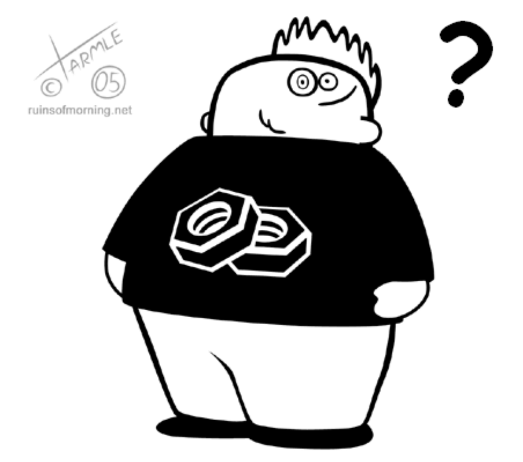
Bloha sfēra

Māris Ozols

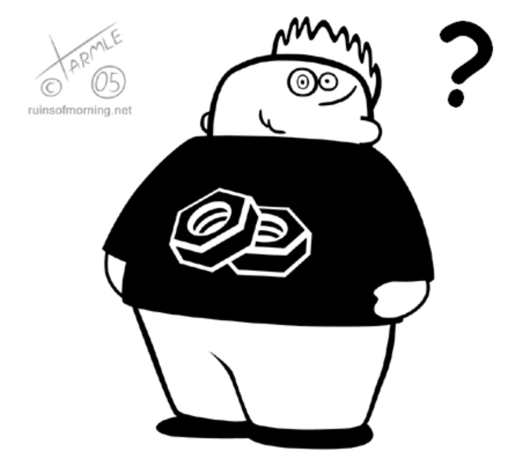
Latvijas Universitāte

2007. gada 7. maijs

Kādā telpā es dzīvoju?

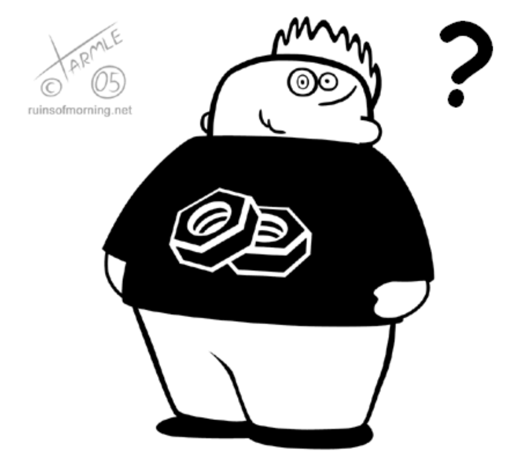


Kādā telpā es dzīvoju?



$\mathbb{R}^3$**?**

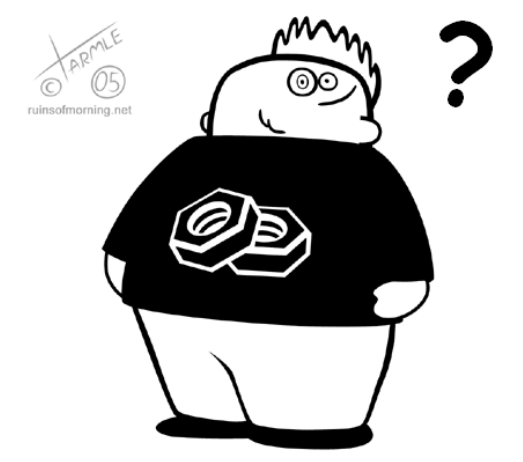
Kādā telpā es dzīvoju?



$\mathbb{R}^3$?

$\mathcal{H}$?

Kādā telpā es dzīvoju?



$\mathbb{R}^3$?

$\mathcal{H}$?

...?

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "$+$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" ($\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$) veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" ($\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$) veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
  4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists(-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" ($\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$) veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
  4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists(-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),
  5. $\forall x, y \in \mathcal{H} : x + y = y + x$ (komutativitāte).

