Varbūtību teorijas galvenie jēdzieni un pamatformulas

1.§. Gadījuma mēģinājumi, notikumi un to varbūtības

Pielietojumos bieži nākas sastapties ar eksperimentiem (mēģinājumiem, novērojumiem, procesiem), kuru rezultāti (procesa norisi) nevar paredzēt, jo tie ir atkarīgi no nezināmiem, dažreiz nenoskaidrotiem, faktoriem (apstākļiem). Piemēram: nevar paredzēt kāds skaitļis uzkritīs, metot spēļu kauliņu, cik nākamā gada abiturientu izvēlēsies studēt universitātē, utt. Matemātiskā varbūtību teorija iegūst uzskatāmu jēgu ar šādiem ideāliem mēģinājumiem: vienreizēja monētas mešana, monētas mešana n reizes, spēļu kauliņu mešana, cilvēka mūža garuma novērošana, "kreiļu" skaita noteikšana patvaļīgi izvēlētā cilvēku grupā, aizņemto līniju skaita noteikšana telefona centrālē, jaunpiedzimušā dzimums, daļiņas atrašanās vieta difūzijas procesā, gadījuma trokšņi elektriskās sistēmas utt.

Elementāro notikumu telpa. Notikumi.

Par notikumiem nosauksim mēģinājumu vai novērojumu rezultātus. Atšķirsim saliktus un vienkāršus notikumus. Piemēram, notikums "vienlaicīgi metot divus spēļu kauliņus, uzkritušo punktu summa ir seši" ir līdzvērtīgs tam, ka mūsu mēģinājumam ir bijis viens no sekojošiem iznākumiem (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), t.i., notikums "punktu summa ir seši" ir sadalījies piecos vienkāršos notikumos. Šajā mēģinājumā mēs uzskatījām, ka viena spēļu kauliņa mešanas rezultātā ir iespējams tikai tāds iznākums, ka augšējās skaldnes punktu skaits ir no 1 līdz 6 (mēs izslēdzam iespēju, ka kauliņš var aizripot prom vai arī nostāties uz šķautnes). Katru vienkāršu idealizētu mēģinājuma iznākumu apzīmēsim ar ω un nosauksim par ***elementāru notikumu***. Visu elementāro notikumu sakopojumu apzīmēsim ar Ω un nosauksim par ***elementāro notikumu telpu***, bet pašus elementāros notikumus ω sauksim par šīs telpas punktiem. Tātad elementāro notikumu telpa ir idealizēts mēģinājuma modelis tāda nozīmē, ka

- jebkura mēģinājuma iznākums nav zināms iepriekš un pilnībā aprakstāms ar vienu un tikai vienu elementāro nolikumu,

- punktu kopa, kura pārstāv visus tos iznākumus, pie kuriem notikums A notiek, pilnībā apraksta šo notikumu.

Tādēļ definējam: ***notikums*** – to elementāro notikumu kopa, kura pārstāv tos iznākumus, kad dotais notikums notiek. Katram atsevišķam mēģinājumam vai arī kādai mēģinājumu kopai tiek izvēlēta konkrēta elementāro notikumu telpa. Atkarībā no tās mainās elementārā notikuma jēdziens, t.i., šīs telpas punkti. Piemēram, ja notikums ir: vienu reizi tiek mesta monēta, tad par elementāro notikumu telpu var ņemt telpu, kas sastāv no diviem punktiem: Ģ–"ģerbonis" un C–"cipars". Divas reizes metot monētu, nepieciešams atšķirt, kurā reizē uzkrita, piemēram, "ģerbonis". Šajā gadījumā elementāro notikumu telpa sastāvēs jau no četriem punktiem. Notikums, ka pirmo reizi metot uzkrita "ģerbonis", vairs nav elementārs, t.i., nesadalāms, un sastāv no diviem elementāro notikumu telpas punktiem. ĢĢ, ĢC, tātad ir elementāro notikumu telpas apakškopa. Ja apskatām tādu mēģinājumu kā kapeikas mešana līdz pirmajai "ģerboņa" uzkrišanai, tad atbilstošās elementāro notikumu telpas elementāro notikumu skaits būs sanumurējams. (Jāapskata arī tāds mēģinājuma iznākums, ka ģerbonis neuzkrita ne reizi, t.i., notikums sastāv tikai no "ciparie" sanumurējamā skaitā). Varam pieminēt arī sarežģītākas elementāro notikumu telpas, izomorfas taisnei, plaknei, n-dimensiju telpai un pat telpai ar bezgalīgu dimensiju skaitu. Jebkurā gadījumā notikums ir šīs telpas kāda apakškopa un ir dabīgi, ka varbūtību teorijas aparāts izmanto pašus smalkākos kopu teorijas jēdzienus. Lai izstrādātos zināma intuīcija darbam ar elementāro notikumu telpas apakškopām, apskatīsim dažus piemērus.

1.Piemērs. Trīs bumbiņu sadalījums pa trim kastēm. Ja iezīmētu bumbiņas ar dažādiem burtiem a, b un c, tad būtu pavisam 27 dažāda izvietojuma iespējas, un katrs šis izvietojums būtu nesadalāms mēģinājuma iznākums, t.i., elementārs notikums. Visus iespējamos izvietojumus aprakstīsim nākamajā tabulā.

1	abc			**10**	c	ab		**19**		b	ac
2		abc		**11**		ab	c	**20**	a		bc
3			abc	**12**	b	ac		**21**		a	bc
4	ab	c		**13**		ac	b	**22**	a	b	c
5	ab		c	**14**	a	bc		**23**	a	c	b
6	ac	b		**15**		bc	a	**24**	b	a	c
7	ac		b	**16**	c		ab	**25**	b	c	a
8	bc	a		**17**		c	ab	**26**	c	a	b
9	bc		a	**18**	b		ac	**27**	c	b	a

Notikumam A - "eksistē kaste, kurā ir ne mazāk par divām bumbiņām", atbilst izkārtojumi, kas tabulā apzīmēti ar kārtas numuriem no 1. līdz 21. Notikumu B - "pirmā kaste nav tukša" var apskatīt ar izkārtojumiem no 4. līdz 15. un no 22. līdz 27. Notikumu V, kuram atbilst izkārtojumi: 1., 5., 7., 20., var definēt šādi: otrā kaste tukša, bumbiņa a atrodas 1 kastē.

Attiecības starp notikumiem.

1. Definīcija. Notikumu, kas satur visus tos punktus, kuri nepieder A, sauc par ***pretēju notikumu*** A un apzīmē ar $\bar{A}$.

2. Definīcija. Notikumu, kas sastāv no tiem elementāriem notikumiem, kuri vienlaicīgi pieder visiem dotajiem notikumiem A, B, C, ..., sauc par šo ***notikumu reizinājumu*** un apzīmē ar ABC, vai arī $A \bigcap B \bigcap C$.

3. Definīcija. Notikumu, kas sastāv no tiem elementārie notikumiem, katrs no kuriem pieder vismaz vienam no dotajiem notikumiem, sauc par šo ***notikumu summu*** jeb ***apvienojumu*** un apzīmē ar $A \bigcup B \bigcup C$

4. Definīcija. Notikumi A, B, C, ... ir ***pa pāriem nesavienojami***, ja jebkuriem diviem no tiem nav kopēju punktu, t.i., jebkuru divu reizinājums ir elementāro notikumu telpas tukša apakškopa.

5. Definīcija. Ja katrs notikuma A punkts atrodas notikumā B, tad saka, ka notikums B seko no A vai arī, ka no A izriet B. Šo faktu pieraksta sekojoši $A \subset B$.

6. Definīcija. Reizinājumu $B\bar{A}$ sauc par notikumu B un A ***starpību*** un apzīmē ar $B \backslash A$.

7. Definīcija. Elementāro notikumu telpu sauc par ***diskrētu***, ja tā sastāv no ne vairāk kā sanumurējama skaita punktiem.
Apzīmēsim ar $\mathcal{F}$ visu ***notikumu klasi***. Matemātiskajā analīzē kopas Ω apakškopu klasi $\mathcal{F}$ ar īpašībām: a)$\Omega \in \mathcal{F}$; b)$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$;
c) $\{A_i, i \geq 1\}, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$ sauc par σ-algebru. Tātad, notikumu klase $\mathcal{F}$ ar īpašībām a, b, c ($\mathbb{A}\mathbf{1}$ aksioma) veido ***notikumu σ-algebru***.

Apzīmējumi	Kopu teorijas interpretācija	Varbūtību teorijas interpretācija
ω	elements, punkts	elementārais notikums
Ω	elementu kopa	elementāro notikumu kopa (telpa), drošs notikums
$\mathcal{F}$	kopu σ-algebra	notikumu σ-algebra
$A \in \mathcal{F}$	elementu kopa	notikums
$\overline{A}$	kopas papildinājums	pretējais notikums
$A \cup B$	kopu A un B apvienojums	notikumu A un B summa
$A \cap B$ (AB)	kopu A un B šķēlums	notikumu A un B reizinājums
$\emptyset$	tukša kopa	neiespējams notikums
$A \cap B = \emptyset$	kopas A un B nešķeļas	notikumi A un B ir nesavienojami
$A \backslash B$	kopu A un B starpība	notikumu A un B starpība
$A \Delta B =$ $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$	kopu A un B simetriskā starpība	notikumu A un B simetriskā starpība
$\cup A_i$	kopu A_i apvienojums	vismaz viens no notikumiem A_1, A_2, ... notiks
$\cap A_i$	kopu A_i šķēlums	vienlaicīgi notiks visi notikumi A_1, A_2,...
$A_n \uparrow A$ $(A = \lim\limits_{n\to\infty} \uparrow A_n)$	monotoni augoša kopu virkne, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$	monotoni augoša notikumu virkne, kas konverģē uz A kad n tiecās uz ∞
$A_n \downarrow A$ $(A = \lim\limits_{n\to\infty} \downarrow A_n)$	monotoni dilstoša kopu virkne, $A = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$	monotoni dilstoša notikumu virkne, kas konverģē uz A kad n tiecās uz ∞
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} A_k$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} A_k$	$\bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ $\bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$	

Table 1: *Tabulā parādīts, kā dažus jēdzienus no kopu teorijas var interpretēt varbūtību teorijā.*

Kā redzam, starp varbūtību teorijas un kopu teorijas jēdzieniem eksistē savstarpēji viennozīmīgā atbilstība. Turpmāk notikumus un to summas, starpības, reizinājumus identificēsim ar atbilstošām kopām un ar to apvienojumiem, starpībām, šķēlumiem, pāreju uz pretējo notikumu ar atbilstošās kopas papildinājumu.

Varbūtības jēdziens. Varbūtību uzdošana.

Varbūtību teorijā notikuma notikšanas iespēja, izpildoties noteiktiem nosacījumiem, tiek raksturota ar nenegatīvu skaitli, kas nav lielāks par 1. Dažādu notikumu varbūtības ir tās pašas dabas skaitļi, kas attālumi ģeometrijā, vai masas mehānikā. Abstrakta teorija uzskata, ka nav vajadzīgi nekādi pieņēmumi par to, kā šos lielumus izmērīt. Vesela rinda svarīgu pielietojumu ir kvalitatīva rakstura, un tie nav atkarīgi no notikumu varbūtību skaitliskajām vērtībām. Tajos gadījumos, kad nepieciešams zināt varbūtības skaitlisko vērtību, skaitļošanas paņēmieni tiek variēti tikpat plaši kā, piemēram, attālumu mērīšanas paņēmieni. Tā varbūtības par cilvēka mūža ilgumu tiek noteiktas, izmantojot novērojumu rezultātus. Dažkārt varbūtību noteikšanai tiek izmantotas sarežģītas, teorētiski nopamatotas, statistiskās metodes.
Metot "pareizu" monētu mēs nešauboties saistām varbūtību 0.5 ar G vai C uzkrišanu. Tas noved pie secinājuma, ka, metot monētu n reizes, visi 2n iespējamie gadījumi ir vienādi iespējami. Vieni uzskata, ka no teorijas redzes viedokļa tas ir pieņēmums, loģiski neizbēgams un vienīgais iespējamais. Citi uzskata, ka varbūtība 0.5 seko no mēģinājumiem, kuri gan nekad to neapstiprina, jo patiesībā pareiza monēta neeksistē. Neskatoties uz to mēs pareizas monētas modeli saglabājam, jo tam ir svarīgi pielietojumi. Tā pirmajā piemērā ir dabīgi pieņemt, ka visi elementārie notikumi ir vienādi iespējami, tas ir, katram no tiem ir viena un tā pati varbūtība. Dažos gadījumos šo hipotēzi izvirza balstoties uz fizikāliem apsvērumiem, citos, lai vienkāršotu spriedumus un iegūtu vispārīgas likumsakarības. Ja 1.piemērā visas trīs bumbiņas būtu neatšķiramas, tad tādi sadalījumi kā 4, 6, 8 neatšķirtos. Tādā gadījumā, elementāro notikumu telpa būtu sekojoša:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
***			**	**		*	*		*
	***		*		**	**		*	*
		***		*	*		**	**	*

Pieņēmums, ka nav iespējams atšķirt bumbiņas, neatsaucas uz šī fizikālā eksperimenta būtību, t.i., tāpat kā iepriekš, ir iespējami 27 iznākumi, kaut gan tikai 10 no viņiem ir būtiski atšķirīgi. Tātad ir saprātīgi notikumiem,

kas aprakstīti šajā tabulā, piekārtot sekojošas varbūtības:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$

Lielākai daļai pielietojumu, kuriem par modeli kalpo augstāk minētais piemērs, šāda varbūtību izvēle ir saprātīga. Arī statistiskajā mehānikā šāds modelis kalpo par pamatu Maksvela-Bolcmana statistikas iegūšanai. Savukārt, Bozē un Einšteins piekārtoja katram no 10 iepriekš minētajiem elementāriem notikumiem varbūtību 0.1 un parādīja, ka daži daļiņu tipi pakļaujas šādai statistikai. Šis piemērs rāda, ka vienā un tajā pašā elementāro notikumu telpā iespējams dažādos veidos piekārtot varbūtības.
Varbūtību teorijā aplūko tikai tos eksperimentus, kuriem izpildās ,,notikumu biežumu statistiskā stabilitāte". Eksperimentus, kuriem tā izpildās, sauc par ***gadījuma mēģinājumiem*** vai par ***varbūtiskajiem modeļiem***.
Varbūtību apzīmēšanai lietosim vārda ,,probability" (varbūtība) pirmo burtu $\mathbb{P}$. Uzskatisīm tās īpašības ($\mathbb{A}$**2** aksioma), kuras apmierina notikuma A varbūtība $\mathbb{P}(A)$.

P1. $\mathbb{P}$:$\mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

P2. $\mathbb{P}(\Omega)$=1

P3. ja notikumi A_i, i=1,2,... ir nesavienojami, tad $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i) = \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i)$.

Ar šīm īpašībām diskrētas telpas gadījumā, ja tikai ir zināmas elementāro notikumu varbūtības, būs pietiekoši, lai varētu uzdot varbūtības sarežģītākiem notikumiem A: $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega)$. Savukārt, elementāro notikumu varbūtības, paliekot intuitīvās varbūtību definīcijas ietvaros, bieži nosaka ar vienādi iespējamo iznākumu palīdzību. Šeit galvenās grūtības sagādā visu vienādi iespējamo mēģinājuma iznākumu uzskaitīšana, jo ir jābalstās tikai uz veselo saprātu un intuīciju, tā kā jebkuri objektīvi pierādījumi šeit nav iespējami.
Klasiskajā varbūtību teorijā elementāro notikuma telpa ir diskrēta un elementāro notikumu varbūtības ir uzdotas.
Gadjumā, kad elementāro notikumu telpa ir galīga, apjomā n, visi elementārie notikumi ir vienādi iespējami un notikuma A apjoms ir m ($m \leq n$), tad no aksiomām seko, ka $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$(klasiskās varbūtības definīcija).
(Abstraktā varbūtību teorijā tiek pieņemts, ka notikumu varbūtības ir uzdotas.)
Turpmāk par ***neizbēgamu (drošu)*** sauksim tādu notikumu A, kas mēģinājuma rezultātā noteikti notiek, t.i., $\mathbb{P}(A)$=1, bet par ***neiespējamu*** tādu B,

kas mēģinājuma rezultātā nevar notikt, t.i.,$\mathbb{P}(B)$=0.

- ***Elementāro notikumu telpas, elementāro notikumu, notikumu* un** to ***varbūtība*** ir pirmatnēji un nedefinējami varbūtību teorijas jēdzieni, tāpat kā ,,taisne" un ,,punkts" Eiklīda ģeometrijā.
- Trīs objektu kopu $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ sauc par ***varbūtību telpu.***
- Varbūtību teorijas ***saturs*** ir gadījuma mēģinājumu matemātiskā analīze.
- Varbūtību teorijas ***mērķis*** ir sarežģītu notikumu varbūtības atrašana.

2.§. Vienkāršākās varbūtību mēra īpašības [1]

Kopu funkciju $\mathbb{P}$ ar īpašībām P1, P2, P3 ($\mathbb{A}$**2**), kas tiek uzdota notikumu σ- algebrā $\mathcal{F}$, mēra teorijā sauc par ***varbūtību mēru***. Vispirms atzīmēsim dažas varbūtību mēra īpašības, kuras tieši izriet no aksiomām ($\mathbb{A}$**1,**$\mathbb{A}$**2**).

1.$\mathbb{P}(\emptyset)$=0.

2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ Notikumi A un $\overline{A}$ ir nesavienojami $\Rightarrow$
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$.

3. $\mathbb{P}(A) \leq 1$, visiem $A \in \mathcal{F}$

4. $A \subset B \rightarrow \mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ (***subtraktivitāte)***

5. $A \subset B \rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (***monotonitāte***)

6. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$ (***saskaitīšanas*** formula)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \backslash AB)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

7.$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (***pus aditivitāte***)

8. $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (σ***-pus aditivitāte***)

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash \bigcup_{k=1}^{2} A_k) \cup \cdots \cup (A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \cup \cdots) =$$
$$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) + \cdots \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

9.Varbūtību mērs ir nepārtraukts attiecībā pret monotonām virknēm, t.i., ja $\{A_i \uparrow\uparrow\}$ vai $\{ A_i \downarrow\downarrow\}$, i=1,2,..., tad

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} A_n).$$

Pierādījums. Pieņemsim, ka kopu virkne $\{E_n,\ n$=1,2...$\}$, $E_n \in \mathcal{F}$ ir monotoni augoša , tas ir $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, 2, ..$ Tad,
$E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ un, apzīmējot $A_1 = E_1$, $A_n = E_n \backslash E_{n-1}$, $n \geq 2$, iegūstam, ka, ja $i \neq j$, tad $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ un $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Tā kā varbūtību mērs ir σ-aditīvs un subtraktīvs, tad

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(E_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n \backslash E_{n-1}) =$$
$$= \mathbb{P}(E_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n-1})] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n).$$

Pieņemsim, ka $\{E_n,\ n$=1,2...$\}$, $E_n \in \mathcal{F}$ ir monotoni dilstoša kopu virkne, t.i., $E_n \supset E_{n+1}, n$ =1,2,.... Tādā gadījumā, virkne $\{A_n, n = 1, 2, ...\}$,
kur $A_n = E_1 \backslash E_n$, $A_n \in \mathcal{F}$, ir monotoni augoša kopu virkne, un no pirmās daļas pierādījuma seko, ka

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n),\ \text{t.i.,}\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_1 \backslash E_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} (E_1 \backslash E_n)).$$

Tā kā varbūtības mērs ir subtraktīvs, tad

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} E_n),$$

kas bija jāpierāda.

Sekas. Ja ir zināms, ka $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, tad

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(A).$$

Pēc dotā $A = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k = \bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$. No kurienes, ņemot vēra, ka $\bigcap\limits_{k\geq n} A_k \subset A_n \subset \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$, un $\{\bigcap\limits_{k\geq n} A_k \uparrow\uparrow\}, \{\bigcup\limits_{k\geq n} \downarrow\downarrow A_k\}, n \geq 1$ ir monotonas virknes, iegūstam

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k) = \mathbb{P}(A).$$

10. Definīcija. Ja B ir noticis un $\mathbb{P}(B) \neq 0$, tad

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

sauc par notikuma A ***nosacīto varbūtību*** (***nosacītās varbūtības*** formula).

Viegli konstatēt, ka kopu klase $\mathcal{F}_B := \{A \cup B, A \in \mathcal{F}\}$ ir notikumu σ–algebra un $\langle \mathbf{B}, \mathcal{F}_\mathbf{B}, \mathbb{P}(\cdot|\mathbf{B})\rangle$ ir jauna varbūtību telpa.

11. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$ (***reizināšanas formula***). Varbūtību reizināšanas formulu var vispārināt patvaļīgam notikumu skaitam n. $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k)$.

12. Definīcija. Notikumi H_1, H_2,... veido ***pilnu notikumu grupu***(PNG) vai (sistēmu), ja izpildās šādi nosacījumi:

$a) i \neq j \Rightarrow H_i \bigcap H_j = \emptyset,\ \ b) \bigcap_i H_i = \Omega,\ \ c) \mathbb{P}(H_i) > 0, \forall i.$

Katru no notikumiem H_1, H_2,... sauc par ***hipotēzi.***

13. Pilnās varbūtības formula. Pieņemsim, ka $\{H_i, i = 1, 2, ...\}$ veido pilnu notikumu grupu, tad jebkurš notikums A var notikt reizē ar kādu no H_i, t.i.$A = AH_1 \cap AH_2 \cap \cdots$. Tātad,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(AH_i) = \sum_i \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i).$$

Uzrakstīto vienādību sauc par ***pilnās varbūtības formulu***.

14. Beijesa formula. Ja $\{H_i, i = 1, 2, ...\}$ veido pilnu notikumu grupu, tad izmantojot sakarību

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_kA)}{\mathbb{P}(A)},$$

un pielietojot notikumam A pilnās varbūtības formulu, varam pārrakstīt to formā

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_i \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}$$

Iegūto sakarību sauc par ***Beijesa formulu***.
Iepriekš minēto formulu ilustrācijai apskatīsim piemērus.

Piemērs 2. No n elementu kopas {1,2,...,n} pa vienam pakāpeniski izņem elementus, neliekot tos atpakaļ. Kāda varbūtība, ka otro izņems j-to elementu (notikums A), ja pirmo izņēma i-to elementu (notikums$B$)$(i \neq j)$?

Atrisinājums. Izņemot divas elementus pēc kārtas, kombinācija ij būs iespējama tikai vienu reizi. Tad

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)},\ \mathbb{P}(AB) = \frac{1}{n(n-1)},\ \mathbb{P}(B) = \frac{n-1}{n(n-1)} \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{n-1}.$$

Piemērs 3. Pavisam ir 5 urnas. Divu urnu sastāvs sekojošs – 2 baltas un 3 melnas bumbiņas, divu nākamo urnu sastāvs – 1 balta un 4 melnas bumbiņas, bet atlikušajā urnā ir 4 baltas un 1 melna bumbiņa. No brīvi izvēlētas urnas izņem vienu bumbiņu.
a) Kāda ir varbūtība notikumam, ka izņemtā bumbiņa būs balta (notikums B)?
b)Aprēķināt varbūtību, ka bumbiņa ir izņemta no urnas (trešā sastāva), kurā ir 4 baltas un 1 melna bumbiņa, ja zināms, ka izņemtā bumbiņa ir balta?

