Kompleksā mainīgā funkciju teorija

Laura Mančinska

Latvijas Universitāte

2007. gada 14. maijs

Kompleksā mainīgā funkciju teorija

Kompleksā mainīgā funkciju teorija ir matemātiskā analīze funkcijām ar kompleksu mainīgo.

- Kompleksie skaitļi un ar tiem saistītā imaginārā vienība $i = \sqrt{-1}$ pirmo reizi minēta Dž. Kardāno darbos 1545. gadā.
- Sistemātisku komplekso skaitļu teoriju izveidoja L. Eilers (1707–1897).
- Tālākā kompleksā mainīgā funkciju teorijas attīstībā lieli nopelni ir O. Košī (1785–1857), K. Veierštrāsam (1815–1866) un B. Rīmanim (1826–1857).

Komplekso skaitļu pielietojumi

- Kompleksie skaitļi izrādās piemērots matemātiskais modelis dažādu fizikālu procesu aprakstīšanai (optika, kvantu mehānika u.c.).
- Kompleksie skaitļi un ar tiem saistītā funkciju teorija veido reālu praktiska rakstura uzdevumu risināšanas metodi.
- Pētot funkcijas ar kompleksu mainīgo, iespējams daudz dziļāk un pilnīgāk izprast vairākas reālā mainīgā funkciju īpašības.

Komplekso skaitļu definīcija

Par komplekso skaitļu kopu $\mathbb{C}$ sauc sakārtotu reālo skaitļu pāru $(x; y)$ kopu, ja katriem diviem pāriem $(x_1; y_1)$ un $(x_2; y_2)$ no šīs kopas aksiomātiski ir definēta vienādība, summa un reizinājums šādā veidā:

1. $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$, tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2$ un $y_1 = y_2$
2. $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$
3. $(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$

- Komplekso skaitļu ģeometriskā interpretācija.
- Komplekso skaitļu trigonometriskā forma (kompleksais skaitlis pierakstīts *polārajās* koordinātēs)un eksponentforma.
    - Kompleksā skaitļa arguments $\phi = \operatorname{Arg} z := \arctan \frac{y}{x} + 2\pi k$, kur $k \in \mathbb{Z}$.
    - Kompleksā skaitļa modulis $r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

  $x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r \cdot e^{i\phi}$ (Iegūstam, izmantojot Eilera formulu.)
- Algebriskās darbības ar kompleksajiem skaitļiem: starpība, dalījums, kāpināšanas un saknes vilkšanas darbības (daudzās vērtības iegūst, ņemot dažādus k).
- Eksponentoperācija: $e^z := e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
- Logaritms $\operatorname{Ln} z := \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

Trigonometriskās un hiperboliskās operācijas

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

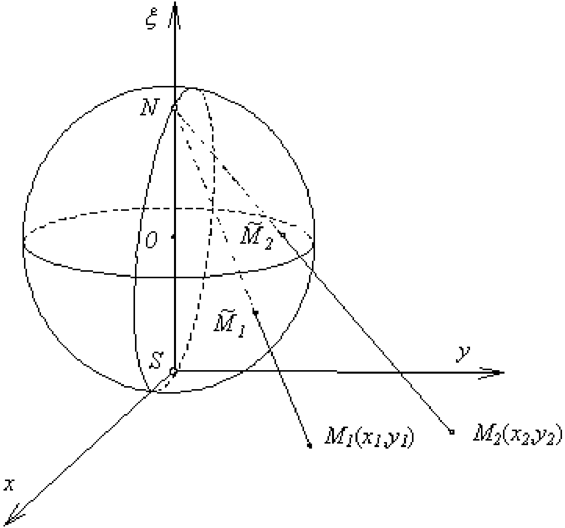
$$\operatorname{sh} z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z := \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \qquad \operatorname{cth} z := \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

- Līniju uzdošana kompleksajā plaknē:
  - Parametriskā formā: $z = x(t) + iy(t)$ vai $z = r(t) \cdot e^{i\phi(t)}$, kur $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ (piem. nogrieznis)
  - Apslēptā formā: $F(Re(z), Im(z), |z|, \arg(z)) = 0$ (piem. riņķa līnija)
- Apgabali kompleksajā plaknē.
  - Apgabala definīcija
  - Kopas akumulācijas punkts
  - Apgabala kontūrs $\partial D = \overline{D} \backslash D$
  - n-kārt sakarīgs apgabals
  - Apgabalu uzdošana
    - $F(Re(z), Im(z), |z|, \arg(z)) < 0$
    - Uzdodot kontūrus un norādot to apejas virzienu.