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" ($\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$) veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
  4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists (-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),
  5. $\forall x, y \in \mathcal{H} : x + y = y + x$ (komutativitāte).
- Reizināšanai "$\cdot$" ($\mathbb{C} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$) ar skalāru lielumu ir spēkā:

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:
    1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
    2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
    3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
    4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists (-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),
    5. $\forall x, y \in \mathcal{H} : x + y = y + x$ (komutativitāte).
- Reizināšanai "$\cdot$" $(\mathbb{C} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ ar skalāru lielumu ir spēkā:
    1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativitāte),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
  4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists (-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),
  5. $\forall x, y \in \mathcal{H} : x + y = y + x$ (komutativitāte).
- Reizināšanai "$\cdot$" $(\mathbb{C} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ ar skalāru lielumu ir spēkā:
  1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativitāte),
  2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributivitāte 1),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
  4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists (-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),
  5. $\forall x, y \in \mathcal{H} : x + y = y + x$ (komutativitāte).
- Reizināšanai "$\cdot$" $(\mathbb{C} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H})$ ar skalāru lielumu ir spēkā:
  1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativitāte),
  2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributivitāte 1),
  3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{H} : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributivitāte 2),

Lineāra telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Lineāra telpa $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ pār lauku $\mathbb{C}$:

- Kopa $\mathcal{H}$ ar darbību "+" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ veido Ābela grupu:
  1. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \exists z \in \mathcal{H} : x + y = z$ (slēgta),
  2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
  3. $\exists 0 \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} : x + 0 = 0 + x = x$ (vienības elements),
  4. $\forall x \in \mathcal{H}, \exists (-x) \in \mathcal{H} : x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inversais elements),
  5. $\forall x, y \in \mathcal{H} : x + y = y + x$ (komutativitāte).
- Reizināšanai "·" $(\mathbb{C} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H})$ ar skalāru lielumu ir spēkā:
  1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativitāte),
  2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributivitāte 1),
  3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{H} : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributivitāte 2),
  4. $\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : 1 \cdot x = x$ (lauka vienības elements).

Normēta telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Normēta telpa $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$:

Normēta telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Normēta telpa $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trīsstūra nevienādība),

Normēta telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Normēta telpa $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trīsstūra nevienādība),
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (multiplikativitāte),

Normēta telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Normēta telpa $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trīsstūra nevienādība),
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (multiplikativitāte),
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nulles elements).

Skalārais reizinājums

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpa $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ar skalāro reizinājumu "$\cdot$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C})$:

Skalārais reizinājums

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpa $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ar skalāro reizinājumu "$\cdot$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C})$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (gandrīz komutativitāte),

Skalārais reizinājums

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpa $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ar skalāro reizinājumu "$\cdot$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C})$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (gandrīz komutativitāte),
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : \langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$ (distributivitāte),

Skalārais reizinājums

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpa $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ar skalāro reizinājumu "$\cdot$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C})$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (gandrīz komutativitāte),
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : \langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$ (distributivitāte),
3. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$ (multiplikativitāte),

Skalārais reizinājums

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpa $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ar skalāro reizinājumu "$\cdot$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C})$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$ (gandrīz komutativitāte),
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : \langle x + y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$ (distributivitāte),
3. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \langle \alpha x|y \rangle = \alpha \langle x|y \rangle$ (multiplikativitāte),
4. $\forall x \in \mathcal{H} : \langle x|x \rangle \geq 0$ (nenegativitāte),

Skalārais reizinājums

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpa $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ar skalāro reizinājumu "$\cdot$" $(\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C})$:

1. $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (gandrīz komutativitāte),
2. $\forall x, y, z \in \mathcal{H} : \langle x + y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$ (distributivitāte),
3. $\forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$ (multiplikativitāte),
4. $\forall x \in \mathcal{H} : \langle x|x\rangle \geq 0$ (nenegativitāte),
5. $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nulles elements).