Atrisinājums. a) Apzīmēsim notikumu ,,bumbiņa ir izņemta no urnas ar i-to sastāvu" ar $A_i, i = 1, 2, 3$. a)pēc pilnās varbūtības formulas:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

b) pēc Beijesa formulas:

$$\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_3)\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4}{25} : \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

15. Neatkarīgi notikumi. Definīcija. Divus notikumus A un B sauc par ***neatkarīgiem***, ja izpildās sekojošā sakarība $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Pēdējā sakarība ir ekvivalenta nākamajām divām $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A),\ \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

No šejienes seko, ka notikumi A un B ir neatkarīgi, jo viena vai otra notikuma iestāšanās neizmaina atlikušā notikuma varbūtību.
Viegli pierādīt, ka no notikumu A un B neatkarības seko A un $\overline{B}$ neatkarība. Ja pēc notikuma B iestāšanās neko nevar spriest par notikumu A, tad arī no $\overline{B}$ neko nevar pateikt par A. Līdzīgi, neatkarīgi būs notikumi $\overline{A}$ un B, $\overline{A}$ un $\overline{B}$.

16. Definīcija. Vairākus notikumus sauc par ***neatkarīgiem kopumā*** vai ***savstarpēji neatkarīgiem***, ja katrs no viņiem un jebkura pārējo notikumu kombinācija ir neatkarīgi notikumi.

Uzsvērsim, ka no fakta: notikumi ir pa pāriem neatkarīgi, neseko neatkarība kopumā. Par to var viegli pārliecināties, apskatot sekojošu piemēru.

Piemērs 4.Urnā atrodas 4 bumbiņas. Viena nokrāsota sarkanā, otra zilā, trešā melnā, bet ceturtā šajās visās krāsās. Notikumi A(izvilkt sarkanu krāsu), B(izvilkt melnu krāsu), C(izvilkt melnu krāsu) ir pa pāriem neatkarīgi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2};\ \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{2},$$

bet atkarīgi kopumā, jo $\mathbb{P}(ABC) = 1/4 \neq 1/8$.

Atkarība – viens no galveniem jēdzieniem varbūtību teorijā, kas ļauj varbūtību teorijai eksistēt kā patstavīgai matemātikas nozarei. Vienkāršojat, par pamatu ņemot praktisko pieredzi un intuīciju, varam teikt, ka notikumi ir neatkarīgi, ja cēloņi, kas tos izraisīja, nav savstarpēji saistīti. Tomēr, ja cēloņi saistīti, vēl neseko atkarība. Nepieciešams pārbaudīt neatkarības definīciju (kā iepriekš minētajā piemērā).

3.§. Diskrētu sadalījumu piemēri

Tālāk apskatīsim varbūtības gadījumā, kad elementāro notikumu telpa ir diskrēta. Kā jau tika atzīmēts, dažreiz ir jāmāk uzdot varbūtības sarežģītākiem notikumiem, ja ir zināmas elementāro notikumu varbūtības. Pagaidām paliksim intuitīvās varbūtību definīcijas ietvaros, vai arī tās definīcijas līmenī, kura varbūtību nosaka ar vienādi iespējamu iznākumu palīdzību.

Ģeometriskais varbūtību sadalījums

Pieņemsim, ka katrā no neatkarīgiem mēģinājumiem notikums A var iestāties ar varbūtību p. Mēģinājumu atkārto tik ilgi, kamēr A notiks pirmo reizi. Apzīmēsim notikumu A_k–"mēģinājumu skaits ir vienāds ar k". Tad, $p_k := \mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, ...$
Varbūtību virkni $(p_1, p_2, ...)$ – sauc par ģeometrisko sadalījumu.

Binomiālais varbūtību sadalījums

Piemērs. Kastē atrodas m lodītes, no tiem m_1 baltas un m_2 melnas. No kastes izņem vienu lodīti, iegaumē tās krāsu un atliek atpakaļ. Mēģinājumu atkārto n reizes. Aprēķināt varbūtības notikumiem A_k – "no n izvēlētajām lodītiem k baltas, $n-k$ melnas", $k = 0, 1, ..., n$. Ja visas lodītes ir iezīmētas (piemēram, ar numuriem), tad elementāro notikumu skaits ir m^n, bet labvēlīgo notikumu skaits $\mathbf{C}_n^k {m_1}^k {m_2}^{n-k}$.. No kurienes,

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{\mathbf{C}_n^k {m_1}^k {m_2}^{n-k}}{m^n} = \mathbf{C}_n^k (\frac{m_1}{m})^k (\frac{m_2}{m})^{n-k} =$$

$$= \mathbf{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n,$$

kur p : – varbūtība izņemt balto lodīti.
Varbūtību virkni $(p_1, p_2, ..., p_k)$ sauc par binimiālo varbūtību sadalījumu.

Polinomiālais varbūtību sadalījums

Pieņemsim, ka katrā no n neatkarīgiem mēģinājumiem var iestāties viens no r nesavienojumiem notikumiem $A_1, A_2, ...A_r$ attiecīgi ar varbūtībām
$p_i = \mathbb{P}(A_i), i = 1, ..., r$, kuras nav atkarīgas no mēģinājuma kārtas numura. Meklēsim varbūtību tam, ka n mēģinājumos notikumi A_i iestāsies

m_i reizes, $i = 1, 2, ...r$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$. Viens no elementāriem notikmiem būs $\underbrace{A_1 A_1 ... A_1}_{m_1} \underbrace{A_2 A_2 ... A_2}_{m_2} ... \underbrace{A_r A_r ... A_r}_{m_r}$. Tās varbūtība ir $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$. Savukārt labvēlīgo virkņu skaits ir

$$\mathbf{C}_n^{m_1} \mathbf{C}_{n-m_1}^{m_2} \cdots \mathbf{C}_{m_r}^{m_r} = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_r!}.$$

Tādēļ,

$$\mathbb{P}(A_{m_1, m_2, ..., m_r}) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_r!} {p_1}^{m_1} {p_2}^{m_2} ... {p_r}^{m_r}.$$

Šo varbūtību sauc par polinimiālo varbūtību sadalījumu. Viegli pārliecināties, ka gadījumā $r = 2$ iegūsim binomiālo varbūtību sadalījumu.

Hiperģeometriskais varbūtību sadalījums

Piemērs. Kastē atrodas m lodītes, no tā m_1 baltas un m_2 melnas, $m_1 + m_2 = m$. No kastes izņem vienu lodīti, iegaumē tās krāsu, taču atpakaļ neatliek. Mēģinājums atkārtojās n reizes. Aprēķināt varbūtības notikumiem A_k - "no n izvēlētajām lodītēm k ($k \leq m_1$) baltas, $n - k, (n - k \leq m_2)$ melnas".
Ja visas lodītes ir iezīmētas, tad elementāro notikumu skaits ir $\mathcal{A}_m^n$, bet labvēlīgo notikumu skaits $\mathbf{C}_n^k \mathcal{A}_{m_1}^k \mathcal{A}_{m_2}^{n-k}$.
No kurienes,

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{\mathbf{C}_n^k \mathcal{A}_{m_1}^k \mathcal{A}_{m_2}^{n-k}}{\mathcal{A}_m^n} = \frac{\mathcal{C}_{m_2}^{n-k} \mathcal{C}_{m_1}^k}{\mathcal{C}_m^n}.$$

Hiperģeometrisko sadalījumu var vispārināt uz gadījumu, kad rezultātā ir iespējami vairāk nekā divi iznākumi. Piemēram, ja $m = m_1 + m_2 + m_3$, $n = n_1 + n_2 + n_3, n_1 \leq m_1, n_2 \leq m_2, n_3 \leq m_3$ tad varbūtība atbilstošam notikumam ir

$$p_{n_1 n_2} = \frac{\mathcal{C}_{m_1}^{n_1} \mathcal{C}_{m_2}^{n_2} \mathcal{C}_{m-m_1-m_2}^{n-n_1-n_2}}{\mathcal{C}_m^n}.$$

4.§. Neatkarīgu mēģinājumu shēma (Bernulli shēma)

Divu vai vairāku notikumu, vai arī mēģinājumu, neatkarības jēdziens ieņem centrālo vietu varbūtību teorijā. Mēģinājumus pieņemts uzskatīt par neatkarīgiem, ja katru no tiem izraisa procesi, kuri savā starpā ir fizikāli ļoti vāji saistīti. Šis fakts ir empīrisks, bet visa līdzšinējā pieredze apstiprina tādas pieejas iespējamību.
Apskatīsim n neatkarīgus mēģinājumus, kur katrs notikums A var notikt ar varbūtību p vai arī nenotikt ar varbūtību $q = 1 - p$.

Šādus neatkarīgus mēģinājumus, kur katram no tiem ir iespējami divi iznākumi attiecīgi ar varbūtībām p un q, sauc par Bernulli mēģinājumiem. Elementāru notikumu telpa neatkarīgu mēģinājumu shēmā sastāv no 2^n punktiem.

Piemēri.

1. Pareizas, t.i., simestriska monētas mešanas, kur $p = q = 0.5$ (ja monētas nav simetriska, tad mēģinājumi tāpat ir neatkarīgi, bet $p \neq 0.5$).

2. Atkārtota bumbiņu izņemšana no urnas, kurā atrodas k sarkanas un m melnas bumbiņas, ir Bernulli mēģinājumi, kur $p = \frac{k}{k+m}$ – varbūtība ka tiek izņemta sarkanā bumbiņa, $q = \frac{m}{k+m}$ – varbūtība, ka tiek neizņemta sarkanā bumbiņa.

Bernulli shēmu zināmās robežās var lietot, risinot veselu virkni ekonomisku uzdevumu, piemēram, kontrolējot produkcijas kvalitāti.

Apzīmēsim ar $P_n(m)$ – varbūtību, ka notikums A n mēģinājumos notiks m reizes un nenotiks $n-m$ reizes. $P_n(m)$ ir vienāds ar sekojoša veida nesavienojamu notikumu

$$\underbrace{A, \bar{A}, A, \ldots, A}_{m \text{ reizes} A}$$

summas varbūtību. Tā kā mēģinājumi ir neatkarīgi, tad varbūtība, ka notikt šis notikums, ir $p^m q^{n-m}$. Tātad,

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad (\ \textbf{\textit{Bernulli formula}})$$

un skaidrs, ka $\sum\limits_{m=0}^{n} P_n(m) = (p+q)^n = 1$.

Pieaugot skaitlim m, varbūtība $P_n(m)$ sākumā aug, sasniedzot maksimālo vērtību, kura var atkārtoties divas reizes, un pēc tam dilst.

Tiešām,

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$$

Lai izpētītu $P_n(m)$, kā naturāla argumenta m funkcijas izturēšanos, atliek apskatīt sekojošos gadījumus:

- $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} > 1$. Tātad, $P_n(m+1) > P_n(m)$, ja $m < np - q$, t.i., ja vesels skaitlis m ir mazāks par $np-q$, tad tam pieaugot arī varbūtība $P_n(m)$ palielinās.
- $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} = 1$. Tātad, $P_n(m+1) = P_n(m)$, ja $m = np - q$ ($np - q$ tikai retos gadījumos ir vesels skaitlis).
- $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$. Tātad, $P_n(m+1) < P_n(m)$, ja $m > np - q$.

Tādējādi, pieaugot m, funkcijai $P_n(m)$ var būt ne vairāk kā divi viens otram sekojoši maksimumi punktos $m_0 = np - q$ un $m_1 = np - q + 1 = np + p$. Ja $np - q$ nav vesels skaitlis, tad maksimums ir pie $m_0' = [np + p]$, un šo skaitli sauc par vērtību ar vislielāko varbūtību. Apzīmēsim ar μ -notikuma A realizēšanās skaitu n neatkarīgos mēģinājumos. Tad,

$$P(n_1 \leq \mu \leq n_2) = \sum_{m=n_1}^{n_2} P_n(m).$$

Pietiekoši lieliem n_1 un n_2 šīs varbūtības aprēķināšana ir apgrūtinoša. Tādēļ būtu vēlams aprēķināt šo vērtību, neizmantojot Bernulli formulu. Atbildi uz jautājumu dod lokālā Muavra -Laplasa teorēma. Varbūtības $P_n(m)$, $m = 1, ..., n$ tiek sauktas par binomiālo sadalījuma likumu.

1.Teorēma[1]. *Muavra(1730.)-Laplasa(1783.) lokālā teorēma.*

Ja varbūtība notikt notikumam A n neatkarīgos mēģinājumos nemainās un ir vienāda ar $p(0 < p < 1)$, tad $P_n(m)$ (varbūtība, ka šajos mēģinājumos notikums A iestāsies tieši m reizes) pie $n \to \infty$ apmierina sakarību

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1$$

vienmērīgi pa visiem tiem m, kuriem $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ atrodas kādā galīgā intervālā.

Pierādījums. Teorēmas pierādīšanai izmantosim Stirlinga formulu

$$s! = \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s} e^{\theta_s}, \text{ kur } |\theta_s| < \frac{1}{12s}.$$

No sakarības $m = x\sqrt{npq} + np$ seko, ka m tiecas uz bezgalību reizē ar n, ja x ir ierobežots. Izmantojot Stirlinga formulu, varam uzrakstīt

$$\begin{aligned} \sqrt{npq}P_n(m) &= \sqrt{npq}C_n^m p^m q^{n-m} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n^2pq}{m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}} \end{aligned}$$

Tā kā $a \leq x \leq b$, tad $b\sqrt{npq} + np \geq m \geq a\sqrt{npq} + np$, un

$$|\theta| := |\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}| < \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n}{n-m}\right) =$$

$$\frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) < \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + a\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - b\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right).$$

Tad, $|\theta|$ tiecas uz nulli, kad $n \to \infty$, vienmērīgi pa visiem $x \in [a,b]$.
Tātad, $e^{\theta} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.
No teorēmas noteikumiem seko, ka pietiekoši lieliem n izteiksmes
$x\sqrt{\frac{q}{np}}$ un $x\sqrt{\frac{p}{qn}}$ būs pēc patikas mazas, un mēs varam izmantot funkciju

$$\ln(1+x\sqrt{\frac{q}{pn}}),\ \ \ln(1-x\sqrt{\frac{p}{qn}})$$

izvirzījumus pakāpju rindā. Apskatām lielumu:

$$\ln A_n = \ln\left(\frac{np}{m}\right)^m + \ln\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = -m\ln\frac{m}{np} - (n-m)ln\frac{n-m}{nq} =$$
$$-(x\sqrt{npq}+np)\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$
$$-(x\sqrt{npq}+np)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{q}{np} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) -$$
$$-(nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) =$$
$$-x\sqrt{npq} - \frac{1}{2}x^2q + x\sqrt{npq} - \frac{1}{2}x^2p + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Tādējādi, $A_n = e^{-\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

Atliek novērtēt lielumu:

$$\sqrt{\frac{pq}{\frac{m(n-m)}{n^2}}} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{(x\sqrt{\frac{pq}{n}}+p)(q-x\sqrt{\frac{pq}{n}})}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

Apvienojot iegūtos rezultātus, iegūsim, ka

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = \frac{\sqrt{npq}C_n^m p^m q^{n-m}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n^2pq}{m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}e^{\theta}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

vienmērīgi pa visiem tiem m, pie kuriem $a \le m \le b$. Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Tātad, $\sqrt{npq}P_n(m)$ un $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ir asimptotiski ekvivalenti.

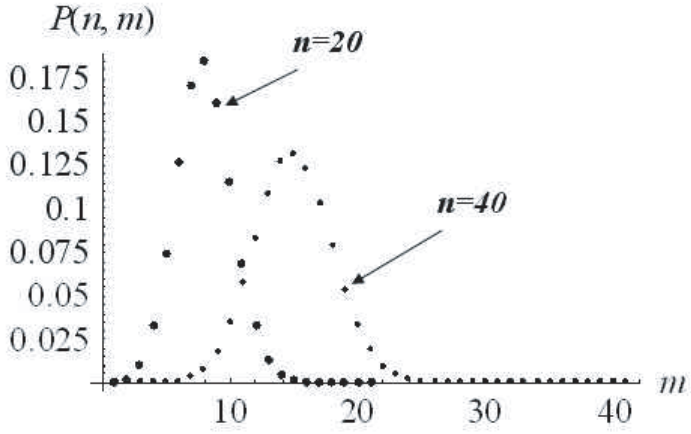
Piemērs. Atrast $P_{400}(80)$, ja varbūtība notikumam iestāties katrā eksperimentā ir 0.2.

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\varphi(x) = \frac{1}{8}\varphi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0.3989 \simeq 0.05,$$

kur

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0.2}{8} = 0, \text{ un } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ tabulēta.}$$

Paskaidrosim ģeometriski izdarītos pārveidojumus un to tuvinājumu, ko dod lokālā Muavra-Laplasa teorēma. Zīmējumā 1 attēlotas $P_n(m)$ vērtības pie dažādām veselām abscisas m vērtībām, pie $p = 0.35$.



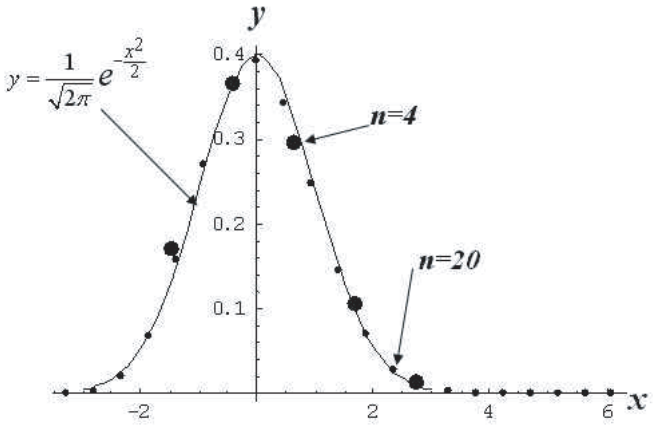
1.zīm.

No zīmējuma redzam, ka augot n, $P_n(m)$ maksimumi dilst. Pāreja no $(m, P_n(m)$ uz abscisu $x_n = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ un ordinātu $y_n = P_n(m)\sqrt{npq}$ nozīmē:

▶ koordinātu sākuma punkta pārnešanu uz punktu $(np, 0)$, kas atrodas tās abscisas tuvumā, kura atbilst maksimālajai ordinātai $P_n(m)$,

▶ grafika saspiešanai pa abscisu asi $\sqrt{npq}$ reizes,

▶ grafika izstiepšanai pa ordinātu asi $\sqrt{npq}$ reizes.



2.zīm.

Zīmējumā 2 attēlota līkne $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ar tikko aprakstītā paņēmena palīdzību tiek pārvietoti punkti $(m, P_n(m))$, tas ir, punkti $(x_n, y_n(m))$, pie kam ar $(\bullet)$ apzīmēti pārvietotie punti pie $n = 4$; ar $(\cdot)$ pie $n = 20$; pie $n = 100$ punkti saplūst ar līkni $y = \varphi(x)$. Tādā veidā $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ vērtībām no kāda galīga intervāla lielums $P_n(m)\sqrt{npq}$ asimptotiski tiecas uz funkciju $y = \varphi(x)$.

2.Teorēma. *Puasona teorēma.*

Ja varbūtība notikt notikumam A n neatkarīgos mēģinājumos tiecās uz nulli pie $n \to \infty$ tā, kā $np \to \lambda$, kur $\lambda > 0$, tad varbūtība, ka šajos mēģinājumos notikums A realizēsies tieši m reizes, ja $n \to \infty$, apmierina sakarību

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

pie jebkura $m, m = 0, 1, \ldots$.

Pierādījums. Izmantojot Bernulli formulu, varam uzrakstīt

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} =$$
$$\frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{n^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)p^m q^{n-m} =$$
$$\frac{1}{m!}(np)^m\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) =$$
$$\frac{1}{m!}(np)^m\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n}(1-p)^{-m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Tālāk, pie jebkura fiksēta m pie $n \to \infty \Rightarrow$
$p \to 0,\ np \to \lambda,\ (1-p)^m \to 1,\ \left(1-\frac{np}{n}\right) \to e^{-\lambda}$.

Tādējādi lieliem n un maziem p var izmantot tuvinātu formulu

$$P_n(m) \simeq \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \text{ kur } \lambda = np.$$

Praktiski šo formulu izmanto, ja $n > 100, np < 30$, pie tam p jābūt relatīvi mazam.

Piemērs. Sistēma sastav no 10000 elementiem, no kuriem katrs laikā T neatkarīgi no citiem var iziet no ierindas ar varbūtību 0.00005. Atrast varbūtību, ka laikā T izies no ierindas ne vairāk kā divi elementi.

Atrisinājums. Apzīmēsim mūs interesējošo notikumu ar A. Tad

$\mathbb{P}(A) = \mathrm{P}_n(0) + \mathrm{P}_n(1) + \mathrm{P}_n(2)$, kur $n = 10000$, $p = 0.00005$, $np = 0.5$,

$\mathrm{P}_{10000}(0) = e^{-0.5}$, $\mathrm{P}_{10000}(1) = 0.5 \cdot e^{-0.5}$, $\mathrm{P}_{10000}(2) = \frac{0.5^2}{2!}e^{-0.5}$. No kurienes,

$\mathrm{P}(A) = e^{-0.5}\left(1 + 0.5 + \frac{0.25}{2}\right) = 1.625 \cdot e^{-0.5}$.

3.Teorēma[1]. *Integrālā Muavra-Laplasa teorēma.*

Ja μ ir skaitlis, kas rāda cik reizes notikums iestājies n neatkarīgos mēģinājumos, katrā no kuriem notikuma varbūtība ir p, pie kam $0 < p < 1$, tad vienmērīgi attiecībā pret a un b $(-\infty \le a \le b \le \infty)$ pie $n \to \infty$ ir spēkā sakarība

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (*)$$

Šī teorēma seko no centrālās robežteorēmas, kura tiks pierādīta velāk.

Piezīme. Jāatzīmē, ka teorēma ir spēkā arī gadījumā, kad izteiksmes (*) kreisejā pusē nevienādības ir gan stingras gan nestingras.

Integrālās Muavra-Laplasa teorēmas pielietošana

1. Lai kāds arī nebūtu $\varepsilon > 0$, varbūtība, ka $|\frac{\mu}{n} - p| < \varepsilon$ tiecas uz 1, ja $n \to \infty$.
Pēc integrālās Muavra-Laplasa teorēmas

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|\frac{\mu}{n} - p| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

Tikko pierādītais apgalvojums tiek saukts par lielo skaitļu likumu vai par Bernulli teorēmu.

