V.Carkova

Markova ķēdes

Rīga

2001

AMS subject classification (1991) 60H30

Viktorija Carkova. Markova ķēdes. Mācību līdzeklis: Rīga, LU, 2001.– 76 lpp.

Mācību līdzeklis paredzēts Latvijas universitātes matemātikas specialitātes studentiem, kā arī citu specialitāšu studentiem, kas sava zinātniskajā vai praktiskajā darbā izmanto gadījuma procesu teoriju.
Mācību līdzeklī apskatītas Markova ķēdes ar diskrētu stāvokļu telpu, pierādīta ergodiskā teorēma, aplūkoti masu apkalpošanas teorijas elementi, iegūtas Erlanga formulas. Teorija ir ilustrēta ar piemēriem.
Lai apgūtu materiālu, nepieciešamas zināšanas varbūtību teorijā matemātikas vai matemātikas pedagogu bakalaura studiju programmu apjomā .

Saturs

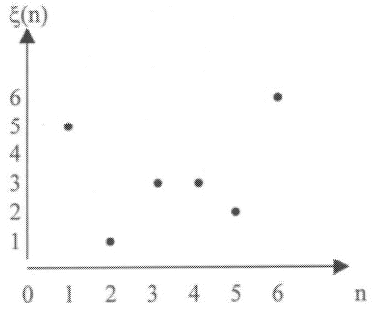
Ievads 4
1.§. Markova ķēdes definīcija 6
2.§. Čepmena-Kolmogorova vienādojumi 15
3.§. Markova ķēdes stāvokļu klasifikacija 19
4.§. Stāvokļu atgriezeniskuma nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi 27
5.§. Solidaritātes teorēma 31
6.§. Periodiskas Markova ķēdes 33
7.§. Teorēmas par gadījuma klejošanu 37
8.§. Ergodiskā teorēma 43
9.§. Reducējamas Markova ķēdes pārejas varbūtību izturešanas 65
10.§. Erlanga formula 71
Literatura 76

IEVADS.

Gadījuma procesa definīcija.

1. definīcija. Par gadījuma procesu sauc gadījuma lielumu saimi $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, kas uzdota dotā varbūtību telpā $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un atkarīga no parametra $t, t \in \mathbf{T}$.

Ja ω ir fiksēts, $\xi(t)$ sauc par gadījuma procesa **realizāciju** jeb **trajektoriju** *(realization)*. Visu $\xi(t)$ iespējamo vērtību kopu **S** sauc par gadījuma procesa **stāvokļu telpu jeb fāzes telpu** (*set of states*) vai (*state space*). Ja t ir fiksēts, $\xi(t, \omega)$ sauc par gadījuma procesa **griezumu** (*cross-section*).
Piemēram, ja $\xi(n)$ ir n-tās spēļu kauliņa mešanas rezultāts, tad $\mathbf{S} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 5, 6\}$, $\mathbf{T} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ...\}$. Viena tipiska gadījuma procesa $\xi(n)$ realizācija $(5, 1, 3, 3, 2, 6, ...)$ ir pārādīta grafikā.



Šajā piemērā $\xi(n) =: \xi_n, n \geq 1$ ir savstārpēji neatkarīgi gadī-

juma lielumi, bet vispārējā gadījumā gadījuma lielumi ir atkarīgi.

Gadījuma procesu klasifikācija.

Gadījuma procesi atšķiras pēc šādām galvenajām pazīmēm: stāvokļu kopas $\mathbf{S}$ rakstura, parametra $t \in \mathbf{T}$ rakstura un atkarības starp gadījuma lielumiem.

Stāvokļu kopa S(*set of states*).
Ja $\mathbf{S}$ - diskrēta, piemēram $\mathbf{S} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, ...\}$, saka, ka process $\{\xi_t, \ \ t \in \mathbf{T}\}$ ir process ar diskrētu stāvokļu telpu.
Ja $\mathbf{S} = (-\infty, \infty)$, tad $\{\xi(t), t \in \mathbf{T}\}$ sauc par **reālu gadījuma procesu**.
Telpa $\mathbf{S}$ var būt gan viendimensijas, gan daudzdimensiju, kā arī būt pēc savas dabas daudz sarežģītāka.
Parametrs $t \in \mathbf{T}$.
Ja $\mathbf{T}$ ir diskrēta kopa, piemēram $\mathbf{T} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, ...\}$, tad $\{\xi_t, t \in \mathbf{T}\}$ ir gadījuma process ar diskrētu parametru (laiku) t.
Pielietojumos ļoti svarīgs ir gadījums $\mathbf{T} = [\mathbf{0}, \infty)$. Šajā gadījumā t ļoti bieži interpretē kā laiku, un procesu sauc par procesu ar nepārtrauktu laiku. t var būt arī daudzdimensiju vektors. Piemēram, analizējot jūras viļņu augstumu, ģeogrāfisko garumu un platumu var uzskatīt par t, bet viļņa augstumu dotajā vietā par $\xi(t)$.
Atkarība.
Atkarība starp gadījuma lielumiem $\xi(t), t \in \mathbf{T}$ ir svarīga pazīme. Tā tiek uzdota ar jebkuru galīgu kopu $(\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n))$, $t_i \in \mathbf{T}, \mathbf{i} = \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{n}\}$ sadalījuma likumiem.
Gadījuma procesu var uzskatīt par pilnīgi uzdotu, ja aprakstīti $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ un vektoru $(\xi(t_1), ..., \xi(t_n))$ sadalījuma likumi jebkurām

galīgām virknēm $t_1, ..., t_n$, $t_i \in \mathbf{T}$ visiem $i = 1, ..., n$.

1.§. Markova ķēdes definīcija.

Markova process ir neatkarīgo mēģinājumu virkņu vispārinājums. To teorijas pamatā ir šāda hipotēze: $n+1$ mēģinājuma rezultāta atkarība no visiem iepriekšējo mēģinājumu rezultātiem izpaužas tikai caur n-ā mēģinājuma rezultātu. Citiem vārdiem, nākotne nav atkarīga no pagātnes, ja zināma tagadne, jeb, tagadne satur visu informāciju, kas uzkrāta pagātnē.
Apskatīsim eksperimentu ar galīgu vai sanumurējamu rezultātu kopu $\{\mathbf{G} = \mathbf{E_o}..., \mathbf{E_N}, ...\}$. Pieņemsim, ka varam eksperementu neierobežoti atkārtot.
Jebkura mēģinājuma rezultāts ir $\mathbf{G}$ elements ar savu kārtas numuru. Apzīmēsim n -tajā mēģinājuma rezultāta numuru ar $\mathbf{X}_n$ Tad, $\mathbf{X}_n = j$, ja n-tajā mēģinājumā ir iestājies notikums $\mathbf{E_j}$.

1.1.definīcija. Dota gadījuma lielumu, kas pieņem veselu skaitļu vērtības, virkne $\{\mathbf{X}_n\}_{n\geq 0}$. $\mathbf{X}_n = j$, ja n-tajā mēģinājumā ir iestājies notikums $\mathbf{E_j}$. Virkne $\{\mathbf{X}_n\}_{n\geq 0}$ veido Markova ķēdi, ja

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j|\mathbf{X}_o = k_o, \mathbf{X}_1 = k_1, ..., \mathbf{X}_{n-2} = k_{n-2}, \mathbf{X}_{n-1} = i) =$$
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j|\mathbf{X}_{n-1} = i) =: p_{ij}^{(n)}, \ \sum_j p_{ij}^{(n)} = 1, \qquad (1.1)$$

$p_{ij}^{(n)}$ ir pārejas varbūtība no i uz j viena soļa laikā n-tajā solī .

Bieži Markova ķēdi izmanto, lai aprakstītu fizikālu sistēmu ar iespējamiem stāvokļiem $\mathbf{E}_o, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ...$ un uzdotu sākuma stāvokļu sadalījumu $\mathbf{P}(\mathbf{X}_o = j) = p_j^{(o)}, \sum_j p_j^{(o)} = 1, j = 1, 2, ...$ Pēc

tam, sistēma laikā $t_1, t_2, ...(t_i$-veseli skaitļi) maina savu stāvokli, pie tam, varbūtība momentā n nokļūt stāvoklī $\mathbf{E_j}$, kaut arī zināmi sistēmas visi iepriekšējie stāvokļi, atkarīga tikai no tā, kurā stāvoklī sistēma atrodas $n-1$ solī . Šādām Markova ķēdēm gan to stāvokļu telpa, gan laiks ir diskrēti.

1.2.definīcija. Markova ķēdi $\{\mathbf{X}_n\}_{n\geq 0}$ sauc par **homogēnu**, ja pārejas varbūtības $p_{ij}^{(n)}$ nav atkarīgas no n (*homogeneous Markov chain*).

Virknes $\{\mathbf{X_n}\}_{\mathbf{n\geq 0}}$ eksistenci, kas ir Markova ķēde ar uzdotām pārejas varbūtībām $p_{ij}^{(n)} : p_{ij}^{(n)} \geq 0, \sum\limits_j p_{ij}^{(n)} = 1$, ar uzdotu sākuma sadalījumu $p_j^{(o)} : p_j^{(o)} \geq 0, \sum\limits_j p_j^{(o)} = 1$, garantē Kolmogorova teorēma par saskaņotiem sadalījumiem [1], ja tie uzdoti ar sekojošām vienādībām

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\mathbf{X}_o = k_o, \mathbf{X}_1 = k_1, ..., \mathbf{X}_n = k_n)\\ &\quad = p_{k_o}^{(o)} p_{k_o k_1}^{(1)} \dots p_{k_{n-1}k_n}^{(n)}. \qquad (1.2)\end{aligned}$$

Pārbaudīsim, ka šajā gadījumā izpildās **Markova īpašība** (1.1).

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}_n = k_n | \mathbf{X}_o = k_o, ..., \mathbf{X}_{n-1} = k_{n-1}) &= \frac{p_{k_o}^{(o)} p_{k_o k_1}^{(1)} \dots p_{k_{n-1}k_n}^{(n)}}{p_{k_o}^{(o)} \dots p_{k_{n-2}k_{n-1}}^{(n-1)}}\\ &= p_{k_{n-1}k_n}^{(n)}.\end{aligned}$$

1.3.definīcija. Gadījuma mēģinājumu virkne ar vienu un to pašu rezultātu kopu $\{\mathbf{E_o}..., \mathbf{E_N}, ...\}$ veido homogēnu Markova ķēdi, ja

varbūtība uzdota šādā veidā

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_o = k_o, ...\mathbf{X}_n = k_n) = p^{(o)}_{k_o} p_{k_o k_1} \dots p_{k_{n-1} k_n},$$

pie tam $p^{(o)}_j$ un p_{ij} ir neatkarīgi viens no otra un
$\sum\limits_j p^{(o)}_j = 1, \;\; p^{(o)}_j \geq 0, \;\; p_{ij} \geq 0, \;\; \sum\limits_j p_{ij} = 1, \;\; i = 0, 1, ...,$
p_{ij} - pārejas varbūtība no i uz j viena soļa laikā.

Tālāk apskatīsim homogēnas Markova ķēdes. Sakārtosim pārejas varbūtības p_{ij} matricā $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$. **P**- pārejas varbūtību matrica pa vienu soli. Visi tās elementi ir nenegatīvi, un $\sum\limits_j p_{ij} = 1$ visiem i. Ja $\mathbf{1}$ - vektors-kolonna, kurā visi elementi vienādi ar 1, tad matrica **P** apmierina sekojošus nosacījumus

$$\mathbf{PX} \geq \mathbf{0} \quad \text{visiem} \;\; \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \;\; \text{un} \;\; \mathbf{P1} = \mathbf{1}.$$

Tātad, vektors $\mathbf{1}$ ir matricas **P** īpašvektors, kas atbilst īpašvērtībai viens.

1.4.definīcija. Matricu **P**, kurai izpildās $\mathbf{PX} \geq \mathbf{0}$ visiem $\mathbf{X} \geq 0$ un $\mathbf{P1} = \mathbf{1}$, sauc par **Markova** jeb **stohastisku** matricu.

Matrica **P** pilnīgi apraksta sistēmas evolūciju vienā solī .

1.1. piemērs. (Laika prognoze). Pieņemsim, ka rītdienas laiks ir atkarīgs no tā, kāds laiks ir šodien. Ja lietus līst šodien, tad ar varbūtību α lietus līs arī rīt. Ja šodien nelīst, tad rīt tomēr līs ar varbūtību β.
Analizējot rītdienas laiku, var uzskatīt katru n-to dienu, $n \geq 1$, kā vienu no procesa stāvokļiem (0 - līst, 1 - nelīst). Tātad, laika

prognoze tiek aprakstīta ar divstāvokļu (*two state*) Markova ķēdi ar pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

1.2. piemērs. (Sakaru sistēma). Pieņemsim, ka, pārraidot ciparu signālu (0 vai 1) pa sakara kanālu, mēs izejā atbilstoši gaidām 0 vai 1. Pieņemsim, ka līdz izejai katram signālam vajag noiet dažus soļus, kur katrā solī ar varbūtību p signāls paliek nemainīgs.
Pieņemsim, ka $\{X_n,\ n = 0, 1, ...\}$ apraksta signālu pēc n soļiem. Tātad, $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$ it divstāvokļu Markova ķēde ar pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

1.3. piemērs. Ir zināms, ka katrā konkrētā dienā Andra garastāvoklis var būt: lielisks (L), viduvējs (V) un slikts (S). No pieredzes ir zināms, ka, ja viņam šodien ir lielisks garastāvoklis, tad rītdien būs L/V/S/ ar atbilstošām varbūtībām 0.5/0.4/0.1; ja šodien viduvējs garastāvoklis, tad rītdien būs L/V/S ar varbūtībām 0.3/0.4/0.3; ja šodien viņš ir drūms, tad rītdien būs L/V/S ar varbūtībām 0.2/0.3/0.5.
Ja ar X_n mēs gribam aprakstīt Andra garastāvokli n-ajā dienā, tad $\{X_n, n \geq 0\}$ ir trīsstāvokļu Markova ķēde 0 - (L), 1 - (V), 2

- (S) ar pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1.4. piemērs. (Procesa pārveidošana Markova ķēdē .) Pieņemsim, ka laika prognoze ir atkarīga no divām pēdējām dienām: ja līst divas dienas pēc kārtas, tad nākošajā dienā līs ar varbūtību 0.7; ja vakar nelija, bet šodien līst, tad rīt lietus būs ar varbūtību 0.5; ja vakar lija, bet šodien nelīst, tad rīt būs lietus ar varbūtību 0.4; un ja nelija ne vakar, ne šodien, tad rīt līs ar varbūtību 0.2. Ja mēs mēģināsim noteikt laika prognozi kā vienas dienas laika apstākļu funkciju, tad iepriekš minēto modeli nevar aprakstīt ar Mar-kova ķēdi. Bet ir iespēja uzrakstīt stāvokļu kopu $\{0, 1, 2, 3\}$ atkarīgu no divām dienām (vakardienas, šodienas): stāvoklis 0 - lija gan vakar, gan šodien; 1 - līst šodien, bet nelija vakar; 2 - lija vakar, bet nelīst šodien; 3 - nelija ne šodien, ne vakar. Viegli konstruēt pārejas varbūtību matricu

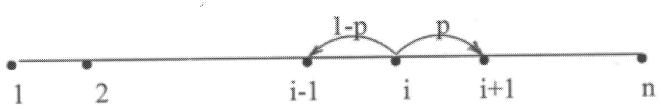
$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix},$$

jo, piemēram, $p_{02} = \mathbf{P}\{$lija vakar, bet nelīst šodien, ja ir zināms, ka lija divas dienas pēc kārtas (gan vakar, gan aizvakar)$\} = 1 - 0.7 = 0.3$.

1.5. piemērs. (Gadījuma klejošanas modelis). (*a random walk model*). Markova ķēdi ar stāvokļiem $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ sauc par

gadījuma klejošanas procesu, ja $p_{ii+1} = p = 1 - p_{ii-1}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad p \in (0,1)$.
Šis process labi apraksta cilvēka klejošanu, teiksim, pa taisnu ielu, kad katrā laika momentā cilvēks paiet ar varbūtību p vienu soli pa labi un ar varbūtību 1-p vienu soli pa kreisi.