Bezgalīgi tālā punkta jēdziens



Kompleksā mainīgā funkcija

Par kompleksā mainīgā funkciju $f : D \to E$ sauc attēlojumu, kas katram $z \in D$ piekārto $w \in D$ $(D, E \subset \overline{\mathbb{C}})$.

- Izšķir vienvērtīgas un vairākvērtīgas funkcijas.
- Vienlapaina funkcija
- Funkciju uzdošanas veidi

Kompleksā mainīgā funkcijas robeža

Skaitli $w_0 \in \mathbb{C}$ sauc par funkcijas $w = f(z)$ robežu, kad $z \longrightarrow z_0$ (z_0 ir akumulācijas punkts), ja
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z_0) - w_0| < \varepsilon.$

Atšķirībā no reālā mainīgā funkcijām šeit tiekšanās notiek no bezgalīgi daudziem virzieniem.

Robežas īpašības

$w = f(z), w = u + iv, z = x + iy$

1. Unitāte.
2. Robeža komutē ar saskaitīšanu, reizināšanu, dalīšanu*.
3. $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} u = u_0$ un $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} v = v_0$

Funkcijas nepārtrauktība

Funkciju $w = f(z)$ sauc par nepārtrauktu punktā z_0, ja $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Punktā z_0 nepārtrauktu funkciju summa, reizinājums, dalījums*, kompozīcija ir punktā z_0 nepārtraukta funkcija.

Funkcijas atvasinājums

Par funkcijas $w = f(z)$ atvasinājumu punktā z_0 sauc

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Īpašības analogas reālā mainīgā funkcijas atvasinājumam.

Atvasinājuma eksistences pietiekamie un nepieciešamie nosacījumi

Lai funkcijai $w = u + iv = f(z)$ $(z = x + iy)$ eksistētu atvasinājums punktā $z_0 \in D$ ir nepieciešami un pietiekami, lai

- Funkcijas u un v ir diferencējamas punktā z_0
- Koši-Rīmana nosacījumi:
  1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$
  2. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Sekas

Ja funkcijai $w = f(z)$ eksistē atvasinājums punktā $z = x + iy$, tad tas aprēķināms kā $w' = f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Analītiska funkcija

Ja funkcija ir $w = f(z)$ ir atvasināma kādā punkta z_0 apkārtnē, tad to sauc par analītisku punktā z_0.

Konformie attēlojumi

Attēlojumu sauc par konformu punktā z_0, ja

1. Šis attēlojums punktā z_0 saglabā leņķus starp līnijām.
2. Deformācijas koeficients jebkurai gludai līnijai punktā z_0 ir viens un tas pats.

Analītiskās funkcijas ir 1. veida konformi attēlojumi.

Apgabalu kontūru atbilstības princips

Ja apgabalu D ierobežo vienkārša, gluda līnija L un attēlojums $f : D \to G$ ir konforms apgabalā D un nepārtraukts slēgtā apgabalā D, tad funkcijas $w = f(z)$ attēlo apgabala D kontūru par apgabala G kontūru.

Rīmaņa teorēma

Ja vienkārtsakarīgu apgabalu D un G kontūri ∂D un ∂G sastāv no vairāk kā viena punkta, tad eksistē tāda analītiska funkcija $f(z)$, kas konformi attēlo D par G. Pie tam šādu funkciju ir bezgalīgi daudz.

Lai funkciju noteiktu viennozīmīgi, var izmantot kādu no šādiem normēšanas nosacījumiem:

- $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$,
- $w_0 = f(z_0)$ un $\arg f'(z_0) = \alpha_0$.