2. Atradīsim varbūtību, kad notikuma A biežums n neatkarīgos meģinājumos atšķiras no notikuma A varbūtības ne vairāk, kā par α.

$$\mathrm{P}\left(|\frac{\mu}{n}-p|<\alpha\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)\simeq$$

$$\simeq \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

3. Kāds minimālais mēģinājumu skaits ir jāizdara, lai ar varbūtību, ne mazāku par β, notikuma biežums atšķiras no notikuma varbūtības ne vairāk kā par α.
Lai noteiktu n pielietosim Muavra-Laplasa teorēmu nevienādībai

$$\mathrm{P}(|\frac{\mu}{n}-p|<\alpha)\geq\beta.$$

Iegūsim

$$\mathrm{P}\left(|\frac{\mu}{n}-p|<\alpha\right)\simeq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\geq\beta.$$

4. Pie dotā skaita n un varbūtības β atrast robežas, kādās mainās $|\frac{\mu}{n}-p|$.
Pielietojot integrālo Muavra-Laplasa teorēmu α noteikšanai, iegūstam vienādojumu

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\beta.$$

Lai skaitliski atrisinātu visus šos uzdevumus, ir jāmāk aprēķināt integrāļa $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ vērtības visiem x, un jāmāk arī risināt apgriezto uzdevumu, t.i., zinot $\Phi(x)$ atrast x. Tā kā integrālis pie $0<x<\infty$ galīgā veidā ar elementārām funkcijām nav izsakāms, bet integrāļa nozīme ir ļoti liela, tos tabulē.
Šis integrālis ir funkcija no integrācijas augšējās robežas x.

Zemintegrāļa funkcija

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

nepārtraukta uz visas x-ass; pozitīva visām x vērtībām; $y \to \infty$ pie $x \to \infty$; x-ass ir grafika horizontālā asimptota; grafiks ir simetrisks attiecība pret taisni $x = 0$ (pāra funkcija);

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ir tabulēta un arī iekļauta visās matemātiskās statistikas datoru programmās.

Funkcija $\Phi(x)$ tiek saukta par ***Laplasa funkciju***. Noskaidrosim Laplasa funkcijas galvenās īpašības.

1.$\Phi(x)$ ir definēta un nepārtraukta uz visas x-ass.

2.$\Phi(x)$ ir nepāra funkcija, t.i., $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

jo $\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

3.$\Phi(0) = 0$.

4.$\Phi(\infty) = 0.5$. Tas izriet no tā, ka $J := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Aplūkosim integrāli

$$J^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2+y^2}{2}} dz dy.$$

Pārejot uz polārajām koordinātām, kur $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, iegūstam

$$J^2 = \iint\limits_D r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d(\frac{r^2}{2}) = 2\pi.$$

No tā,

$$F(\infty) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1, \;\; F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.5 + \Phi(x),$$

$$\Psi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi(x).$$

Piemēri.

1. Katrā no 1000 neatkarīgiem mēģinājumiem notikums A var iestāties ar varbūtību 0.6. Atrast varbūtību, ka notikums iestāsies
a) tieši 600 reizes; b) ne mazāk kā 600 reizes un ne vairāk kā 650 reizes?

Atrisinājums.

$$a) \quad P_{1000}(600) \simeq \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} f\left(\frac{600 - 1000 \cdot 0.6}{\sqrt{1000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right) \simeq$$
$$\simeq \frac{1}{15.5} f(0) \simeq 0.064 \cdot 0.4 \simeq 0.026.$$
$$b) \quad \mathbb{P}(600 \leq \mu \leq 650) \simeq$$
$$\simeq \mathbb{P}\left(\frac{600 - 1000 \cdot 0.6}{\sqrt{1000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} \leq \frac{\mu - 1000 \cdot 0.6}{\sqrt{1000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} \leq \frac{650 - 1000 \cdot 0.6}{\sqrt{1000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right) \simeq$$
$$\simeq \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{\mu - 600}{15.5} \leq 3.22\right) \simeq \Phi(3.22) = 0.49936.$$

2. Cik reizes jāmet monēta, lai ar varbūtību, ne mazāku par 0.95, ģerboņa uzkrišanas relatīvais biežums atšķirtos no 0.5 pēc absolūtās vērtības ne vairāk par 0.04?

Atrisinājums.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mu}{n} - 0.5\right| < 0.04\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mu - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right| < \frac{0.04 \cdot \sqrt{n}}{0.5}\right) =$$
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mu - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right| < 0.08 \cdot \sqrt{n}\right) \geq 0.95 \Rightarrow$$
$$0.08\sqrt{n} \geq 1.96 \;\Rightarrow\; \sqrt{n} \geq 24.5 \;\Rightarrow\; n > 600.25.$$

Monēta jāmet vismaz 601 reizes.

Varbūtību teorijas pamati

Izejas moments varbūtību teorijā ir pieņēmums, ka var definēt kopu Ω un viņas apakškopu klasi $\mathcal{F}$ tādējādi, ka jebkuru notikumu A, par kuru varbūtību ir jēga runāt, var interpretēt kā Ω apakškopu, kura ieiet klasē $\mathcal{F}$. Pie šādas interpretācijas Ω elementus sauksim par elementāriem notikumiem, Ω par elementāro notikumu telpu. Turpmāk, notikumus un to summas, starpības, reizinājumus identificēsim ar atbilstošām kopām un ar to apvienojumiem, starpībām, šķēlumiem, pāreju uz pretējo notikumu ar atbilstošās kopas papildinājumu.
Katram notikumam A no $\mathcal{F}$ piekārtojam nenegatīvu skaitli $\mathbb{P}(A)$, ko sauc par notikuma A varbūtību.
Kopu klasei $\mathcal{F}$ un kopu funkcijai $\mathbb{P}(A)$ uzliksim sekojošos noteikumus:

$\mathbb{A}1$. Ω- notikums. Sanumurējama skaita notikumu summa, notikumu starpība ir notikumi.

$\mathbb{A}2$. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, sanumurējama skaita nesavienojamu notikumu summas varbūtba vienāda ar šo notikumu varbūtību summu.

1 §. Nepieciešamās ziņas no mēra teorijas

Ω– patvaļīga telpa.

1.Definīcija. $\mathcal{A}$ sauc par ***algebru***, ja

a)$\Omega \in \mathcal{A}$;
b)$\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$; ;
c)$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$

2.Definīcija. $\mathcal{F}$ sauc par $\sigma-$ ***algebru*** , ja b) vietā ir spēkā

b)$A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup\limits_i \in \mathcal{F}$

3.Definīcija. Pāri $< \Omega, \mathcal{F} >$ sauc par ***mērojamu telpu***.

Pieņemsim, ka $\mathcal{K}$– kopas Ω apakškopu klase.

4.Definīcija. $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ sauc par ***minimālo σ-algebru***, kura satur $\mathcal{K}$, ja
a)$\mathcal{F}(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$,
b) ja σ– algebra $\mathcal{F}' \supset \mathcal{K}$ tad $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}(\mathcal{K})$.

5.Definīcija. Kopu klasi $\mathcal{M}$, kura satur klasē piederošu monotono virkņu robežas, sauc par ***monotonu klasi***.

Acīm redzami, kopas Ω visu apakškopu klase ir monotona klase; monotonu klašu klase, kura satur doto klasi $\mathcal{K}$, nav tukša, jo σ- algebra, kura satur $\mathcal{K}$, arī ir monotona klase.

1.Teorēma [4]. Minimālā monotonā klase $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, kura satur algebru $\mathcal{A}$, sakrīt ar minimālo σ -algebru $\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

6.Definīcija. Ja $\Omega = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{K}$ –visu pus vaļēju intervālu klase, tad $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{K})$ sauc par ***Boreļa kopu*** σ– ***algebru***. ($\mathcal{B}$ ir minimāla σ– algebra, kura satur klasi $\mathcal{K}$).

Vaļēji, slēgti intervāli, racionālo skaitļu kopa, iracionālo skaitļu kopa ir Boreļa kopas.

7.Definīcija. Nenegatīvu kopu funkciju μ, kura definēta σ-algebrā sauc par ***mēru***, ja

a) $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ (σ- aditīvitāti)

b) $\mu(\emptyset) = 0$.

8.Definīcija. Ja $\mu(\Omega) < \infty$, tad mēru sauc par galīgu.

9.Definīcija. Kopu funkciju $\mathbb{P}$, kura katrai kopai no σ-algebras $\mathcal{F}$ piekārto reālu skaiti, sauc par ***varbūtību mēru***, ja izpildās šādas īpašības

P1. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \geq 0$

P2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

P3. Ja $A_i \in \mathcal{F}, i \geq 1; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, tad $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

10.Definīcija. Trīs objektus $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ sauc par ***varbūtību telpu***.

Būtiski(!): varbūtību mērs, kas tiek definēts algebrā $\mathcal{A}$, viennozīmgi nosaka varbūtību mēru $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, kuru rada $\mathcal{A}$. Citiem vārdiem, ir pietiekami varbūtību telpas $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ izveidošanai uzdot varbūtību algebrā $\mathcal{A}$, kura radītu $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. (Karateodora teorēma).

Tādējādi, nonākam pie nepieciešamības pētīt kopu klases: algebra, σ-algebra, un σ- aditīvu kopu funkciju $\mathbb{P}$.

2.§. Varbūtību teorijas aksiomas[1] (Kolmogorova aksiomas)

Dota telpa $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$. No realitātes seko, ka ja $\mathbb{P}(M) = 0$, tad visas kopas M apakškopas jābūt neiespējami notikumi. Pienākam pie ne-

pieciešamības konstruēt σ-algebru $\mathcal{F}'$, kura satur $\mathcal{F}$ kopu, kur mērs $\mathbb{P}$ ir nulle, visas apakškopas. Lai to izdarītu pie $\mathcal{F}$ pievienosim visas tās apakškopas un pēc tam iegūto klasi papildināsim līdz σ- algebrai $\mathcal{F}'$.

1.Definīcija. Varbūtību mēru $\mathbb{P}'$, kas definēts $\mathcal{F}'$ sauc par ***pilnu***, ja no tā kā $M \in \mathcal{F}'$, $\mathbb{P}'(M) = 0, N \subset M$ seko $N \in \mathcal{F}'$ $(\mathbb{P}'(N) = 0)$.

Aplūkosim σ-algebru $\mathcal{F}'$ar pilnu mēru izveidošanu.

2.Definīcija. $N \subset \Omega$ sauc par ***nulles kopu***, ja eksistē
$B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(B) = 0, N \subset B$ (N var pārklāt ar kopu B no $\mathcal{F}$, kuras mērs ir nulle).
Apzīmēsim ar $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega$: $\exists B \in \mathcal{F} | N \subset B, \mathbb{P}(B)=0\}$.
Konstruēsim $\mathcal{F}' = \{A \cup N : A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$ un definēsim σ - algebrā $\mathcal{F}'$ kopu funkciju $\mathbb{P}'(A \cup N) = \mathbb{P}(A)$

1.Teorēma [4].

1. $\mathcal{F}'$– minimāla σ-algebra, kas satur $\mathcal{F}$ un $\mathcal{N}$.

2. $\mathbb{P}'$– ir korekti definēts varbūtību mērs σ - algebrā $\mathcal{F}'$.

3. $< \Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P}' >$ ir varbūtību telpa ar pilnu mēru, vai telpas $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ papildinājums.

Pierādījums.

1. $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, tā kā no $A \in \mathcal{F}$ seko, ka $A = A \cup \emptyset$, kur $\emptyset \in \mathcal{N}$,
$\mathcal{F}' \supset \mathcal{N}$, tā kā $\forall N \in \mathcal{N}$ var izteikt kā $N = \emptyset \cup N$, kur $\emptyset \in \mathcal{F}$,
$\mathcal{F}'$ – pēc konstrukcijas ir minimālā klase, kas satur $\mathcal{N}$ un $\mathcal{F}$ **.**
Atliek pierādīt, ka $\mathcal{F}'$ ir σ- algebra (a, b, c no $\sigma-$algebras definīcijas).

(a) acīm redzami ir spēkā.

(c) ja $A \in \mathcal{F}'$, tad $A := A' \cup N'$, kur $A' \in \mathcal{F}$**,** $N' \in \mathcal{N}$ un

$\exists B \in \mathcal{F}$: $N' \subset B, \mathbb{P}(B)=0$. Tātad

$\overline{A} = \overline{A' \cup N'} = \overline{A' \cup B} \cup (B \cap \overline{A' \cup N'}) =: A'' \cup N''$, kur

$A'' = \overline{A' \cup B} \in \mathcal{F}$, $N'' \in \mathcal{N}$, $N'' \subset B$. No kurienes seko, ka $\overline{A} \in \mathcal{F}'$.

(b) Pieņemsim, ka $A_i \in \mathcal{F}\,', i = 1, 2, ...$, tad,

$\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i = \bigcup\limits_{i\geq 1} (A_i' \cup N_i') = (\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i') \cup (\bigcup\limits_{i\geq 1} N_i')$, kur $\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i' =: A \in \mathcal{F}$ tā kā

$A_i' \in \mathcal{F}$ $\forall\, i \geq 1$; $\bigcup\limits_{i\geq 1} N_i' \subset \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i' \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B_i') = 0$ $\forall\, i \geq 1$.

Izmantojot mēra pusaditivitāti, iegūstam

$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i\geq 1} B_i') \leq \sum\limits_{i\geq 1} \mathbb{P}(B_i') = 0.$

Tātad, $N := \bigcup\limits_{i\geq 1} N_i' \in \mathcal{N}$ un $\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i = A \cup N \in \mathcal{F}'$.

2. Pieņemsim, ka $A \in \mathcal{F}'$ var izteikt $A = A_1 \cap N_1 = A_2 \cap N_2$, kur $A_i \in \mathcal{F}$, $N_i \in \mathcal{N}, i = 1, 2$.
Mērs tika definēts korekti, ja $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}'(A_1 \cap N_1) = \mathbb{P}'(A_2 \cap N_2)$, kas ir ekvivalenti sakarībai $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$.
Lai to pierādītu analizēsim

$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1) \subset [(A_1 \cup N_1) \backslash A_2] \cup [(A_2 \cup N_2) \backslash A_1] =$

$(A_2 \cup N_2 \backslash A_2) \cup (A_1 \cup N_1 \backslash A_1) \subset N_2 \cup N_1.$

Tādējādi

$A_1 \Delta A_2 \subset N_2 \cup N_1 \subset B_2 \cup B_1,$

$\mathbb{P}(A_1 \Delta A_2) \leq \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \Delta A_2) = 0$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$, tā kā

$A_1 \backslash A_2 \subset A_1 \Delta A_2 \subset B_2 \cup B_1 \Rightarrow A_1 \backslash A_2 \in \mathcal{F}$ ar $\mathbb{P}(A_1 \backslash A_2) = 0$, līdzīgi

$A_2 \backslash A_1 \in \mathcal{F}$ ar $\mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0.$
No kurienes

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}[(A_1 \backslash A_2) \cup A_1 A_2] = \mathbb{P}(A_1 A_2), \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}[(A_2 \backslash A_1) \cup A_1 A_2] = \mathbb{P}(A_1 A_2).$$

Lai pierādītu teorēmas 2.punktu paliek pārbaudīt mēra $\mathbb{P}'$ σ- aditivitāti. Pieņemsim, ka $A_i \in \mathcal{F}', i \geq 1, A_i \cup A_j = \emptyset$ visiem i≠j, tad

$$\mathbb{P}'\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \mathbb{P}'\left(\bigcup_{i\geq 1} (A_i' \cup N_i')\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \bigcup\limits_{i\geq 1} A_i' = A; \\ \\ \bigcup\limits_{i\geq 1} N_i' = N \subset \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i,\ \mathbb{P}'\left(\bigcup\limits_{i\geq 1} B_i\right) \leq \sum\limits_{i\geq 1} (B_i) = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \mathbb{P}'(A \cup N) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i'\right) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i') = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}'(A_i' \cup N_i') = \mathbb{P}\,'(A_i)$$

3. Atliek pierādīt, ka $< \Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P}' >$ ir varbūtību telpa ar pilnu mēru.

$\mathbb{P}'(A \cap N) = 0$ un $C \subset A \cup N \subset A \cup B, \mathbb{P}(B) = 0, \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{N} \Rightarrow C \in \mathcal{F}'$.

Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

3.Definīcija. Pilnu varbūtību mēru sauc par ***varbūtību***.

Lai konstruētu σ-algebru ar pilnu mēru pēc dotās algebras $\mathcal{A}$ ar "elementāru mēru" $\mathbb{P}$ ir nepieciešams:

1. pie algebras $\mathcal{A}$ pievienot visas sanumurējama skaita algebras kopu summas un notikumu papildinājumus, pēc tam iegūto klasi papildināt līdz σ-algebrai $\mathcal{F}(\mathcal{A})$,

2. izmantojot elementārā mēra īpašības (Karateodora teorēma) uzdot varbūtību mēru visām $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ kopām,

3. pie $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ pievienot visas tās $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ kopu apakškopas, kuru mērs ir nulle, un pēc tam iegūto klasi papildināt līdz σ-algebrai.

Tādā veidā iegūta σ-algebra $\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ būs minimālā un ar pilnu mēru $\mathbb{P}'$.

Tātad mums izdevies no algebras $\mathcal{A}$ ar σ-aditīvu mēru $\mathbb{P}$ tajā pāriet uz σ-algebru $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ ar pilnu mēru. Tālāk, apskatot varbūtību telpu $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, mēs uzskatīsim, ka ir izdalīta Ω apakškopu minimālā σ-algebra ar pilnu mēru $\mathbb{P}'$ uz tās (turpmāk svītriņu pie $\mathcal{F}$ un $\mathbb{P}$ neliksim). Tādējādi,

uzdot varbūtību telpu nozīmē uzdot σ -aditīvu nenegatīvu pilnu mēru uz $< \Omega, \mathcal{F} >$, ka $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Šādā veidā varbūtības teorijas aksiomas noformulējis A.N. Kolmogorovs.

Piemērs. Eksperiments sastāv no punkta gadījuma mešanas uz [a,b]. Tad, visu iespējamo eksperimenta iznākumu kopa ir $\Omega = [a, b]$. Izteiksme "izdarīts mēģinājums" nozīmē, ka ir izvēlēts "uz labu laimi" punkts $\omega \in \Omega$. σ-algebru $\mathcal{F}$ izveidosim no visām tām kopām par kuru garumu ir jēga runāt, piemēram, no visām pēc Boreļa izmērojamām segmenta $[a, b]$ apakškopām. Katra notikuma varbūtību ņemsim vienādi proporcionāli atbilstošām intervāla garumu (Lebega mērs uz taisnes). Skaidrs, ka visas aksiomas šajā gadījumā izpildīsies, un mēs esam ieguvuši tā saukto vienmērīgo varbūtību sadalījumu intervālā $[a, b]$.

Līdzīgi var apskatīt punkta gadījuma mešanu taisnstūrī $[a, b] \times [c, d]$ Šajā gadījumā σ-algebra satur kopas, par kuru laukumu ir jēga runāt. Katra notikuma varbūtību ņemsim vienādi proporcionāli atbilstošā laukuma lielumam (vienmērīgo varbūtību sadalījums taisnstūrī).
Viegli pārbaudīt, ka diskrētā varbūtību telpa iekļaujas kā speciāls gadījums apskatītajā vispārīgajā shēmā.

Gadījuma lielumi

1.§. Mērojamība attiecībā pret σ-algebru

Pieņemsim, ka $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ ir patvaļīga varbūtību telpa. Viens no svarīgākajiem jēdzieniem varbūtību teorijā ir gadījuma lieluma jēdziens. Gadījuma lielums $\xi(\omega)$ ir skaitlis, kurš tiek piekārtots katram $\omega \in \Omega$. Tomēr, ne jebkuru funkciju, kas definēta kopā Ω , var uzskatīt par gadījuma lielumu. Apskatot gadījuma lielumus nākas atbildēt uz jautājumu: kāda varbūtība, ka gadījuma lieluma vērtības pieder vienai vai otrai kopai. Tātad, jābūt drošiem, ka pietiekami plaši reālo skaitļu kopas apakškopu klasei $\{B\}$ apakškopa $\{\ \omega\colon\ \xi(\ \omega) \in B\}$ būs notikums, tas nozīmē ka $\{\ \omega\colon\ \xi(\ \omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, jo tikai tādā gadījumā var runāt par tā varbūtību. Visas kopas, kuras izraisa praktisku interesi, ir Boreļa kopas, tādēļ par klasi $\{B\}$ varam ņemt Boreļa kopu σ -algebru $\mathcal{B}$.

1.Definīcija. Funkciju $\xi(\ \omega)$, kas attēlo Ω uz reālo skaitļu kopu R, ***sauc par mērojamu attiecībā pret σ-algebru $\mathcal{F}$,*** ja jebkuras Boreļa kopas A pirmtēls $\xi^{-1}(A) = \{\omega : \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ un turpmāk to apzīmē $\xi \sim \mathcal{F}$.

2.Definīcija. Par īpašību, kas ir pareiza visiem telpas Ω punktiem, izņemot varbūt kādu punktu kopu, kuras varbūtību mērs ir 0, saka, ka tā ir ***pareiza "gandrīz visur"***, vai "ar varbūtību 1".

3.Definīcija. Patvaļīgu $\mathcal{F}$-mērojamu funkciju $\xi(\ \omega)$, definētu uz $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, kuras vērtību apgabals ir reālo skaitļu apakškopā un kura ir gandrīz visur galīga, sauc ***par gadījuma lielumu***.

Ja $\xi(\ \omega)$ attēlo Ω uz R^n, tad $\xi(\ \omega)$ sauc par ***n- dimensiju gadījuma*** lielumu.

1.Teorēma [3].
$\xi \sim \mathcal{F}$ tad un tikai tad, ja jebkuram c $\in$R izpildās $\{\ \omega\colon\ \xi\ (\ \omega) < c\} \in \mathcal{F}$, jeb $\xi^{-1}(\text{-}\infty, c) \in \mathcal{F}$.