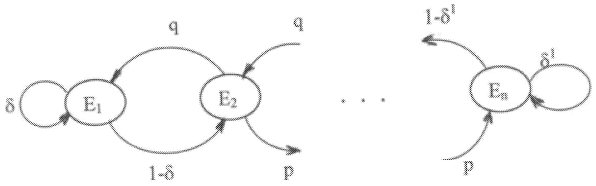
1.6. piemērs. (Gadījuma klejošana pa taisni ar absorbējošiem un atstarojošiem ekrāniem). Pieņemsim, ka modeļa stāvokļi ir punkti 1,2,...,n.



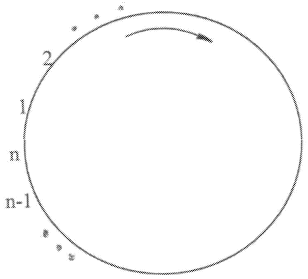
$p_{ii+1} = 1 - p_{ii-1} = p = 1 - q$, ja $2 \leq i \leq n-1$,
$p_{11} = \delta, \quad p_{12} = 1 - \delta, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad p_{nn} = \delta^1, \quad p_{nn-1} = 1 - \delta^1, \quad 0 \leq \delta^1 \leq 1$.
Gadījumā, ja $\delta = \delta^1 = 1$ modeli sauc par **Markova ķēdi ar absorbējošiem ekrāniem** ($1, n$ - *absorbing states*). Ja $\delta = \delta^1 = 0$, modeli sauc par **Markova ķēdi ar atstarojošiem ekrāniem** (*reflecting states*).
Pārejas varbūtību matrica, kas atbilst šim modelim ir

$$P = \begin{pmatrix} \delta & 1-\delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\delta^1 & \delta^1 \end{pmatrix}.$$

Pārejas matricas reizēm ērti uzdot signālgrafu veidā , interpretējot sistēmas pāreju no stāvokļa $\mathbf{E_i}$ stāvoklī $\mathbf{E_j}$ kā signāla pārraidi no viena mezgla uz otru ar pārraides koeficientu p_{ij}. Pēdējā piemērā sistēmu var uzdod ar grafa palīdzību.



1.7. piemērs.(Gadījuma klejošana pa riņķi). Pieņemsim , ka riņķa līnija sadalīta n vienādos lokos.



Daļiņa pārvietojas pa $0, 1, ..., n$ lokiem pozitīvā virzienā ar varbūtībām $p_o, p_1, ..., p_{n-1}$, pie kam $p_o = p_n$. Tātad ir spēkā pieņēmums,

ka pārvietošanās pa pilnu apli nemaina sistēmas stāvokli. Tad

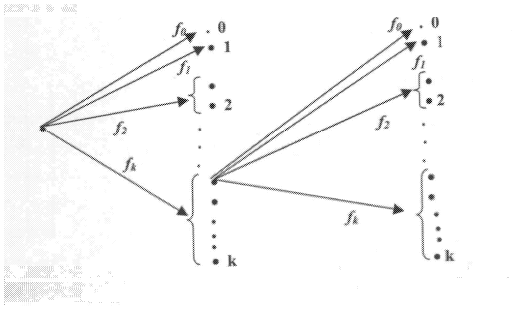
$$P = \begin{pmatrix} p_o & p_1 & \dots & p_{n-1} \\ p_{n-1} & p_o & \dots & p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_o \end{pmatrix}.$$

1.8. piemērs. (Erenfestu difūzijas modelis).(*Ehrenfests urn model*). Daļiņu difūziju caur ekrānu, kas atdala 2 kameras, apraksta šāds modelis. Kopīgais daļiņu skaits vienāds ar k. Momentā n viena daļiņa no savas kameras pārvietojas uz otru. Katrai daļiņai varbūtība pārvietoties ir vienāda ar $\frac{1}{k}$. Sistēmas stāvokļi – daļiņu skaits pirmajā kamerā . Tātad, iespējamie sistēmas stāvokļi ir 0,1,...,k. Pārejas varbūtību matrica ir

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{k-1}{k} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.9. piemērs.(Zarojošies procesi).(*branching processes*). Aplūkosim daļiņas, kas savas "dzīves"beigās rada sev līdzīgas daļiņas (neironu ķēžu realizācija, baktēriju dalīšanās, utt). Pieņemsim, ka sākuma momentā ir viena daļiņa ("nulles paaudze"), kas dalīšanās rezultātā ar varbūtību $f_k, (k = 0, 1, 2, ...)$ pārveidojas par k tā paša tipa daļiņām, $\sum\limits_k f_k = 1$. Iegūtās daļiņas veido "pirmo paaudzi" . Katra šis paaudzes daļiņa uzvedas tieši tāpat kā sākuma daļiņa

neatkarīgi no iepriekšējās un citām daļiņām. Tā rezultātā rodas "otrā paaudze" utt.



Apzīmēsim ar η_n - daļiņu skaitu n-tā paaudzē . Ievedīsim neatkarīgu, vienādi sadalītu gadījuma lielumu neatkarīgas virknes:
$\{\xi_j^{(1)}\}_{j\geq 1}, \{\xi_j^{(2)}\}_{j\geq 1}$,... , kur $\xi_j^{(n)}, j = 1, 2, ...$ visiem n=1,2,... ir gadījuma lielumi ar sadalījuma likumu
$\mathbf{P}(\xi_j^{(n)} = k) = f_k,\ \ k = 0, 1, 2, ...$ un $\mathbf{E}|\xi_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{n})}| < \infty,\ \ \mathbf{E}\xi_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{n})} =: \mathbf{E}\xi,\ \sum\limits_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{f_k} = \mathbf{1}.$
Tad

$$\begin{aligned}
\eta_o &= 1 \\
\eta_1 &= \xi_1^{(1)} \\
\eta_2 &= \xi_1^{(2)} + \xi_2^{(2)} + \ldots + \xi_{\eta_1}^{(2)} \\
&\vdots \\
\eta_n &= \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_{\eta_{n-1}}^{(n)}
\end{aligned}$$

Saskaitāmo skaits η_n izteiksmē vienāds ar η_{n-1} - daļiņu skaitu iepriekšejā paaudzē. Tā kā $\xi_j^{(n)}$ visiem $j = 1, 2, ...$ vienādi sadalīti un neatkarīgi ar $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = \mathbf{E}\xi$ katram j un n, un $\{\xi_j^{(n)}\}_{j\geq 1}$ nav atkarīgi no η_{n-1}, varam izmantot Kolmogorova-Prohorova teorēmu [1]. No tās seko, ka

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\eta_n &= \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{\eta_{n-1}} \xi_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_{n-1} \geq k)\mathbf{E}\xi_k^{(n)} \\
&= \mathbf{E}\xi \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_{\mathbf{n-1}} \geq \mathbf{k}) = \mathbf{E}\xi \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_{n-1} = i) \\
&= \mathbf{E}\xi \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \mathbf{P}(\eta_{n-1} = i) = \mathbf{E}\xi \sum_{\mathbf{i=1}}^{\infty} \mathbf{iP}(\eta_{\mathbf{n-1}} = \mathbf{i}) \\
&= \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Vienādība $\mathbf{E}\eta_n = \mathbf{E}\eta_{n-1}\mathbf{E}\xi$ pazīstama kā Valda vienādība. Tā izsaka n-tās paaudzes daļiņu skaita matemātisko cerību ar $(n-1)$-ās paaudzes daļiņu skaita un vienas daļiņas pēcnācēju skaita matemātiskajām cerībām. Tātad, mūsu gadījumā iegūstam $\mathbf{E}\eta_n = (\mathbf{E}\xi)^n$.

2.§. Čepmena-Kolmogorova vienādojumi.

Matrica $\mathbf{P}$, kā mēs redzējām, pilnīgi apraksta sistēmas izmaiņas pēc viena soļa. Apskatīsim tagad stāvokļu izmaiņas sistēmā pēc k soļiem.

Apzīmēsim $p_{ij}(k) := \mathbf{P}(\mathbf{X}_k = j|\mathbf{X}_o = i),\ k \geq 0,\ i,j \geq 1.$ Izmantojot pilnās varbūtības formulu, iegūstam

$$p_{ij}(k) = \sum_s \mathbf{P}(\mathbf{X}_{k-1} = s|\mathbf{X}_o = i)\mathbf{P}(\mathbf{X}_k = j|\mathbf{X}_{k-1} = s)$$
$$= \sum_s p_{is}(k-1)p_{sj}, \tag{2.1}$$

kur summēšana notiek pa visiem sistēmas stāvokļiem. Apzīmējot ar $\mathbf{P}(k)$ matricu, ko veido varbūtības $p_{ij}(k)$, vienādību (2.1) var uzrakstīt matricu formā

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1)\mathbf{P},$$

kā arī

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(k-s), \quad 1 \leq s \leq k. \tag{2.2}$$

Acīmredzot

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{k+m} = j|\mathbf{X}_m = i) = p_{ij}(k), \quad p_{ij}(1) = p_{ij}.$$

Sakarība (2.2) pazīstama kā Čepmena-Kolmogorova vienādojums. Spēkā ir arī sakarība $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}^k$, tā kā $\mathbf{P}(2) = \mathbf{PP} = \mathbf{P}^2$ utt. Pārejas varbūtības ir Markova ķēdes svarīgakie raksturlielumi. Tomēr, būdamas nasacītās varbūtī-bas, tās Markova ķēdi pilnīgi neapraksta. Svarīgi zināt sistēmas stāvokļu nenosacītās varbūtī- bas pēc jebkura soļu skaita. Ja ir dotas sākuma stāvokļu nenosa- cītās varbūtības $p_1^{(o)}, p_2^{(o)}, ...,\ p_i^{(o)} \geq 0,\ \sum\limits_i p_i^{(o)} = 1$, tad stāvokļu nenosacītās varbūtības pēc viena soļa ir

$$p_j(1) = \sum_i p_i^{(o)} p_{ij},$$

jeb $p_1 = p_o\mathbf{P}$, kur $p_o = (p_1^{(o)}, p_2^{(o)}, ...)$, $p_1 = (p_1(1), p_2(1), ...)$.
Kā redzams, sistēmas stāvokļu nenosacītās varbūtības apraksta matrica-rindiņa. Pēc n soļiem šo matricu $p_n = (p_1(n), p_2(n), ...)$ nosaka vienādība

$$p_n = p_o\mathbf{P}^n, \tag{2.3}$$

jo $p_j(n) = \sum_i p_i^{(o)} p_{ij}(n)$.

Speciālā gadījumā, kad ir zināms sistēmas sākuma stāvoklis $p_i^{(o)} = 1, p_k^{(o)} = 0$ visiem $k \neq i$ ir spēkā $p_j(n) = p_{ij}(n)$.
Tātad, Markova ķēdi pilnīgi apraksta pārejas varbūtību matrica $\mathbf{P}$ un sākuma stāvokļu sadalījums p_o.

2.1 piemērs. Pieņemsim, ka $\{\mathbf{X}_n\}_{n\geq 0}$ ir vienādi sadalītu neatkarīgu gadījuma lielumu virkne. Tad $\{\mathbf{X}_n\}_{n\geq 0}$ ir Markova ķēde ar pārejas varbūtībām.

$$p_{ij} = \mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j | \mathbf{X}_{n-1} = i) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j) = p_j,$$

un pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Spēkā arī vienādības

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}^k = \mathbf{P}, \qquad p_k = p_o\mathbf{P}^k = p_o\mathbf{P},$$

ko viegli pārbaudīt, izdarot darbības ar matricām un ievērojot, ka $\sum_i p_i = 1$.

2.2 piemērs. Aplūkosim 1.1 piemēru, kur ar divstāvokļu Markova ķēdi aprakstīta laika prognoze. Pieņemsim, ka $\alpha = 0.7, \beta = 0.4$. Aprēķināt varbūtību, ka pēc 4 dienām līs lietus (notikums A), ja ir zināms, ka šodien līst ($p_o^{(o)} = 1$).
Atrisinājums. Matrica

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

apraksta sistēmas izmaiņas pēc viena soļa. Tad

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix},$$

$p_o(4) = p_{oo}(4) = 0.5749$, ja $p_o^{(o)} = 1$.
Ja $p_1^{(o)} = 1$, tad $p_o(4) = 0.5668$.
Ja $p_o^{(o)} = 0.4, p_1^{(o)} = 0.6$, tad $\mathbf{P}(A) = 0.4 \times 0.5749 + 0.6 \times 0.5668 = 0.57$.

2.3. piemērs. Aplūkosim 1.4 piemēru. Aprēķināt varbūtību ka līs ceturtdien (notikums B), ja ir zināms, ka lietus līst gan pirmdien, gan otrdien.
Atrisinājums. Sistēmas izmaiņas pēc diviem soļiem apraksta pāre-

jas varbūtību matrica $\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}^2$. Tāpēc

$$\mathbf{P}(2) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18 \\ 0.35 & 0.20 & 0.15 & 0.30 \\ 0.20 & 0.12 & 0.20 & 0.48 \\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

No kurienes $p_{oo}(2) = 0.49$ un $p_{o1}(2) = 0.12$. Tātad, varbūtība, ka lietus līst arī ceturtdien, vienāda ar $0.49+0.12 = 0.61$. $\mathbf{P}(B) = 0.61$.

3.§. Markova ķēdes stāvokļu klasifikācija.

Sistēma no stāvokļa $\mathbf{E}_i$ var pāriet uz stāvokli $\mathbf{E}_j$ $(i \to j)$ tikai tad, ja eksistē vesels skaitlis n, ka $p_{ij}(n) > 0$. Pretējā gadījumā
$\mathbf{P}($ kādreiz tiek sasniegts $\mathbf{E}_j|$ izejot no $\mathbf{E}_i) =$

$$\mathbf{P}\{\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathbf{X}_n = j|\mathbf{X}_o = i)\} \le \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j|\mathbf{X}_0 = i)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) = 0.$$

3.1.definīcija. Stāvokli $\mathbf{E}_i$ sauc par **nebūtisku** (*non-essential state*) ja eksistē tāds stāvoklis $\mathbf{E}_j$ un vesels skaitlis $n_o > 0$, ka $p_{ij}(n_o) > 0$, bet $p_{ji}(n) = 0$ visiem $n \ge 1$. Pretējā gadījumā stāvokli $\mathbf{E}_i$ sauc par **būtisku** (*essential state*).

3.2. definīcija. Būtiski stāvokļi $\mathbf{E}_i$ un $\mathbf{E}_j$ ir **saistīti** (*communicating states*), ja eksistē tādi veseli skaitļi $m > 0$ un $n > 0$, ka $p_{ij}(m) > 0$ un $p_{ji}(n) > 0$.

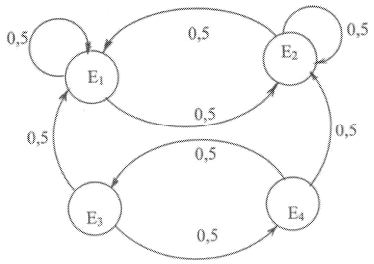
Acīmredzot,
(i) $p_{ii}(0) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_o = i|\mathbf{X}_o = i) = 1$
(ii) ja stāvoklis $\mathbf{E}_i$ ir saistīts ar $\mathbf{E}_j$, tad $\mathbf{E}_j$ ir saistīts ar $\mathbf{E}_i$ $(i \iff j)$.
(iii) ja stāvoklis $\mathbf{E}_i$ ir saistīts ar $\mathbf{E}_j$, bet $\mathbf{E}_j$ savukārt ir saistīts ar $\mathbf{E}_k$, tad $\mathbf{E}_i$ ir saistīts ar $\mathbf{E}_k$, jeb $\mathbf{E}_i$ un $\mathbf{E}_k$ ir saistīti $(i \iff k)$.
Pēdējais ir spēkā , jo izpildās: $(\exists n > 0 : p_{ij}(n) > 0; \exists m > 0 : p_{jk} > o) \rightarrow (p_{ik}(n+m) = \sum_j p_{ij}(n)p_{jk}(m) \geq p_{ij}(n)p_{jk}(m) > 0)$, kas nozīmē , ka $\mathbf{E}_i$ ir saistīts ar $\mathbf{E}_k$. Analoģiski var pierādīt, ka $\mathbf{E}_k$ ir saistīts ar $\mathbf{E}_i$.