Integrālis

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{1}$$

Īpašības

1. Ja $f(z)$ ir nepārtraukta, tad integrālis (1) eksistē.
2. Integrālis ir lineārs funkcionālis.
3. $\forall c \in L(a, b)$ ir pareiza vienādība:

$$\int_{L(a,c)} f(z)dz + \int_{L(c,b)} f(z)dz = \int_{L(a,b)} f(z)dz.$$

4. $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|\,|dz|$
5. $\int_{L(a,b)} dz = b - a$

Košī teorēma vienkārtsakarīgam apgablalam

Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska apgabalā D tad jebkuram apgabalā D esošam kontūram C

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Košī teorēma vairākkārtsakarīgam apgabalam

Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska apgabalā D, un nepārtraukta slēgtā apgabalā $\bar{D}$ un apgabala D pilnais kontūrs Γ sastāv no galīga skaita rektificējamām līnijām, tad

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Integrālis ar mainīgu augšējo robežu

Apskatām funkciju f, kas ir analītiska integrācijas kontūru saturošā vienkārtsakarīgā apgabalā D. Tas nozīmē, ka integrāļa vērtība nav atkarīga no ceļa formas, bet tikai no galapunktiem. Aplūkojam integrāli ar mainīgu augšējo robežu

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz$$

1. $F(z)$ ir analītiska
2. $F'(z) = f(z)$, jeb f ir funkcijas F primitīvā.

Integrālis ar mainīgu augšējo robežu

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz$$

Ņūtona-Leibnica teorēma

Analītiskai funkcijai $f(z)$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

kur $F(z)$ ir jebkura funkcijas $f(z)$ primitīvā funkcija.

Košī integrālā formula

Ja funkcija $f(z)$ ir analītiska un ierobežota vienkārtsakarīgā apgabalā D un nepārtraukta $\bar{D}$, tad $\forall z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Košī integrālās formulas sekas.

Funkcijas $f(z)$ augstākas kārtas atvasinājumiem

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Moduļa maksimuma princips

Ja funkcija f ir analītiska apgabalā D, nepārtraukta slēgtā apgabalā $\overline{D}$ un $f(z) \neq const$, tad $|f(z)|$ savu maksimālo vērtību sasniedz uz apgabala D pilnā kontūra.

Moduļa minimuma princips

Ja funkcija f ir analītiska apgabalā D, nepārtraukta slēgtā apgabalā $\overline{D}$ un $f(z) \neq const$, un $|f(z)| \neq 0$ tad $|f(z)|$ savu minimālo vērtību sasniedz uz apgabala D pilnā kontūra.

Liuvilla teorēma

Ja funkcija f ir analītiska un ierobežota vaļējā kompleksā plaknē $\mathbb{C}$, tad $f(z) \equiv const$.

Morera teorēma

Ja funkcija f ir nepārtraukta vienkārtsakarīgā apgabalā D un katrai slēgtai līnijai $L \subset D$ ir spēkā $\int_L f(z) = 0$, tad $f(z) \in \mathcal{A}(D)$.

Funkciju rinda

Par *funkciju rindu* apgabalā D sauc

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z).$$

Veierštrāsa teorēma

Ja funkciju rindas locekļi $f_n(z)$ ir analītiskas funkcijas apgabalā D, nepārtrauktas apgabalā $\bar{D}$ un funkciju rinda vienmērīgi konverģē uz apgabala D pilnā kontūra Γ, tad

- funkciju rinda konverģē vienmērīgi apgabalā $\bar{D}$,
- rindas summa $S(z)$ ir apgabalā D analītiska funkcija,
- apgabalā D rindu var atvasināt pa locekļiem pēc patikas daudz reižu,
- atvasinājumu rinda vienmērīgi konverģē katrā apgabalā $\bar{D}_0 \subset D$.

Pakāpju rinda

Par *pakāpju rindu* sauc

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

1. Ābela teorēma

Ja pakāpju rinda konverģē punktā $z_1 \neq z_0$, tad tā absolūti konverģē riņķī $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, bet ja tā diverģē punktā z_2, tad tā diverģē apgabalā $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Konverğences rādiusa atrašana

- Dalambēra formula:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

- Košī-Adamāra formula:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

- Ja M ir to punktu kopa, kuros $S(z)$ nav analītiska, tad

$$R = \min_{z \in M} |z - z_0|.$$