Pierādījums. Tā kā $(\text{-}\infty, c)$ ir Boreļa kopa, tad no $\xi \sim \mathcal{F}$(1.definīcija) seko, ka $\xi^{-1}(\text{-}\infty, c) \in \mathcal{F}$.
Pieņemsim, ka $\xi^{-1}(\text{-}\infty, c) \in \mathcal{F}$. Pierādīsim, ka $\xi \sim \mathcal{F}$, jeb, ka jebkuras Boreļa

kopas $A \in \mathcal{B}$ pirmtēls $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.
Apzīmēsim ar $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbf{R} : \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ un pierādīsim, ka $\mathcal{A}$ ir σ-algebra, kas satur Boreļa kopu algebru.
Vispirms pierādīsim, ka tā ir σ-algebra. Tiešām,

$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ un } \overline{\xi^{-1}(A)} \in \mathcal{F} \text{ tad}$$

$$\xi^{-1}(\bar{A}) = \overline{\xi^{-1}(A)} \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \in \mathcal{A};$$

$$\{A_i, i \geq 1\}, A_i \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{F} \text{ un } \bigcup_{i\geq 1} \xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{F} \text{ tad},$$

$$\xi^{-1}\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) = \bigcup_{i\geq 1} \xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A};$$

$$\xi^{-1}(R) = \Omega \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad R \in \mathcal{A}.$$

Tātad, $\mathcal{A}$ ir σ-algebra.
Paliek pierādīt, ka tā satur Boreļa kopu σ-algebru. Tas izpildās, jo

a)$[a, c) \in \mathcal{A}$, tā kā $\xi^{-1}([a, c)) = \xi^{-1}((-\infty, c)) \;\setminus\; \xi^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$,

b)Boreļa kopu σ-algebra ir minimāla σ-algebra, kas satur visu pus vaļēju intervālu klasi.
Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Apzīmēsim ar $\mathcal{F}_\xi$ klasi, kas sastāv no notikumiem $\xi^{-1}(A)$, kur A – Boreļa kopa. Izmantosim, ka pāreja no kopas A uz pirmtēlu kopu $\xi^{-1}(A)$ saglabā kopu darbības, t.i.

$$\xi^{-1}\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) = \bigcup_{i\geq 1} \xi^{-1}(A_i), \quad \xi^{-1}\Big(\bigcap_{i\geq 1} A_i\Big) = \bigcap_{i\geq 1} \xi^{-1}(A_i), \quad \xi^{-1}(\bar{A}) = \overline{\xi^{-1}(A)}.$$

Tad $\{\xi^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{F}_\xi$ veido σ-algebru, un to sauc par ***minimālo σ-algebru, attiecībā pret kuru mērojams gadījuma lielums*** $\xi(\omega)$.

No pašas $\mathcal{F}_\xi$ konstrukcijas redzams, ka, ja $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_\xi$, tad arī spēkā $\xi \sim \mathcal{F}$.

4.Definīcija. Par kopas $A \subset \Omega$ ***indikatoru*** sauc funkciju

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}.$$

Viegli pārbaudīt, ka

$$\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega), \quad \chi_{\bar{A}}(\omega) = 1 - \chi_A(\omega),$$

$$\chi_{A\cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - \chi_{A\cap B}(\omega),$$

$$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(\omega) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(\omega), \quad \chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(\omega) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(\omega).$$

5.Definīcija. Funkciju $\xi(\omega)$, definētu kopā Ω, sauc par ***vienkāršu***, ja var atrast galīga skaita nešķeļošās kopas $A_j \subset \Omega$, un $\lambda_j \in \mathbf{R}$, kur $j = 1, 2, ..., n$, ka

$$\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \chi_{A_j}(\omega).$$

Apskatīsim funkciju klasi $\aleph$, kas sastāv no algebras $\mathcal{A}$ kopu indikatoriem, un noslēgtu attiecībā pret lineārām kombinācijām un robežpārejām.

Lemma[3]. Visu $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ kopu indikatori pieder klasei $\aleph$.

2.Teorēma[3],[6]. Lai funkcija $x(\omega)$, kas tiek definēta telpā $< \Omega, \mathcal{F} >$ būtu mērojama attiecībā pret σ-algebru $\mathcal{F}$, nepieciešami un pietiekami, lai $x(\omega)$ būtu klases $\aleph$ elements, kur funkciju klase $\aleph$ sastāv no $\mathcal{F}$ elementu indikatoriem, vienkāršām funkcijām un vienkāršo funkciju robežām, ja tās eksistē.

Sekas.
No teorēmas nepieciešamības pierādījuma izriet apgalvojums, ka nenegatīvam gadījuma lielumam $\xi(\omega)$ eksistē mērojamu vienkāršu funkciju virkne $\{\xi_n(\omega)\}_{n\geq 1}$, kas no apakšas tiecas gandrīz visur uz $\xi(\omega)$ ja n$\to\infty$. No kurienes seko, ka jebkuru funkciju $\xi(\omega)$, kas mērojama attiecībā pret σ-algebru $\mathcal{F}$, var izteikt kā vienkāršu funkciju robežu, jo

$\xi(\omega) = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega)$, kur

$\xi^+(\omega) = \max(0, \xi(\omega)), \ \ \xi^-(\omega) = \max(0, -\xi(\omega))$.

2.§. Ekvivalenti gadījuma lielumi

Telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ dota σ-algebra $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ un σ-algebra $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$. Pieņemsim, ka katrai $A \in \mathcal{F}_1$ eksistē kopa $B \in \mathcal{F}_2$ tāda, ka $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$, tad ir spēkā

1.Teorēma[3],[6].

Ja $\xi(\omega) \sim \mathcal{F}_1$, tad eksistē $\eta(\omega) \sim \mathcal{F}_2$ tāda, ka $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 0$.

Pierādījums. Apzīmēsim ar H_1 visu mērojamu attiecībā pret $\mathcal{F}_1$ funkciju klasi, kam ir spēkā teorēmas apgalvojums. Pierādīsim, ka klase H_1 ir noslēgta attiecībā pret lineārām kombinācijām un robežpārejām.
Acīm redzami, ka klase ir noslēgta attiecībā pret reizināšanu ar skaitli a. Ja $\xi(\omega) \in H_1$, tad eksistē $\eta \sim \mathcal{F}_2$:

$\mathrm{P}\{\omega : a\xi(\omega) \neq a\eta(\omega)\}= \mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\}=0.$

Ja $\xi_1(\omega) \in H_1$ un $\xi_2(\omega) \in H_1$, tad atradīsies tādas $\eta_1(\omega) \sim \mathcal{F}_2$ un $\eta_2(\omega) \sim \mathcal{F}_2$, ka

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi_1(\omega) \neq \eta_1(\omega)\} = \mathbb{P}\{\omega : \xi_2(\omega) \neq \eta_2(\omega)\} = 0.$$

Tā kā
$\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) \sim \mathcal{F}_1, \eta_1(\omega) + \eta_2(\omega) \sim \mathcal{F}_2$, iegūstam

$$\{\omega : \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) \neq \eta_1(\omega) + \eta_2(\omega)\} \subset \{\omega : \xi_1(\omega) \neq \eta_1(\omega)\} \cup \{\eta_1\omega) \neq \eta_2(\omega)\},$$

līdz ar to
$\mathbb{P}\{\omega : \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) \neq \eta_1(\omega) + \eta_2(\omega)\} = 0.$

Atliek pierādīt, ka H_1 ir noslēgta attiecībā pret robežpārejām katrā punktā. Lai $\xi(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$, $\xi_n(\omega) \in H_1$, $\forall\, n \geq 1$. Katrai $\xi_n(\omega)$ atradīsies

$$\eta_n(\omega) \sim \mathcal{F}_2 : \mathbb{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \neq \eta_n(\omega)\} = 0, \forall\, n \geq 1, \text{un}\, \eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) \sim \mathcal{F}_2.$$

Tādējādi,

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} \leq \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\omega : \xi_n(\omega) \neq \eta_n(\omega)\}) \leq$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \neq \eta_n(\omega)\} = 0.$$

Pierādīsim tagad, ka $H_1 = \aleph$, kur $\aleph$- visu mērojamu attiecībā pret $\mathcal{F}_1$ funkciju klase. Pieņemsim, ka $\xi(\omega) = \chi_A(\omega)$, kur $A \in \mathcal{F}_1$. Par $\eta(\omega)$ ņemam $\chi_B(\omega)$, kur $B \in \mathcal{F}_2$: $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$. Tad

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = \mathbb{P}(A\Delta B) = 0.$$

Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Turpmāk funkcijas, kuras atšķiras tikai kopās ar mēru nulle, vairs neatšķirsim un sauksim to par ***ekvivalentām.***

1. Sekas. Pieņemsim, ka

$\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta_1(\omega)\} =: N_1,\ \{\omega : \xi(\omega) \neq \eta_2(\omega)\} =: N_2,\ \mathbb{P}(N_i) = 0, i = 1, 2,$

tad $\mathbb{P}(\{\omega : \eta_1(\omega) \neq \eta_2(\omega)\}) = 0.$

Tiešām,

$$\mathbb{P}(\{\omega : \eta_1(\omega) \neq \eta_2(\omega)\}) = \mathbb{P}(\eta_1 \neq \eta_2 | \eta_1 = \xi)\mathbb{P}(\eta_1 = \xi) +$$

$$+\mathbb{P}(\eta_1 \neq \eta_2 | \eta_1 = \xi)\mathbb{P}(\eta_1 \neq \xi) = \mathbb{P}(\eta_1 \neq \eta_2 | \eta_1 = \xi) = \mathbb{P}(N_1) = 0.$$

2. Sekas. Teorēma ļauj darboties ar gadījuma lielumiem, neatšķirot σ-algebras $\mathcal{F}$ un $\mathcal{F}'$ ($\mathcal{F}' - \sigma$-algebra ar pilnu mēru $\mathbb{P}'$).

Pēc $\mathcal{F}'$ konstrukcijas $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ un katram $B \supset \mathcal{F}'$ eksistē $A \supset \mathcal{F} :\ \mathbb{P}'(A \Delta B) = 0$. Tātad, izpildās iepriekšējās teorēmas nosacījumi, un katram $\eta \sim \mathcal{F}'$ eksistē $\xi \sim \mathcal{F} : \mathbb{P}'(\eta \neq \xi) = 0$. Tādējādi, jebkurai Boreļa kopai B ir spēkā

$$\mathbb{P}'(\eta \in B) = \mathbb{P}'(\eta \in B | \eta = \xi)\mathbb{P}'(\eta = \xi) + \mathbb{P}'(\eta \in B | \eta \neq \xi)\mathbb{P}'(\eta \neq \xi) =$$

$$= \mathbb{P}'(\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi \in B).$$

3.§. Minimālā σ-algebra attiecībā pret kuru mērojams gadījuma lielums[3]

Kā jau minējām, minimālā σ-algebra $\mathcal{F}_\xi$, kura asociēta ar gadījuma lielumu $\xi(\omega)$, ir klase, kas sastāv no notikumiem $\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$, kur B – Boreļa kopa. Jau no $\mathcal{F}_\xi$ konstrukcijas redzams, ka kopa $\{\omega : \xi(\omega) = b\}$, kur $b \in \mathbf{R}, \mathbf{R}$– reālo skaitļu kopa, ir minimāls, nesadalāms $\mathcal{F}_\xi$ elements.

1. *Piemērs.* Apskatīsim gadījumu, kad $\Omega = \mathbf{R}, \mathbf{R}$– reālo skaitļu kopa, $\mathcal{F}$ - Boreļa kopu σ-algebra, $A \in \mathcal{F}$,

$$\xi(\ \omega) = \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}.$$

Tad $\mathcal{F}_\xi$, acīmredzot, sastāvēs no 4 kopām: $\Omega, \emptyset, A, \bar{A}$. "Smalkākus" notikumus šādi definēts gadījuma lielums no $\mathcal{F}$ izdalīt nespēj. Viegli redzēt, ka gadījuma lielums $\xi(\ \omega)$ būs mērojams attiecībā pret jebkuru citu "bagātāku" σ-algebru $\mathcal{F}_1$, tā kā, ja $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}_1,\ B$ – Boreļa kopa, tad $\{\ \omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_1$.

1.Definīcija. Divas σ-algebras $\mathcal{F}_1$ un $\mathcal{F}_2$ sauc par ***neatkarīgām***, ja

jebkuram $A \in \mathcal{F}_1$ un $B \in \mathcal{F}_2$ izpildās $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.
Apzīmēsim ar $\mathcal{F}_\xi, \mathcal{F}_\eta$ - minimālās σ-algebras, asociētas ar gadījuma lielumiem ξ un η.

2.Definīcija. Gadījuma lielumi ξ un η ir ***neatkarīgi***, ja minimālās σ-algebras, asociētas ar gadījuma lielumiem ξ un η ir neatkarīgas.

3.Definīcija. Gadījuma lielumus $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, kas definēti vienā un tajā pašā varbūtību telpā sauc par ***neatkarīgiem***, ja jebkurām Boreļa kopām $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izpildās

$$P(\{\xi_1 \in A_1, ..., \xi_n \in A_n\}) = P(\{\xi_1 \in A_1\})P(\{\xi_2 \in A_2\}) \cdots P(\{\xi_n \in A_n\}) \ (*)$$

Šo jēdzienu var pārnest arī uz gadījuma lielumu virknēm.

Teiksim ka, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \ldots$ ir ***neatkarīgu gadījuma lielumu virkne***, ja sakarība (*) izpildās jebkura galīga skaita virknes elementiem.

Aplūkosim kā saistīti gadījuma lielumi, kas mērojami attiecībā pret vienu un to pašu σ-algebru $\mathcal{F}_\xi$.

4.Definīcija. Funkciju $f(x), x \in$R, R-reālo skaitļu kopa, sauc par ***Bēra funkciju***, ja tā ir mērojama attiecībā pret Boreļa kopu σ-algebru $\mathcal{B}$, t.i. $\{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{B}$, kur B – Boreļa kopa, $\mathcal{B}$ - Boreļa kopu σ-algebra.

No iepriekšējās seko, ka, lai apgalvotu, ka $f(x)$ - Bēra funkcija, ir pietiekami pārbaudīt, ka $\{x : f(x) < c\} \in \mathcal{B}, \ c \in \mathbf{R}$.

1.Teorēma [3],[6]. Lai gadījuma lielums $\eta(\omega)$ būtu mērojams attiecībā pret σ-algebra $\mathcal{F}_\xi$, ir nepieciešami un pietiekami, ka izpildās sakarība $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$, kur $f(x)$– Bēra funkcija.

a)*Pietiekamība.* Pieņemsim, ka $f(x)$– Bēra funkcija un $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$. Tad izpildās sekojoša vienādība

$$\{\omega : \eta(\omega) < c\} = \{\omega : f(\xi(\omega)) < c\} = \{\omega : \xi(\omega) \in C\}, \ C = \{x : f(x) < c\}.$$

Tā kā $f(x)$ – Bēra funkcija, tad C –Boreļa kopa. No tā, ka $\xi(\omega)$ mērojams attiecībā pret F_ξ seko, ka $\{\omega : \xi(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}_\xi$, kas pierāda ka $\eta(\omega)$ mērojams attiecībā pret $\mathcal{F}_\xi$.

b) *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka $\eta(\omega)$ ir funkcija, mērojama attiecībā pret $\mathcal{F}_\xi$. Pierādīsim, ka eksistē Bēra funkcija $f(x)$ tāda, ka $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$.

b_1) Konstruēsim kopas

$$\lambda_{jn} = \{\omega : \tfrac{j-1}{2^n} \le \eta(\omega) \le \tfrac{j}{2^n}\}, j = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n2^n, -n2^n + 1$$

$$\lambda_n = \{\omega : \eta(\omega) > n\},$$

$$\lambda_{-n} = \{\omega : \eta(\omega) \le -n\}.$$

Tā kā $\eta(\omega)$ ir mērojams attiecībā pret $\mathcal{F}_\xi$, kopas λ_{jn}, λ_n, λ_{-n} pieder $\mathcal{F}_\xi$. Tātad,

$$\eta_n(\omega) = \sum_j \frac{j}{2^n}\chi_{\lambda_{jn}}(\omega) + n\chi_{\lambda_n}(\omega) - \chi_{\lambda_{-n}}(\omega)$$

ir vienkārša $\mathcal{F}_\xi$ -mērojama funkcija. Kā zināms visu $\mathcal{F}_\xi$-mērojamu funkciju klase ir noslēgta attiecībā uz robežpārejām. No funkciju $\eta_n(\omega)$ definīcijām seko, ka jebkuram $\delta > 0$ varam uzrādīt numuru N, ka katram $n \ge N$ un visiem $\omega \in \bigcup_j \lambda_{jn}$ izpildās $|\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| < \delta$. Tad, no tā, ka gadījuma lielumi $\eta_n(\omega)$ ir galīgi gandrīz visur ($\mathrm{P}(\{\omega\colon\ |\eta_n(\omega)| > n\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$), seko $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)$.

b_2) Tālāk, definējam kopas A_{jn}, A_n, A_{-n} sekojošā veidā

$$\lambda_{jn} = \{\omega : \xi(\omega) \in A_{jn}\},\ j = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ ... \pm n2^n + 1;$$
$$\lambda_n = \{\omega : \xi(\omega) \in A_n\};\quad \lambda_{-n} = \{\omega : \xi(\omega) \in A_{-n}\}$$

Kopas $A_{jn},\ A_n,\ A_{-n},\ j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...,\ \pm n2^n,\ -n2^n + 1$
ir savstarpēji nešķeļošos kopu sistēma.

Tiešām, ja pieļaujam pretējo, t.i. $A_{in} \cup A_{jn} \ne \emptyset$, ja $i \ne j$, tad iegūstam, ka atradīsies vismaz divi punkti $\omega_1 \in \lambda_{in}$ un $\omega_2 \in \lambda_{jn}$ tādi, ka

$$\xi(\omega_1) = \xi(\omega_2) = a \in A_{in} \cup A_{jn}.$$

Bet, jau no $\mathcal{F}_\xi$ konstrukcijas izriet, ka kopa $\{\omega : \xi(\omega) = a\}$ ir minimāls, nesadalāms $\sigma-$algebras $\mathcal{F}_\xi$ elements un var pilnībā ietilpt kādā λ_{jn}, jo pretēja gadījumā $\mathcal{F}_\xi$ satur kopu, vēl mazāku par $\{\omega_1,\ \ \omega_2\}$, taču tas nav iespējams. Tātad,

$$A_{jn}, A_n, A_{-n,} j = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n2^n, -n2^n + 1$$

ir savstarpēji nešķeļošos kopu sistēma.

b_3) Apskatām sekojošas funkciju virknes

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{j}{2^n},\ ja\ \ x \in A_{jn} \\ n,\ \ ja\ x \in A_n \\ -n,\ \ ja\ x \in A_{-n} \end{cases} \qquad \eta_n(\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2^n},\ ja\ \omega \in \lambda_{jn} \\ n,\ \ ja\ \omega \in \lambda_n \\ -n,\ \ ja\ \omega \in \lambda_{-n} \end{cases},$$

$j = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n2^n, -n2^n + 1.$

$f_n(x)$ jebkuram n ir Bēra funkcija, tādēļ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, ja tā eksistē, arī būs Bēra funkcija. $\eta(\omega)$ mērojams attiecībā pret $\mathcal{F}_\xi$ un jau pēc konstrukcijas $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)$. Bez tam, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x(\omega)) = f(x(\omega)) = \eta(\omega)$, jo vienam un tā pašam ω izpildās $f_n(x(\omega)) = \eta_n(\omega)$. Tātad, mēs konstruktīvi esam pierādījuši tādas Bēra funkcijas $f(x)$ eksistenci, ka izpildās $\eta(\omega) = f(x(\omega))$. Teorēma ir pierādīta.

Sekas.
Ja $\xi(\ \omega)$, $\eta(\omega)$ – neatkarīgi gadījuma lielumi, $f(x), g(x)$ – Bēra funkcijas, tad $f(\xi(\omega)\ )$, un $g(\eta(\omega))$ arī ir neatkarīgi gadījuma lielumi.

4.§. Gadījuma lielumu sadalījuma funkcijas

1.Defenīcija. Par gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ ***sadalījuma funkciju*** sauc reālā argumenta funkciju

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}.$$

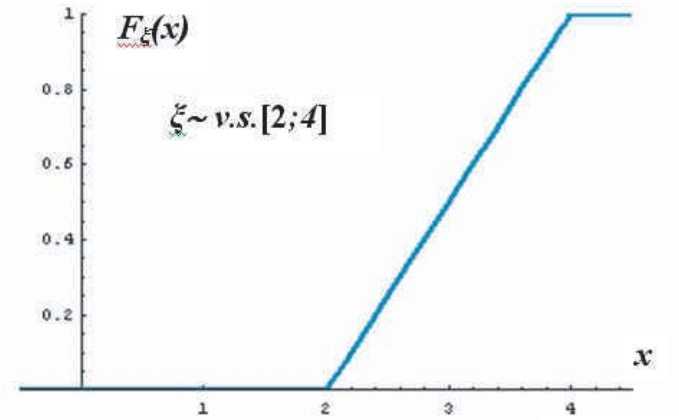
1.*Piemērs.* Uz skaitļu ass nogriezņa $[a, b]$ uz labu laimi tiek mests punkts. "Uz labu laimi" nozīmē, ka visas punkta atrašanās vietas ir "vienādi iespējamas". Šajā gadījumā $\Omega = [a, b]$, par notikumu σ-algebru $\mathcal{F}$ var ņemt Boreļa kopu σ-algebru uz $[a, b]$ ($\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[a,b]}$). Varbūtību punktam trāpīt kādu kopas $[a, b]$ apakškopā ņemsim proporcionālu šīs kopas Lebega mēram (garumam). Tātad, ja

$$[c, d] \subset [a, b],\ \text{tad}\ \mathbb{P}([c, d]) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Definēsim gadījuma lielumu $\xi(\omega) = \omega$, ja $\omega \in \Omega$, gadījuma lielums ir vienāds ar to skaitli no $[a, b]$, kurā ir trāpījis mestais punkts. Tā kā
$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = B \cap \Omega \in \mathcal{B}_{[a,b]}$ jebkurai Boreļa kopai $B \in \mathcal{B}$, seko ka $\xi(\omega)$ mērojama attiecībā pret $\mathcal{B}_{[a,b]}$. Ņemot vēra $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi(\omega)| < \infty\}) = 1$, iegūstam $\xi(\ \omega)$ – gadījuma lielums ar sadalījuma funkciju

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b\ . \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Iegūstam tā saucamo ***vienmērīgo sadalījumu*** intervālā $[a,b]$, $(\xi \sim v.s.[a,b])$.



1.zīm.