3.1. piemērs. 1.6.piemērā (Gadījuma klejošana ar absorbēšanu.) stāvokļi $2, 3, , n-1$ ir nebūtiski. Stāvokļi 1 un n ir būtiski, bet nav saistīti. Tie ir **absorbējoši** stāvokļi (*absorbing states*). Klejošanas ar "atstarošanu" gadījumā visi stāvokļi ir būtiski un saistīti.

3.2. piemērs. Pieņemsim, ka sistēma var atrasties 4 stāvokļos: $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$, un pārejas varbūtību matrica ir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

ar atbilstošo grafu



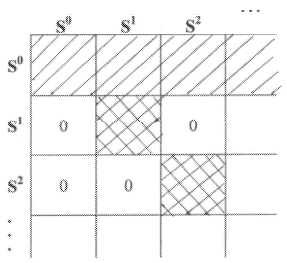
Šajā piemērā $\mathbf{E}_1$ un $\mathbf{E}_2$ ir būtiski saistīti stāvokļi, $\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ ir nebūtiski stāvokļi.

Pieņemsim, ka $\{\mathbf{X}_n\}_{n\geq 0}$ ir Markova ķēde ar stāvokļu telpu $\mathbf{S}$. Apzīmēsim ar $\mathbf{S}^o$ - visu nebūtisko stāvokļu klasi. Tālāk, izvēlēsimies kādu būtisku stāvokli $\mathbf{E}_i$. Apzīmēsim ar $\mathbf{S}_{\mathbf{E_i}}$ stāvokļu klasi, kas satur $\mathbf{E}_i$ un visus stāvokļus, kas ir ar to saistīti. Ja $\mathbf{E}_j \in \mathbf{S}_{\mathbf{E_i}}$, tad $\mathbf{E}_j$ būtiski saistīts ar $\mathbf{E}_i$ un $\mathbf{E}_i \in \mathbf{S}_{\mathbf{E}_j}$. Tātad, $\mathbf{S}_{\mathbf{E_i}} = \mathbf{S}_{\mathbf{E_j}}$. Turpinot tādā veidā visu būtisko stāvokļu kopa sadalās nešķeļošās saistītu stāvokļu klasēs, kuras apzīmēsim at-bilstoši ar $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, ...$ Ja klase $\mathbf{S}_{\mathbf{E_i}}$ sastāv no viena stāvokļa, šo stāvokli sauc par **absorbējošu** (*absorbing state*). Acīmredzot, ja sistēma nonāk būtiskā stāvoklī $\mathbf{E_i}$, tad tā nekad neiziet no klases $\mathbf{S}_{\mathbf{E_i}}$.

3.3.definīcija. Markova ķēdi, kas sastāv no vienas būtisku saistītu stāvokļu klases, sauc par **nereducējamu** (*indecomposable* vai *irreducible Markov chain*). Pretējā gadījumā tā ir **reducējama** (*decomposable* vai *reducible Markov chain*).

Ja sistēmas stāvokļus sanumurēsim tā, lai pirmie būtu nebūtiskie

stāvokļi, tiem sekotu stāvokļi no vienas būtisku saistītu stāvokļu klases, pēc tam no otras utt., tad pārejas varbūtību matricai ir šāda struktūra:



Apakšmatricas, kam nosvītrotas rūtiņas, ir stohastiskas matricas, katra no tām atbilst kādai nereducējamai Markova ķēdei. Apakš-matricas, kas apzīmētas ar **O**, satur tikai nulles elementus. Turp-māk galvenokārt runāsim par nereducējamām Markova ķēdēm.

3.3. piemērs. Pārbaudīt, ka trīsstāvokļu Markova ķēde, kas ir uzdota ar pārejas varbūtību matricu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

ir nereducējama.
Atrisinājums. Viegli pārbaudīt, ka ķēde ir nereducējama. Piemēram, no stāvokļa 0 uz stāvokli 2 var pāriet ar diviem soļiem:

$0 \to 1 \to 2$, no 0 uz 1 ar varbūtību 0.5, no 1 uz 2 ar varbūtību 0.25. No stāvokļa 2 uz 0 arī ar diviem soļiem: $2 \to 1$ ar varbūtību 0.5, pēc tam $1 \to 0$ ar varbūtību 0.5.

3.4. piemērs. Ko var pateikt par Markova ķēdes stāvokļiem, ja ir uzdota tās pārejas varbūtību matrica

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atrisinājums. Tā ir četrstāvokļu Markova ķēde, kurai stāvokļi 0 un 1 veido nereducējamu Markova ķēdi, stāvoklis 2 ir nebūtiskais, stāvoklis 3 ir absorbējošs stāvoklis.

Ievedīsim apzīmējumus:

$$f_j(n) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j, \mathbf{X}_{n-1} \neq j, ..., \mathbf{X}_1 \neq j | \mathbf{X}_o = j),$$

$f_j(n)$ - varbūtība, ka sistēma, izejot no stāvokļa $\mathbf{E}_j$, pirmo reizi tajā atgriezīsies pēc n soļiem.
$\mathbf{F}_j := \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$, t.i. $\mathbf{F}_j$ - varbūtība, ka sistēma, izejot na stāvokļa $\mathbf{E}_j$, kādreiz tajā atgriezīsies.

3.4. definīcija. Stāvokli $\mathbf{E}_i$ sauc par **atgriezenisku** (*recurrent/ persistent state*), ja $\mathbf{F}_j = 1$ un **neatgriezenisku** (*transient state*), ja $\mathbf{F}_j < 1$.

3.5. definīcija. Stāvokli $\mathbf{E}_j$ sauc par **nulles stāvokli** (*null state*), ja $p_{jj}(n) \to 0$, kad $n \to \infty$.

3.6. definīcija. Stāvokli $\mathbf{E}_j$ sauc par **periodisku** (*periodic srate*) ar periodu d_j (*with peroid of a state* d_j), ja atgriešanās ar pozītīvu varbūtību stāvoklī $\mathbf{E}_j$ iespējama tikai pēc kd_j soļiem, $k = 1, 2, ...$, $d_j > 1$, d_j - vismazākais no skaitļiem ar šo īpašību, t.i.,

$$d_j = l.k.d.\{n : \ p_{jj}(n) > 0\}.$$

Viegli redzēt, ka šajā gadījumā
$f_j(n) = 0$, ja $n \neq 0 \pmod{d_j}$, un $p_{jj}(n) = 0$, ja $n \neq 0 \pmod{d_j}$.

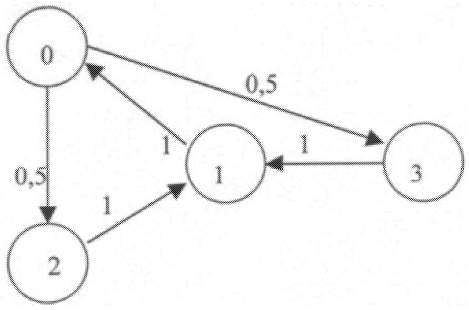
3.7. definīcija. Atgriezenisku stāvokli, kas nav nulles stāvoklis un nav periodisks, sauc par **ergodisku** (*ergodic state*).

3.5. piemērs. Dota Markova ķēde ar četriem stāvokļiem un pārejas varbūtību matricu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aprakstīt ķēdes stāvokļu klasi.

Atrisinājums. Sistēmas atbilstošais grafs ir



Viegli redzēt, ka $f_o(3) = 1, f_o(n) = 0$ visiem $n \neq 3$, $f_1(3) = 1, f_1(n) = 0$ visiem $n \neq 3$,
$f_2(3) + f_2(6) + f_2(9) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_2(3k) = 0.5 + 0.25 + \ldots = 1$,
$f_2(n) = 0$ visiem $n \neq 0 \pmod 3$.
$\sum_{k=1}^{\infty} f_3(3k) = 1, f_3(n) = 0$ visiem $n \neq 0 \pmod 3$.
Visi stāvokļi nereducējamai Markova ķēdei ir atgriezeniski un periodiski ar periodu d=3.

3.6. piemērs. Dota Markova ķēde ar 5 stāvokļiem 0,1,2,3,4 un pārejas varbūtību matricu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Aprakstīt stāvokļu klasi.

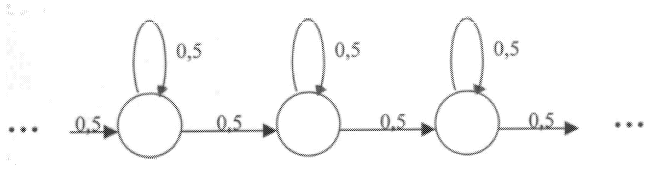
Atrisinājums. Ķēde sastāv no 3 klasēm: (0,1), (2,3), (4). Pirmās divas klases ir nereducējamas Markova ķēdes ar atgriezeniskiem stāvokļiem, pēdējā klase sastāv no viena nebūtiska stāvokļa.

$$f_o(1) = 0.5, f_o(2) = 0.5^2, ..., F_o = \sum_{s-1}^{\infty} f_o(s) = 0.5+0.5^2+\ldots = 1$$

utt.

3.7.piemērs. Apskatīsim daļiņas klejošanu pa veselu skaitļu kopu uz taisnes.

a). Katrā laika momentā daļiņa ar varbūtību 0.5 paliek uz vietas un ar varbūtību 0.5 pārvietojas uz nākošo punktu pa labi.

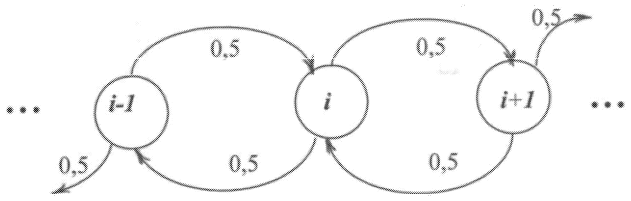


Viegli redzēt, ka $f_j(1) = 0,5, f_j(n) = 0$ visiem $n > 1$. Tātad, $\mathbf{F}_j < 1$ un visi stāvokļi ir neatgriezeniski. Visi stāvokļi ir nulles stāvokļi, jo

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = \lim_{n\to\infty} 0.5^n = 0$$

b). Daļiņa ar varbūtību 0.5 pārvietojas uz blakus punktu pa labi, ar varbūtību 0.5 - uz blakus punktu pa kreisi.

Šajā gadījumā Markova ķēde ir periodiska ar periodu 2, jo atgriezties jebkurā fiksēta stāvoklī iespējams tikai pēc pāru skaita soļiem.



4.§. Stāvokļu atgriezeniskuma nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi.

Ir zināms, ka par virknes $\{a_n\}_{n\geq 0}$ veidotājfunkciju sauc kompleksā mainīgā funkciju $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Rinda konverģē , ja $|z| < 1$ un virkne $\{a_n\}_{n\geq 0}$ ierobežota.

4.1. teorēma. Stāvoklis $\mathbf{E}_j$ ir atgriezenisks tad un tikai tad, ja

$$\mathbf{P}_j := \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty.$$

Ja stāvoklis $\mathbf{E_j}$ nav atgriezenisks, tad

$$\mathbf{F}_j = \frac{\mathbf{P}_j}{1+\mathbf{P}_j}.$$

Pierādījums. Izmantojot pilnās varbūtības formulu, varam rakstīt

$$p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) p_{jj}(n-k), \qquad p_{jj}(0) = 1. \qquad (4.1)$$

Ievedīsim virkņu $\{p_{jj}(n)\}_{n\geq 1}$ un $\{f_j(n)\}_{n\geq 1}$ veidotājfunkcijas

$$\mathbf{P}_j(z) := \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)z^n, \;\; \mathbf{F}_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)z^n.$$

Abas rindas konverģē , ja $|z| < 1$. Un funkcijas $\mathbf{P}_j(z)$ un $\mathbf{F}_j(z)$ šajā apgabalā it analītiskas. Pareizināsim vienādojumu (4.1) ar z^n un summēsim pa n:

$$\mathbf{P}_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_j(k)p_{jj}(n-k)z^n.$$

Mainot summēšanas kārtību, iegūstam

$$\mathbf{P}_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} f_j(k)p_{jj}(n-k)z^n = \sum_{k=1}^{\infty} f_j(k)\sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}(n-k)z^n =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_j(k)\sum_{l=o}^{\infty} p_{jj}(l)z^{k+l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_j(k)z^k\sum_{l=o}^{\infty} p_{jj}(l)z^l =$$

$$\mathbf{F}_j(z)(1+\sum_{l=1}^{\infty} p_{jj}(l)z^l) = \mathbf{F}_j(z)(1+\mathbf{P}_j(z)).$$

No kurienes seko, ka

$$\mathbf{F}_j(z) = \frac{\mathbf{P}_j(z)}{1+\mathbf{P}_j(z)}, \qquad \mathbf{P}_j(z) = \frac{\mathbf{F}_j(z)}{1-\mathbf{F}_j(z)}. \tag{4.2}$$

a). Pieņemsim, ka $\mathbf{P}_j = \infty$, tad

$$\lim_{z\to 1-0}\mathbf{P}_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \mathbf{P}_j = \infty,$$

tātad

$$\mathbf{F}_j(z) = 1 - \frac{1}{1+\mathbf{P}_j(z)} \underset{z\to 1-0}{\longrightarrow} 1.$$

Tā kā reāliem $z < 1$ izpildās nevienādība $\mathbf{F}_j(z) < \mathbf{F}_j$, tad

$$\lim_{z\to 1-0} \mathbf{F}_j(z) = 1 \leq \mathbf{F}_j.$$

Bet $\mathbf{F}_j \leq 1.$, jo tā ir notikuma varbūtība. Līdz ar to, $\mathbf{F}_j = 1$.
b). Pieņemsim, ka $\mathbf{F}_j = 1$. Tad

$$\lim_{z\to 1-0} \mathbf{F}_j(z) = \mathbf{F}_j = 1$$

un

$$\lim_{z\to 1-0} \mathbf{P}_j(z) = \lim_{z\to 1-0} \frac{\mathbf{F}_j(z)}{1-\mathbf{F}_j(z)} = -1 + \lim_{z\to 1-0} \frac{1}{1-\mathbf{F}_j(z)} = \infty.$$

Ņemot vērā , ka $\mathbf{P}_j(z) < \mathbf{P}_j$ visiem reāliem $z < 1$, iegūstam $\mathbf{P}_j = \infty$.
c). Ja $\mathbf{P}_j < \infty$, tad $\mathbf{E}_j$ ir neatgriezenisks stāvoklis un no (4.2) pie $z = 1$ iegūstam

$$\mathbf{F}_j = \frac{\mathbf{P}_j}{1+\mathbf{P}_j}.$$

Teorēma ir pierādīta.

$\mathbf{P}_j$ var interpretēt, kā sistēmas vidējo atgriešanās skaitu stāvoklī $\mathbf{E}_j$, ja izejas stāvoklis bijis $\mathbf{E}_j$. Patiešām, ja apskatām notikumu $\{\mathbf{X}_n = j | \mathbf{X}_o = j\} = \mathbf{A}_n$, tad argriešanās skaitu stāvoklī $\mathbf{E}_j$, ja

sākuma stāvoklis bijis $\mathbf{E}_j$, varam izteikt kā $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ kur

$$\chi_{A_n} = \begin{cases} 1, & \text{ja } \mathbf{X}_n = j, \text{ ja } \mathbf{X}_o = j, \\ 0, & \text{ja } \mathbf{X}_n \neq j, \text{ ja } \mathbf{X}_o = j. \end{cases}$$

Tad atgriešanās skaita matemātiskā cerība ir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\chi_{A_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{X}_n = j | \mathbf{X}_o = j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \mathbf{P}_j. \end{aligned}$$

Tātad, no teorēmas 4.1 mēs iegūstam, ka sistēma bezgalīgi daudz reižu atgriežas atgriezeniskā stāvoklī . Bez tam, Markova ķēdē ar galīgu stāvokļu $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_m)$ skaitu visi stāvokļi nevar būt neatgriezeniski. Pieņemsim, ka tomēr visi stāvokļi ir neatgriezeniski, tad eksistē laiks $\mathbf{T}_i, i = 1, ..., m$, pēc kura sistēma vairs neatgriežas stāvoklī $\mathbf{E}_i, i = 1, ..., m$. Tad $\mathbf{T} := \max(\mathbf{T}_1, ..., \mathbf{T}_m)$ ir laiks pēc kura neeksistē stāvoklis, kurā var atgriezties sistēma, kas ir pretrunā Markova ķēdes definīcijai. No tās seko, ka ķēdē ar galīgu stavokļu skaitu eksistē vismaz viens atgriezenisks stāvoklis.