Pilna telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Virkni $\{x_n\}$ sauc par Koši virni telpā $\mathcal{H}$, ja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Pilna telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Virkni $\{x_n\}$ sauc par Koši virni telpā $\mathcal{H}$, ja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definīcija ([1, 2, 3])

Virkne $\{x_n\}$ konverģē uz punktu $x \in \mathcal{H}$, ja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Pilna telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Virkni $\{x_n\}$ sauc par Košī virni telpā $\mathcal{H}$, ja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definīcija ([1, 2, 3])

Virkne $\{x_n\}$ konverğē uz punktu $x \in \mathcal{H}$, ja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Definīcija ([1, 2, 3])

Telpu $\mathcal{H}$ sauc par pilnu, ja katra Košī virkne tajā konverğē.

Hilberta telpa

Definīcija ([1, 2, 3])

Hilberta telpa $\mathcal{H}$ ir pilna, normēta telpa, kurā $\forall x \in \mathcal{H}$ norma ir saskaņota ar skalāro reizinājumu pēc formulas

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

Kvantu sistēmas stāvoklis

Stāvoklis

Lai raksturotu stāvokli kvantu sistēmai, kurai ir n brīvības pakāpju, lieto kolonnas vektoru $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n$:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix}.$$

Kvantu sistēmas stāvoklis

Stāvoklis

Lai raksturotu stāvokli kvantu sistēmai, kurai ir n brīvības pakāpju, lieto kolonnas vektoru $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n$:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix}.$$

Normēšana

No fizikālā viedokļa stāvokļi $|\Psi\rangle$ un $c\,|\Psi\rangle$, kur $c \in \mathbb{C}$, ir ekvivalenti, tāpēc ir pieņemts:

- normēt vektora garumu uz viens: $\||\Psi\rangle\| = 1$,
- ignorēt fāzes reizinātāju: $\forall\alpha \in \mathbb{R} : e^{i\alpha}\,|\Psi\rangle \equiv |\Psi\rangle$.

Blīvuma matrica

Definīcija ([10])

Par stāvokļa $|\Psi\rangle$ saistīto stāvokli sauc

$$\langle\Psi| = |\Psi\rangle^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 & \cdots & \bar{\Psi}_n \end{pmatrix}.$$

Blīvuma matrica

Definīcija ([10])

Par stāvokļa $|\Psi\rangle$ saistīto stāvokli sauc

$$\langle\Psi| = |\Psi\rangle^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 & \cdots & \bar{\Psi}_n \end{pmatrix}.$$

Definīcija ([10])

Par kvantu sistēmas stāvokļu varbūtiskas kombinācijas $\{(p_1, |\Psi_1\rangle), (p_2, |\Psi_2\rangle), \ldots, (p_m, |\Psi_m\rangle)\}$ blīvuma matricu sauc

$$\rho = \sum_{k=1}^{m} p_k |\Psi_k\rangle \langle\Psi_k|.$$

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

1. Ermita: $\rho^\dagger = \rho$.

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

1. Ermita: $\rho^\dagger = \rho$.
2. Ar vienības pēdu: $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$.

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

1. Ermita: $\rho^\dagger = \rho$.
2. Ar vienības pēdu: $\operatorname{Tr} \rho = 1$.
3. Pozitīva: $\rho \geq 0$.

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

1. Ermita: $\rho^\dagger = \rho$.
2. Ar vienības pēdu: $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$.
3. Pozitīva: $\rho \geq 0$.

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

1. Ermita: $\rho^\dagger = \rho$.
2. Ar vienības pēdu: $\operatorname{Tr} \rho = 1$.
3. Pozitīva: $\rho \geq 0$.

Definīcija ([10])

Operatoru A sauc par pozitīvu, ja $\forall \left|\Psi\right\rangle \in \mathcal{H} : \left\langle\Psi\right| A \left|\Psi\right\rangle \geq 0$.