2.*Piemērs.* Tiek vienu reizi mesta monēta. Šajā gadījumā $\Omega = \{G, C\}$, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(C) = 0,5$.
Pieņemsim ka $\xi(\omega) = 1$, ja $\omega = \{G\}$ un $\xi(\omega) = -1$, ja $\omega = \{C\}$. Tad $\mathcal{F}_\xi = \{C, G, \Omega, \emptyset\}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.5, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

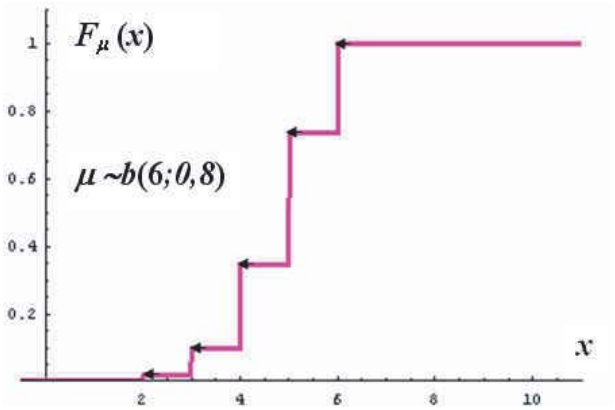
3.*Piemērs* Apzīmēsim ar μ notikuma A labvēlīgo iznākumu skaitu n neatkarīgos mēģinājumos, katrā no kuriem notikuma A varbūtība ir p. Tad, kā zināms, gadījuma lielumam μ ir binomiālais sadalījums

$$\mathbb{P}(\mu = m) = P_n(m) = \mathrm{C}_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \;\; m = 1, 2, ...n.$$

Gadījumā, $F_\mu(x) = \sum\limits_{m<x} P_n(m)$, kur summēšana notiek pa tiem m, kuriem $m < x$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ P_n(0), & 0 < x \leq 1 \\ P_n(0) + P_n(1), & 1 < x \leq 2 \\ \cdots & \\ \sum\limits_{i=0}^{m} P_n(i), & m < x \leq (m+1) \\ \cdots & \\ 1, & x > n \end{cases}.$$

μ sauc par diskrētu gadījuma lielumu sadalītu pēc ***binomiālā likuma*** un apzīmē $b(n,p)$. Gadījumā $n=1$, gadījuma lielumu μ sauc par sadalītu pēc ***Bernulli likuma***.



2.zīm.

Piebildīsim, ka ja n neatkarīgu mēģinājumu virknē varbūtība notikt notikumam A katrā no mēģinājumiem ir p, μ – notikuma A labvēlīgo iznākumu skaits, μ_i – notikuma A notikšanas skaits i-tajā mēģinājumā $i=1,...,n$, tad

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\ \text{kur}\ \ \mu_i(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases},$$

$\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$ ir neatkarīgi un vienādi, pēc Bernulli likuma, sadalīti gadījuma lielumi.

5.§. Sadalījuma funkcijas īpašības

Pieņemsim, ka $F_\xi(x)$ ir gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ sadalījuma funkcija. Atzīmēsim šīs funkcijas svarīgākās īpašības.
Vispirms atzīmēsim, ka ja $a < b$, tad

$$\mathbb{P}(\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\}) = F_\xi(b) - F_\xi(a.) \qquad (\star)$$

Tiešām,

$\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\} = \{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\}$,

pie tam $\{\omega : \xi(\omega) < b\} \supset \{\omega : \xi(\omega) < a\}$, no šejienes izriet $(\star)$.

1.Teorēma. Sadalījuma funkcijai $F_\xi(x)$ piemīt šādas īpašības:

F1. Ja $x_1 < x_2$, tad $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ (monotonitāte)

F2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ un $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$

F3. $\lim\limits_{x\uparrow x_0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$ - (nepārtrauktība no kreisas puses).

Pierādījums.
Tā kā $\{\omega$: $\xi(\omega) < x_2\} \supset \{\omega$: $\xi(\omega) < x_1\}$, tad no varbūtību īpašībām seko

$\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x_2\}) \ge \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \Rightarrow$ F1.

Lai pierādītu F2, apskatām divas skaitļu virknes $\{x_n,\ n \ge 1\}$, $\{y_n,\ n \ge 1\}$, pie tam virkne $\{x_n, n \ge 1\}$ monotoni dilst : $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, bet $\{y_n, n \ge 1\}$ monotoni aug: $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Apzīmējot $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}, B_n = \{\omega : \xi(\omega) < y_n\}$, iegūstam ka notikumu virknes arī ir monotonas: $\{A_n, n \ge 1\}$ ir monotoni dilstoša un $\bigcap\limits_{n\ge1} A_n = \emptyset$, $\{B_n, n \ge 1\}$ ir monotoni augoša un $\bigcup\limits_{n\ge1} B_n = \Omega$. No varbūtību nepārtrauktības iegūstam, ka

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n\ge1} A_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

No šīs sakarības un no $F_\xi(x)$ monotonitātes izriet, ka $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$.
Līdzīgi iegūstam

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\ge1} B_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

no kurienes izriet $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$.

Apzīmējot $A = \{\omega : \xi(\omega) < x_0\}$ un $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$, kur virkne $\{x_n, n \geq 1\}$ monotoni aug uz x_0, iegūstam monotoni augošu kopu virkni $\{A_n, n \geq 1\}$, kurai $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n = A$.
Ņemot vērā varbūtību nepārtrauktību un $F_\xi(x)$ monotonitāti iegūstam F3.
Viegli saprast, ka funkcija $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$ būtu nepārtraukta no labās puses.

2.Teorēma[1]. Ja funkcijai $F(x)$ piemīt īpašības F1, F2, F3, tad vienmēr eksistē varbūtību telpa $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ un gadījuma lielums $\xi(\omega)$, kas tiek definēts šajā telpā tāds, ka $F(x)$ ir šī gadījuma lieluma varbūtību sadalījuma funkcija.

Pierādījums. Vispirms izveidosim vajadzīgo varbūtību telpu. Par Ω ņemsim reālo taisni $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$. Par σ-algebru $\mathcal{F}$ ņemsim Boreļa kopu σ-algebru $\mathcal{B}$. Atzīmēsim, ka lai izveidotu varbūtību telpu $< \mathbf{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P} >$, pietiek uzdot varbūtību $\mathbb{P}$ algebras elementiem, kura izveidota no pus vaļējiem intervāliem $[a, b)$. Kopu funkciju $\mathbb{P}(\bullet)$ definēsim šādā veidā:

$\mathbb{P}(-\infty, x) = F(x)$, $\mathbb{P}([a, b)) = F(b) - F(a), (\ i \neq j, [a_i, b_i) \cup [a_j, b_j) = \emptyset) \Rightarrow$
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P([a_i, b_i))$.

Ņemot vērā funkcijas $F(x)$ īpašības F1, F2, F3 ir acīmredzami, ka aksiomas P1, P2, P3 ir izpildītas. Atliek par gadījuma lielumu ņemt $\xi(\omega) = \omega$. Tad

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega < x\}) = \mathbb{P}(-\infty, x) = F(x).$$

Izmantojot šo teorēmu, mēs iegūstam jaunu paņēmienu kā uzdot gadījuma lielumu ar sadalījuma funkcijas palīdzību.
Atzīmēsim, ka katrs gadījuma lielums viennozīmīgi definē savu sadalījuma funkciju, bet eksistē daudz gadījuma lielumi, kuriem ir viena un tā pati sadalījuma funkcija. Tā, piemēram

$$\xi(\omega) = \text{-}\eta(\omega), \text{ kur } \xi(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega \in A \\ 1, & \omega \notin A \end{cases}, \quad \text{P(A)=0,5.}$$

Abiem šiem gadījuma lielumiem ir viena sadalījuma funkcija

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0,5, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

6.§. Varbūtību sadalījumu tipi

Mūsu kopu teorētiskā shēmā eksperimentam atbilst telpa ar mēru$< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, gadījuma lielumam, uz Ω elementiem definēta, gandrīz visur galīga, attiecībā

pret σ-algebru $\mathcal{F}$ mērojama, funkcija $\xi(\omega)$.
$\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in A\})$ – skaitlis, kuru varam piekārtot Boreļa kopai A no Boreļa kopu σ-algebras $\mathcal{B}$. Apskatīsim, kādas īpašības piemīt kopu funkcijai

$$\mu(A) := \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in A\}), \qquad (*)$$

kura definēta Boreļa kopu σ -algebrā $\mathcal{B}$ ar gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ un mēra $\mathbb{P}$ palīdzību.

1.$\mu(A) \geq 0$

2.$\mu(\mathbf{R}) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbf{R}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbf{R}$- reālā taisne

3. $\mu(A) - \sigma$-aditīva

Pieņemsim, ka $\{A_i\}, i = 1, 2 \ldots$ ir Boreļa kopu virkne, kas savstarpēji nešķeļas. Tad

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in A_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Tādējādi, $\xi(\omega)$ transformē $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ par $< \mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu >$ saglabājot mēru (*). Acīm redzot, uz visas reālās ass $\mathbf{R}$ gadījuma lielums $\xi(\omega)$ definē funkciju

$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = \mu(-\infty, x)$, ka

$\mu([a, b]) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\}) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

No šejienes seko, ka $F_\xi(x)$ pilnīgi apraksta mēru μ. Tādējādi, gadījuma lieluma $\xi(\ \omega)$ sadalījuma funkcija F_ξ(x) definē viennozīmīgi uz $< \mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu >$ Lebega - Stiltjesa mēru.

Atzīmēsim (Radona-Nikodima teorēmas sekas), ja no tā, ka
$\gamma(A) = 0$, kur γ - Lebega mērs uz $< \mathbf{R}, \mathcal{B} >, A \in \mathcal{B}$, seko ka $\mu(A) = 0$ ($\mu \ll \gamma$), tad eksistē tāda pēc Lebega mēra integrējama funkcija $p(x)$, ka gandrīz visiem x izpildās $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$.

Visas, līdz šim apskatītās sadalījuma funkcijas var sadalīt divos tipos.

Diskrēta tipa sadalījuma funkcijām atbilst gadījuma lielumi, kas pieņem galīga vai sanumurējama skaita vērtības. Jebkura diskrēta gadījuma lieluma sadalījuma funkcija aug lēcienveidīgi pie tām vērtībām x_1, x_2,..., kuras var pieņemt gadījuma lielums, pie kam
$\mathbb{P}(\xi = x) = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x) > 0$.
Viegli redzēt, ka $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$ tajā un tikai tajā gadījumā, kad $F_\xi(x)$ ir nepārtraukta punktā x. Bieži diskrēto varbūtību sadalījumu uzdot tabulas veidā, ar tā saukto sadalījuma likumu: $\xi(\omega)$ vērtības un atbilstošas varbūtības.

Absolūti nepārtraukts gadījuma lielums. Gadījuma lielums ir absolūti nepārtraukta tipa, ja gandrīz visur eksistē tāda integrējama funkcija $p(x)$, ka visiem x izpildās $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$. Funkciju $p(x)$ sauc par gadījuma lieluma ***sadalījuma blīvuma funkciju***. Ja gadījuma lielumam ξ eksistē sadalījuma blīvuma funkcija

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx},$$

tad $\mathbb{P}(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_a^b p_\xi(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1.$

Eksistē vēl trešais tips, tā sauktais ***singulārais varbūtību sadalījums.***

1.Definīcija. Punktu x sauc par ***sadalījuma funkcijas augšanas punktu***, ja katram $\varepsilon > 0$ izpildās nevienādība $F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0$.

Piemēram, diskrētā gadījumā augšanas punktu kopa sakrīt ar gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ vērtību kopu un, ja $\varepsilon > 0$, tad

$\mu(\{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbf{R}\}) = \sum\limits_i \mathbb{P}(\xi = x_i) = 1.$

Absolūti nepārtrauktā gadījumā:

$\mathbb{P}\{\text{augšanas punktu kopa}\} = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbf{R}\}) = 1.$

Singulārais varbūtību sadalījums raksturojas ar to, ka sadalījuma funkcija ir nepārtraukta, bet šis funkcijas augšanas punktu kopas Lebega mērs ir nulle, bet augšanas punktu kopas μ mērs ir 1. Tādējādi, $F_\xi(x)$ ir nepārtraukta, bet $p_\xi(x)$ gandrīz visur neeksistē. Tiešām, ja

$X_0 := \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0\}$, tad $\gamma(X_0) = 1 - \gamma([0,1]\backslash X_0) = 0.$

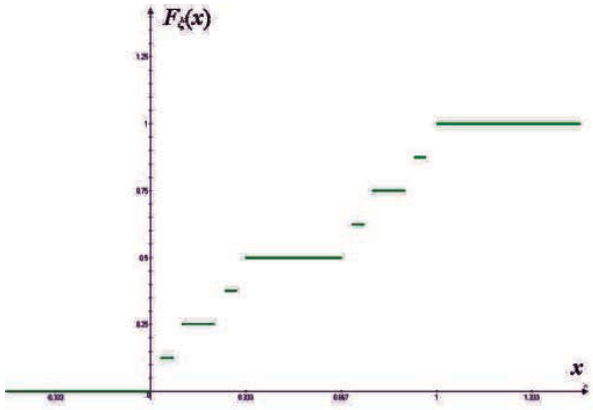
Bet

$\mu(X_0) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in X_0\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbf{R}\}) = F_\xi(\infty) - F_\xi(-\infty) = 1.$

(Lebega mērs $\gamma(F_\xi(x) = \text{const}) = 1 \Rightarrow \gamma(\{x : F_\xi(x) \neq const\}) = 0$).

Šādas sadalījuma funkcijas piemērs ir pazīstamā *Kantora līkne*, kura tiek konstruēta šādi:
$F(x) = 0$, ja $x \le 0$; $F(x) = 1$, ja $x \ge 1$.
Segments $[0,1]$ tiek sadalīts trīs vienādās daļās, un tiek pieņemts
$F(x) = 0.5$, ja $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Abus atlikušos intervālus atkal sadalām trīs vienādās daļās un iekšējos segmentos pieņemam funkciju $F(x)$ vienādu ar $\frac{1}{4}$ un $\frac{3}{4}$. Un t.t. iekšējos segmentos $F(x)$ piešķiram konstantu vērtību vienādu ar aritmētisko vidējo starp abām blakus esošām funkcijas $F(x)$ vērtībām.
Tajos punktos, kuri nepieder šiem "iekšējiem" segmentiem, funkciju $F(x)$

definējam pēc nepārtrauktības funkcijas definīciju.
Summārais garums "iekšējiem" segmentiem, kuros funkcija $F(x)$ ir konstante, ir vienāds $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = 1$.
Tātad, funkcija $F(x)$ aug kopā ar Lebega mēru nulle, bet aug bez lēcieniem.



3.zīm.

1.Teorēma[6],[3]. Katra sadalījuma funkcija $F_\xi(x)$ ir vienā vienīgā veidā attēlojuma kā summa $F_\xi(x) = F_d(x) + F_a(x) + F_s(x)$, kur
$F_d(x)$- diskrēta komponente, kuru var attēlot formā

$$F_d(x) = \sum_{x_i<x} p(x_i), \;\; p(x_i) \geq 0, \;\; \sum_i p(x_i) \leq 1,$$

$F_a(x)$- absolūti nepārtraukta komponente, kas uzrakstāma formā

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx, \;\; p(x) \geq 0, \;\; \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx \leq 1,$$

$F_s(x)$ –singulāra komponente, kuru veido nepārtraukta funkcija, kuras augšanas punktu kopas Lebega mērs ir nulle.

Atzīmēsim, ka praktiskajos uzdevumos vairumā gadījumu iznāk sastapties ar diskrēto un absolūti nepārtraukto varbūtību sadalījumiem.

Piemērs.

Automobilis piebrauc pie ceļu krustojuma, kur tika uzstādīts luksofors, laika gadījuma momentā, kas nav saistīts ar luksofora darbību, un aizbrauc krustojumam garām neapstājoties, ja deg zaļā gaisma (0.5 min.), vai apstājas pie luksofora, kamēr deg sarkanā gaisma (1 min.).

Atrast varbūtību, ka automobilis neapstājās pie luksofora! Konstruēt autovadītāja gaidīšanas laika $\xi(\omega)$ sadalījuma funkciju.

Atrisinājums.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0,\ 0.5) \\ 1.5 - \omega, & \omega \in [0.5,\ 1.5] \end{cases}, \quad \Omega = [0,\ \ 1.5]$$

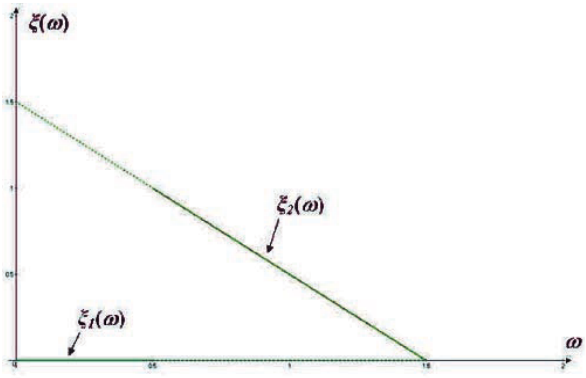
Vispirms definēsim gadījuma lielumu $\xi_1(\omega) = 0,\ \omega \in [0, 1.5)$, un gadījuma lielumu $\xi_2(\omega)$, kā vienmērīgi sadalītu segmentā $[0, 1.5)$, kas nozīmē, ka

$$p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2/3, & x \in (0, 1.5) \\ 0, & x \notin (0, 1.5) \end{cases}.$$

Tad

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x/3, & 0 < x \le 1.5 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\xi(\omega) = \begin{cases} \xi_1(\omega), & \omega \in [0, 0.5) \\ \xi_2(\omega), & \omega \in [0.5,\ 1.5] \end{cases}, \quad F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{1.5}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$



4.zīm.

un

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi < x\,|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\xi < x\,|\bar{A}))\mathbb{P}(\bar{A}) =$$

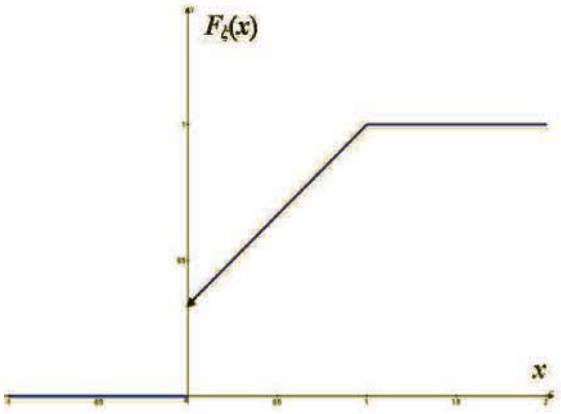
$$= \tfrac{1}{3}\mathbb{P}(\xi_1 < x|A) + \tfrac{2}{3}\mathbb{P}(\xi_2 < x|\bar{A}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega : \xi_1 < x\} \cap A) + \mathbb{P}(\{\omega : \xi_2 < x\} \cap \bar{A}) =$$

$$= F_d(x) + F_{ab.n.}(x), \ \text{ kur } \ A = \{\omega : \xi(\omega) \in [0, 0.5)\}.$$

No kurienes iegūstam

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{2}{3} & , \ 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



5.zīm.

Dažas visbiežāk sastopamās sadalījuma funkcijas.

•*Normālais sadalījums, $N(a, \sigma^2)$ (Gausa sadalījums).*

Gadījuma lielumu ξ ar sadalījuma funkciju

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy,$$

kur $a \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ sauc par ***normāli sadalītu*** ar parametriem a un σ un apzīmē $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

Lai pārliecinātos, ka $F(x)$ ir sadalījuma funkcija, ir jāpārbauda sadalījuma funkcijas īpašības $F1, F2, F3$. Tās izpildās acīm redzami, jo zemintegrāļa funkcija ir pozitīva, $F(x)$ ir nepārtraukta funkcija un

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Tas izriet no

$$I^2 := \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right]^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha \\ 0 \le r < \infty, 0 \le \alpha \le 2\pi \end{array} \right| =$$

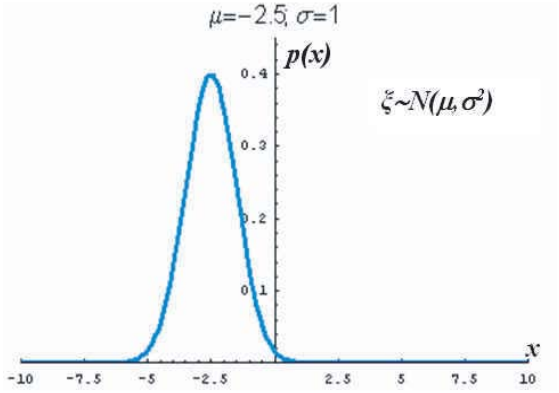
$$= \iint\limits_D e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\alpha = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = 2\pi.$$

Tātad,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \;\Rightarrow\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy = \left| \frac{y-a}{\sigma} = z, dy = \sigma dz \right| = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Varbūtību blīvuma funkcija gadījuma lielumam ξ ir

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$



6.zīm.

Ja $a = 0, \sigma = 1$, tad normālo sadalījumu sauc par ***standartizētu normālo sadalījumu***, vai ***normēto normālo sadalījumu***.
Kā bija minēts iepriekš, normēti normāli sadalīta gadījuma lieluma sadalījuma funkcija

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

kā arī varbūtību blīvuma funkcija

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ir tabulētas.

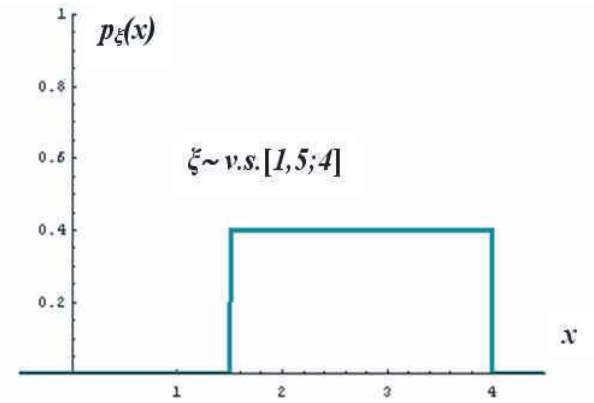
• *Vienmērīgais sadalījums, v.s.*$[a,b]$.

Gadījuma lielumu τ sauc par ***vienmērīgi sadalītu*** segmentā $[a,b]$, ja sadalījuma funkcija ir

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}.$$

Vienmērīgi sadalīta gadījuma lieluma τ varbūtību blīvuma funkcija ir

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}.$$



7.zīm.

• *Puasona sadalījums,* $P(\mu)$.

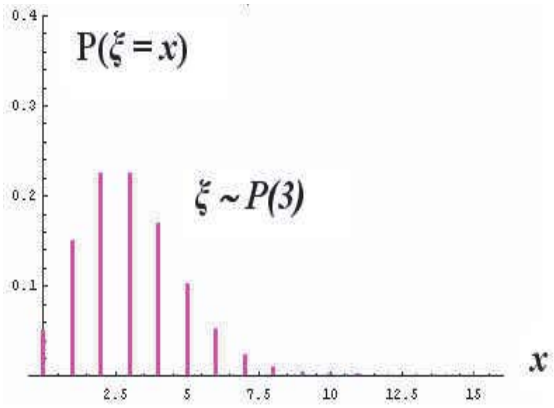
Ja gadījuma lielumam ξ ir tikai veselas nenegatīvas vērtības ar varbūtībām

$$\mathbb{P}(\xi=m)=\frac{\mu^m\cdot e^{-\mu}}{m!},\ \mu>0,\ m=0,1,...,$$

tad gadījuma lieluma η sadalījuma funkcija ir

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sum\limits_{m<x}\frac{\mu^m}{m!}\cdot e^{-\mu}, & x>0\end{cases}.$$

Gadījuma lielumu η sauc par ***sadalītu pēc Puasona likuma***.



8.zīm.

