Aigars Gedroics $3M_2$
2. mājas darbs

1 Teorētiskais pamatojums

Teorēma 1 *Silvestra kritērijs:*
Lai simetriska $n \times n$ -matrica A būtu pozitīva, t.i., $A \geqslant 0$, nepieciešami un pietiekami, lai visi tās galvenie minori būtu nenegatīvi.

Teorēma 2 *Ja*

(i) funkcija $f : [a;b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pieder klasei $C^3([a;b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(ii) katram reālam x funkcija $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ ir izliekta attiecībā pret saviem argumentiem

(iii) funkcija $u_0 : [a;b] \to \mathbb{R}$ apmierina Eilera vienādojumu

$$\frac{d}{dx}\left[f'_\xi(x, u_0(x), \xi)|_{\xi=u'_0(x)}\right] - f'_u(x, u, u'_0(x))|_{u=u_0(x)} = 0,\ x \in (a, b)$$

un robežnosacījumus

$$u_0(a) = A \quad u_0(b) = B,$$

tad u_0 ir problēmas

$$\begin{cases} I(u) = \int\limits_a^b f(x, u(x), u'(x))dx \to min \\ u \in C^1([a;b]) \\ u(a) = A \\ u(b) = B \end{cases}$$

atrisinājums.

Teorēma 3 *Ja*

(i) funkcija $f : [a;b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pieder klasei $C^3([a;b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(ii) katram reālam x funkcija $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ ir izliekta attiecībā pret saviem argumentiem

(iii) funkcija $u_0 : [a;b] \to \mathbb{R}$ apmierina Eilera vienādojumu ar robežnosacījumiem

$$\frac{d}{dx}\Big[f'_\xi(x,u_0(x),\xi)|_{\xi=u_0'(x)}\Big] - f'_u(x,u,u_0'(x))|_{u=u_0(x)} = 0,\ \ x \in (a,b)$$

$$f'_\xi(x,u_0(x),\xi)|_{\xi=u_0'(x),\ x=a} = 0, \quad f'_\xi(x,u_0(x),\xi)|_{\xi=u_0'(x),\ x=b} = 0$$

tad u_0 ir problēmas

$$\begin{cases} I(u) = \int\limits_a^b f(x,u(x),u'(x))dx \to min \\ u \in C^1([a;b]) \end{cases}$$

atrisinājums.

2 Uzdevumi

1. uzdevums:

$$\begin{cases} I(u) = \int\limits_0^1 [u'^2 + 38x^2 u]dx \to min \\ u \in C^1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Atrisinājums:
Šajā uzdevumā zemintegrāļa funkcija ir

$$f(x, u, \xi) = \xi^2 + 38x^2 u$$

Acīmredzami, ka šī funkcija ir analītiska visiem tās argumentiem, tātad ietilpst $C^3([0;1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ klasē un izpildās [Teorēma 2] pirmais nosacījums. Lai parādītu [Teorēma 2] otro nosacījumu, jāparāda, ka funkcijas $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ otrās kārtas atvasinājumu matrica pēc argumentiem u un ξ ir pozitīva jeb tā ir izliekta attiecībā pret šiem argumentiem. Šī matrica ir

$$\begin{pmatrix} f''_{\xi\xi} & f''_{\xi u} \\ f''_{u\xi} & f''_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un viegli pārbaudīt, ka tās visi trīs galvenie minori ir nenegatīvi. Pēc [Teorēma 1] seko, ka matrica ir pozitīva.

Tātad, ja Eilera vienādojumam ar robežnosacījumiem eskistēs atrisinājums, tas arī būs problēmas atrisinājums. Risinām Eilera vienādojumu:

$$\frac{d}{dx}[2u'(x)] - 38x^2 = 0$$

$$u'(x) = \frac{19}{3}x^3 + C_1$$

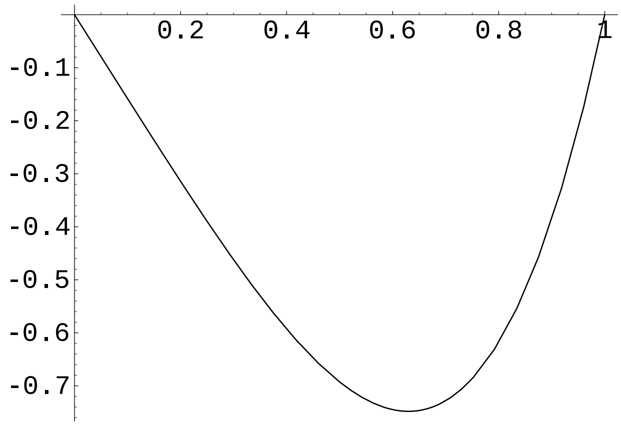
$$u(x) = \frac{19}{12}x^4 + C_1 x + C_2$$