Blīvuma matrica 2

Blīvuma matricas īpašības

1. Ermita: $\rho^\dagger = \rho$.
2. Ar vienības pēdu: $\operatorname{Tr} \rho = 1$.
3. Pozitīva: $\rho \geq 0$.

Definīcija ([10])

Operatoru A sauc par pozitīvu, ja $\forall \left|\Psi\right\rangle \in \mathcal{H} : \left\langle\Psi\right| A \left|\Psi\right\rangle \geq 0$.

Definīcija (ekvivalenta, [10])

Operatoru A sauc par pozitīvu, ja visas tā īpašvērtības ≥ 0.

Kubita stāvoklis

Kubits

Visvienkāršākā kvantu sistēma ir kubits. Tā stāvokli raksturo $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, kur $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ un $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Izvēlamies $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ un $\beta = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}$, kur $0 \leq \theta \leq \pi$ un $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Kubita stāvoklis

Kubits

Visvienkāršākā kvantu sistēma ir kubits. Tā stāvokli raksturo $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, kur $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ un $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Izvēlamies $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ un $\beta = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}$, kur $0 \leq \theta \leq \pi$ un $0 \leq \varphi < 2\pi$.

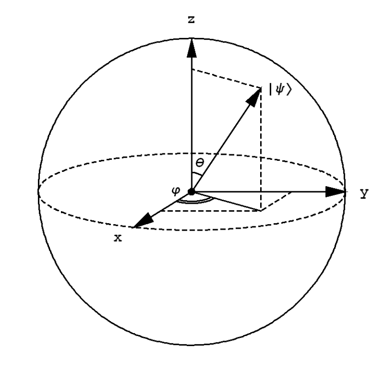
Blīvuma matrica

Atbilstošā blīvuma matrica:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Bloha sfēra

Sfēriskās koordinātes



$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Pauli matricas

Kubita blīvuma matrica

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}\right), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z).$$

Pauli matricas

Kubita blīvuma matrica

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z).$$

Pauli matricas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pauli matricas

Kubita blīvuma matrica

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z).$$

Pauli matricas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skalārais reizinājums

$$|\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{r_1}\cdot\vec{r_2})$$

Pēda

Definīcija ([11])

Par matricas A pēdu sauc $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} \langle i | A | i \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

Pēda

Definīcija ([11])

Par matricas A pēdu sauc $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} \langle i|\, A\, |i\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

Pēdas formula ([10])

$$\mathrm{Tr}(A\,|\Psi\rangle\,\langle\Psi|) = \sum_{i=1}^{n} \langle i|\, A\, |\Psi\rangle\, \langle\Psi|i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\Psi|i\rangle\, \langle i|\, A\, |\Psi\rangle = \langle\Psi|\, A\, |\Psi\rangle\, .$$

Pēda

Definīcija ([11])

Par matricas A **pēdu** sauc $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \langle i| A |i\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

Pēdas formula ([10])

$$\operatorname{Tr}(A|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i=1}^{n} \langle i| A |\Psi\rangle \langle\Psi|i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\Psi|i\rangle \langle i| A |\Psi\rangle = \langle\Psi| A |\Psi\rangle .$$

Sekas

$$|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2 = \langle\Psi_2|\Psi_1\rangle \cdot \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \operatorname{Tr}(\rho_1 |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|) = \operatorname{Tr}(\rho_1\rho_2).$$

Grupas

Kvaternioni

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Grupas

Kvaternioni

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Reizināšanas tabulas

Kvaternioni

$*$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Pauli matricas

$*$	I	σ_x	σ_y	σ_z
I	I	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	σ_x	I	$i\sigma_z$	$-i\sigma_y$
σ_y	σ_y	$-i\sigma_z$	I	$i\sigma_x$
σ_z	σ_z	$i\sigma_y$	$-i\sigma_x$	I

e pakāpē matrica

Teilora rinda [11]

$$e^A = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

e pakāpē matrica

Teilora rinda [11]

$$e^A = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nav tik ļauni [11]