5.§. Solidaritātes teorēma.

5.1. teorēma. Nereducējamas Markova ķēdes visi stāvokļi ir viena veida: ja kaut viens ir atgriezenisks, tad visi ir atgriezeniski, ja kaut viens ir nulles stāvoklis, tad visi ir nulles stāvokļi,

ja kaut viens ir periodisks ar peroidu d, tad visi ir periodiski ar periodu d.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $\mathbf{E}_k$ un $\mathbf{E}_j$ - divi dažādi nereducējamas Markova ķēdes stāvokļi. Tad eksistē tādi veseli skaitļi N un M, ka

$$p_{kj}(N) = \alpha > 0, \qquad p_{jk}(M) = \beta > 0. \tag{5.1}$$

Apskatīsim $p_{kk}(N + M + n)$, $n \geq 0$. Pēc pilnās varbūtības formulas

$$\begin{aligned} p_{kk}(N + M + n) &= \sum_l p_{kl}(N) p_{lk}(M + n) \\ &= \sum_{l,s} p_{kl}(N) p_{ls}(n) p_{sk}(M), \end{aligned}$$

no kurienes

$$p_{kk}(N + M + n) \geq p_{kj}(N) p_{jj}(n) p_{jk}(M) = \alpha\beta p_{jj}(n). \tag{5.2}$$

Līdzīgi iegūstam nevienādību

$$p_{jj}(N + M + n) \geq \alpha\beta p_{kk}(n). \tag{5.3}$$

No abām nevienādībam (5.2) un (5.3), ievērojot, ka $p_{jj}(l) = 0$, ja $l < 0$, seko

$$\frac{1}{\alpha\beta} p_{kk}(N + M + n) \geq p_{jj}(n) \geq \alpha\beta p_{kk}(n - M - N). \tag{5.4}$$

No šejienes redzam, ka $p_{jj}(n)$ un $p_{kk}(n)$ asimptotiskās īpašības ir vienādas. Ja $\mathbf{E}_k$ ir nulles stāvoklis, t.i. $p_{kk}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tad arī

$\mathbf{E}_j$ ir nulles stāvoklis, jo no (5.4) izriet, ka $p_{jj}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ja $\mathbf{E}_k$ ir atgriezenisks, t.i. $\mathbf{P}_k = \sum\limits_{k}^{\infty} p_{kk}(n) = \infty$, tad no (5.4) iegūstam:

$$\sum_{n=N+M+1}^{\infty} p_{jj}(n) \geq \alpha\beta \sum_{n=N+M+1}^{\infty} p_{kk}(n-M-N)$$
$$= \alpha\beta \sum_{l=1}^{\infty} p_{kk}(l) = \infty.$$

Tātad stāvoklis $\mathbf{E}_j$ arī ir atgriezenisks.
Pieņemsim, ka stāvoklis $\mathbf{E}_k$ ir periodisks ar periodu d_k. Tas nozīmē, ka visi n, kam $p_{kk}(n) > 0$, dalās ar d_k bez atlikuma. Ievietojot (5.4) n=0 un ievērojot, ka $p_{jj}(0) = 1$, iegūstam

$$p_{kk}(M+N) \geq \alpha\beta > 0,$$

tātad $M+N$ dalās ar d_k bez atlikuma, t. i. $M+N = 0(\text{mod } d_k)$.
Pierādīsim, ka $\mathbf{E}_j$ arī ir periodisks stāvoklis ar to pašu periodu. Patiešām, ja kādam n $p_{jj}(n) > 0$, tad no (5.4) seko, ka $p_{kk}(N+M+n) > 0$, tātad $M+N+n$ dalās ar d_k, t.i. $N+M+n = 0(\text{mod } d_k)$. Bet iepriekš mēs pierādījām, ka arī $M+N = 0 \ (\text{mod } d_k)$, tātad n=0(mod d_k). Līdz ar to stāvoklis $\mathbf{E}_j$ ir periodisks ar periodu $d_j \geq d_k$.
Pieņemsim tagad, ka stāvoklis $\mathbf{E}_j$ periodisks ar periodu d_j. Tāpat varam pierādīt, ka $d_k \geq d_j$. Tātad, $d_j = d_k$.
Teorēma ir pierādīta.

No tikko pierādītās teorēmas seko, ka nereducējamā Markova

ķēdē ar galīgu stavokļu skaitu ($\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_m$) visi stāvokļi ir atgriezeniski.

5.1. definīcija. Ja nereducējamas Markova ķēdes stāvokļi ir atgriezeniski, tad ķēdi sauc par **argriezenisku** (*recurrent or persistent Markov chain*).

6.§. Periodiskas Markova ķēdes.

6.1. definīcija. Ja nereducējamas Markova ķēdes stāvokļi ir periodiski ar periodu $d > 1$, tad ķēdi sauc par **periodisku** (*periodic Markov chain*).

6.1. teorēma. Ja Markova ķēde ir periodiska ar periodu d, tad tās stāvokļu kopa sadalās tādās d apakšklasēs $\psi_o, \psi_1, ..., \psi_{d-1}$, ka sistēma, izdarot vienu soli, ar varbūtību 1 no klases ψ_k nonāk klasē $\psi_{k+1}, 0 \leq k < d-1$, no klases ψ_{d-1} klasē ψ_o.

Pierādījums. Izvēlēsimies kādu stāvokli, piemēram $\mathbf{E}_1$. Attiecībā pret šo stāvokli izveidosim apakšklases $\psi_o, \psi_1, , \psi_{d-1}$ šādā veidā : $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha, 0 \leq \alpha \leq d-1$, ja eksistē tāds vesels skaitlis $k > 0$, ka $p_{1i}(kd + \alpha) > 0$, t.i., $kd + \alpha = \alpha(\text{mod d})$. Pierādīsim, ka neviens stāvoklis nevar reizē piederēt divām apakšklasēm. Šim nolūkam pietiek pierādīt, ka jebkurš stāvoklis var ietilpt tikai vienā noteiktā klasē , t.i., ja $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha$ un kādam s izpildās $p_{1i}(s) > 0$, tad $s = \alpha(\text{mod d})$, vai $s = kd + \alpha$, kur k ir vesels skaitlis.
Patiešām, mūsu apskatāmā Markova ķēde ir nereducējama, tātad, eksistē vesels skaitlis $n_1 > 0$, ka $p_{i1}(n_1) > 0$. Tad, izmanto-

jot pilnās varbūtības formulu un ievērojot, kā mēs definējām klasi ψ_α, iegūstam $p_{11}(kd+\alpha+n_1) \geq p_{1i}(kd+\alpha)p_{i1}(n_1) > 0$. Līdzīgi, varam rakstīt $p_{11}(s+n_1) > 0$. Tad, ievērojot apraskstāmās ķēdes periodiskumu, varam rakstīt $kd+\alpha+n_1 \equiv 0 \pmod{d}$, $s+n_1 \equiv 0 \pmod{d}$. No šejienes $s \equiv \alpha \pmod{d}$. Tā kā no stāvokļa $\mathbf{E}_1$ ar pozitīvu varbūtību iespējams nokļūt jebkurā sistēmas stāvoklī $\mathbf{E}_i$, tad $\bigcup_{\alpha=0}^{d-1} \psi_\alpha$ ir vienāda ar visu sistēmas stāvokļu kopu.

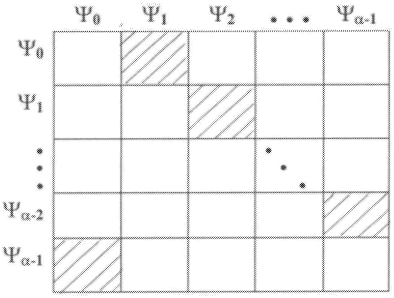
Pierādīsim, ka sistēma, izdarot vienu soli, ar varbūtību 1 pāriet no klases ψ_α klasē $\psi_{\alpha+1}(\alpha$ saprotam pēc moduļa d, tātad, pāreja no klases ψ_{d-1} klasē $\psi_o)$. Tas nozīmē , ka katram $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha$ izpildās $\sum_{\mathbf{E}_j \in \psi_{\alpha+1}} p_{ij} = 1$, jeb $p_{ij} = 0$, ja $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha$, bet $\mathbf{E}_j \notin \psi_{\alpha+1}$, $\alpha(\text{mod } d)$.

Pieņemsim pretējo, ka $p_{ij} \neq 0$, ja $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha, \mathbf{E}_j \notin \psi_{\alpha+1}$. Ievērojot, ka $p_{1i}(kd+\alpha) > 0$, ja $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha$, un, izmantojot pilnās varbūtības formulu, iegūstam

$$p_{1j}(kd+\alpha+1) \geq p_{1i}(kd+\alpha)p_{ij} > 0,$$

t.i., $\mathbf{E}_j \in \psi_{\alpha+1}$, kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu.
Teorēma ir pierādīta.

No teorēmas seko, ka peroidiskas Markova ķēdes matricai ir šāds veids



Šajā matricā no 0 atšķirīgi elementi atrodas tikai nosvītrotajās rūtiņās.
No periodiskas Markova ķēdes ar periodu d var veidot d jaunas Markova ķēdes: par α- ķēdes $(\alpha = 0, 1, ..., d-1)$ stāvokļiem ņemot apakšklases ψ_α stāvokļus un pārejas varbūtības uzdodot

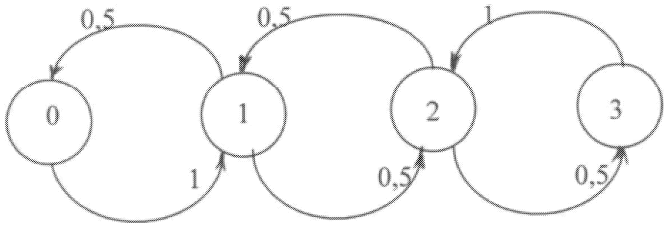
$$p_{ij}^{\alpha} := p_{ij}(d), \quad p_{ij}^{\alpha}(k) = p_{ij}^{\alpha}(kd) \text{ visiem } \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \in \psi_\alpha.$$

No tikko pierādītās teorēmas seko, ka ja $\mathbf{E}_i \in \psi_\alpha$ tad

$$\sum_{\mathbf{E}_j \in \psi_\alpha} p_{ij}^{\alpha} = \sum_{E_j \in \psi_\alpha} p_{ij}(d) = 1.$$

Skaidrs, ka šādi izveidotās Markova ķēdes nav periodiskas un to stāvokļu kopa nav sadalāma apakšklasēs.

6.1 piemērs. Aprakstīt Markova ķēdes stāvokļu klasi, ja Markova ķēdes atbilstošais grafs ir



Atrisinājums. Markova ķēdes stāvokļi ir atgriezeniski un periodiski ar periodu 2. Attiecībā pret $\mathbf{E}_o$ var izveidot 2 apakšklases $\psi_o = \{\mathbf{E}_o, \mathbf{E}_2\}$, $\psi_1 = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3\}$. Sanumurējot sistēmas stāvokļus $\mathbf{E}_o, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3$, iegūstam pārejas varbūtību matricu šādā formā

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Šajā gadījumā

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

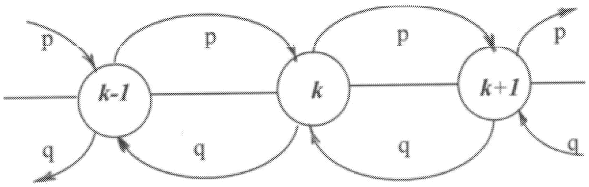
Tad, 0 - ķēdes stāvokļiem $\mathbf{E}_o, \mathbf{E}_2$ un 1 - ķēdes stāvokļiem $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3$ atbilst pārejas varbūtību matricas

$$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

7.§. Teorēmas par gadījuma klejošanu.

1. *Gadījuma klejošana pa taisnes veselu skaitļu punktiem*

Pieņemam, ka daļiņa pārvietojas uz taisnes pa veselu skaitļu punktiem. Izdarot vienu soli, daļiņa no punkta k ar pozitīvu varbūtību p pārvietojas uz punktu $k+1$, ar varbūtību $q = 1-p$ uz punktu $k-1$.



Aprakstītajai sistēmai atbilst gadījuma lielumu virkne

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_{n-1} + \xi_n = \mathbf{X}_o + \mathbf{S}_n.$$

kur

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{ar varbūtību p} \\ -1, & \text{ar varbūtību q,} \end{cases} \qquad \mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

kas veido Markova ķēdi ar pārejas varbūtībām

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1 \\ q, & j = i-1 \\ 0, & j \neq i-1, \quad j \neq i+1. \end{cases}$$

Viegli redzēt, ka šī Markova ķēde ir periodiska ar periodu 2, $f_o(2) = pq + qp > 0$, jo atgriešanās jebkurā punktā iespējama tikai pēc pāra skaita soļiem.

7.1. teorēma. Aprakstītā gadījuma klejošana veido atgriezenisku Markova ķēdi tad un tikai tad, ja $p = q = 0,5$.

Pierādījums. Tā kā $0 < p < 1$, tad apskatāmā Markova ķēde ir nereducējama. Tad, no solidaritātes teorēmas seko, ka visi ķēdes stāvokļi ir viena tipa, un mēs varam izvēleties jebkuru no sistēmas stāvokļiem, piemēram 0 stāvokli, un izpētīt tikai šo stāvokli. Lai noteiktu ši stāvokļa tipu, vispirms izpētīsim rindas $\sum_{n=1}^{\infty} p_{oo}(n)$ konverģenci. Tā kā ķēde ir periodiska ar periodu 2, tad $p_{oo}(2k+1) = 0$ visiem veseliem $k > 0$. Tad, jāapskata rinda $\sum_{k=1}^{\infty} p_{oo}(2k)$. Summa $\mathbf{S}_n$ ir klejojošās daļiņas koordināta pēc n soļiem, jo $\mathbf{X}_o = 0$. Tātad, $p_{oo}(2k) = \mathbf{P}(\mathbf{S_{2k}} = \mathbf{0})$, jo tika izdarīti k soļi pa labi un k soļi pa kreisi. Citiem vārdiem, $\mathbf{S}_{2k} = 0$ nozīmē , ka vieni k summējamie gadījuma lielumi vienādi ar 1 un otri ar -1. Tātad, jāizrēķina $\mathbf{P}(\mathbf{S}_{2k} = 0) = \mathbf{P}($ 2k soļos punktam pārvietojoties k soļus pa labi, um k soļus pa kreisi).
Mūsu rīcībā ir Bernulli shēma, un

$$\mathbf{P}(\mathbf{S}_{2k} = 0) = C_{2k}^k p^k q^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} p^k q^k.$$

Izmantojot Stirlinga aproksimāciju

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}, \text{ kur } |\theta_n| < \frac{1}{12n},$$

iegūstam

$$\mathbf{P}(\mathbf{S}_{2k}=0) \sim \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\pi k}(2k)^{2k}e^{-2k}}{\left(\sqrt{2\pi k}\right)^2(k^k)^2\left(e^{-k}\right)^2}p^k q^k = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}(4pq)^k,$$

kur $a_n \sim b_n$ nozīmē, ka $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.
Segmentā [0,1] funkcijas $\varphi(p)=4p(1-p)$ maksimums ir puntā $p=0.5$ un $\varphi(0.5)=1$. Visos pārējos segmenta punktos $\varphi(p)<1$. Ja $\varphi(p)<1$, tad rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{oo}(2k)$ konverģē , un saskaņā ar 4.1. teorēmu Markova ķēde ir neatgriezeniska visiem $p\neq 0.5$. Ja $p=0.5$, tad $p_{oo}(2k)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ un rinda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{oo}(2k)$ diverģē , kas liecina par Markova ķēdes stāvokļu argriezeniskumu. Teorēma ir pierādīta.
Tātad, ja $p\neq 0.5$, tad vidējais atgriešanās reižu skaits stāvoklī 0 ir galīgs un vienāds $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{oo}(2k)$. Tas nozīmē, ka, sākot no kāda soļa, daļiņa nekad vairs neatgriezīsies stāvoklī 0. Daļiņa novirzīsies pa labi vai pa kreisi atkarībā na tā, vai $p>0.5$ vai $p<0.5$. Ja $p=0.5$, tad vidējais atgriešanāis skaits stāvoklī 0 ir bezgalīgs, t.i., daļiņa nekur nenovirzīsies. Jāatzīmē, ka gadījumā $p=0.5$ vidējais atgriešanas skaits neaug proporcionāli soļu skaitam. Patiešām, vidējais atgriešanos reižu skaits pēc pirmajiem $2n$ soļiem ir $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{oo}(2k)$. Tā kā $p_{oo}(2k)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, ja $p=0.5$,

tad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_{oo}(2k) &\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \frac{1}{n} \sim \\ &\sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

jo $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \frac{1}{n}$ asimptotiski ekvivalenta $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.