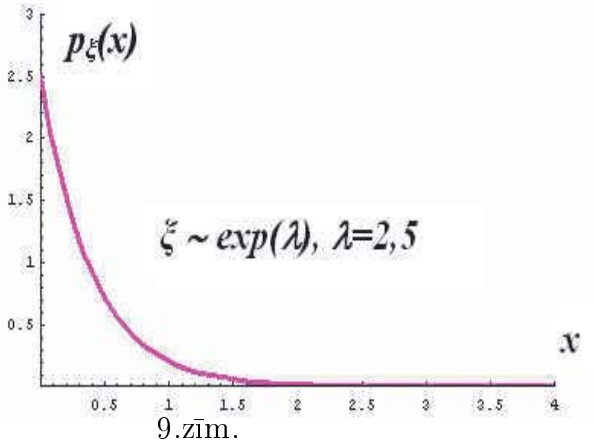
- *Eksponenciālais sadalījums, $exp(\lambda)$.*

Ja varbūtību blīvuma funkcija ir

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0,$$

tad sadalījumu sauc par ***eksponenciālo*** un tā varbūtību sadalījuma funkcija ir

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

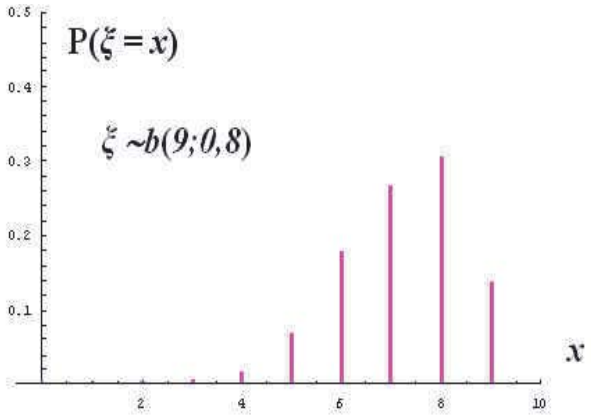


9.zīm.

- *Binomiālais sadalījums, $b(n, p)$.*

Diskrēts gadījuma lielums ξ ir sadalīts pēc ***binomiālā likuma***, ja

$$\xi \in \{0, 1, 2, ..., n\} \text{ ar } \mathbb{P}(\{\omega : \xi = m\}) = \mathrm{C}_n^m p^m (1-p)^{(n-m)},\ p \in (0, 1).$$



10.zīm.

7.§. Daudzdimensiju gadījuma lielumi [1]

Telpu reizinājums.

Ja $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ - divas kaut kādas kopas, tad par šo kopu Dekarta reizinājumu $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ sauc visu iespējamo pāru (x, y) kopu, kur $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$. Kā piemēru var minēt koordinātu plakni, kuru var uzrakstīt par koordinātu asu reizinājumu.
Ja $A \subset \mathbf{X}$, $B \subset \mathbf{Y}$, tad $E = A \times B \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ sauc taisnstūri, bet A un B par taisnstūra malām. Pieņemsim, ka vienlaicīgi ar kopām $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ ir uzdotas arī $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ apakškopu σ-algebras $\mathcal{F}_1$ un $\mathcal{F}_2$. Tad ar $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ apzīmēsim reizinājuma $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ apakškopu σ-algebru, kas satur visus iespējamos reizinājumus $A \times B$, kur $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.
Ja E ir kaut kāda kopa no $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, bet x ir patvaļīgs punkts no $\mathbf{X}$, tad kopu $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ sauksim par kopas E x- šķēlumu, atbilstošu punktam $x \in \mathbf{X}$.
Līdzīgi, $E_y = \{x : (x, y) \in E\}$ kā kopas E y-šķēlumu. Viegli redzēt, ka E_x un E_y ir $\mathbf{Y}$ un atbilstoši $\mathbf{X}$ apakškopas.

Teorēma 1 [4]. Ja $< \mathbf{X}, \mathcal{F}_1, \mu_1 >$ un $< \mathbf{Y}, \mathcal{F}_2, \mu_2 >$ ir varbūtības telpas un E - patvaļīga kopa no $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, tad $f(x) := \mu_2(E_x)$ un $q(y) := \mu_1(E_y)$ ir nenegatīvas un mērojamas attiecība pret $\mathcal{F}_1$ un atbilstoši $\mathcal{F}_2$ funkcijas, tādas, ka

$$\int_{\mathbf{X}} f(x) d\mu_1 = \int_{\mathbf{Y}} q(y) d\mu_2.$$

Gadījumā, kad $E = A \times B$ mērojams taisnstūris, kas nav tukšs, teorēmas

pierādījums ir acīm redzams. Tiešām,

$$f(x) = \mu_2(E_x)\cdot\chi_A(x) = \mu_2(B)\cdot\chi_A(x), \quad q(y) = \mu_1(E_y)\cdot\chi_B(y) = \mu_1(A)\cdot\chi_B(y),$$

un funkciju $f(x)$ un $q(y)$ mērojamība ir acīm redzama. Bez tam,

$$\int\limits_{\mathbf{X}} f(x)d\mu_1 = \mu_2(B)\cdot\mu_1(A), \quad \int\limits_{\mathbf{Y}} q(y)d\mu_2 = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B).$$

Teorēma 2 [4].
Kopu funkcija γ, kas tiek definēta kopā E no $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ar sakarību

$$\gamma(E) = \int\limits_{\mathbf{X}} \mu_2(E_x)d\mu_1 \;=\; \int\limits_{\mathbf{Y}} \mu_1(E_y)d\mu_2,$$

veido varbūtību mēru, un tai piemīt šāda īpašība: jebkuram taisnstūrim $E = A \times B$ no $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$

$$\gamma(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

Pēdējā īpašība definē funkciju γ viennozīmīgi.
γ sauc par ***mēru reizinājumu*** un apzīmē ar $\mu_1 \times \mu_2$.
$< \mathbf{X} \times \mathbf{Y},\ \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2,\ \mu_1 \times \mu_2 >$ sauc par ***telpu ar mēru***
$< \mathbf{X}, \mathcal{F}_1, \mu_1 >$ un $< \mathbf{Y}, \mathcal{F}_2, \mu_2 >$ ***reizinājumu***.
Jēdziens par kopu un mēru reizinājumu tiek vispārināts arī uz galīga un sanumurējama skaita reizinājumiem.

Gadījuma vektors un tā sadalījuma funkcija.

Pieņemsim, ka $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ir gadījuma lielumi, kas definēti vienā un tajā pašā varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ (Kolmogorova teorēma par saskaņotiem sadalījumiem.) Attēlojumu $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbf{R}^n$, kuru uzdod gadījuma lielumi $\xi_{1(}\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ sauc par gadījuma vektoru vai n - dimensiju gadījuma lielumu, un $\xi_{i(}\omega)$ sauc par vektora i-to komponenti (koordināti).

Apzīmēsim ar $\mathcal{B}^n$ telpas $\mathbf{R}^n$ Boreļa kopu σ-algebru, kas satur visus "pus slēgtos" taisnstūra paralēlskaldņus $\prod\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$. No gadījuma vektora definīcijas seko, ka, ja $B \in \mathcal{B}^n$, tad izpildās
$\{\omega : (\xi_{1(}\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in B\} =: \vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Tātad, gadījuma vektors $\vec{\xi}(\omega)$ visām Boreļa kopām $B \in \mathcal{B}^n$ definē funkciju

$$\mu(B) = \mathbb{P}(\{\omega : (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in B\}) = \mathbb{P}(\{\vec{\xi}^{-1}(B)\}) =: \mathbb{P}_{\vec{\xi}}(B).$$

Šo funkciju sauc par vektora $(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ sadalījumu. Kopu funkcija $\mu(B)$ ir varbūtību mērs, jo

a) $\mu(\mathbf{R}^n) = \mathbb{P}(\{\omega : \vec{\xi}(\omega) \in \mathbf{R}^n\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $\mu(B) \geq 0$ visām kopām $B \in \mathcal{B}^n$

c) ja $\{B_k\}, k = 1, \ldots, n$, Boreļa kopas, kas savā starpā nešķeļas, tad

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}\left(\vec{\xi}^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \vec{\xi}^{-1}(B_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\vec{\xi}^{-1}(B_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k),$$

jo pāreja no kopām B_k uz to pirmtēliem saglabā kopu darbības.

1.Definīcija. Par gadījuma vektora $\vec{\xi}$ ***sadalījuma funkciju*** sauc funkciju

$$F_{\vec{\xi}}(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi_{1(}\omega) < x_1, , \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}).$$

Atzīmēsim dažas sadalījuma funkcijas īpašības (***saskaņošanas nosacījumi***), kuras ir izpildās acīm redzami vai arī ir pierādītas tāpat kā viendimensijas gadījumā.

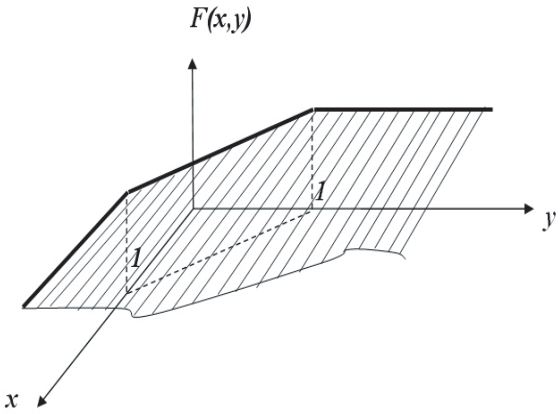
FF1. $\lim\limits_{x_n \to \infty} F_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(x_1, ..., x_n) = F_{(\xi_1,\xi_2\ldots\xi_{n-1})}(x_1, ..., x_{n-1})$

FF2. $\lim\limits_{x_n \to -\infty} F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = 0$

Tas, ka robežas tiek apskatītas mainoties tikai pēdējam argumentam nav būtiski, jo vienmēr iespējams pārnumurēt gadījuma lieluma koordinātes.
FF1 un FF2 ir par maz, lai varētu funkciju $F_{\vec{\xi}}(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)$ uzskatīt par sadalījuma funkciju.

Piemērs.
Lai

$$F(x,y) = \begin{cases} 0\,, \text{ja} \;\; x \leq 0 \;\vee\; y \leq 0 \;\vee\; x + y \leq 1 \\ \\ 1, \;\; \text{atlikušajā plaknes daļa} \end{cases}$$



11.zīm.

Funkcija $F(x,y)$ apmierina saskaņošanas nosacījumus, bet tā nav sadalījuma funkcija, jo

$$\mathbb{P}(0.5 \le \xi_1 < 1,\ 0.5 \le \xi_2 < 1) = \mathbb{P}(\xi_1 < 1, \xi_2 < 1) - \mathbb{P}(\xi_1 < 0.5,\ \xi_2 < 1) -$$
$$-\mathbb{P}(\xi_1 < 1,\ \xi_2 < 0.5) + \mathbb{P}(\xi_1 < 0.5,\ \xi_2 < 0.5) =$$
$$= F(1,1) - F(0.5\,,1) - F(1,\ 0.5) + F(0.5,\ 0.5) = 1 - 1 - 1 + 0,$$

kas nav iespējams. Tātad, funkcija $F(x,y)$ nav sadalījuma funkcija. Acīm redzot, lai $F_{\vec{\xi}}(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)$ varētu būt sadalījuma funkciju, bez saskaņošanas nosacījumiem vēl nepieciešams pieprasīt, lai pie jebkuriem a_i un b_i $i = 1,2,\ldots,n$ izpildās

$$\mathbb{P}(a_1 \le \xi_1 < b_1, \ldots a_n \le \xi_n < b_n) \ge 0.$$

Gadījuma vektora sadalījuma funkciju sauksim par diskrētā tipa, ja gadījums vektors pieņem ne vairāk kā sanumurējama skaita vērtību $\{x^i,\ i \ge 1\}$. Pie tam, jebkurai kopai

$$B \in \mathcal{B}^n \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(\vec{\xi} \in B) = \sum_{x^i \in B} p_i,$$

kur $x^i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$ un $p_i = \mathbb{P}(\vec{\xi} = x^i),\ i \ge 1$ ir gadījuma vektora $\vec{\xi}$ vērtības ar atbilstošām varbūtībām.

Gadījuma vektora sadalījuma funkciju sauksim par absolūti nepārtrauktu, ja

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(x_1, ...x_n)dx_1...dx_n.$$

Integrālis labajā pusē ir Lebega integrālis, bet ja funkcija $f_{\vec{\xi}}(x_1, ...x_n)$ ir integrējama pēc Rīmaņa, tad tas ir parastais n – kārtīgais Rīmaņa integrālis.

Funkciju

$$f_{\vec{\xi}}(x_1, ...x_n) = \quad \frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n} F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n),$$

kura eksistē gandrīz visur sauc par ***sadalījuma blīvuma funkciju***. Sadalījuma blīvumam piemīt sekojošas īpašības:

1. $f_{\vec{\xi}}(x_1, ...x_n) \geq 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x_1, ...x_n) dx_1 ... dx_n = 1.$

Ja (ξ_1, ξ_2) –divdimensiju gadījuma lielums, tad

$$\mathbb{P}(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F_{\vec{\xi}}(b_1, b_2) - F_{\vec{\xi}}(b_1, a_2) -$$

$$-F_{\vec{\xi}}(a_1, b_2) + F_{\vec{\xi}}(a_1, a_2) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2}^{b_2} f_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Pēdējo formulu var vispārināt uz jebkuru $B \in \mathcal{B}^n$ absolūti nepārtraukta tipa gadījuma lielumu

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \int\limits_B \cdots \int f_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n.$$

Pieņemsim, ka $\xi_{1(}\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ – neatkarīgu gadījuma lielumu virkne, kas definēta vienā un tajā pašā varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$. Tas ir ekvivalenti šādam secinājumam: gadījuma lielumi $\xi_{1(}\omega)$,..., $\xi_n(\omega)$ ir neatkarīgi tad un tikai tad, kad

$$F_{(\xi_1 \xi_2 ... \xi_n)}(x_1, x_2, ...x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n).$$

Ja $F_{(\xi_1 \xi_2 ... \xi_n)}(x_1, x_2, ...x_n)$ - absolūti nepārtraukta tipa sadalījuma funkcija un $\xi_1(\omega)$,..., $\xi_n(\omega)$ – neatkarīgi gadījuma lielumi, tad vektora blīvuma funkcija ir

$$f_{(\xi_1 ... \xi_n)}(x_1, ...x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdots f_{\xi_n}(x_n)$$

kur $f_{\xi_i}(x_i),\ i = 1, .., n$ ir sadalījuma blīvuma funkcijas komponentes.

8.§. Funkcijas no gadījuma lielumiem

Bieži reizē ar gadījuma lielumiem tiek apskatītās arī funkcijas no tiem. Šajā sakarība rodas jautājums: vai šīs funkcijas būs gadījuma lielumi?

Pieņemsim, ka $f(x)$ ir funkcija, kura definēta n - dimensiju telpā $\mathbf{R}^n$ ar vērtību apgabalu telpā $\mathbf{R}^1$, $\mathcal{B}^n$ - Boreļa kopu σ - algebra telpā $\mathbf{R}^n$ (minimāla σ - algebra, kura satur visus "pus slēgtos" taisnstūra paralēlskaldņus $\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k)$).

1.Definīcija. Funkciju $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ sauc par ***Bēra (Boreļa) funkciju***, ja tā ir mērojama attiecība pret $\mathcal{B}^n$.

Bēra funkciju klase ir pietiekami bagāta. Tā satur, piemēram, visas nepārtrauktās funkcijas, jo nepārtrauktām funkcijām $f(x)$ kopa $\{x : f(x) < c\}$ ir vaļēja un tādēļ pieder σ - algebrai $\mathcal{B}^n$.

1.Teorēma. Pieņemsim, ka $f(x)$ ir Bēra funkcija, kura definēta $\mathbf{R}^n$, $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - gadījuma vektors, kas definēts telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, tad $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - arī gadījuma lielums.

Pierādījums. Tā kā $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ un $f(x)$ – mērojama attiecība pret $\mathcal{B}^n$, tad katram reālam skaitlim c izpildās

$\{\omega : f(\xi_1, \ldots, \xi_n) < c\} = \{\omega : (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in f^{-1}(-\infty, c)\} \in \mathcal{F}$,

jo $\{x := (x_1, \ldots x_n) : f(x) < c\} = f^{-1}(-\infty, c) \in \mathcal{B}^n$.

Atzīmēsim, ka funkcijas $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}^1$; $f(x) = sinx, x \in \mathbf{R}^1$;

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad ;$$

$f(x) = x_1 + \ldots + x_n, x \in \mathbf{R}^n$; $f(x) = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}, x \in \mathbf{R}^n$;

$f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

ir Bēra funkcijas, jo tās visas ir nepārtrauktas funkcijas.
Tādēļ, no teorēmas izriet, ka ja $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - ir gadījuma lielumi, kas definēti varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ tad

$\eta(\omega) = |\xi(\omega)|$; $\sin \xi(\omega)$; $\eta(\omega) = \xi_1 + \ldots + \xi_n$; $\sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$; $\xi_1 \cdot \xi_{2 \cdot \ldots \cdot} \xi_n$;

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 0, & \xi(\omega) \le 0 \\ \xi(\omega), & \xi(\omega) > 0 \end{cases} \quad ; \quad \eta(\omega) = \begin{cases} 0, & \xi(\omega) > 0 \\ -\xi(\omega), & \xi(\omega) \le 0 \end{cases} \quad ;$$

arī ir gadījuma lielumi šajā pašā varbūtību telpā.
Pieņemsim, ka $\xi(\omega)$ -gadījuma lielums, $f(x)$ - Bēra funkcija. Atradīsim gadījuma lieluma $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ sadalījuma funkciju. Pēc sadalījuma funkcijas definīcijas seko

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\{\omega : f(\xi(\omega)) < x\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in f^{-1}(-\infty, x)\}).$$

Piemēram, ja $f(x)$ –nedilstoša funkcija, kurai eksistē inversā funkcija $f^{-1}(x)$,

tad pēdējā sakarība vienkāršojas

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\xi \in f^{-1}(x)) = F_\xi(f^{-1}(x)).$$

Ja $p_\xi(x)$ ir blīvuma funkcija gadījuma lielumam $\xi(\omega)$ un $f(x)$ - nedilstoša funkcija, kurai eksistē inversā funkcija $f^{-1}(x)$, tad gadījuma lielumam $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ arī eksistē blīvuma funkcija $p_\eta(x)$ vienāda ar

$$p_\eta(x) = p_\xi(f^{-1}(x))\frac{\partial f^{-1}(x)}{\partial x}.$$

Piemērs 1. $f(x) = ax + b, a > 0$. Funkcija ir monotoni augoša un tai eksistē inversā funkcija $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, un no minētajām formulām iegūstam

$$F_\eta(x) = F_{a\xi+b}(x) = F_\xi(\frac{x-b}{a}), \quad p_\eta(x) = p_\xi(\frac{x-b}{a}) \cdot \frac{1}{a}.$$

Piemērs 2. Gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ sadalījuma funkcija ir $F_\xi(x)$. Atrast gadījuma lieluma $\eta(\omega) = \xi^2(\omega)$ sadalījuma funkciju.

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \\ \mathbb{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}), & x > 0 \end{cases}, \text{ tātad}$$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}), & x > 0 \end{cases}$$

Gadījumā, kad eksistē gadījuma lieluma ξ sadalījuma blīvuma funkcija, varam arī atrast $\eta(\omega)$ blīvuma funkciju

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}[p_\xi(\sqrt{x}) + p_\xi(-\sqrt{x})], & x > 0 \end{cases}.$$

Piemērs 3. Pieņemsim, ka $\xi(\omega)$ – gadījuma lielums ar nepārtrauktu sadalījuma funkciju $F_\xi(x)$. Atrast sadalījuma funkciju lielumam $\eta = F_\xi(\xi)$.

Tā kā $F_\xi(x) \in [0,1]$, visiem x, tad $F_\eta(x) = 0$, ja $x \le 0$ un $F_\eta(x) = 1$, ja $x > 1$. Apskatīsim tagad $x \in (0,1]$.

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(F_\xi(\xi) < x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \mathbb{P}(\{\omega : \xi < F_\xi^{-1}(x)\}) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Tādējādi, lielums η ir vienmērīgi sadalīts segmentā $[0,1]$.

Piemērā ieguvām $\xi = F_{\xi}^{-1}(\eta)$. Šādā veidā var modelēt nepārtraukti sadalītus gadījuma lielumus. $\eta(\omega)$ - gadījuma lielums, kas sadalīts vienmērīgi $[0,1]$.

Piemērs 4. Noteikt gadījuma lieluma $\xi = c\eta + b$ sadalījumu funkciju, ja $c \in \mathbf{R},\ c \neq 0,\ b \in \mathbf{R},\ \eta \sim N(a, \sigma^2)$.

Atrisinājums.

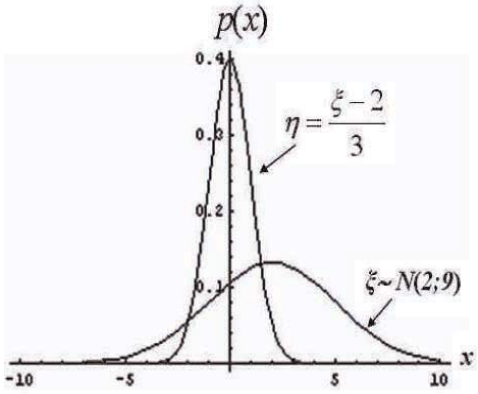
$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(c\eta + b < x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\eta < \frac{x-b}{c}) = F_{\eta}(\frac{x-b}{c}), & c > 0 \\ \mathbb{P}(\eta > \frac{x-b}{c}) = 1 - F_{\eta}(\frac{x-b}{c}), & c < 0 \end{cases}.$$

No kurienes iegūstam,

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|c|\sigma} e^{-\frac{(x-b-ca)^2}{2\sigma^2 c^2}}.$$

Tātad, ξ arī ir normāli sadalīts gadījuma lielums ar parametriem $\sigma_{\xi} = |c|\sigma,\ a_{\xi} = ca + b$. Acīmredzot,

$$\tau \sim N(0,1),\ \eta = \sigma\tau + a,\ \sigma > 0 \ \leftrightarrows\ \eta \sim N(a, \sigma^2).$$



12.zīm.

1.Definīcija. Gadījuma lielumu ξ sauc par sadalītu pēc ***lognormālā likuma***($\xi \sim logN(a, \sigma^2)$), ja šī gadījuma lieluma ξ logaritms ir sadalīts pēc normālā sadalījuma likuma:
$\ln \xi \sim N(a, \sigma^2)$.

No definīcijas izriet, ka $\xi = e^{\eta}$, kur $\eta \sim N(a, \sigma^2)$.