Jebkurai kvadrātiskai matricai M un nesingulārai P:

$$(PMP^{-1})^k = PMP^{-1} \cdot PMP^{-1} \cdot \ldots \cdot PMP^{-1} = PM^k P^{-1}.$$

Ja $A = P^{-1}DP$, kur D - diagonāla, tad

$$e^A = e^{P^{-1}DP} = P^{-1}e^D P = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{D_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{D_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{D_{nn}} \end{pmatrix} \cdot P.$$

$SU(2)$ un $SO(3)$

Lūdzu, tikai ne sin un cos no matricas. . . [10]

Ja $x \in \mathbb{R}$ un $A^2 = I$, tad

$$e^{iAx} = I \cos x + iA \sin x.$$

$SU(2)$ un $SO(3)$

Lūdzu, tikai ne sin un cos no matricas. . . [10]

Ja $x \in \mathbb{R}$ un $A^2 = I$, tad

$$e^{iAx} = I \cos x + iA \sin x.$$

e pakāpē Ermita matrica [11, 12]

Ja $E^\dagger = E$, tad $U = e^{iE}$ ir unitāra: $UU^\dagger = e^{iE - iE^\dagger} = e^0 = I$.

$SU(2)$ un $SO(3)$

Lūdzu, tikai ne sin un cos no matricas. . . [10]

Ja $x \in \mathbb{R}$ un $A^2 = I$, tad

$$e^{iAx} = I \cos x + iA \sin x.$$

e pakāpē Ermita matrica [11, 12]

Ja $E^\dagger = E$, tad $U = e^{iE}$ ir unitāra: $UU^\dagger = e^{iE - iE^\dagger} = e^0 = I$.

Saistība starp $SU(2)$ un $SO(3)$

Ja σ_w ir Pauli matrica ($w \in \{x, y, z\}$), tad

$$R_w(\theta) = e^{-i\sigma_w \frac{\theta}{2}} = I \cos \frac{\theta}{2} - i\sigma_w \sin \frac{\theta}{2}$$

ir unitāra un atbilst Bloha sfēras rotācijai ap asi w par leņķi θ.

Vispārīga 2×2 unitāra matrica

Patvaļīga Bloha sfēras rotācija [10]

Rotācija ap vienības vektoru $\vec{n}$ par leņķi θ:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right).$$

Vispārīga 2×2 unitāra matrica

Patvaļīga Bloha sfēras rotācija [10]

Rotācija ap vienības vektoru $\vec{n}$ par leņķi θ:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right).$$

Vispārīga unitāra matrica [10]

$$U = e^{i\alpha}R_{\vec{n}}(\theta).$$

Vispārīga 2×2 unitāra matrica

Patvaļīga Bloha sfēras rotācija [10]

Rotācija ap vienības vektoru $\vec{n}$ par leņķi θ:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right).$$

Vispārīga unitāra matrica [10]

$$U = e^{i\alpha}R_{\vec{n}}(\theta).$$

Vispārīga unitāra matrica ar Eilera leņķiem [10]

$$U = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta).$$

Vispārīga 2×2 unitāra matrica

Patvaļīga Bloha sfēras rotācija [10]

Rotācija ap vienības vektoru $\vec{n}$ par leņķi θ:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right).$$

Vispārīga unitāra matrica [10]

$$U = e^{i\alpha} R_{\vec{n}}(\theta).$$

Vispārīga unitāra matrica ar Eilera leņķiem [10]

$$U = e^{i\alpha} R_{\color{red}{z}}(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta).$$

Kutrita gadījums

Kutrits (*qutrit*)

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|2\rangle\,.$$

Gell-Manna matricas [8, 12]

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Kvantu sistēma ar n brīvības pakāpēm

$SU(n)$ ģeneratori [4, 12]

Definējam $P_{jk} = |j\rangle \langle k|$ un ieviešam:

$$
\begin{aligned}
w_j &= \sqrt{\frac{2}{j(j+1)}} \left(P_{11} + P_{22} + \cdots + P_{jj} - j \cdot P_{j+1,j+1}\right), \\
u_{jk} &= P_{kj} + P_{jk}, \\
v_{jk} &= i(P_{kj} - P_{jk}),
\end{aligned}
$$

kur $1 \leq j < k \leq n$. Kopa $\{\lambda_i\} = \{w_j\} \cup \{u_{jk}\} \cup \{v_{jk}\}$ satur $n^2 - 1$ operatoru - vispārinātās Pauli matricas.