7.1. piemērs. (Kāršu spēle.) Divi spēlētāji ar neierobežotu kapitālu paņēma pēc kārtas uz labu laimi kārtis no kāršu komplekta. Vēloties iegūt paņemto kāršu punktu summu vienādu vai mazāku par 21, bet lielāku par otrā spēlētāja kāršu punktu summu, katrs spēlētājs izvelk kārtis vienu pēc otras. Tas, kas zaudē partiju, maksā uzvarētājam.
Ja spēli turpinātu neierobežotu laiku, tad mūsu apskatītajā "taisnīgajā" spēlē neizšķirto partiju daļa, pieaugot partiju skaitam $(2n)$, ātri samazinās $(\sqrt{n})$.

2.*Simetriska gadījuma klejošana k-dimensiju Eiklīda telpā* $\mathbf{R}^k$.

Tas nozīmē, ka daļiņa, kas atrodas punktā $(m_1, m_2, ..., m_k)$, ar varbūtību $\frac{1}{2^k}$ var pārvietoties uz kuba $|x_j - m_j| = 1, j = 1, 2, ..., k$ jebkuru virsotni. Kuba virsotnes ir punkti ar koordinā-tām $m_1 \pm 1, m_2 \pm 1, ..., m_k \pm 1$.

Apzīmēsim daļiņas stāvokļi pēc n-tās pārvietošanās ar $\mathbf{X}_n$. Iegūstam k-dimensiju gadījuma lielumu virkni, kas veido homogēnu nereducējamu Markova ķēdi. Pierādīsim, ka plaknes gadījumā šie ķēdes stāvokļi ir atgriezeniski, turpretim, sākot ar 3-dimensiju telpu, neatgriezeniski.

7.2. teorēma. Simetriska gadījuma klejošana ir atgriezeniska vienas un divu dimensiju telpās, neatgriezeniska trīs un vairāk dimensiju telpās.

Pierādījums. Vispirms apskatīsim 2-dimensiju telpu, t.i., simetrisko klejošanu plaknē. Šinī gadījumā $\mathbf{X}_n$ var izteikt kā divu neatkarīgu komponenšu summu

$$\mathbf{X}_n = (\mathbf{X}_n^1, 0) + (0, \mathbf{X}_n^2) = (\mathbf{X}_n^1, \mathbf{X}_n^2), \qquad (\mathbf{X}_o^1, \mathbf{X}_o^2) = \mathbf{X}_o,$$

kur $\mathbf{X}_n^1$, $\mathbf{X}_n^2$, $n \geq 0$ – 0viendimensiju virknes, kas apraksta savā starpā neatkarīgas gadījuma klejošanas uz taisnes. Patiešām, divdimensiju telpā $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \xi_n$, kur, ξ_n pieņem 4 vertības $(\pm 1, \pm 1) = (\pm 1, 0) + (0, \pm 1)$ katru ar varbūtību 0.25. Līdz ar to

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{n+1}^1 = m_1 \pm 1, \mathbf{X}_{n+1}^2 = m_2 \pm 1 | \mathbf{X}_n^1 = m_1, \mathbf{X}_n^2 = m_2) = \frac{1}{4} =$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{n+1}^1 = m_1 \pm 1 | \mathbf{X}_n^1 = m_1) \mathbf{P}(\mathbf{X}_{n+1}^2 = m_2 \pm 1 | \mathbf{X}_n^2 = m_2).$$

Tā kā apskatāmā Markova ķēde ir nereducējama $(0 < p < 1)$, varam izvēlēties jebkuru no sistēmas stāvokļiem. Pieņemsim, ka stāvoklis $\mathbf{X}_o$ sakrīt ar koordinātu sākuma punktu $(0, 0)$. Tad

$$\begin{aligned} p_{oo}(2n) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{2n} = (0,0) | \mathbf{X}_o = (0,0)) \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{2n}^1 = 0 | \mathbf{X}_o^1 = 0) \mathbf{P}(\mathbf{X}_{2n}^2 = 0 | \mathbf{X}_o^2 = 0). \end{aligned}$$

Izmantojot novērtējumu viendimensiju gadījumam, iegūstam

$$p_{oo}(2n) \sim \frac{1}{(\sqrt{n\pi})^2} = \frac{1}{n\pi}.$$

No šejienes seko, ka rinda $\sum_{n=1}^{\infty} p_{oo}(2n)$ diverģē , kas rāda, ka Markova ķēdes stāvokļi ir atgriezeniski. Simetrisko klejošanu 3-dimensiju telpā pētīsim līdzīgi.
Izteiksim $\mathbf{X}_n = (\mathbf{X}_n^1, 0, 0) + (0, \mathbf{X}_n^2, 0) + (0, 0, \mathbf{X}_n^3)$, kur $\mathbf{X}_n^i, i = 1, 2, 3$ - simetriskas gadījuma klejošanas uz taisnes. Tāpat kā 2-dimensiju gadījumā par stāvokli $\mathbf{X}_o$ ņemsim koordinātu sākuma punktu. Izmantojot gadījuma lielumu $\mathbf{X}_n^1, \mathbf{X}_n^2, \mathbf{X}_n^3$ pie visiem n neatkarību, iegūstam

$$\begin{aligned} & p_{oo}(2n) = \\ & = \mathbf{P}(\mathbf{X}_{2n}^1 = 0 | \mathbf{X}_o^1 = 0)\mathbf{P}(\mathbf{X}_{2n}^2 = 0 | \mathbf{X}_o^2 = 0)\mathbf{P}(\mathbf{X}_{2n}^3 = 0 | \mathbf{X}_o^3 = 0) \\ & \sim (\frac{1}{n\pi})^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Rinda $\sum_{n=1}^{\infty} p_{oo}(2n)$ konverģē , tātad Markova ķēdes stāvokļi ir neatgriezeniski. Daļiņa, izejot no koordinātu sākuma punkta, var ar pozitīvu varbūtību nekad tur neatgriezties. Acīm redzot, jebkurā k-dimensiju telpā , ja $k \geq 3$, stāvokļi ir neatgriezeniski, jo $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^{-\frac{k}{2}} < \infty$.
Teorēma ir pierādīta.
V. Fellers šajā sakarībā ir atzīmējis [4], ka paruna "visi ceļi ved uz Romu" ir pareiza tikai divdimensiju virsmai.

8.§. Ergodiskā teorēma.

1.1 piemērā (laika prognoze) matrica

$$\mathbf{P}(4) = \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}$$

apraksta divstāvokļu Markova ķēdes pārejas varbūtības pa 4 soļiem. Saskaņā ar Čepmena-Kolmogorova vienādojumu, sistēmas izmaiņas pa 8 soļiem apraksta matrica

$$\mathbf{P}(8) = \mathbf{P}^4\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.572 & 0.428 \\ 0.570 & 0.430 \end{pmatrix}.$$

Kā redzams, $p_{00}(8)$ un $p_{10}(8)$, kā arī $p_{01}(8)$ un $p_{11}(8)$ atšķiras mazāk, nekā $p_{00}(4)$ un $p_{10}(4)$, vai $p_{01}(4)$ un $p_{11}(4)$. Izskatās, ka pie $n \to \infty$ $p_{ij}(n)$ konverģē uz skaitli, kurš ir atkarīgs tikai no j, $j = 0, 1$. Citiem vārdiem, mēs gaidām, ka varbūtība sistēmai atrasties j-stāvoklī pēc liela soļa skaita nav atkarīga no sistēmas sākuma stāvokļa.

8.1. lemma. Pieņemsim, ka $a_1, a_2, ..., a_r$ ir pozitīvi veseli skaitļi ar lielāko kopīgo dalītāju 1 (l.k.d.$\{a_1, ..., a_r\} = 1$). Tad eksistē tāds naturāls skaitlis k_o, ka jebkuru pozitīvu veselu skaitli $k \geq k_o$ var uzrakstīt formā

$$k = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ra_r, \tag{8.1}$$

kur $x_i, i \in \{1, 2, ..., r\}$ ir veseli pozitīvi skaitļi.
Pierādījums. Apskatīsim funkciju

$$L(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ra_r, \tag{8.2}$$

kur vektora $x = (x_1, x_2, ..., x_r)$ koordinātas ir veseli (gan pozitīvi, gan negatīvi) skaitļi. Ar d_o apzīmēsim minimālo naturālo skaitli, kuram eksistē vienādojuma $L(x^o) = d_o$ atrisinājums x^o. Protams, šis atrisinājums nav vienīgais. Pierādīsim, ka jebkurš naturāls skaitlis $d > d_o$, kuru var uzrakstīt formā $d = L(x)$, dalās ar d_o bez atlikuma ($d = 0(\text{mod } d_o)$). Pieņemsim pretējo:

$$d = L(x) = kd_o + \alpha, \quad 0 < \alpha < d_o.$$

Tad, ņemot vērā funkcijas linearitāti, iegūstam

$$L(x - kx^o) = L(x) - kL(x^o) = kd_o + \alpha - kd_o = \alpha,$$

kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu, ka d_o ir minimālais naturāls skaitlis ar minēto īpašību. Līdz ar to, ja d var uzrakstīt formā $d = L(x)$, tad $d = 0(\text{mod } d_o)$. Ievērojot, ka a_i visiem $i = 1, 2, ..., r$ var uzrakstīt $a_i = L(x^i)$, kur $x^i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ...x_r^{(i)})$ ar koordinātām $x_j^{(i)} = 0$, ja $j \neq i$ un $x_i^{(i)} = 1$, un, ka l.k.d.$\{a_1, a_2, ..., a_r\} = 1$, iegūstam $d_o = 1$.
Tālāk, apzīmējot ar $A = \sum_{i=1}^{r} a_i$, jebkuru naturālu skaitli k_o var uzrakstīt formā

$$\begin{aligned} k_o &= tA + \theta = t(a_1 + \ldots + a_r) + \theta(a_1 x_1^{(o)} + \ldots + a_r x_r^{(o)}) \\ &= (t + \theta x_1^{(o)})a_1 + (t + \theta x_2^{(o)})a_2 + \ldots + (t + \theta x_r^{(o)})a_r, \end{aligned}$$

kur $0 \leq \theta < A, \quad t \geq 0$. Līdz ar to, ja $t > A \max\limits_{1 \leq i \leq r} |x_i^{(o)}|$, tad jebkuru pozitīvu veselu skaitli $k \geq k_o$ var uzrakstīt formā (8.1).

8.1. piemērs. Atrast tādu naturālu skaitli k_o , ka visiem $k > k_o$ eksistē vienādojuma $k = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3$ tāds atrisinājums (x_1, x_2, x_3), kur $x_i, i = 1, 2, 3$ - veseli pozitīvi skaitli.

Atrisinājums. Mūsu piemērā , $d_o = 1$ atbilst $X^o = (1, 1, -1)$. Ņemot vērā, ka $A = 15$ un t jābūt lielākam pa 15, atrodam

$$k_o = 16 \times 15 = 240.$$

Tad ir spēkā vienādības, piemēram,

$$\begin{aligned} k = 241 &= 16(3 + 5 + 7) + 1(3 + 5 - 7) \\ &= (16 + 1)3 + (16 + 1)5 + (16 - 1)7, \\ &... \\ k = 254 &= 16(3 + 5 + 7) + 14(3 + 5 - 7) \\ &= (16 + 14)3 + (16 + 14)5 + (16 - 14)7, \\ &... \end{aligned}$$

8.1. teorēma. (Ergodiskā teorēma.) Pieņemsim, ka N ir Markova ķēdes $\{\mathbf{X}_n, n \geq o\}$ stāvokļu skaits.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \quad i, j = 1, 2, ..., N \tag{8.3}$$

tad un tikai tad, ja gadījuma lielumu virkne $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ veido homogēnu nereducējamu Markova ķēdi bez apakšklasēm. Bez tam, skaitļi p_j, $j = 1, 2, ..., N$ ir sistēmas

$$\begin{cases} p_j = \sum\limits_{k=1}^{N} p_k p_{kj}, \qquad j = 1, 2, ..., N \\ \sum\limits_{j=1}^{N} p_j = 1 \end{cases} \tag{8.4}$$

vienīgais atrisinājums, un eksistē tāds $0 < h_o < 1$, ka izpildās

$$|p_{ij}(h) - p_j| < h_o^n. \tag{8.5}$$

Pierādījums. Nepieciešamība ir acīm redzama, jo no teorēmas nosacījumiem seko, ka pie pietiekoši lieliem t izpildās $p_{ij}(t) > 0$ visiem i un j. No tā iegūstam, ka gadījuma lielumu virkne $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ veido homogēnu Markova ķēdi bez apakšklasēm.
Pietiekamība. Tā kā apskatāmās Markova ķēdes stāvokļu kopa nav sadalāma apakšklasēs, tad ķēde nav periodiska. Tātad, jebkuram stāvoklim $\mathbf{E}_i$ var uzrādīt tādu galīgu skaitļu virkni $a_1, a_2, ..., a_r$ ar lielāko kopējo dalītāju 1, ka visiem $k \in \{1, 2, ..., r\}$ izpildās $p_{ii}(a_k) > 0$. Tad,

$$p_{ii}(x_k a_k) = p_{ii}(a_k + \ldots + a_k) \geq p_{ii}^{x_k}(a_k) > 0,$$

visiem naturāliem skaitļiem $x_k,\ k \in \{1, 2, ..., r\}$. Līdzīgi, jebkuram vektoram $x = (x_1, ..., x_r)$ ir spēkā

$$p_{ii}(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_r a_r) > 0.$$

Saskaņā ar 8.1. lemmu, eksistē $n_o \in \mathbf{N}$ tāds, ka visiem $n > n_o$ var uzrakstīt formā $n = x_1 a_1 + \ldots + x_r a_r$. Varam secināt, ka visiem $n > n_o \quad p_{ii}(n) > 0$. Tālāk no tā, ka apskatāmā Markova ķēde ir nereducējama, eksistē $n_1 > 0$ tāds, ka $p_{ij}(n_1) > 0$ jebkuram stāvoklim $\mathbf{E}_j$. Tad, ja $n > n_o, \quad p_{ij}(n + n_1) \geq p_{ii}(n) p_{ij}(n_1) > 0$. No šejienes secinām, ka pie pietiekoši lieliem s jebkuriem diviem galīgas Markova ķēdes stāvokļiem $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j$, $p_{ij}(s) > 0$. Ievērojot, ka ķēde ir galīga, nonākam pie slēdziena, ka pie pietiekoši lieliem $s \quad p_{ik}(s) > 0$ visiem stāvokļiem $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_k$, $i, k = 1, 2, ..., N$.