Ievietojot robežnosacījumus, atrodam konstantes:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ \frac{19}{12} + C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{19}{12} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Tātad problēmai atrisinājums eksistē un tas ir

$$u(x) = \frac{19}{12}(x^4 - x)$$



Minimālā funkcionāļa $I(u)$ vērtība ir

$$I\Big(\frac{19}{12}(x^4 - x)\Big) = -\frac{361}{112} \approx -3,22321\dots$$

2. uzdevums:

$$\begin{cases} I(u) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x} u'^4 dx \to min \\ u \in C^1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Atrisinājums:

Šajā uzdevumā zemintegrāļa funkcija ir

$$f(x,u,\xi) = \frac{1}{1+x}\xi^4$$

Acīmredzami, ka šī funkcija ir analītiska visiem tās argumentiem un ietilpst $C^3([0;1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ klasē un izpildās [Teorēma 2] pirmais nosacījums. Lai parādītu [Teorēma 2] otro nosacījumu, jāparāda, ka funkcijas $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ otrās kārtas atvasinājumu matrica pēc argumentiem u un ξ ir pozitīva jeb tā ir izliekta attiecībā pret šiem argumentiem. Šī matrica ir

$$\begin{pmatrix} f''_{\xi\xi} & f''_{\xi u} \\ f''_{u\xi} & f''_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{1+x}\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un redzams, ka tās visi trīs galvenie minori ir nenegatīvi, jo $x + 1 > 0$ un $\xi^2 \geqslant 0$. Pēc [Teorēma 1] seko, ka matrica ir pozitīva.

Tātad, ja Eilera vienādojumam ar robežnosacījumiem eskistēs atrisinājums, tas arī būs problēmas atrisinājums. Risinām Eilera vienādojumu:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{4}{1+x}u'(x)^3\right] = 0$$

$$\frac{4}{1+x}u'(x)^3 = C_1$$

$$u'(x) = \sqrt[3]{\frac{C_1}{4}}(1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$u(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{C_1}{4}}(1+x)^{\frac{4}{3}} + C_2,\ \tilde{C}_1 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{C_1}{4}}$$

$$u(x) = \tilde{C}_1(1+x)^{\frac{4}{3}} + C_2$$

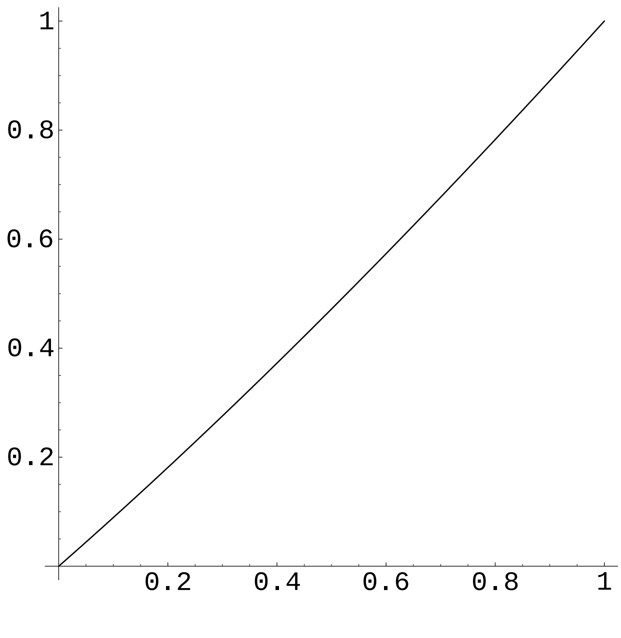
Ievietojot robežnosacījumus, atrodam konstantes:

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 + C_2 = 0 \\ \tilde{C}_1 2\sqrt[3]{2} + C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}-1} \\ C_2 = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}-1} \end{cases}$$

Tātad problēmai atrisinājums eksistē un tas ir

$$u(x) = \frac{(1+x)\sqrt[3]{1+x} - 1}{2\sqrt[3]{2} - 1}$$



Minimālā funkcionāļa $I(u)$ vērtība ir

$$I\Big(\frac{(1+x)\sqrt[3]{1+x}-1}{2\sqrt[3]{2}-1}\Big) = \frac{64}{27(2\sqrt[3]{2}-1)^3} \approx 0,675182\ldots$$

3. uzdevums:

$$\begin{cases} I(u) = \int\limits_0^1 [u'^2 + u^2 + x^2 u]dx \to min \\ u \in C^1 \end{cases}$$

Atrisinājums:
Zemintegrāļa funkcija ir

$$f(x,u,\xi) = \xi^2 + u^2 + x^2 u$$

Šī funkcija ir analītiska visiem tās argumentiem un tādēļ arī ietilpst klasē $C^3([0;1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ un izpildās [Teorēma 3] pirmais nosacījums.