Vispārinātais Bloha vektors

Vispārīga blīvuma matrica [7]

$$\rho = \frac{1}{n}\left(I + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\vec{r}\cdot\vec{\lambda}\right).$$

Vispārinātais Bloha vektors

Vispārīga blīvuma matrica [7]

$$\rho = \frac{1}{n}\left(I + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\vec{r}\cdot\vec{\lambda}\right).$$

Skalārais reizinājums [7]

$$|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2 = \frac{1}{n}(1 + (n-1)\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2).$$

Vispārinātais Bloha vektors

Vispārīga blīvuma matrica [7]

$$\rho = \frac{1}{n}\left(I + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\vec{r}\cdot\vec{\lambda}\right).$$

Skalārais reizinājums [7]

$$|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2 = \frac{1}{n}(1 + (n-1)\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}).$$

Ortogonāli vektori [7]

$$\theta = \arccos\frac{-1}{n-1}.$$

Lī algebra

Sakarības [7]

1. Komutators: $[\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i\lambda_j - \lambda_j\lambda_i = 2if_{ijk}\lambda_k$.

Lī algebra

Sakarības [7]

1. Komutators: $[\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i \lambda_j - \lambda_j \lambda_i = 2i f_{ijk} \lambda_k$.
2. Antikomutators: $\{\lambda_i, \lambda_j\} = \lambda_i \lambda_j + \lambda_j \lambda_i = \frac{4}{n} I \delta_{ij} + 2 d_{ijk} \lambda_k$.

Lī algebra

Sakarības [7]

1. Komutators: $[\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i\lambda_j - \lambda_j\lambda_i = 2if_{ijk}\lambda_k$.
2. Antikomutators: $\{\lambda_i, \lambda_j\} = \lambda_i\lambda_j + \lambda_j\lambda_i = \frac{4}{n}I\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$.
3. Reizinājums: $\lambda_i\lambda_j = \frac{2}{n}\delta_{ij} + if_{ijk}\lambda_k + d_{ijk}\lambda_k$.

Lī algebra

Sakarības [7]

1. Komutators: $[\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i\lambda_j - \lambda_j\lambda_i = 2if_{ijk}\lambda_k$.
2. Antikomutators: $\{\lambda_i, \lambda_j\} = \lambda_i\lambda_j + \lambda_j\lambda_i = \frac{4}{n}I\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$.
3. Reizinājums: $\lambda_i\lambda_j = \frac{2}{n}\delta_{ij} + if_{ijk}\lambda_k + d_{ijk}\lambda_k$.

Lī algebra

Sakarības [7]

1. Komutators: $[\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i\lambda_j - \lambda_j\lambda_i = 2if_{ijk}\lambda_k$.
2. Antikomutators: $\{\lambda_i, \lambda_j\} = \lambda_i\lambda_j + \lambda_j\lambda_i = \frac{4}{n}I\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$.
3. Reizinājums: $\lambda_i\lambda_j = \frac{2}{n}\delta_{ij} + if_{ijk}\lambda_k + d_{ijk}\lambda_k$.

Lielumus f_{ijk} un d_{ijk} sauc par Lī algebras struktūras konstantēm (f_{ijk} ir pilnīgi antisimetrisks tenzors, bet d_{ijk} ir pilnīgi simetrisks).