Apzīmēsim $M_j(n) := \max\limits_i p_{ij}(n)$, $m_j(n) := \min\limits_i p_{ij}(n)$. Tad

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}p_{kj}(n) \le M_j(n) \sum_{k=1}^{N} p_{ik} = M_j(n),$$

un, ņemot nevienādības kreisā pusē max pa i, iegūstam

$$M_j(n+1) \le M_j(n).$$

Analoģiski iegūstam

$$m_j(n+1) \ge m_j(n).$$

Funkcijas $M_j(n)$ un $m_j(n)$ pieņem vērtības no segmenta $[0,1]$. Līdz ar to eksistē $\lim\limits_{n\to\infty} M_j(n)$ un $\lim\limits_{n\to\infty} m_j(n)$. Izvēlēsimies tris stāvokļus, piemēram, $\mathbf{E}_{i_1}, \mathbf{E}_{i_2}, \mathbf{E}_j$. Tad jābūt spēkā vienādojumiem

$$p_{i_1 j}(n) = \sum_{k=1}^{N} p_{i_1 k}(s)p_{kj}(n-s)$$

$$p_{i_2 j}(n) = \sum_{k=1}^{N} p_{i_2 k}(s)p_{kj}(n-s),$$

kur $n > s$, bet, savukārt, s ņemsim tik lielu, ka izpildās $p_{ik}(s) > 0$ visiem stāvokļiem $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_k$, $i,k = 1,2,...,N$. Ievērojot, ka

$$\sum_{k=1}^{N} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} = \sum_{k=1}^{N} p_{i_1 k}(s) - \sum_{k=1}^{N} p_{i_2 k}(s) = 0, \quad (8.6)$$

visu stāvokļu kopu sadalām divās apakškopās

$$K_+ = \{k : p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s) > 0\} \text{ un}$$
$$K_- = \{k : p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s) < 0\}.$$

No (8.6) iegūstam

$$\begin{aligned} h(i_1, i_2) : &= \sum_{k \in K_+} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} = \\ &= -\sum_{k \in K_-} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} \leq \sum_{k \in K_+} p_{i_1 k}(s) < 1, \end{aligned}$$

un līdz ar to

$$h := \max_{i_1, i_2} h(i_1, i_2) < 1. \tag{8.7}$$

Ievērojot (8.6) un (8.7), varam rakstīt

$$
\begin{aligned}
p_{i_1 j}(n) - p_{i_2 j}(n) &= \sum_{n=1}^{N} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} p_{kj}(n-s) \\
&= \sum_{k \in K_+} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} p_{kj}(n-s) \\
&+ \sum_{k \in K_-} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} p_{kj}(n-s) \\
&\leq M_j(n-s) \sum_{k \in K_+} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} \\
&+ m_j(n-s) \sum_{k \in K_-} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} \\
&= \{M_j(n-s) - m_j(n-s)\} \sum_{k \in K_+} \{p_{i_1 k}(s) - p_{i_2 k}(s)\} \\
&= h(i_1, i_2)\{M_j(n-s) - m_j(n-s)\} \\
&\leq h\{M_j(n-s) - m_j(n-s)\}. \qquad (8.8)
\end{aligned}
$$

Atzīmēsim, ka i_1 un i_2 izvēlējāmies patvaļīgi, un (8.8) nevienādības labā puse no i_1 un i_2 nav atkarīga. Tas nozīmē , ka (8.8) būs spēkā arī tādiem i_1 un i_2, ja $p_{i_1 j}(n) = M_j(n), \;\; p_{i_2 j}(n) = m_j(n)$. Tātad

$$M_j(n) - m_j(n) \leq h\{M_j(n-s) - m_j(n-s)\}.$$

No šejienes redzam, ka

$$M_j(n-s) - m_j(n-s) \leq h\{M_j(n-2s) - m_j(n-2s)\},$$

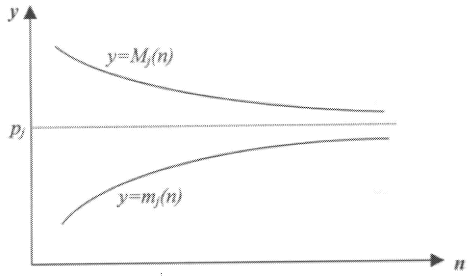
u.t.t.
Tad visiem j ir spēkā nevienādība

$$M_j(n) - m_j(n) \leq h^{[\frac{n}{s}]}\{M_j(z) - m_j(z)\} \leq h^{[\frac{n}{s}]}, \qquad (8.9)$$

kur $z = n(\text{mod } s), [.]$ - skaitļa $(.)$ veselā daļa, un izpildās

$$M_j(n) - m_j(n) \underset{n\to\infty}{\to} \longrightarrow 0.$$

Tātad, funkciju $M_j(n), m_j(n)$ grafiki ir



Ņemot vērā , ka $0 < m_j(n) \leq p_{ij}(n) \leq M_j(n)$, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) =: p_j > 0,$$

kas pierāda (8.3).
Atgriezīsimies pie nevienādībām

$$m_j(n) - M_j(n) \leq m_j(n) - p_j \leq p_{ij}(n) - p_j \leq M_j(n) - m_j(n).$$

Ievērojot (8.9), tās var pārrakstīt formā

$$|p_{ij}(n) - p_j| \le M_j(n) - m_j(n) \le h^{[\frac{n}{s}]} < h_o^n, \quad h_o^n = h^{\frac{n}{s}-1},$$

kas pierāda (8.5). Ja tagad vienādojumu

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(n) p_{kj}, \quad \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(n) = 1$$

abās pusēs pāriet uz robežu, ja $n \to \infty$, tad iegūstam

$$p_j = \sum_{k=1}^{N} p_k p_{kj}, \quad \sum_{j=1}^{N} p_j = 1,$$

kas pierāda teorēmas apgalvojumu (8.4). Atliek pierādīt, ka sistēmai (8.4) ir tikai viens vienīgs atrisinājums.
Pieņemsim pretējo, ka atrisinājums $q_1, q_2, ..., q_N$ arī apmieriena sistēmu (8.4). Tad

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_{k=1}^{N} p_{kj} q_k = \sum_{k=1}^{N} p_{kj} \left(\sum_{l=1}^{N} p_{lk} q_l \right) = \sum_{l=1}^{N} q_l \sum_{k=1}^{N} p_{lk} p_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{N} q_l p_{lj}(2) = \sum_{l=1}^{N} p_{lj}(2) \sum_{r=1}^{N} p_{rl} q_r = \sum_{r=1}^{N} q_r \sum_{l=1}^{N} p_{rl} p_{lj}(2) \\ &= \sum_{r=1}^{N} q_r p_{rj}(3) = \ldots = \sum_{k=1}^{N} q_k p_{kj}(n) \ \text{ jebkuram } n. \end{aligned}$$

Ņemot vērā , ka $\sum_{k=1}^{N} q_k = 1$, pārejam uz robežu, ja $n \to \infty$. Tad ir spēkā vienādība

$$q_j = \sum_{k=1}^{N} q_k p_j = p_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Teorēma ir pierādīta.
Vienādības (8.4) var uzrakstīt matricu formā $\mathbf{p} = \mathbf{pP}$, kur

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_N), \ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1,$$

P - Markova ķēdes pārejas varbūtību matrica pa vienu soli. Vektoru **P** sauc par galīgas Markova ķēdes **stacionāro sadalījumu**.

8.1. piezīme. Ja $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j$ ir periodiskas galīgas Markova ķēdes ar periodu d patvaļīgi stāvokļi no vienas apakšklases $\psi_\alpha, \alpha(\text{mod } d)$, tad ir zināms, ka

$$p_{ij}(t) = 0, \text{ ja } t \neq kd, \ k \in \mathbf{N}, \ p_{ij}(kd) \geq 0 \text{ visiem } k \in \mathbf{N}.$$

Tādā gadījumā no ergodiskās teorēmas seko

$$\lim_{k \to \infty} p_{ij}(kd) = p_j > 0,$$

ja $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j$ ietilpst vienā noteiktā klasē $\psi_\alpha, \alpha(\text{mod } d)$.

8.1. piemērs. 1.1. piemērā mēs ar varbūtību α gaidām, ka rīt lietus līs, ja šodien līst, un ar varbūtību β nelīs, ja šodien nelīst.

Šajā piemērā stāvokļu stacionāro sadalījumu var aprēķināt pēc formulas

$$\begin{cases} p_o = \alpha p_o + \beta p_1 \\ p_1 = (1-\alpha)p_o + (1-\beta)p_1 \\ p_o + p_1 = 1, \end{cases}$$

tādējādi iegūstam

$$p_o = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha}, \quad p_1 = \frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}.$$

Piemēram, ja $\alpha = 0.7, \beta = 0.4$, tad varbūtība, ka līs jebkurā laikā nakotnē , ir $p_o = \frac{4}{7} = 0.571$.

8.2. piemērs. Aprakstīt stacionāro sadalījumu trīsstāvokļu Markova ķēdei, kas ir uzdota ar pārejas varbūtību matricu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Atrisinājums. Vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} p_o = 0.5p_o + 0.3p_1 + 0.2p_2 \\ p_1 = 0.4p_o + 0.4p_1 + 0.3p_2 \\ p_2 = 0.1p_o + 0.3p_1 + 0.5p_2 \\ p_o + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

atrisinājums ir $p_o = \frac{21}{62}, \quad p_1 = \frac{23}{62}, \quad p_2 = \frac{18}{62}$.

8.3. piemērs. Sabiedrību pēc turības nosacīti var sadalīt trīs klasēs: labi pārtikušas ģimenes (kam ir labi atalgots darbs),

vidēji pārtikušas ģimenes (vidēji atalgots darbs) un slikti pārtikušas ģimenes (mazatalgots darbs). Sociologijā tas ir *upper-, middle- un lower class.* Pieņemsim, ka sociālo slāņu izmaiņas vienā paaudzē apraksta ar Markova ķēdi. Pieņemsim arī , ka bērna turība nakotnē atkarīga tikai no viņa vecāku turības, bet nav atkarīga no vecvecāku turības un tiek aprakstīta ar pārejas varbūtību matricu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.01 & 0.5 & 0.49 \end{pmatrix}$$

Šeit, mēs pieņemām, ka bērns savā paaudzē no vidējās slāņa pārvietojas uz augstāku -, vidēju -, zemāku slāni atbilstoši ar varbūtībām 0.05; 0.7; 0.25. Stāvokļu stacionārais sadalījums apmierina sistēmu

$$\begin{cases} p_o = 0.45p_o + 0.05p_1 + 0.01p_2 \\ p_1 = 0.48p_o + 0.7p_1 + 0.5p_2 \\ p_2 = 0.07p_o + 0.25p_1 + 0.49p_2 \\ p_o + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

No kurienes nonākam pie slēdziena, ka $p_o = 0.7$, $p_1 = 0.62$, $p_2 = 0.31$. Citiem vārdiem, secinām, ka neatkarīgi no sākuma stāvokļa, pēc kāda ilgstoša laika, 7% no cilvēku skaita jābūt ar augstāko turības līmeni, 62% ar vidējo turību un 31% ar zemāko turības līmeni.

8.4. piemērs. (Hardija-Veinberga likums ģenētikā .) Aplūkosim indivīdu kopumu, kur katram pieder viena tipa gēnu pāri: AA,

aa vai Aa ar atbilstošām varbūtībām: p_o, q_o un r_o ($p_o + q_o + r_o = 1$). Pieņemsim, ka katrs indivīds iegūst pa vienam gēnam (A vai a) no vecākiem un kļūst nakošajā paaudzē par konkrētu gēnu pāra nesēju atbilstoši ar varbūtībām p, q, r. Gēnu iegūšana ir pakļauta gadījumam. Skaitļus p, q, r pirmajā paaudzē var aprēķināt pēc formulām:

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(AA) = \mathbf{P}(AA|\text{abi vecāki ir } AA)p_o^2 \\ &+ \mathbf{P}(AA|\text{viens no vecākiem ir } AA, \text{otrais ir } Aa)2p_o r_o \\ &+ \mathbf{P}(AA|\text{abi vecāki ir } Aa)r_o^2 \\ &+ \mathbf{P}(AA|\text{vismaz viens no vecākiem ir } aa)(1-(1-q_o)^2) \\ &= p_o^2 + 2p_o r_o \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r_o^2 + 0(1-(1-q_o)^2) \\ &= (p_o + \frac{r_o}{2})^2. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Līdzīgi iegūstam

$$\begin{aligned} q &= \mathbf{P}(aa) = \mathbf{P}(aa|\text{abi vecāki ir } aa)q_o^2 \\ &+ \mathbf{P}(aa|\text{viens no vecākiem ir } Aa, \text{otrais } aa)2r_o q_o \\ &+ \mathbf{P}(aa|\text{abi vecāki ir } Aa)r_o^2 \\ &+ \mathbf{P}(aa|\text{vismaz viens no vecākiem ir } AA)(1-(1-p_o)^2) \\ &= q_o^2 + \frac{1}{2}2r_o q_o + \frac{1}{4}r_o^2 = (q_o + \frac{r_o}{2})^2. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Analoģiski

$$
\begin{aligned}
r = \mathbf{P}(Aa) &= \mathbf{P}(Aa|\text{abi vecāki ir } Aa)r_o^2 \\
&+ \mathbf{P}(Aa|\text{viens no vecākiem ir } AA, \text{otrais ir } aa)2p_oq_o \\
&+ \mathbf{P}(Aa|\text{viens no vecākiem ir } Aa, \text{otrais ir } aa)2r_oq_o \\
&+ \mathbf{P}(Aa|\text{ viens no vecākiem ir } Aa, \text{otrais ir } AA)2r_op_o \\
&= 2\frac{1}{4}r_o^2 + 2p_oq_o + 2r_oq_o\frac{1}{2} + 2r_op_o\frac{1}{2} \\
&= \frac{r_o^2}{2} + 2p_oq_o + r_op_o + r_oq_o \\
&= 2\left[p_o(q_o + \frac{r_o}{2}) + \frac{r_o}{2}(q_o + \frac{r_o}{2})\right] \\
&= 2(p_o + \frac{r_o}{2})(q_o + \frac{r_o}{2}). \qquad (8.12)
\end{aligned}
$$

Acīmredzot, ka

$$p + q + r = (p_o + \frac{r_o}{2})\left[p_o + \frac{r_o}{2} + q_o + \frac{r_o}{2}\right] +$$

$$+(q_o + \frac{r_o}{2})(q_o + \frac{r_o}{2} + p_o + \frac{r_o}{2}) = p_o + \frac{r_o}{2} + q_o + \frac{r_o}{2} = 1.$$

Turpinot ģenētisku pētījumu nākošajā otrajā paaudzē, varam izmantot iegūtās formulas (8.10), (8.11) un (8.12). Tātad, otrajā paaudzē

$$\mathbf{P}(AA) = (p + \frac{r}{2})^2 = \left[(p_o + \frac{r_o}{2})^2 + 2(p_o + \frac{r_o}{2})(q_o + \frac{r_o}{2})\frac{1}{2}\right]^2 =$$

$$= (p_o + \frac{r_o}{2})^2(p_o + \frac{r_o}{2} + q_o + \frac{r_o}{2}) = (p_o + \frac{r_o}{2})^2 = p.$$

Analoģiski iegūstam

$$\mathbf{P}(aa) = (q + \frac{r}{2})^2 = \left[(q_o + \frac{r_o}{2})^2 + 2(p_o + \frac{r_o}{2})(q_o + \frac{r_o}{2})\frac{1}{2}\right]^2 =$$
$$= (q_o + \frac{r_o}{2})^2 = q.$$
$$\mathbf{P}(aA) = r.$$

Tādējādi, nākam pie slēdziena, ka jau no pirmās paaudzes iegūvām varbūtību stacionāro sadalījumu gēnu pāriem $\{AA, aa, Aa\}$.