[Teorēma 3] otro nosacījumu pierāda, parādot, ka funkcijas $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ otrās kārtas atvasinājumu matrica pēc argumentiem u un ξ ir pozitīva jeb tā ir izliekta attiecībā pret argumentiem u un ξ. Šī matrica ir

$$\begin{pmatrix} f''_{\xi\xi} & f''_{\xi u} \\ f''_{u\xi} & f''_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Acīmredzams, ka tās visi trīs galvenie minori ir pat pozitīvi. Pēc [Teorēma 1] seko, ka matrica ir pozitīva. Tātad izpildās [Teorēma 3] *(ii)* nosacījums.

Tātad, ja Eilera vienādojumam ar robežnosacījumiem eskistēs atrisinājums, tas arī būs problēmas atrisinājums. Risinām Eilera vienādojumu:

$$\frac{d}{dx}\Big[2u'(x)\Big] - 2u(x) - x^2 = 0$$

$$2u''(x) - 2u(x) - x^2 = 0$$

Tā kā šī diferenciālvienādojuma harakteristiskās saknes ir ± 1, tad šī homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir formā

$$u_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Tā kā šī diferenciālvienādojuma nehomogēnā daļa ir otrās kārtas polinoms, tad arī parciālais atrisinājums būs otrās kārtas polinoms $Ax^2 + Bx + C$. Ievietojot, iegūsim konstantes A, B un C:

$$4A - 2Ax^2 - 2Bx - 2C - x^2 = 0$$

$$\begin{cases} 4A - 2C = 0 \\ -2B = 0 \\ -2A - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases}$$

Tātad parciālais atrisinājums ir $u_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ un sākotnējā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 - 1$$

Konstantes C_1 un C_2 atrodam, ievietojot vispārīgo atrisinājumu Eilera robežnosacījumos:

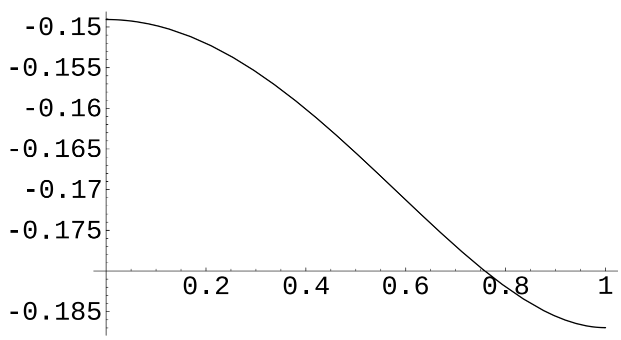
$$\begin{cases} f'_\xi(x, u(x), \xi)|_{\xi = u'(x),\ x=0} = 0 \\ f'_\xi(x, u(x), \xi)|_{\xi = u'(x),\ x=1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

Tā kā $u'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - x$, tad

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 e - \frac{C_2}{e} = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$$

Ievietojot, iegūst, ka $u(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2 - 1$, kas pēc [Teorēma 3] arī ir problēmas atrisinājums. Funkcionāļa vērtība šai funkcijai ir $I(u) = \frac{137 - 17e^2}{60 - 60e^2} \approx -0,029702\ldots$



4. uzdevums:

$$\begin{cases} I(u) = \int\limits_0^1 \Big[(1 + u^2)u'^2 + \frac{1}{1+x}u^2 + u \sin u\Big] dx \to min \\ u \in C^1 \end{cases}$$

Atrisinājums:

Šajā uzdevumā zemintegrāļa funkcija ir

$$f(x,u,\xi) = (1+u^2)\xi^2 + \frac{1}{1+x}u^2 + u\sin u$$

Fiksējam $x \in [0;1]$. Novērtējot funkciju f no apakšas, iegūstam:

$$f(x,u,\xi) = (1+u^2)\xi^2 + \frac{1}{1+x}u^2 + u\sin u \geqslant \frac{1}{2}u^2 + u\sin u$$

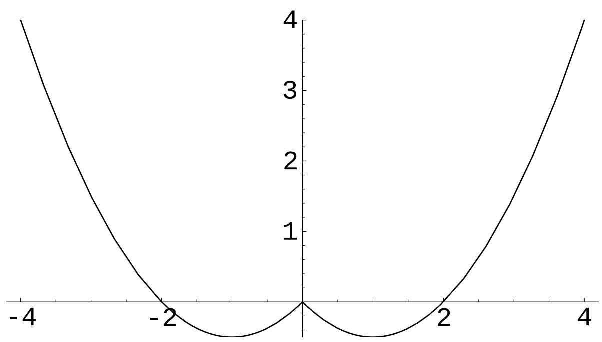
Tagad apskatām divus gadījumus:

- $u \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
- $u \in [-2; 2]$

Apskatot pirmo gadījumu, izmantojam apsvērumu, ka

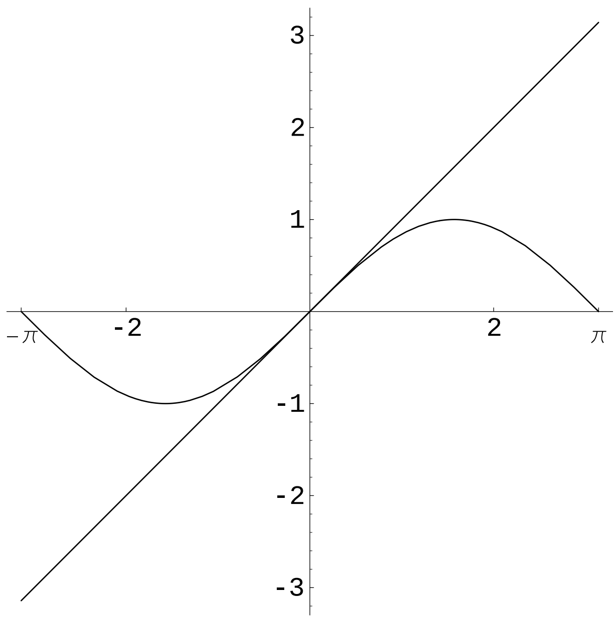
$$u\sin u \geqslant -|u| \cdot |\sin u| \geqslant -|u|$$

Tādēļ $f(x,u,\xi) \geqslant \frac{1}{2}u^2 - |u|$. Vienkāršu apsvērumu dēļ secinām, ka dotajā intervālā $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ funkcija $\frac{1}{2}u^2 - |u|$ pieņem tikai pozitīvas vērtības.



Tādejādi arī $f(x,u,\xi) > 0$, kad $u \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Apskatot otro gadījumu, izmantojam faktu, ka $u\sin u \geqslant 0$, kad u atrodas intervālā $[-2, 2]$, jo abu funkciju u un $\sin u$ zīmes sakrīt:



Tādejādi $f(x,u,\xi) \geqslant \frac{1}{2}u^2 + u\sin u \geqslant \frac{1}{2}u^2 \geqslant 0$. Viegli pamanīt, ka f var pieņemt nulles vērtību tikai tad, kad $u = 0$.

Tātad mēs ieguvām, ka funkcija f pieņem nenegatīvas vērtības. Tādēļ arī $I(u) = \int\limits_0^1 f(x,u,\xi)dx \geqslant 0$. Vienkārši pārbaudīt, ka funkcijai $u(x) = 0$ funkcionāļa $I(u)$ vērtība ir 0. Lai parādītu, ka tas ir problēmas atrisinājums, ir jāparāda, ka jebkurai citai funkcijai no $C^1([0;1])$ klases funkcionāļa vērtība pārsniedz 0.

Pieņemsim, ka funkcija $u(x)$ nav ekvivalenta 0. Tātad $\exists x_0 :\ u(x_0) \neq 0$. Tā kā $u \in C^1([0;1]) \supset C([0;1])$, tad

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall x \in [x-\varepsilon; x+\varepsilon] \cap [0;1],\ u(x) > 0$$

Vienkāršības pēc kopu $[x-\varepsilon; x+\varepsilon] \cap [0;1]$ apzīmēsim ar B. Tā kā kopa B ir kompakta un u ir nepārtraukta, tad

$$\exists x_m \in B :\ \forall x \in B,\ u(x) \geqslant u(x_m) = \delta > 0$$

Skaidrs, ka B ir nenulles garuma intervāls, tādēļ $|B| = L > 0$. Apskatām sākotnējo funkcionāli $I(u)$:

$$I(u) = \int\limits_0^1 f(x,u,\xi)dx = \int\limits_{x\in B} f(x,u,\xi)dx + \int\limits_{x\in[0;1]\setminus B} f(x,u,\xi)dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{x \in B} f(x, u, \xi) dx \geqslant \int\limits_{x \in B} \delta dx \geqslant |B| \cdot \delta = L\delta > 0,$$

kas arī bija jāpierāda.

Tātad problēmas atrisinājums ir funkcija $u(x) \equiv 0$ un funkcionāļa vērtība šai funkcijai ir 0.