Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātikas nodaļa
Matemātiskās analīzes katedra

Jānis Buls

MĪLIJA MAŠĪNAS STĀVOKĻU ATŠĶIRŠANA

2010

Pieņemsim, ka $\langle Q, A, B, \circ, *\rangle$ ir Mīlija mašīna un $\lambda \in M \subseteq A^*$, tad

$$q' \underset{M}{\sim} q \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall u \in M\ q' * u = q * u.$$

Šai gadījumā teiksim, ka stāvokļi q, q' ir *neatšķirami kopā* M. Pretējā gadījumā teiksim, ka stāvokļi q, q' *kopā* M *ir atšķirami*, un lietosim pierakstu $q' \underset{M}{\not\sim} q$.

Kopā A^* neatšķiramus stāvokļus q, q' sauc par *neatšķiramiem stāvokļiem*, un lieto pierakstu $q' \sim q$. Kopā A^* atšķiramus stāvokļus q, q' sauc par *atšķiramiem stāvokļiem*, un lieto pierakstu $q' \not\sim q$.

$$\begin{aligned} [q]_M &\leftharpoondown \{q' \mid q' \sim q\}, \\ R_V(M) &\leftharpoondown \{[q]_M \mid q \in Q\}. \end{aligned}$$

Definīcija 1. *Kopas Q sadalījumu S sauc par kopas Q sadalījuma S' apakšsadalījumu, ja*

$$\forall s \in S\ \exists s' \in S'\ \ s \subseteq s'.$$

Pieņemsim, ka M un N ir kopas A^* apakškopas, tad

$$MN \leftharpoondown \{uv \mid u \in M \wedge v \in N\}$$

Lemma 2. *$R_V(M \cup AM)$ ir sadalījuma $R_V(M)$ apakšsadalījums.*

□ Ja $q' \underset{M\cup AM}{\sim} q$, tad $q' \underset{M}{\sim} q$. ■

Lemma 3. *Ja $R_V(M) = R_V(M \cup AM)$ un $q_1 \underset{M}{\sim} q_2$, tad $q_1 \sim q_2$.*

□ Pieņemsim, ka

$$K \leftharpoondown \{\{q_1, q_2\} \mid q_1 \underset{M}{\sim} q_2 \wedge q_1 \not\sim q_2\}$$

Katram kopas K pārim eksistē tāds vārds $v(q_1, q_2)$, ka

$$q_1 * v(q_1, q_2) \neq q_2 * v(q_1, q_2),$$

taču visiem īsākiem vārdiem v ir spēkā vienādība $q_1 * v = q_2 * v$.

Apskatam kopu

$$K' \leftharpoondown \{v(q_1, q_2) \mid \{q_1, q_2\} \in K\}$$

Šai kopā K' ir pats īsākais vārds v' tai nozīmē, ka visi pārejie šīs kopas vārdi v nav garāki par šo vārdu v'. Pieņemsim, ka $\{q_1', q_2'\} \in K$ un $q_1' * v' \neq q_2' * v'$. Ja reiz $v' \in K'$, tad šāds pāris $\{q_1', q_2'\}$ eksistē.

(i) Vai $|v'| = 1$?

Pieņemsim, ka $|v'| = 1$, tad eksistē tāds $a \in A$, ka $v' = a$. No šejienes

$$q_1' * a \neq q_2' * a \qquad \text{un} \qquad a \in M' \leftharpoondown M \cup AM,$$

jo $\lambda \in M$. Tā kā $R_V(M) = R_V(M')$, tad $q_1' \underset{M'}{\sim} q_2'$. Pretruna, jo tikko secinājām, ka $q_1' * a \neq q_2' * a$.

Tātad $|v'| \neq 1$.

(ii) Pieņemsim, ka $|v'| > 1$, tad $v' = au$, kur $a \in A$ un $u \in A^+$.

Ko var teikt par stāvokļiem $q_1' \circ a$ un $q_2' \circ a$?