Lī algebra

Sakarības [7]

1. Komutators: $[\lambda_i, \lambda_j] = \lambda_i\lambda_j - \lambda_j\lambda_i = 2if_{ijk}\lambda_k$.
2. Antikomutators: $\{\lambda_i, \lambda_j\} = \lambda_i\lambda_j + \lambda_j\lambda_i = \frac{4}{n}I\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$.
3. Reizinājums: $\lambda_i\lambda_j = \frac{2}{n}\delta_{ij} + if_{ijk}\lambda_k + d_{ijk}\lambda_k$.

Lielumus f_{ijk} un d_{ijk} sauc par Lī algebras struktūras konstantēm (f_{ijk} ir pilnīgi antisimetrisks tenzors, bet d_{ijk} ir pilnīgi simetrisks).

Zvaigznītes reizinājums [7]

$$\left(\vec{a} * \vec{b}\right)_k = \frac{1}{n-2}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,d_{ijk}a_ib_j.$$

Pozitīvums

Blīvuma matricas harakteristiskais polinoms

Harakteristiskais polinoms:

$$\det(\tau I - \rho) = \tau^n - S_1\tau^{n-1} + S_2\tau^{n-2} - \cdots + (-1)^n S_n = 0.$$

Pozitīvums

Blīvuma matricas harakteristiskais polinoms

Harakteristiskais polinoms:

$$\det(\tau I - \rho) = \tau^n - S_1\tau^{n-1} + S_2\tau^{n-2} - \cdots + (-1)^n S_n = 0.$$

Polinoma sakņu reizinājums:

$$\det(\tau I - \rho) = \prod_{i=1}^{n}(\tau - \tau_i).$$

Pozitīvums

Blīvuma matricas harakteristiskais polinoms

Harakteristiskais polinoms:

$$\det(\tau I - \rho) = \tau^n - S_1\tau^{n-1} + S_2\tau^{n-2} - \cdots + (-1)^n S_n = 0.$$

Polinoma sakņu reizinājums:

$$\det(\tau I - \rho) = \prod_{i=1}^{n} (\tau - \tau_i).$$

Redzam, ka

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} \prod_{j=1}^{k} p_{i_j}.$$

Nosacījums $\forall i : \tau_i \geq 0$ ir ekvivalents nosacījumam $\forall i : S_i \geq 0$.

Pozitīvums 2

Kad $\vec{r}$ ir derīgs Bloha vektors?

$$S_1 = \operatorname{Tr} \rho = 1$$
$$S_2 = \frac{n-1}{2n}(1 - \vec{r} \cdot \vec{r})$$
$$S_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}(1 - 3\vec{r} \cdot \vec{r} + 2\vec{r} * \vec{r} \cdot \vec{r})$$
$$S_4 = \dots$$

Paldies Dievam, tas ir beidzies. . .

Paldies, ka izturējāt līdz beigām!

- Saxe K, Beginning functional analysis, Springer, 2002
- Rudin W., Functional Analysis, McGraw-Hill, 1973
- Siddiqi A.H., Applied Functional Analysis, Marcel Dekker, 2004
- Schlienz J., Mahler G., Description of entanglement, *Phys. Rev. A*, Vol 52, N6, 1995
- Tilma T, Sudarshan E.C.G., Generalized Euler Angle Parametrization for $SU(N)$, `math-ph/0205016`, 2002
- Kimura G, The Bloch Vector for N-Level Systems, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol 72, 2003
- Byrd M.S., Khaneja N., Characterization of the Positivity of the Density Matrix in Terms of the Coherence Vector Representation, `quant-ph/0302024`, 2003
- Caves C.M., Gerard J.M., Qutrit Entanglement, 1999

- Jakobczyk L., Siennicki M., Geometry of Bloch vectors in two-qubit system, *Phys. Lett. A*, 286, 383-390, 2001
- Nielsen M.A., Chuang I.L., Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, 2000
- Artin M., Algebra, Prentice Hall, 1991
- Greiner W., Muller B., Quantum Mechanics, Symmetries, Springer, 1994
- Zwillinger D., CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 31st ed., CRC Press, 2003