Līdz ar to

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(e^\eta < x) = \begin{cases} F_\eta(\ln x), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Savukārt, visām x pozitīvām vērtībām spēkā

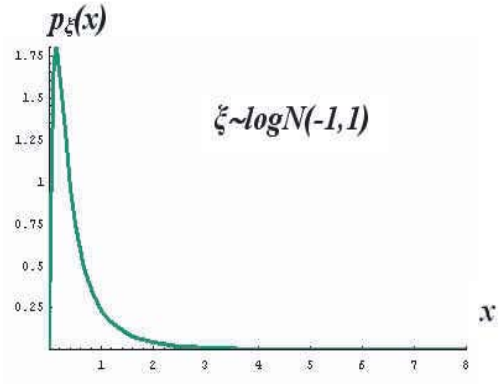
$$F_\eta(\ln x) = P(\eta < \ln x) = P\left(\frac{\eta - a}{\sigma} < \frac{\ln x - a}{\sigma}\right) =$$

$$= P(\tau < \frac{\ln x - a}{\sigma}) = F_\tau\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right),\ x > 0,\ \tau \sim N(0,1).$$

Tātad, lognormālā gadījuma lieluma ξ sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$p_\xi(x) = \tfrac{1}{x\sigma} p_\tau\left(\tfrac{\ln x - a}{\sigma}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases},$$

kur $\tau \sim N(0,1)$.



13.zīm.

9.§.Gadījuma lielumu integrēšana

•*Gadījuma lieluma integrēšana (Iepriekšējās ziņas)*

Pieņemsim, ka $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ ir patvaļīga varbūtību telpa. Kā jau minējām, gadījuma lielums $\xi(\omega)$, kas tiek definēts varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F} >$, ir klases ℵ

elements, kur funkciju klases $\aleph$ sastāv no $\mathcal{F}$ elementu indikatoriem, vienkāršām funkcijām un vienkāršo funkciju robežām.

1.Definīcija. Par ***integrāli no vienkāršas funkcijas*** $\xi(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$, kur $A_j \in \mathcal{F}, \lambda_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, ..., n$; un $i \neq j \to A_i \cup A_j = \emptyset$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, sauc skaitli $\mathbb{E}\xi := \int\limits_{\Omega} \xi \, d\mathbb{P} := \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{P}(A_k)$.

2.Definīcija. Par ***integrāli no vienkāršas funkcijas*** $\xi(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$, kur $A_j \in \mathcal{F}, \lambda_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, ..., n$; un $i \neq j \to A_i \cup A_j = \emptyset$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, ***pa kopu*** A sauc skaitli

$$\int\limits_{A} \xi d\mathbb{P} := \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) \chi_A(\omega) d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{P}(A_k \cap A).$$

Lemma [3],[4] 1. Nenegatīvam gadījuma lielumam $\xi(\omega)$ eksistē mērojamu, vienkāršu funkciju virkne $\{ \xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}$, kas gandrīz visur no apakšas tiecas uz $\xi(\omega)$, ja $n \to \infty$. (Sekas no 2. teorēmas 1.§.)

Lemma 2 [3],[4]. Ja $\{ \xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}$, $\{\eta_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ -vienkāršu funkciju virknes, kas gandrīz visur no apakšas tiecas uz nenegatīvu gadījuma lielumu $\xi(\omega)$, tad ir spēkā

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} \eta_n d\mathbb{P} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} \xi_n d\mathbb{P}.$$

3.Definīcija. Par ***integrāli no*** $0 \leq \xi(\omega) \leq c$, $c \in \mathbf{R}$, $\xi(\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n(\omega)$, un $\xi_n(\omega)$ ir vienkāršu funkciju virkne, sauc skaitli

$\int\limits_{\Omega} \xi d\mathbb{P} = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} \xi_n d\mathbb{P}$, (ja tās eksistē).

4.Definīcija. Par ***integrāli no patvaļīga ierobežota gadījuma lieluma*** $\xi(\omega)$ sauc skaitli

$\int\limits_{\Omega} \xi d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \xi^+ d\mathbb{P} - \int\limits_{\Omega} \xi^- d\mathbb{P}$, kur

$\xi(\omega) = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega)$, $\xi^+(\omega) = \max(0, \xi(\omega))$, $\xi^-(\omega) = \max(0, -\xi(\omega))$.

5.Definīcija. Par ***integrāli no patvaļīga gadījuma lieluma*** $\xi(\omega)$ sauc skaitli

$\int\limits_{\Omega} \xi d\mathbb{P} = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\{\omega:\xi(\omega)\le n\}} \xi_n d\mathbb{P}$, ja tās eksistē.

Reālā mainīgā funkciju teorijā tiek pierādīta unitāte, šādā veidā definētam integrālim no patvaļīgas funkcijas, kura ir mērojama attiecībā pret σ-algebru $\mathcal{F}$.
Integrālis eksistē tad un tikai tad, ja eksistē integrālis no $|\xi(\omega)|$. Pieņemsim, ka turpmāk izpildās nosacījums $\mathbb{E}|\xi(\omega)| < \infty$. Aplūkosim īpašības, kas seko no integrāļa definīcijas.

- *Īpašības integrālim no ierobežotas funkcijas.*

1. Ja $x(\omega) \ge 0$, tad $\int\limits_{\Omega} x d\mathbb{P} \ge 0$.

2. $\int\limits_{\Omega} kx(\omega)d\mathbb{P} = k\int\limits_{\Omega} x(\omega)d\mathbb{P}$.

   Īpašības 1. un 2. seko tieši no integrāļa definīcijas.

3. $\int\limits_{\Omega} (x(\omega)+y(\omega))d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} x(\omega)d\mathbb{P} + \int\limits_{\Omega} y(\omega)d\mathbb{P}$.

   Pierādām trešo īpašību to kopu indikatoriem, kuras pieder $\mathcal{F}$,

   $\int\limits_{\Omega} (\mathcal{X}_A(\omega)+\mathcal{X}_B(\omega))d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A - A\cap B) + P(B - A\cap B) + 2P(A\cap B) =$

   $= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_A(\omega)d\mathbb{P} + \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_B(\omega)d\mathbb{P}$, kur $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$.

4. $\int\limits_{A\cup B} x(\omega)d\mathbb{P} = \int\limits_{A} x(\omega)d\mathbb{P} + \int\limits_{B} x(\omega)d\mathbb{P}$, kur $A\cup B = \emptyset$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$.

   Tiešām,

   $\int\limits_{A\cup B} x(\omega)d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_{A\cup B}x(\omega)d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} (\mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B)x(\omega)d\mathbb{P} =$

   $\int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_A x(\omega)d\mathbb{P} + \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_B x(\omega)d\mathbb{P} = \int\limits_{A} x(\omega)d\mathbb{P} + \int\limits_{B} x(\omega)d\mathbb{P}$.

5. Ja $x(\omega) \ge y(\omega)$, tad $\int\limits_{A} x(\omega)d\mathbb{P} \ge \int\limits_{A} y(\omega)d\mathbb{P}$.
   Šī īpašība acīm redzami seko no īpašībām 1. - 4.

- *Reālas kopu funkcijas* $\varphi(A) = \int\limits_A x(\omega)d\mathbb{P}$ *īpašības, kur* $A \in \mathcal{F}$

Visas īpašības pierādīsim tikai klasē $\mathcal{F}$ ietilpstošu kopu indikatoriem vai arī vienkāršām funkcijām $x(\omega)$.

1. $\varphi(A)$ ir σ - aditīva uz $\mathcal{F}$, t.i.,

   $\varphi\big(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\big)$, kur $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \ldots . A_i \cap A_j = \emptyset$, ja $i \neq j$.

   Pierādījums. Pieņemsim, ka $x(\omega) = \mathcal{X}_M(\omega)$ un $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Ņemot vērā, ka $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\big(A_j \cap M\big) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, kur $B_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n}\big(A_j \cap M\big)$, virkne $\{B_n\}_{n\geq 1}$ monotoni augoša, $B_n \in \mathcal{F}$ un $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

   Līdz ar to

   $$\varphi\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j} \mathcal{X}_M(\omega)d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\left(A_j\cap M\right)}(\omega)d\mathbb{P} =$$

   $$= \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j(\omega)} d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{B_n}(\omega)d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_{B_n}(\omega)d\mathbb{P} =$$

   $$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \mathcal{X}_{\bigcup\limits_{j=1}^{n}\left(A_j\cap M\right)}(\omega)d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j} \mathcal{X}_M(\omega)d\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi\big(A_j\big).$$

2. $\varphi(A)$ ir absolūti nepārtraukta attiecībā pret $\mathbb{P}$, t.i., ja $\mathbb{P}(A) = 0$, tad $\varphi(A) = 0$. Šo faktu apzīmē sekojoši $\varphi(A) \ll \mathbb{P}(A)$. Šī apgalvojuma pareizība acīm redzami seko no tā, ka varbūtību mērs ir pilns.

   $\varphi(A) = \int\limits_A \mathcal{X}_M d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap M) = 0$, tā kā $A \cap M \subset A$.

   Pieņemsim, ka turpmāk izpildās noteikums: $\int\limits_{\Omega} |x(\omega)|d\mathbb{P} < \infty$

6.Definīcija. Par gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ ***matemātisko cerību*** sauc skaitli

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi d\mathbb{P}.$$

- *Kopu funkcijas* $\mu(A) := P(\{\omega : \xi(\omega) \in A\})$*īpašības*

Kā iepriekš tika atzīmēts, gadījuma lielums $\xi(\omega)$, kas tiek definēts varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, inducē uz $< \mathbf{R}, \mathcal{B} >$ mēru μ

$$\mu(A) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in A\}),$$

kas definēts Boreļa kopu σ -algebrā $\mathcal{B}$ ar gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ un mēra $\mathbb{P}$ palīdzību.

$\xi(\omega)$ transformē $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ par $< \mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu >$ saglabājot mēru. Acīmredzot, uz visas reālās ass $\mathbf{R}$ gadījuma lielums $\xi(\omega)$ definē funkciju

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = \mu(-\infty, x).$$

No šejienes $\mu([a,b]) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in [a,b]\}) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Tādējādi, gadījuma lieluma $\xi(\omega)$ sadalījuma funkcija $F_\xi(x)$ definē viennozīmīgi uz $< \mathbf{R}, \mathcal{B}, \mu >$ Lebega - Stiltjesa mēru.

1.Teorēma [3],[4]. Jebkurai Bēra funkcijai $f(x)$ ir spēkā vienādība

$$\int\limits_{\Omega} f(\xi)d\mathbb{P} = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)dF_\xi(x),$$

pie tam visi trīs integrāļi vienlaikus eksistē vai neeksistē.

Atzīmēsim, ka gadījumā, ja $A = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}$, tad

$$\int\limits_{A} f(\xi)d\mathbb{P} = \int\limits_{(\omega:\xi(\omega)\in B)} f(\xi)d\mathbb{P} = \int\limits_{B} f(x)d\mu = \int\limits_{B} f(x)dF_\xi(x).$$

Teorēmas apgalvojumu var vispārināt uz daudz dimensiju gadījumu [1]. Šo jautājumu tuvāk neiztirzāsim. Atzīmēsim vienīgi šādu faktu:
gadījumā, kad $x \in \mathbf{R^n}$, gadījuma lieluma $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ varbūtību sadalījums tiek uzdots ar sadalījuma funkcijas $F_\xi(x)$ palīdzību, integrāli

$$\mathbb{E}f(\xi) = \int\limits_{\Omega} f(\xi)d\mathbb{P} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)d\mu$$

var pārakstīt formā $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)dF_\xi(x)$, kuru, savukārt, ja eksistē gadījuma lieluma ξ blīvuma funkcija, var uzrakstīt šādi

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)dF_\xi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)p_\xi(x)dx.$$

Integrāli $\int\limits_{R^n} f(x)dF_\xi(x)$ sauc par Lebega –Stiltjesa integrāli. Lai pierādītu vienādību ķēdi

$$\int\limits_{\Omega} f(\xi)d\mathbb{P} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)dF_\xi(x) = \text{ja } \exists\ p_\xi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)p_\xi(x)dx$$

tiek izrakstītas abu integrāļu integrālsummas un tiek pārbaudīts, vai tās ir vienādas.

Izmantojot Stiltjesa integrāļa definīciju, diskrēta tipa sadalījumam $F_\xi(x)$, integrāli varam pārakstīt kā summu

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)dF_\xi(x) = \sum_k f(x_k)[F_\xi(x_k+0) - F_\xi(x_k)] = \sum_k f(x_k)\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}),$$

kur $x_1, x_2, ...$ ir tie punkti, kuros funkcijai $F_\xi(x)$ ir lēcieni.

Ja $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx$,

kas nozīmē, ka $\xi(\omega)$ ir absolūti nepārtraukta tipa gadījuma lielums, kā arī $f(x)$, un $p_\xi(x)$ ir integrējamas pēc Rīmaņa, tad Stiltjesa integrālis ir tas pats parastais Rīmaņa integrālis

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)dF_\xi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)p_\xi(x)dx.$$

10.§. Viendimensiju gadījuma lielumu skaitliskie raksturotāji

1.Definīcija. Par k***-tās kārtas sākuma momentu*** gadījuma lielumam ξ, kas definēts varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, sauc skaitli

$\alpha_k := \mathbb{E}\xi^k = \int\limits_{\Omega} \xi^k d\mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$, ja integrālis labajā pusē eksistē.

Ņemot vērā iepriekš minētos definīcijas,

$$\alpha_k = \mathbb{E}(\xi^k) = \begin{cases} \sum\limits_x x^k \mathbb{P}(\{\omega : \xi = x\}), & \text{diskrētiem gadījuma lielumiem,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx, & \text{nepārtrauktiem gadījuma lielumiem.} \end{cases}$$

Tātad, matemātiskā cerība $\mathbb{E}\xi$ gadījuma lielumam ξ ir pirmās kārtas sākuma moments. Matemātiskās cerības $\mathbb{E}\xi$ svarīgākās īpašības sakrīt ar integrāļa īpašībām:

- $\mathbb{E}(c, \xi) = c\,\mathbb{E}\xi$, ja c-const,
- $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_1$,
- ja $a < \xi < b \;\Rightarrow\; a < \mathbb{E}\xi < b$,
- $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$,
- ja $\xi \ge 0$ un $\mathbb{E}\xi = 0$, tad $\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = 0\}) = 1$,

- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\chi_A$,
- ja ξ_1, ξ_2 neatkarīgi, tad $\mathbb{E}\xi_1\xi_2 = \mathbb{E}\xi_1\,\mathbb{E}\xi_2$ (tiks pierādīts vēlāk).

2.Definīcija. Par gadījuma lieluma ξ ***k-tās kārtas centrālo momentu*** sauc skaitli

$\beta_k := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k = \int\limits_\Omega (\xi - \mathbb{E}\xi)^k d\mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$, ja integrālis labajā pusē eksistē.

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k = \begin{cases} \sum\limits_x (x - \mathbb{E}\xi)^k \mathbb{P}(\{\omega : \xi = x\}), \text{diskrētiem gadījuma lielumiem,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}\xi)^k p_\xi(x) dx, \text{ nepārtrauktiem gadījuma lielumiem.} \end{cases}$$

Gadījuma lieluma ξ otrās kārtas centrālo momentu sauc par ***dispersiju*** un apzīmē ar $D\xi$. Viegli pārliecināties, ka

$D\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$.

Atzīmēsim vienkāršākās dispersijas īpašības:

- $Dc = 0$, kur $c = \text{const}$,
- $D(c\,\xi) = c^2\,D\xi$,
- $D(\xi + c) = D\xi$,
- ja ξ_1, ξ_2 neatkarīgi, tad $D(\xi_1 \pm \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$ (tiks pierādīts vēlāk).

3.Definīcija. Lielumu $\sigma_\xi := \sqrt{D\xi}$ sauc par gadījuma lieluma ξ ***vidējo kvadrātisko novirzi.***

Liela loma gadījuma lielumu raksturošanai ir 1. kārtas sākuma un 2. kārtas centrālajam momentam. $\mathbb{E}\xi$ var interpretēt, kā varbūtību sadalījuma smaguma centra koordinātu, $D\xi$, kā arī σ_ξ, raksturo gadījuma lieluma ξ izkliedi ap šo centru. σ_ξ ir ērti lietot tāpēc, ka tā mērvienības sakrīt ar gadījuma lieluma ξ mērvienībām. Trešās kārtas centrālo momentu β_3 izmanto sadalījuma asimetrijas raksturošanai.

Piemērs 1. Gadījuma lielums $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Atrast sadalījuma $\mathbb{E}\xi$, un $D\xi$.

Atrisinājums.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(z\sigma+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \text{ kur}\\
z &= \frac{x-a}{\sigma}, \text{ tad } \mathbb{E}\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = a,\\
D\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz =\\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right) = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Piemērs 2. Gadījuma lielums η *vienmērīgi sadalīts segmentā* $[a,b]$. Atrast sadalījuma $\mathbb{E}\eta$, un $D\eta$.

Atrisinājums.

$$\mathbb{E}\eta = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b+a}{2},$$

$$D\eta = \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - (\frac{b+a}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Piemērs 3. Gadījuma lielums ν *sadalīts pēc Puasona likuma* $\mathbf{P}(\lambda), \lambda > 0$. Atrast $\mathbb{E}\nu$, un $D\nu$.

Atrisinājums.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\nu &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda,\\
D\nu &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 =\\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Piemērs 4. Gadījuma lielums μ *sadalīts pēc eksponenciālā likuma.* Atrast $\mathbb{E}\mu,\ D\mu$.

Atrisinājums. Gadījuma lieluma μ varbūtību blīvuma funkcija ir

$$p_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \lambda > 0.$$

Ievērojot gamma funkcijas īpašību: $n \in \mathbf{N} \ \Rightarrow\ \Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$, iegūstam

$$\mathbb{E}\mu = \int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\infty z e^{-z} dz = \frac{\Gamma(2)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbb{E}\mu^2 = \int\limits_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_0^\infty z^2 e^{-z} dz = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$D\mu = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},\ \ \sigma_\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

Piezīme 1. Ja eksistē $\mathbb{E}\xi^k$, tad arī eksistē $\mathbb{E}\xi^r$ visiem $r \le k$.

Pirmkārt, jebkuram gadījuma lielumam ξ un izliektai uz leju nepārtrauktai funkcijai $f(x)$ izpildās nevienādība $\mathbb{E}f(\xi) \ge f(\mathbb{E}\xi)$.

Tiešām, pēc izliektas uz leju nepārtrauktas funkcijas $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definīcijas $f(x)$ atrodas vienā pusē attiecībā pret atbalsta taisni, t.i. virs taisnes, tātad

$$f(x_0) - k(x - x_0) \le f(x),$$

kur k funkcijas $f(x)$ punktā x_0 atbalsta taisnes virziena koeficients.
Aizvietojot $x = \xi(\omega)$, $x_0 = \mathbb{E}\xi$ un aprēķinot matemātisko cerību no abām pusēm, iegūstam vajadzīgo sakarību. Otrkārt, agrāk konstatējam, ka

$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_\Omega \xi d\mathbb{P} = \int\limits_\Omega \xi^+ d\mathbb{P} - \int\limits_\Omega \xi^- d\mathbb{P}$, kur

$\xi(\omega) = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega),\ \xi^+(\omega) = \max(0, \xi(\omega)),\ \xi^-(\omega) = \max(0, -\xi(\omega)),$

no kurienes, $\mathbb{E}(\xi) < \infty$ tad un tikai tad, kad $\mathbb{E}|\xi| < \infty$.
Līdz ar to,

$$\mathbb{E}|\xi|^k = \mathbb{E}(|\xi|^r)^{\frac{k}{r}} \ge \left(\mathbb{E}|\xi|^r\right)^{\frac{k}{r}},\ \ \mathbb{E}|\xi|^r \le \left(\mathbb{E}|\xi|^k\right)^{\frac{r}{k}} < \infty.$$

Piezīme 2. Gadījums, kad neeksistē $\mathbb{E}\xi^k$ nav ārkārtējs. Piemēram, tā saucamais, *Košī sadalījums.*
Viegli redzēt, ka

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$$

ir sadalījuma funkcija gadījuma lielumam ν , jo izpildās $F1$, $F2$, $F3$, visas sadalījuma funkcijas īpašības. Bet, viegli redzēt, ka $\mathbb{E}\nu$ neeksistē. No kurienes iegūstam, ka sadalīta pēc Košī likuma gadījuma lieluma ν visi momenti neeksistē.

4.Definīcija. Par gadījuma lieluma ξ ***asimetriju*** sauc skaitli

$$A_\xi = \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2}^3}.$$

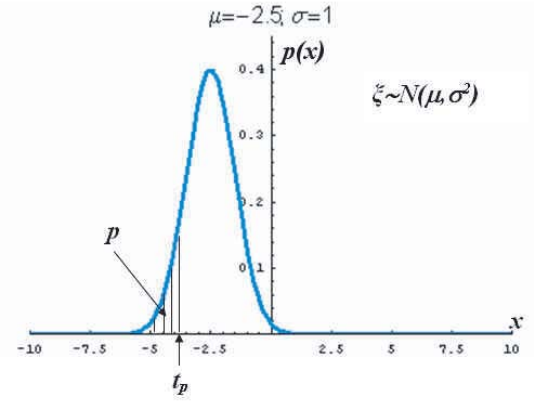
Tā kā gadījuma lieluma ξ trešās kātras centrālais moments β_3 centrāli simetriskam sadalījumam vienāds ar nulli, tad ja A_ξ nav nulle, sadalījums ir vairāk vai mazāk asimetrisks. Asimetrija ir lielāka, ja lielāka koeficienta absolūtā vērtība. Asimetrijas koeficienta zīme rāda asimetrijas virzienu. Ja sadalījuma kreisā puse ir izstiepta, bet labā puse aprauta, asimetrijas koeficients ir negatīvs, un otrādi pretējā gadījumā.

5.Definīcija. Par gadījuma lieluma ξ ***ekscesu*** sauc skaitli

$$Ex_\xi = \frac{\beta_4}{(\beta_2)^2} - 3.$$

Ekscesa koeficienta skaitlisko lielumu novērtē, salīdzinot to ar normēta normālā sadalījuma ekscesa koeficientu, kurš ir nulle. Ja sadalījums ir smailāks nekā normālā sadalījuma gadījumā, tad tā ekscess ir negatīvs, turpretī, ja sadalījums ir plakanāks, tad tā ekscess ir pozitīvs.

6.Definīcija. Skaitli t_p sauc par gadījuma lieluma ξ ***p-kvantili***, ja izpildās vienādība $\mathbb{P}(\xi < t_p) = p$.



14.zīm.

Šis skaitlis raksturo inrevāla $(-\infty, t_p)$ galapunktu, kurā ar varbūtību p var atrasties gadījuma lieluma ξ vērtība.

7.Definīcija. Par gadījuma lieluma ξ sadalījuma ***mediānu*** Me_ξ sauc gadījuma lieluma ξ kvantili $t_{0,5}$, t.i., $Me_\xi = t_{0,5}$, kur $t_{0,5}$ ir vienādojuma $\mathbb{P}(\xi < t_{0,5}) = 0,5$ atrisinājums.