Piezīme. Pētot pēcnācēja ģenētiskā stāvokļa izmaiņu dinamiku, varam uzskatīt, ka pēcnācējs nejaušā ceļā iegūst vienu gēnu no tēva, bet otru no populācijas gēnu pāru sadalījuma. Piemēram, ja sākuma momentā gēnu pāru sadalījums tiek uzdots ar tabulu

$$\begin{vmatrix} AA & aa & Aa \\ p_o & q_o & r_o \end{vmatrix}, \qquad p_o + q_o + r_o + 1.$$

tad pēcnācējs var iegūt (A) vai (a) ar varbūtībām

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|AA)\mathbf{P}(AA) + \mathbf{P}(A|Aa)\mathbf{P}(Aa) = p_o + \frac{r_o}{2},$$

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(a|aa)\mathbf{P}(aa) + \mathbf{P}(a|aA)\mathbf{P}(Aa) = q_o + \frac{r_o}{2}.$$

Mēģināsim tagad aprakstīt mūsu modeli kā trīsstāvokļu $\{\mathbf{E}_o = (AA), \mathbf{E}_1 = (aa), \mathbf{E}_2 = (Aa)\}$ Markova ķēdi. Apzīmēsim $\mathbf{X}_n$ - pēcnācēja ģenētiskais stāvoklis n-tajā paaudzē. Pieņemot, ka sākuma momentā katram indivīdam pieder konkrēts gēnu pāris:

AA, aa vai Aa atbilstoši ar varbūtībām p_o, q_o, r_o, un zinot, ka pēcnācēja stāvoklis ir atkarīgs no tēva stāvokļa un populācijas stāvokļu sadalījuma (skat. piezīmi), iegūstam:

$$
\begin{aligned}
p_{oo} &= \mathbf{P}(AA|\text{tēvs ir } AA)\mathbf{P}(A) = p_o + \frac{r_o}{2},\\
p_{o1} &= \mathbf{P}(aa|\text{tēvs ir } AA)\mathbf{P}(a) = 0,\\
p_{o2} &= \mathbf{P}(Aa|\text{tēvs ir } AA)\mathbf{P}(a) = q_o + \frac{r_o}{2},\\
p_{1o} &= \mathbf{P}(AA|\text{tēvs ir } aa)\mathbf{P}(A) = 0,\\
p_{11} &= \mathbf{P}(aa|\text{tēvs ir } aa)\mathbf{P}(a) = q_o + \frac{r_o}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{12} &= \mathbf{P}(Aa|\text{tēvs ir } aa)\mathbf{P}(A) = p_o + \frac{r_o}{2},\\
p_{2o} &= \mathbf{P}(AA|\text{tēvs ir } Aa)\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}(p_o + \frac{r_o}{2}) = \frac{p_o}{2} + \frac{r_o}{4},\\
p_{21} &= \mathbf{P}(aa|\text{tēvs ir } Aa)\mathbf{P}(a) = \frac{1}{2}(q_o + \frac{r_o}{2}) = \frac{q_o}{2} + \frac{r_o}{4},\\
p_{22} &= \mathbf{P}(Aa|\text{tēvs ir } Aa)(\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(a))\\
&= \frac{1}{2}(p_o + \frac{r_o}{2}) + \frac{1}{2}(q_o + \frac{r_o}{2}) = \frac{p_o + q_o + r_o}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Tāpēc pārejas varbūtību matrica ir

$$
\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
p_o + \frac{r_o}{2} & 0 & q_o + \frac{r_o}{2}\\
0 & q_o + \frac{r_o}{2} & p_o + \frac{r_o}{2}\\
\frac{p_o}{2} + \frac{r_o}{4} & \frac{q_o}{2} + \frac{r_o}{4} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix},
$$

un stāvokļu stacionārais sadalījums (p, q, r) apmierina sistēmu

$$\begin{cases} p = p(p_o + \frac{r_o}{2}) + r(\frac{p_o}{2} + \frac{r_o}{4}) \\ q = q(q_o + \frac{r_o}{2}) + r(\frac{q_o}{2} + \frac{r_o}{4}) \\ r = p(q_o + \frac{r_o}{2}) + q(p_o + \frac{r_o}{2}) + \frac{r}{2} \\ p + q + r = 1. \end{cases}$$

Tātad

$$\begin{cases} p(1 - p_o - \frac{r_o}{2}) = \frac{r}{2}(p_o + \frac{r_o}{2}) \\ q(1 - q_o - \frac{r_o}{2}) = \frac{r}{2}(q_o + \frac{r_o}{2}) \\ p + q + r = 1 \end{cases}$$

varam pārrakstīt

$$p(q_o + \frac{r_o}{2}) = \frac{r}{2}(p_o + \frac{r_o}{2}), \quad q(p_o + \frac{r_o}{2}) = \frac{r}{2}(q_o + \frac{r_o}{2}),$$

$$\frac{r}{2}\left[\frac{p_o + \frac{r_o}{2}}{q_o + \frac{r_o}{2}}\right] + \frac{r}{2}\left[\frac{q_o + \frac{r_o}{2}}{p_o + \frac{r_o}{2}}\right] + r = 1.$$

Tāpēc

$$r = 2(q_o + \frac{r_o}{2})(p_o + \frac{r_o}{2}), \quad p = (p_o + \frac{r_o}{2})^2, \quad q = (q_o + \frac{r_o}{2})^2.$$

Rezultāts apstiprina iepriekš izdarīto slēdzienu.

8.5. piemērs. Uz galda uz labu laimi viena virs otra saliktas m grāmatas. Ar varbūtību $p_i, \ \ i = 1, 2, ..., m$ no grāmatu kaudzes izvelk grāmatu ar numuru i. Pēc izmantošanas to uzliek kaudzes virspusē. Ko var secināt par grāmatu sadalī jumu kaudzē pēc

liela skaita grāmatu izmantošanas?
Atrisinājums. Grāmatu sadalījumu kaudzē var aprakstīt ar vektoru $(i_1, i_2, ..., i_m)$, kur i_1 - grāmatas numurs, kas atrodas virspusē, i_m -grāmatas numurs, kas atrodas apakšā. Ja nākošā solī izvilks grāmatu ar numuru $i_k \neq i_1$, tad ar varbūtību $p_{i_k} > 0$ sistēma pāriet stāvoklī $(i_k, i_1, ...)$, $k = 2, ..., m$. Sistēmas stāvoklis nemainās, ja izvelk grāmatu ar numuru i_1.
Tātad, mūsu rīcībā ir Markova ķēde ar $m!$ stāvokļiem. Piemēram, gadījumā m=3:

$$\mathbf{E}_1 = (1,2,3),\ \mathbf{E}_2 = (1,3,2),\ \mathbf{E}_3 = (2,1,3),$$
$$\mathbf{E}_4 = (2,3,1),\ \mathbf{E}_5 = (3,1,2),\ \mathbf{E}_6 = (3,2,1).$$

Apzīmēsim ar α_i varbūtību, ar kuru no kaudzes katru reizi tiek izvilkta grāmata ar numuru i, $i = 1,2,3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Tādējādi, pārejas varbūtību matrica ir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

un stāvokļu stacionāro sadalījumu var aprēķināt no sistēmas

$$\begin{cases} p_1 = (p_1 + p_3 + p_4)\alpha_1 \\ p_2 = (p_2 + p_5 + p_6)\alpha_1 \\ p_3 = (p_1 + p_2 + p_3)\alpha_2 \\ p_4 = (p_4 + p_5 + p_6)\alpha_2 \\ p_5 = (p_1 + p_2 + p_5)\alpha_3 \\ p_6 = (p_3 + p_4 + p_6)\alpha_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}$$

Tātad iegūstam

$$p_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}, \quad p_2 = \frac{\alpha_3\alpha_1}{1-\alpha_1}, \quad p_3 = \frac{\alpha_2\alpha_1}{1-\alpha_2},$$

$$p_4 = \frac{\alpha_2\alpha_3}{1-\alpha_2}, \quad p_5 = \frac{\alpha_1\alpha_3}{1-\alpha_3}, \quad p_6 = \frac{\alpha_2\alpha_3}{1-\alpha_3}.$$

Gadījumā $m = 2$ divstāvokļu ($\mathbf{E}_1 = (1, 2), \mathbf{E}_2 = (2, 1)$) Markova ķēdes pārejas varbūtību matrica ir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Acīmredzot, ka $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}$ visiem n. No tā seko, ka stāvokļu sadalī jums nostabilizējas, sākot no pirmā soļa.

8.6. piemērs. Šahisti **A** un **B** spēlē šaha turnīrā . Šahists **A**, neatkarīgi no iepriekšējās partijas rezultāta, uzvar ar varbūtību p, zaudē ar q un spēlē neizšķirti ar varbūtību $r = 1-p-q$. Šahists

B ir emocionāli jūtīgāks nekā **A**. Tāpēc katras partijas rezultāts ir atkarīgs no iepriekšējā rezultāta. Ja iepriekšējā partijā viņš uzvar / spēlē neizšķirti /zaudē , tad nākošā partijā viņš : uzvar ar varbūtībām $p+\varepsilon/p/p-\varepsilon$ attiecīgi; spēlē neizšķirti ar varbūtī-bām $r/r/r$; zaudē ar varbūtībām $q-\varepsilon/q/q+\varepsilon$. Kurš no spēlētājiem ilgstošā turnīrā iegūs vairāk punktu?

Atrisinājums. Stāvokļus $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ identificēsim attiecīgi ar uzvaru, neizšķirtu rezultātu, zaudējumu. Acīmredzot, ka šahistam **A** stacionārais sadalījums p, r, q ir no pirmās spēles. Trīsstāvokļu Markova ķēdei, kas apraksta šahista **A** turnīra gaitu, pārejas varbūtību matrica ir

$$\mathbf{P}_A = \begin{pmatrix} p & r & q \\ p & r & q \\ p & r & q \end{pmatrix}.$$

Šahistam **B** atbilst pārejas varbūtību matrica

$$\mathbf{P}_B = \begin{pmatrix} p+\varepsilon & r & q-\varepsilon \\ p & r & q \\ p-\varepsilon & r & p+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Šajā gadī jumā stacionārās varbūtības (p_1, p_2, p_3) var aprēķināt no sistēmas

$$\begin{cases} p_1(p+\varepsilon) + p_2 p + p_3(p-\varepsilon) = p_1 \\ (p_1+p_2+p_3)r = p_2 \\ p_1+p_2+p_3 = 1, \end{cases}$$

tāpēc varam iegūt

$$p_2 = r, \qquad p_1 = \frac{p - p\varepsilon - q\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}.$$

Tātad

$$p_1 - p = \varepsilon \frac{p - q}{1 - 2\varepsilon}.$$

Tad mēs varam secināt: pie pietiekoši liela partiju skaita neizšķirto partiju skaitu daļa sakrīt, uzvarēto partiju skaits būs lielāks spēlētājam $\mathbf{B}$, ja $\epsilon > 0, p > q$ vai $\epsilon < 0, p < q$. Ja $p = q$, tad stacionārie sadalījumi partiju rezultātiem būs vienādi.

8.2. piezīme. Vienādībā

$$p_j(n) = \sum_{k=1}^{N} p_k(0) p_{kj}(n)$$

pārejot uz robežu, ja $n \to \infty$, iegūstam, ka (8.3) var pārrakstīt formā

$$\lim_{n \to \infty} p_j(n) = p_j > 0.$$

8.3. piezīme. Viegli pārliecināties, ka no ergodiskās teorēmas 8.1 nosacījumiem seko, ka eksistē vismaz viens stāvoklis $\mathbf{E}_j$ tāds, ka, izejot no jebkura stāvokļa $\mathbf{E}_i$, sistēma pēc kaut kāda soļu skaita $h > 0$ atradīsies stāvoklī $\mathbf{E}_j$ ar pozitīvu varbūtību $p_{ij}(h) \geq \delta_j > 0$. Apgrieztais apgalvojums arī ir spēkā .

8.4. piezīme. Ja homogēnas Markova ķēdes stāvokļu kopa ir sanumurējama un ķēde ir ar nepārtrauktu laiku, tad šo procesu pētīšanai var lietot galīgu Markova ķēžu teorijas metodes,

atstā-jot to pašu terminoloģiju, izņemot jēdzienu "soļu skaits". Pārejas matricas par n soļiem $\mathbf{P}(n)$ vietā jāapskata pārejas matrica $\mathbf{P}(t)$ laikā t. Apzīmēsim ar $p_k(t)$ varbūtību sistēmai laika momentā $t \geq 0$ atrasties stāvoklī $\mathbf{E}_k$, $k \geq 0$. Tad homogēnai Markova ķēdei varam rakstīt

$$p_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(0) p_{kj}(t), \qquad j = 0, 1, 2, ...,$$

vai, vektoru-matricu formā

$$p(t) = p(0)\mathbf{P}(t),$$

kur

$$p(t) = (p_o(t), p_1(t), ...), \; p(0) = (p_o(0), p_1(0), ...)$$
$$\mathbf{P}(t) = \|p_{ij}(t)\|, \; i = 0, 1, ..., \; j = 0, 1, ...$$

Ergodiskā teorēma. [2]. Ja $(\mathbf{X}(t), t \geq 0)$ ir homogēna, nereducējama Markova ķēde, un eksistē vismaz viens stāvoklis $\mathbf{E}_{j_c}$ tāds, ka pēc laika $h > 0$ $p_{ij_o}(h) \geq \delta > 0$ visiem $i = 0, 1, ...,$ tad eksistē viens vienīgs stacionārais sadalījums $\{p_j^\star, j \geq 0\}$ un

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j^\star, \quad j \geq 0.$$

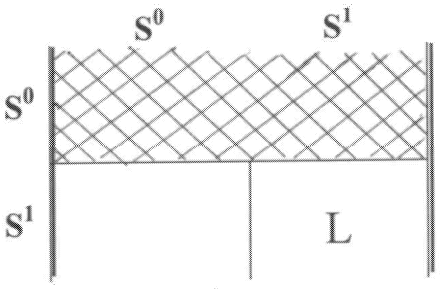
Turklāt

$$|p_j(t) - p_j^\star| \leq (1 - \delta)^{\frac{t}{h} - 1}$$

vienmērīgi pa visiem stāvokļiem, neatkarīgi no varbūtību sākuma sadalījuma.

9.§. Reducējamas Markova ķēdes pārejas varbūtību izturēšanās.

Pieņemsim, ka galīga Markova ķēde ar stāvokļu skaitu N sastāv no nebūtisku stāvokļu klases $\mathbf{S^o}$ un būtisku stāvokļu klasēm $\mathbf{S^1}$, $\mathbf{S^2}, ..., \mathbf{S^l}$. Pētot $p_{ij}(n), i, j = 1, 2, ..., N$ asimptotisko izturēšanos, pietiek apskatīt gadījumu $l = 1$, kad $\mathbf{S^1}$ ir nereducējama Markova ķēde bez apakšklasēm. Tad
$\mathbf{P}(n) = \|p_{ij}(n)\|_{i,j=1,2,...,N} =$



Saskaņā ar ergodisko teorēmu visiem apakšmatricas $\mathbf{L}$ elementiem $\mathbf{E_i}, \mathbf{E}_j$ eksistē $\lim\limits_{n\to(\infty)} p_{ij}(n) = p_j > 0, \quad j = 1, 2, ..., N$. Atliek analizēt nosvītrotās apakšmatricas elementu asimptotisko izturē-šanos.