Skaidrs, ka $q_1' * a = q_2' * a$, jo $|a| = 1 < |v'|$, un kopā K' nav par vārdu v' īsāka vārda. No šejienes $q_1' \circ a \neq q_2' \circ a$. Citādi nav iespējams, ka

$$\begin{aligned} (q_1' * a)\#(q_1' \circ a * u) &= q_1' * au = q_1' * v' \\ &\neq q_2' * v' = q_2' * au = (q_2' * a)\#(q_2' \circ a * u) \end{aligned}$$

a) Vai $q_1' \circ a \underset{M}{\sim} q_2' \circ a$?

Pieņemsim, ka tas tā ir, tad

$$\{q_1' \circ a, q_2' \circ a\} \in K \qquad \text{un} \qquad u \in K'.$$

Pretruna, jo $|u| < |v'|$; kopā K' nav par vārdu v' īsāka vārda.

Atliek tikai otra iespēja.

b) Pieņemsim, ka $q_1' \circ a \underset{M}{\not\sim} q_2' \circ a$, tad eksistē tāds $w \in M$, ka

$$q_1' \circ a * w \neq q_2' \circ a * w$$

Skaidrs, ka $aw \in M \cup AM$, tāpēc $q_1' \underset{M'}{\not\sim} q_2'$. Saskaņā ar doto $R_V(M) = R_V(M')$, tādēļ $q_1' \underset{M}{\not\sim} q_2'$. Pretruna! Mēs taču pieņēmām, ka $q_1' \underset{M}{\sim} q_2'$.

Līdz ar to kopa $K = \emptyset$. Lemma pierādīta. ■

$$A^0 \leftharpoondown \{\lambda\}$$

Lemma 4. *Ja* $|R_V(M)| = m \leq n = |Q|$ *un* $q_1 \not\sim q_2$, *tad* $q_1 \underset{M'}{\not\sim} q_2$, *kur* $M' \leftharpoondown \bigcup_{i=0}^{n-m} A^i M$.

$\square$ Pieņemsim, ka $q_1 \not\sim q_2$, taču $q_1 \underset{M'}{\sim} q_2$. Pieņemsim, ka

$$M_i \leftharpoondown \bigcup_{j=0}^{i} A^j M, \qquad \text{kur} \qquad i \in \overline{0, n-m},$$

tad $q_1 \underset{M_i}{\sim} q_2$. Tā kā $q_1 \not\sim q_2$, tad saskaņā ar iepriekšējo Lemmu 3

$$m = |R_V(M_0)| < |R_V(M_1)| < \ldots < |R_V(M_{n-m})| \leq |Q| = n.$$

Tas iespējams tikai tad, ja

$$|R_V(M_{n-m})| = n + (n-m) = n.$$

Tātad $R_V(M_{n-m})$ sastāv no vienelementīgām kopām. Tas nozīmē, ja $q_1 \neq q_2$, tad $q_1 \underset{M_{n-m}}{\not\sim} q_2$. Pretruna! Līdz ar to situācija

$$q_1 \not\sim q_2 \qquad \text{un} \qquad q_1 \underset{M'}{\sim} q_2$$

nav iespējama. $\blacksquare$

Teorēma 5. *Mīlija mašīnas $\langle Q, A, B, \circ, * \rangle$ atāvokļi q_1, q_2 ir atšķirami tad un tikai tad, ja tie ir atšķirami kopā $A^{|Q|-1}$.*

$\square$ $\Leftarrow$ Saprotams, ja $q_1 \underset{A^{|Q|-1}}{\not\sim} q_2$, tad $q_1 \not\sim q_2$.

$\Rightarrow$ Pieņemsim, ka $q_1 \not\sim q_2$. Izvēlamies $M \leftharpoondown \{\lambda\}$, tad $|R_V(M)| = 1$. Saskaņā ar Lemmu 4

$$q_1 \underset{M'}{\not\sim} q_2, \qquad \text{kur} \qquad M' = \bigcup_{i=0}^{|Q|-1} A^i\{\lambda\} = \bigcup_{i=0}^{|Q|-1} A^i.$$

Tātad

$$\exists i \in \overline{0, |Q|-1} \;\; \exists u \in A^i \quad q_1 * u \neq q_2 * u.$$

Brīvi izvēlamies kādu burtu $a \in A$. Pieņemsim, ka $k = |Q| - 1 - |u|$, tad $q_1 * ua^k \neq q_2 * ua^k$ un $ua^k \in A^{|Q|-1}$. $\blacksquare$