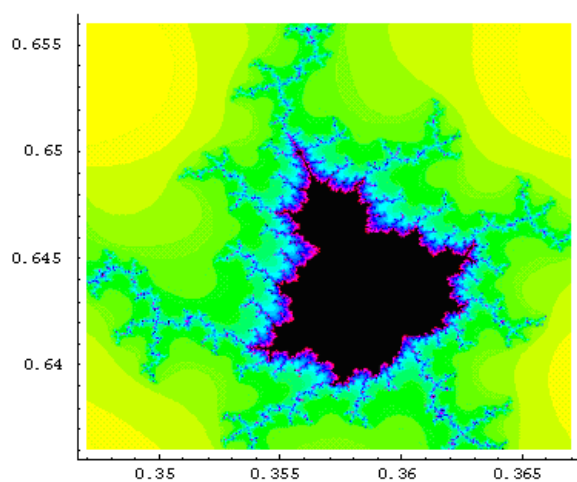
8.29.zīmējumā  $c$  izvēlēts no taisnstūra, kuram reālā daļa ir no  $-1.4565$  līdz  $-1.4560$  un imaginārā daļa no  $-0.00025$  līdz  $0.00025$ , iterāciju skaits — 300, *PlotPoints* — 350.





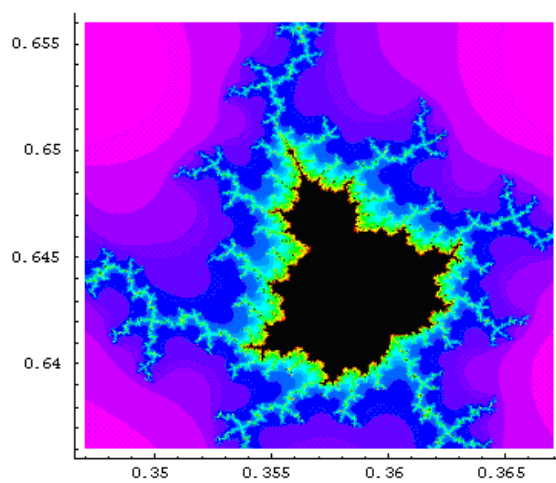
8.29.zīm. Mandelbrota kopas daļa

Līdzīgu attēlu (8.30.zīmējums) kā pati Mandelbrota kopa var ieraudzīt, ja  $c$  izvēlēts no taisnstūra, kuram reālā daļa ir no 0.347 līdz 0.367 un imaginārā daļa no 0.636 līdz 0.656, iterāciju skaits — 200, *PlotPoints* — 350.



8.30.zīm. Mandelbrota kopas daļa

8.30.zīmējums no iepriekšējā atšķiras tikai ar krāsu salikumu; šeit no-mainīta komanda `Hue[#]` ar `Hue[1 - #]`.



8.31.zīm. Mandelbrota kopas daļa

Komplekso funkciju dinamika ir pārsteidzoša un glabā vēl daudzus noslēpumus.