9.1. teorēma. Ja $\mathbf{E}_i \in \mathbf{S^o}$, tad ir spēkā

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0, \quad \text{ja} \quad \mathbf{E}_j \in \mathbf{S^o}, \tag{9.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \quad \text{ja} \quad \mathbf{E}_j \in \mathbf{S^1}. \tag{9.2}$$

Pierādījums. Pieņemsim, ka $\mathbf{E}_j \in \mathbf{S^o}$. Tad eksistē n_r tāds, ka $p_{jr}(n_r) > 0$ visiem $\mathbf{E}_r \in \mathbf{S^1}$, bet $p_{rj}(s) = 0$ visiem s. Ņemot vērā 8.1. lemmu un ergodiskās teorēmas pierādījumu, varam secināt, ka, ja $\mathbf{E}_i \in \mathbf{S^1}, \mathbf{E_k} \in \mathbf{S^1}$, tad eksistē s_o tāds, ka , ja $s > s_o$, izpildās $p_{ik}(s) > 0$. Līdz ar to eksistē t_o tāds, ka visiem $t > t_o$ izpildās $p_{jl}(t) > 0$, $\mathbf{E}_l$ - jebkurš stāvoklis no $\mathbf{S^1}$. Izvelēsimies divus stāvokļus $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j$ no $\mathbf{S^o}$. Tad ir spēkā

$$p_{ij}(t) = \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(s)p_{kj}(t-s) + \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^1}} p_{ik}(s)p_{kj}(t-s). \tag{9.3}$$

Apzīmēsim $A_j(n) = \max\limits_i p_{ij}(n)$. Ievērojot, ka $p_{kj}(t-s) = 0$ visiem $\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^1}$, un ņemot s tik lielu, ka $t > s > t_o$, (9.3) ir pārrakstāma formā

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(s)p_{kj}(t-s) \\ &\le A_j(t-s) \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(s) = A_j(t-s)h_o, \end{aligned} \tag{9.4}$$

kur

$$h_o = \max_i \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(s) = \max_i (1 - \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^1}} p_{ik}(s)) < 1.$$

Atzīmēsim, ka $\mathbf{E}_i \in \mathbf{S^o}$ izvēlējāmies patvaļīgi. Tad (9.4) būs

spēkā arī gadījumā $p_{ij}(t) = A_j(t)$. Tātad

$$\begin{aligned} A_j(t) &\le A_j(t-s)h_o, \\ A_j(t-s) &\le A_j(t-2s)h_o, \\ &\dots \\ A_j(t) &\le h_o^{[\frac{t}{s}]} A_j(z), \quad t = z(\mathrm{mod} s). \end{aligned}$$

Ņemot vērā, ka $A_j(z) \le 1$, iegūstam

$$p_{ij}(t) \le \max_i p_{ij}(t) = A_j(t) \le h_o^{[\frac{t}{s}]}, \;\; h_o < 1. \tag{9.5}$$

Tātad $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$ visiem $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \in \mathbf{S^o}$, kas pierāda (9.1). Turklāt, no (9.5) seko, ka $p_{ij}(t) = o(\frac{1}{t})$ - augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā $\frac{1}{t}$. Lai pierādītu (9.2), pieņemsim $\mathbf{E}_i \in \mathbf{S^o}, \mathbf{E}_j \in \mathbf{S^1}$. Tātad

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(t)p_{kj}(s) =$$

$$= \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(t)p_{kj}(s) + \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^1}} p_{ik}(t)p_{kj}(s). \tag{9.6}$$

Ja $\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}$ un $s > t_o$, tad $p_{ik}(t) = o(\frac{1}{t}), p_{kj}(s) > 0$, un

$$\sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(t)p_{kj}(s) = o(\frac{1}{t}). \tag{9.7}$$

Ja $\mathbf{E}_i \in \mathbf{S^o}, \mathbf{E}_k, \mathbf{E}_j \in \mathbf{S^1}$, tad

$$\sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^1}} p_{ik}(t) = 1 - \sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^o}} p_{ik}(t) = 1 + o(\frac{1}{t}).$$

Turklāt, ņemot vērā ergodisko teorēmu, $p_{kj}(s) = p_j + o(\frac{1}{s})$. Tātad, iegūstam

$$\sum_{\mathbf{E}_k \in \mathbf{S^1}} p_{ik}(t)p_{kj}(s) = (p_j + o(\frac{1}{s}))(1 + o(\frac{1}{t})) = p_j + o(1), \quad (9.8)$$

kur $\lim\limits_{t,s\to\infty} o(1) = 0$. Vienādībā (9.6) pārejot uz robežu, ja t un s tiecas uz ∞, varam secināt, ka

$$\lim_{t,s\to\infty} p_{ij}(t+s) = p_j > 0, \qquad \mathbf{E}_j \in \mathbf{S^1}.$$

Teorēma ir pierādīta.

9.1. piemērs. Spēlētājs katrā mēģinājumā ar varbūtību p iegūst vienu punktu vai ar varbūtību $1 - p = q$ zaudē vienu punktu. Aprēķināt varbūtību, ka, sākot no punktu skaita i, spēlētājs ātrāk iegūs maksimālo punktu skaitu N nekā zaudēs visus savus i punktus.

Atrisinājums. Apzīmēsim ar $\mathbf{X}_n$ spēlētāja punktu skaitu pēc n spēlēm, $n = 0, 1, ...$ Acīmredzot, $\{\mathbf{X}_n, n = 0, 1, ...\}$ ir homogēna Markova ķēde ar pārejas varbūtībām

$$p_{oo} = p_{NN} = 1, \;\; p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}, \;\; i = 1, ..., N-1$$

un stāvokļu kopu $\{0, 1, ..., N\}$. Markova ķēde sadalās trīs apakšklasēs: $\{0\}, \{1, 2, ..., N-1\}, \{N\}$. $\{0\}$ un $\{N\}$ ir būtiski stāvokļi,

$\{1, 2, ..., N-1\}$ - nebūtiski stāvokļi. Tas nozīmē, ka kādreiz Markova ķēde izies no nebūtisko stāvokļu kopas un pāries uz $\{N\}$ vai $\{0\}$. Apzīmēsim ar $\mathbf{P}_i$ varbūtību, sākot no i ($i = 0, 1, ...,$ N), pāriet uz N . Tad ir spēkā

$$\mathbf{P}_i = p\mathbf{P}_{i+1} + q\mathbf{P}_{i-1},$$

vai, ņemot vērā, ka $p + q = 1$,

$$p\mathbf{P}_i + q\mathbf{P}_i = p\mathbf{P}_{i+1} + q\mathbf{P}_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., N-1.$$

Tātad iegūstam

$$\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i = \frac{q}{p}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}), \quad i = 1, 2, ..., N-1.$$

Ir zināms, ka $\mathbf{P}_o = 0$ un $\mathbf{P}_N = 1$. Tad izpildās

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 &= \frac{q}{p}\mathbf{P}_1 \\
\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 &= \frac{q}{p}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \mathbf{P}_1 \\
&.... \\
\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_{N-1} &= \frac{q}{p}(\mathbf{P}_{N-1} - \mathbf{P}_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \mathbf{P}_1.
\end{aligned}$$

Summējot pirmos n vienādojumus, iegūstam

$$\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_1 = \left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] \mathbf{P}_1.$$

Tātad

$$\mathbf{P}_i = \left[1 + \frac{q}{p} + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]\mathbf{P_1} = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-\frac{q}{p}}\mathbf{P}_1, & \frac{q}{p} \neq 1 \\ i\mathbf{P}_1, & q = p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Izmantojot $\mathbf{P}_N = 1$, varam secināt

$$\mathbf{P}_N = 1 = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^N}{1-\frac{q}{p}}\mathbf{P}_1, & \frac{q}{p} \neq 1 \\ N\mathbf{P}_1, & q = p = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

tālāk iegūstam

$$\mathbf{P}_1 = \begin{cases} \frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}, & \frac{q}{p} \neq 1 \quad \equiv \quad p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N}, & p = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}, & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, & p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pārejot uz robežu, ja $N \to \infty$, iegūstam

$$\lim_{\mathbf{N}\to\infty} \mathbf{P}_i = \begin{cases} 1 - (\frac{q}{p})^i, & \text{ja } p > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ja } p \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

kas nozīmē, ka spēlējot ar bezgalīgi bagātu pretinieku, ar varbūtību 1 spēle beigsies ar bankrotu, ja $p \leq \frac{1}{2}$. Ja $p > \frac{1}{2}$, saglabāsies nenoteiktība.

10.§. Erlanga formula.

Šajā paragrāfā izmantotā terminoloģija pilnībā pārņemta no praktiskajiem pielietojumiem. Pieņemsim, ka novērojam pilsētas telefonu centrāli, kura sastāv no komutatora ar n līnijām. Izsaukums, kas ienāk stacijā, jāapkalpo. Tas nozīmē, ka abonentu jāsavieno ar kādu citu abonentu. Pēc savienojuma kādu laiku notiek saruna (apkalpošana). Ja izsaukums ienāk brīdī, kad visas līnijas aizņemtas, tad izsaukums zūd (sistēma ar zudumiem). Apkalpošanas stacijai pieņemsim šādus noteikumus:
1. visas n līnijas vienādi pieejamas visiem izsaukumiem;
2. sarunas ilgums ir gadījuma lielums ξ, kas sadalīts pēc eksponenciālā likuma ar parametru $\beta > 0$, t.i. $\mathbf{P}(\xi > t) = e^{-\beta t}$, ja $t > 0$;
3. ienākošo izsaukumu skaits ir aprakstāms ar Puasona procesu ar parametru $\lambda > 0$.
Jāatzīmē , ka eksponenciālā sadalījuma likuma gadījumā "atlikušās sarunas daļas ilgums" nav atkarīgs no tā, cik ilgi jau notiek saruna. Precizēsim šo apgalvojumu. Apzīmēsim ar $f_a(t)$ varbūtību, ka saruna ilgs vēl laiku t, ja tā ilgusi jau laiku a.

10.1. lemma. Ja sarunas ilguma sadalījums ir eksponenciāls, tad

$$f_a(t) \overset{a}{\to} \equiv e^{-\beta t}.$$

Pierādījums. Pēc nosacītās varbūtības formulas

$$f_a(t)\mathbf{P}(\xi > a) = f_o(a + t),$$

no kurienes

$$e^{-\beta a} f_a(t) = e^{-\beta(a+t)}, \quad \text{vai} \quad f_a(t) = e^{-\beta t}.$$

Lemma ir pierādīta.

Tālāk uzskatīsim, ka $\beta = 1$, jo, pārejot uz vispārīgo gadījumu, jāizmaina tikai laika mērogs.
Ar $\nu(t)$ apzīmēsim jaunu ienākošo izsaukumu skaitu momentā t. $\nu(t)$ vienmēr apraksta ar Puasona procesu ar parametru $\lambda > 0$. Tas nozīmē , ka:
1. jebkuram sadalījumam $t_o = 0 < t_1 < t_2 < ... < T = t_n$ virknes $\{\nu(t_j) - \nu(t_{j-1})\}_{j=1,...,n}$ ir neatkarīgi kopumā gadījuma lielumi,
2. $\mathbf{P}(\nu(t)-\nu(s) = m) = e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}, \forall t > s, m = 0, 1, 2, ...,$
3. $\nu(0) = 0$.
Apzīmēsim ar $\eta(t)$ aizņemto līniju skaitu momentā t. $\eta(t)$ var pieņemt tikai veselas vērtības: $j = 0, 1, 2...n$. $\eta(t)$ tālāko izturēšanos ietekmē šādi faktori:
a) sarunas beigas, sarunu ilgums,
b) jaunu izsaukumu ienākšana.
Visi šie faktori nav atkarīgi no prosesa norises lī dz laika momentam t (a - pēc lemmas, b - pēc Puasona procesa īpašībām). Tātad $\eta(t)$ - Markova ķēde ar $n+1$ stāvokliem un nepārtrauktu laiku, pie tam homogēna. Apzīmēsim ar $\mathbf{P}(t) = \|p_{ij}(t)\|_{j,k=0,1,...,n}$ pārejas varbūtību matricu laikā t. No ergodiskās teorēmas seko, ka eksistē stāvokļu stacionārais sadalījums $(p_o, p_1, ..., p_n)$, p_k ir varbūtība sistēmai atrasties stāvoklī "k līnijas ir aizņemtas $k = 0, 1, ..., n$. Jeb, sistēma vidēji k-tajā stāvoklī atrodas $p_k 100\%$ laika $(k = 0, 1, ..., n)$.
Izteiksim p_k, $k = 0, 1, .., n$, ievērojot, ka $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)$. Pieņemsim, ka τ ir laika intervāls. Izteiksim $p_k(\tau)$ ar precizitāti līdz augstākas kārtas bezgalīgi maziem lielumiem nekā τ, ja $\tau \to$

0. Ievērojot Puasona procesa definīciju, iegūstam starplaikā τ ienākošo izsaukumu skaita sadalījumu

$$\mathbf{P}(\nu(\tau) - \nu(0) = 0) = \mathbf{P}(\nu(\tau) = 0) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + o(\tau)$$

$$\mathbf{P}(\nu(\tau) = 1) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau + o(\tau)$$

$$\mathbf{P}(\nu(\tau) > 1) = 1 - e^{-\lambda\tau} - \lambda\tau e^{-\lambda\tau} = o(\tau).$$

Apzīmēsim ar μ - sarunu izbeigšanos skaitu (laika sprīdī τ), ja k līnijas ir aizņemtas. Tad

$$\mathbf{P}(\mu = 0) = [\mathbf{P}(\xi > \tau)]^k = e^{-k\tau} = 1 - k\tau + o(\tau)$$

$$\mathbf{P}(\mu = 1) = C_k^1[\mathbf{P}(\xi > \tau)]^{k-1}\mathbf{P}(\xi < \tau) = k(1 - e^{-\tau})e^{-(k-1)\tau} =$$

$$= k(1 - 1 + \tau + o(\tau))(1 - (k-1)\tau + o(\tau)) = k\tau + o(\tau)$$

$$\mathbf{P}(\mu > 1) = 1 - \mathbf{P}(\mu = 0) - \mathbf{P}(\mu = 1) = o(\tau).$$

Pēc pilnās varbūtī bas formulas, ievērojot, ka $p(\nu(\tau) > 1) = o(\tau)$ un $p(\mu > 1) = o(\tau)$, iegūstam

$$p_k(t + \tau) = \sum_{l=0}^{n} p_l(t)p_{lk}(\tau) = p_{k-1}(t)p_{k-1k}(\tau) +$$

$$+p_k(t)p_{kk}(\tau) + p_{k+1}(t)p_{k+1k}(\tau), \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Tātad, ņemot vērā , ka

$$\begin{aligned}
p_{oo}(\tau) &= 1-\lambda\tau+o(\tau),\\
p_{nn}(\tau) &= 1-n\tau+n\tau\lambda\tau+o(\tau)=1-n\tau+o(\tau),\\
p_{kk}(\tau) &= (1-\lambda\tau)(1-k\tau)+\lambda\tau k\tau+o(\tau)\\
&= 1-k\tau-\lambda\tau+o(\tau),\ \ 0<k<n-1,\\
p_{kk+1}(\tau) &= \lambda\tau(1-k\tau)+o(\tau)=\lambda\tau+o(\tau),\\
p_{kk-1}(\tau) &= k\tau(1-\lambda\tau)+o(\tau)=k\tau+o(\tau),
\end{aligned}$$

iegūstam

$$\begin{cases}
p_o(t+\tau) & = p_o(t)(1-\lambda\tau)+p_1(t)\tau+o(\tau)\\
p_k(t+\tau) & = p_{k-1}(t)\lambda\tau+p_k(t)(1-k\tau-\lambda\tau)\\
 & \quad +p_{k+1}(t)(k+1)\tau+o(\tau),\ \ k=1,...,n-1\\
p_n(t+\tau) & = p_{n-1}(t)\lambda\tau+p_n(t)(1-n\tau)+o(\tau),
\end{cases}$$

kas ir ekvivalenti sistēmai

$$\begin{cases}
\frac{p_o(t+\tau)-p_o(t)}{\tau} & = -\lambda p_o(t)+p_1(t)+o(1)\\
\frac{p_k(t+\tau)-p_k(t)}{\tau} & = \lambda p_{k-1}(t)-p_k(t)(k+\lambda)\\
 & \quad +p_{k+1}(t)(k+1)+o(1),\ \ k=1,...,n-1\\
\frac{p_n(t+\tau)-p_n(t)}{\tau} & = \lambda p_{n-1}(t)-np_n(t)+o(1).
\end{cases}$$

Pārejot uz robežu, ja $\tau\to 0$, iegūstam diferenciālvienādojumu sistemu

$$\begin{cases}
p_o'(t) = -\lambda p_o(t)+p_1(t)\\
p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t)-p_k(t)(k+\lambda)+p_{k+1}(k+1),\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=1,...,n-1\\
p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t)-np_n(t).
\end{cases}$$

Pārejot uz robežu, ja $t \to \infty$, no stacionaritātes seko, ka

$$\begin{cases} -\lambda p_o + p_1 = 0 \\ -\lambda p_{n-1} + n p_n = 0 \\ \lambda p_{k-1} - p_k(k+\lambda) + p_{k+1}(k+1) = 0, \quad 0 < k \leq n-1. \end{cases}$$

Apzīmēsim $z_k = \lambda p_{k-1} - k p_k$, tad

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_k = z_{k+1}, \quad k = 1, ..., n-1, \\ z_n = 0, \end{cases}$$

no kurienes $z_k = 0$ visiem $k = 0, 1, ..., n$, vai $p_k = \frac{\lambda}{k} p_{k-1}, \quad k = 1, 2, ..., n$. Tātad

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} p_o, \quad k = 1, ..., n.$$

Ņemot vērā, ka $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$, iegūstam

$$p_o \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = 1, \quad p_o = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}}, \quad p_m = \frac{\lambda^m}{m!} \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}}, \quad m = 1, ..., n.$$

Erlanga formulas ir spēkā arī bezgalīgam līniju skaitam, ņemot augšējo summēšanas indeksu vienādu ar ∞.

Literatūra.

1. А.А. Боровков. *Теория вероятностей.* Наука, Москва, 1986.

2. Ю.А. Розанов. *Случайные процессы.* Физматгиз, Москва, 1987.

3. S.Ross. *Introduction to Probability Models.* Academic Press Inc., New York, 1985.

4. W. Feller. *Introduction to Probability Theory and its Application.* Vol.1. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.