Piemēram, napārtrauktiem gadījuma lielumiem

$$\int_{-\infty}^{Me_\xi} p_\xi(x)dx = \int_{Me_\xi}^{\infty} p_\xi(x)dx = 0,5.$$

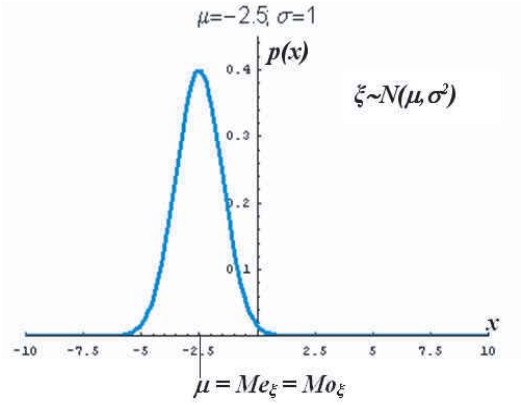
Diskrētiem gadījuma lielumiem mediāna ir tāds skaitlis Me_ξ, kuram izpildās

$$\sum_{x \le Me_\xi} \mathbb{P}(\xi = x) \le 0,5 \text{ un } \sum_{x > Me_\xi} \mathbb{P}(\xi = x) \ge 0,5.$$

Acīmredzot, ka centrāli simetriskam sadalījumam mediāna sakrīt ar matemātisko cerību.

8.Definīcija. Gadījuma lieluma ξ vērtību Mo_ξ, ar kuru tā sadalījuma blīvuma funkcija sasniedz lokālo maksimumu, sauc par gadījuma lieluma ***modu***.

Ja gadījuma lielumam ir tikai viena moda, tad sadalījumu sauc par ***unimodālu*** sadalījumu, ja modas ir vairākas, tad par ***multimodālu***.
Piebildīsim, ka normālam sadalījumam $\mathbb{E}\xi = Me_\xi = Mo_\xi$.



15.zīm.

Piemērs 5. Pierādīt, ka, gadījumā, ja $\xi \sim N(0,1)$, tad $\alpha_{2k} = (2k-1)!!,\ \alpha_{2k-1} = 0,\ k = 1, 2, ...$

Tiešām,

$$\mathbb{E}\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} x dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x^{k-1}\ e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k-1)x^{k-2} e^{-\frac{x^2}{2}} x dx \right) =$$

$$= (k-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (k-1)\mathbb{E}\xi^{k-2} = (k-1)(k-3)\mathbb{E}\xi^{k-4} =$$

$$\cdots = \begin{cases} (k-1)(k-3)\cdots\mathbb{E}\xi = 0, & k \in \{2n-1, n \in \mathbf{N}\} \\ (k-1)(k-3)\cdots\mathbb{E}\xi^2 = (k-1)!!, & k \in \{2n, n \in \mathbf{N}\} \end{cases}.$$

Piemērs 6.
Pierādīt, ka ja $\eta \sim N(a, \sigma^2)$, tad $Ex_\eta = 0, A_\eta = 0$.

Tā kā

$$\xi := \frac{\eta - a}{\sigma} \sim N(0,1),$$

$$\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow\ \mathbb{E}\left(\frac{\eta - a}{\sigma}\right)^{2n-1} = 0,\ \mathbb{E}\left(\frac{\eta - a}{\sigma}\right)^{2n} = (2n-1)!!,$$

iegūstam, ka gadījuma lielumam η $\beta_4 = \mathbb{E}(\eta - a)^4 = 3\sigma^4$. Tātad,

$$Ex_\eta = \frac{\beta_4}{(\beta_2)^2} - 3 = \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2} - 3 = 0,$$

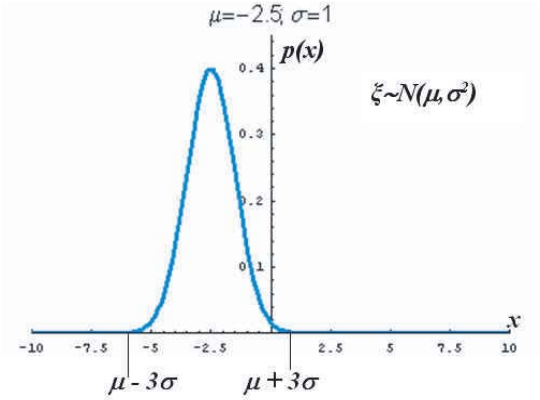
$$\beta_3 = \mathbb{E}\left(\frac{\eta - a}{\sigma}\right)^3 \sigma^3 = 0,\ \beta_2 = \mathbb{E}(\eta - a)^2 = \sigma^2 \ \Rightarrow\ A_\eta = \frac{\beta_3}{\sqrt{(\beta_2)^3}} = \ 0.$$

Piezīme 3. 3σ ***likums***.

Atzīmēsim, ka normāli sadalītam gadījuma lielumam $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ spēkā, tā saucamais, 3σ ***likums***

$$\mathbb{P}(a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma) = \mathbb{P}(-3 < \frac{\xi - a}{\sigma} < 3) = 0.9973.$$

Ir redzams, ka novelkot abscisas asij perpendikulāras līnijas punktos $a - 3\sigma$ un $a + 3\sigma$, tad iegūtais laukums ietver sevi tas $99,73$ procentus no laukuma zem normālā sadalījuma blīvuma funkcijas.



16.zīm.

11.§. Gadījuma lielumu neatkarība

Pieņemsim, ka dota bezgalīga neatkarīgu gadījuma lielumu virkne $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Pierādīsim, ka eksistē tāda varbūtību telpa $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$, kurā būs definēta šī virkne.
Vispirms atzīmēsim, ka jebkurā galīgā telpu reizinājumā $\mathbf{R}^N = \bigcap_{i \in N} \mathbf{R}_i$, kur N- kāda naturālo skaitļu kopas apakškopa, var viegli definēt vairāk dimensiju gadījuma lielumu ξ, kas sastāv no neatkarīgām komponentēm $\xi_k, k \in N$. Tiešām, šajā gadījumā mēru iegūstam kā mēru, kas definēti telpās $\mathbf{R}_k$, $k \in N$, reizinājumu.

$$\mathbb{P}_N(\{\omega : \xi_k \in B_k, k \in N\}) = \prod_{k \in N} \mathbb{P}_k(\{\omega : \xi_k \in B_k\}) = \prod_{k \in N} \mu_k(B_k),$$

kur B_k -Boreļa kopas telpā $\mathbf{R}_k$, $k \in N$.

Pieņemsim, ka šāda veida mērs ir uzdots jebkuram telpu $\mathbf{R}_j$, $j \in N$ galīgam reizinājumam. Ja M ir N apakškopa, tad, viegli var ievērot, ka mērs, kas uzdots telpā ar lielāku dimensiju skaitu, nosaka mēru telpai ar mazāku dimensiju skaitu. Tiešām,

$$\mathbb{P}_M(\{\omega : \xi_k \in B_k, k \in M\}) = \mathbb{P}_N(\{\omega : \xi_k \in B_k,\ k \in M,\ \xi_i \in \mathbf{R}_i,\ i \in N \setminus M\}).$$

Tātad ir izpildīts, tā sauktais, pirmais mēru saskaņošanas nosacījums. Bez tam ir nepieciešams, ka, lai arī kādā kārtībā nebūtu uzrakstīts jebkurš galīgs telpu reizinājums, mēram jābūt vienmēr vienam un tam pašam. Šis nosacījums izpildās acīm redzami.
Kā ir pierādījis Kolmogorovs, šo divu nosacījumu izpildīšanās viennozīmīgi definē mēru uz bezgalīga telpu $\mathbf{R}_j$, $j \geq 1$ reizinājuma.
Ilustrēsim ģeometriski augstāk minēto mēra uzdošanas paņēmienu gadījuma vektoriem ar neatkarīgām komponentēm, piemēram telpā $\mathbf{R}^2$.
Tātad, pieņemsim, ka telpā $< \mathbf{R}^2, \mathcal{B}^2, \mu >$ mēru joslām noteiks kā mēru to pamatam A_1 telpā $\mathbf{R}_1$, un A_2 telpā $\mathbf{R}_2$ atbilstoši.
Tad, kopas $E = A_1 \times A_2$ telpā $\mathbf{R}^2$ mērs būs abu, tikko minēto, joslu mēru reizinājums $\mu(E) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$. Tādējādi, no mēriem, kas uzdoti katrs savā telpā $< \mathbf{R}_i, \mathcal{B}_i, \mu_i >$, $i = 1, 2$, mēs nonākam pie mēra, kad uzdots telpā $\mathbf{R}^2$. Par mēru joslai telpā $\mathbf{R}^2$ kalpo tās joslas mērs, kura atrodas šīs joslas pamatā. Šāda tipa joslas-kopas sauc par *J-cilindriem.*
Tagad precīzi definēsim J- cilindru. Pieņemsim, ka J un N ir divas naturālo skaitļu kopas apakškopas, turklāt $J \subset N$.
Par J-cilindru sauc tādu telpas $\mathbf{R}^N$ apakškopu E, ka no tā, ka telpas $\mathbf{R}^N$ punktu ξ un η k-tās koordinātes ($k \in J$) ir sakritušas, seko, ka ξ un η vienlaicīgi vai nu pieder vai nepieder šai kopai E.

Par J-cilindra pamatu var būt jebkura Boreļa kopa, kuras dimensija sakrīt ar J dimensiju, un šīs Boreļa kopas mērs piekārtojams dotajam cilindram.

Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ir neatkarīgi, tad acīm redzami, ka

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\cdots F_{\xi_n}(x_n).$$

Varbūtību telpā $< \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ definētie gadījuma lielumu virknes elementi $\xi_n, n \geq 1$ ir neatkarīgi, ja jebkuram veselam pozitīvam skaitlim k izpildās

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_k}(x_1, x_2, ..., x_k) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\cdots F_{\xi_k}(x_k).$$

Tātad, gadījuma lielumu virknes neatkarība, reducējas uz jebkura galīga skaita šīs virknes gadījuma lielumu neatkarību.

1.Teorēma. Pieņemsim, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ -neatkarīgi gadījuma lielumi. Ja $F_{\xi_i}(x_i)$ pie katra $i = 1, 2, ..., n$ ir absolūti nepārtrauktā tipa sadalījuma funkcija, tad arī $F_{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ absolūti nepārtrauktā tipa sadalījuma funkcija. Pie tam gadījuma vektota $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ blīvuma funkcija būs

$$p_{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)\cdots p_{\xi_n}(x_n).$$

Otrādi, ja $F_{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ absolūti nepārtraukta, tad arī $F_{\xi_i}(x_i)$ absolūti nepārtrauktas visiem $i = 1, 2, ..., n$.

Pierādījums. Ja katra gadījuma lieluma ξ_i, $i = 1, 2, ..., n$ sadalījuma funkcija ir absolūti nepārtraukta un gadījuma lielumi ir neatkarīgi, tad kopīgā sadalījuma funkcija tiek definēta ar sakarību

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\cdots F_{\xi_n}(x_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(t_2)dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(t_n)dt_n =$$

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1)\cdots p_{\xi_n}(t_n)dt_1dt_2...dt_n.$$

Tātad iegūstam, ka gadījuma vektors $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ ir absolūti nepārtrauktā tipa ar blīvuma funkciju

$$p_{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)\cdots p_{\xi_n}(x_n).$$

Ar to ir pierādīta teorēmas apgalvojuma pirmā daļa.
Otrādi, ja pieņemsim, ka

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\cdots\int\limits_{-\infty}^{x_n}p(t_1,t_2,...,t_n)dt_1dt_2...dt_n,\text{ tad}$$

$$F_{\xi_1}(x_1)=F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,\infty,...,\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(t_1,t_2,...,t_n)dt_1dt_2...dt_n,$$

un gadījuma lieluma ξ_1 sadalījuma blīvuma funkcija

$$p_{\xi_1}(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(t_1,t_2,...,t_n)dt_1dt_2...dt_n.$$

Vienādība ir spēkā gandrīz visur. Līdzīgi iegūstam blīvuma funkcijas jebkuram $\xi_i,\ i=1,2,...,n$. Ar to ir pierādīts arī otrais teorēmas apgalvojums.

2.Teorēma. Ja φ_1,φ_2 ir Bēra funkcijas, ξ_1,ξ_2 -neatkarīgi gadījuma lielumi, tad $\eta_1=\varphi_1(\xi_1)$ un $\eta_2=\varphi_2(\xi_2)$ arī ir neatkarīgi gadījuma lielumi.

Pierādījums. Apzīmēsim ar $\mathcal{F}_{\xi_1},\ \mathcal{F}_{\xi_2}$ - minimālās σ - algebras, asociētās ar ξ_1 un ξ_2. Jau no gadījuma lielumu η_1 un η_2 definīcijas seko, ka tie ir mērojami attiecība pret $\mathcal{F}_{\xi_1}$, un $\mathcal{F}_{\xi_2}$. No σ -algebru neatkarības, attiecībā pret kuru ir mērojami $\varphi_1(\xi_1)$ un $\varphi_2(\xi_2)$ lielumi, seko η_1 un η_2 neatkarība.

Raksturīga neatkarīgu gadījuma lielumu $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ īpašība ir tā, ka, jebkuras mērojamas funkcijas no $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$, sadalījums pilnībā ir aprakstāms ar sadalījuma funkcijām $F_{\xi_1},F_{\xi_2},...,F_{\xi_n}$.

3.Teorēma. Ja ξ_1 u n ξ_2 ir neatkarīgi, tad

$$\mathbb{E}(\xi_1\,\xi_2)\ =\ \mathbb{E}\xi_1\cdot\mathbb{E}\xi_2,\ \ D(\xi_1\pm\xi_2)\ =\ D\xi\ +\ D\xi_2.$$

Pierādījums.
Minēsim, ka vektors $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ transformē $<\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}>$ par $<\mathbf{R^2},\mathcal{B}^2,\mu>$, kur $\mu(A)=\mathbb{P}(\{\omega:(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))\in A\}$ jebkuram $A\in\mathcal{B}^2$. Tātad

$$\mathbb{E}(\xi_1\xi_2\,)=\int\limits_{\Omega}\xi_1\xi_2d\mathbb{P}=\int\limits_{\mathbf{R^2}}x_1x_2d\mu=\int\limits_{\mathbf{R^2}}x_1x_2dF_{(\xi_1,\xi_2)}(x_1,x_2)$$

Ņemot vērā ξ_1 un ξ_2 neatkarību, pēdējo vienādību pierkstīsim formā

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1x_2dF_{(\xi_1,\xi_2)}(x_1,x_2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1dF_{\xi_1}(x_1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_2dF_{\xi_2}(x_2)=\mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2\,).$$

Lai pārliecinātos par otrā apgalvojuma pareizību, izmantosim matemātiskā cerības īpašības.

$$D(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 \pm \xi_2 - \mathbb{E}(\xi_1 \pm \xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) \pm (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2))^2 =$$
$$= D\xi_1 + D\xi_2 \pm 2\mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2.$$

Piemērs 1. Izrēķināsim sadalījuma funkciju divu nepārtrauktu neatkarīgu gadījuma lielumu ξ_1 un ξ_2 summai, ja $F_{\xi_1}(x_1)$ un $F_{\xi_2}(x_2)$ ir sadalījuma funkcijas atbiltoši gadījuma lielumiem ξ_1 un ξ_2.

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi_1 + \xi_2 < z\}) = \mathbb{P}(\{\omega : (\xi_1, \xi_2) \in A\}) =$$

$$= \iint\limits_A p_{(\xi_1,\xi_2)}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{\{z:\, x_1+x_2<z\,\}} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{z-x_1} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(z - x_1)dx_1.$$

Tātad, $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(z - x_1)dF_{\xi_1}(x_1)$.

Analogiski iegūstam $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(z - x_2)dF_{\xi_2}(x_2)$.

Atzīmēsim, ka pēdējās sakarības ir pareizas arī gadījumā, kad $F_{\xi_1}(x_1)$ un $F_{\xi_2}(x_2)$ diskrēta tipa sadalījuma funkcijas.

Izrēķināsim tagad sadalījuma blīvumu funkciju divu nepārtrauktu neatkarīgu gadījuma lielumu ξ_1 un ξ_2 summai $\xi_1 + \xi_2$.
Veicot vienādībā
$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{z-x_1} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)dx_2$ substitūciju $x_1 + x_2 = t$, iegūstam

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(t-x_1)dx_1dt = \int\limits_{-\infty}^{z} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(t-x_1)dx_1\Big)dt.$$

No šīs sakarības iegūstam, ka gadījuma lieluma $\xi_1 + \xi_2$ sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(z - x_1)dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(z - x_1)dF_{\xi_1}(x_1).$$

Analoģiski iegūstam, ka

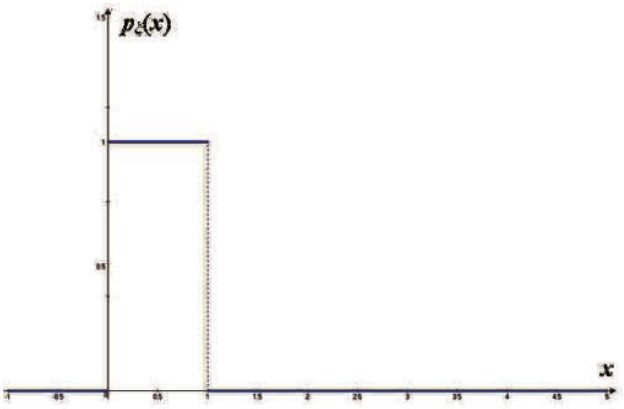
$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(z-x_2)dF_{\xi_2}(x_2).$$

Formulas ir pareizas, ja kaut vienai no sadalījuma funkcijām $F_{\xi_1}(x_1), F_{\xi_2}(x_2)$ eksistē sadalījuma blīvuma funkcija.

Piemērs 2. Pieņemsim, ka $\xi_1, \xi_2, ...$ neatkarīgi un vienmērīgi intervālā $[0,1]$ sadalīti gadījuma lielumi. Ko var pateikt par $\sum\limits_{i=0}^{k} \xi_i$ sadalījumu?
Tā kā gadījuma lielumiem $\xi_1, \xi_2, ...$ ir viena un tā pati blīvuma funkcija

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}, \quad i \geq 1,$$

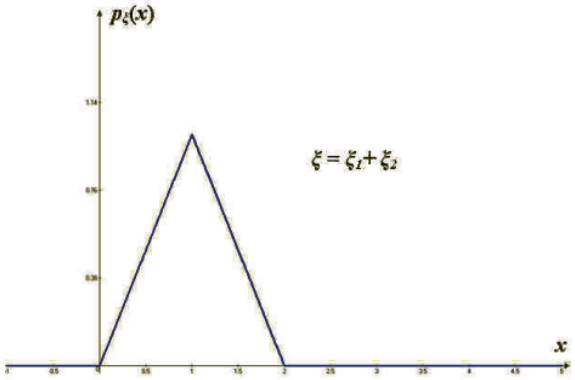
tad



17.zīm.

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x-x_1)dx_1 = \int\limits_{0}^{1} p_{\xi_2}(x-x_1)dx_1 =$$

$$= \int\limits_{x-1}^{x} p_{\xi_2}(u)du = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in [1,2] \end{cases}.$$

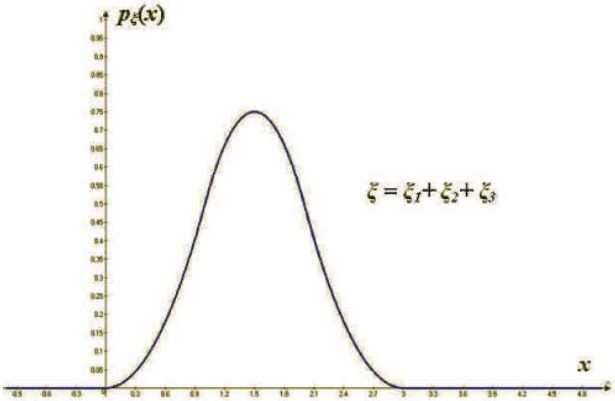


18.zīm.

Acīm redzami, ka pēdējais integrālis ir vienāds ar nogriežņu $[0,1]$ un $[x-1,x]$ kopīgas daļas garumu. Ņemot ξ_3 par pirmo saskaitāmo, bet $\xi_1+\xi_2$ par otro varam turpināt analīzi.

$$p_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int\limits_0^1 p_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt = \int\limits_{x-1}^{x} p_{\xi_1+\xi_2}(u)du =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \notin [0,3] \\ \frac{x^2}{2}, & x \in [0,1] \\ 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}, & x \in [1,2] \\ \frac{(x-3)^2}{2}, & x \in [2,3] \end{cases}.$$



19.zīm.

Varam konstatēt, ka pieaugot n, blīvuma funkcijas grafiks arvien vairāk atgādina funkcijas $y = ce^{-b(x-a)^2}, a \in \mathbf{R}$, b, $c \in \mathbf{R}_+$ grafiku, kas, kā mēs redzēsim, nav nejauša sagadīšanās.

12.§. Korelācijas koeficients

Divi gadījuma lielumi ξ un η var būt funkcionāli saistīti: $\xi = f(\eta)$, var būt atkararīgi, bet ne funkcionāli, un beidzot var būt neatkarīgi. Divu lielumu korelācijas koeficients ir skaitlis, ar kura palīdzību kvantitatīvi var raksturot divu gadījumu lielumu atkarības pakāpi. Pieņemsim, ka visiem gadījuma lielumiem, kurus mēs apskatīsim šajā paragrāfā, dispersija eksistē un ir atšķirīga no nulles.
Gadījuma lielumu ξ sauc par normētu, ja $\mathbb{E}\xi = 0$ un $\mathbb{D}\xi = 1$. Jebkuru gadījumu lielumu ar lineāras transformācijas palīdzību var pārveidot par normētu, ņemot

$$\xi_1 = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}.$$

Lai ξ un η ir patvaļīgi gadījuma lielumi, bet ξ_1 un η_1 tiem atbilstošie normētie gagījuma lielumi.
Par gadījuma lielumu ξ un η ***korelācijas koeficientu*** sauc skaitli

$$\varrho(\xi, \eta) = \mathbb{E}\left\{\xi_1 \cdot \eta_1\right\}.$$

Korelācijas koeficienta īpašības:

1. $|\varrho(\xi, \eta)| \leq 1$.

   $$\text{Tiešām } 0 \leq \mathbb{D}(\xi_1 \pm \eta_1) = \mathbb{E}\left\{\xi_1 \pm \eta_1\right\}^2 = \mathbb{E}\xi^2 \pm 2\mathbb{E}\left\{\xi_1 \cdot \eta_1\right\} + \mathbb{E}\xi_1^2 =$$
   $$= 2 \pm 2\mathbb{E}\left\{\xi_1 \cdot \eta_1\right\} = 2 \pm 2\varrho\left(\xi_1 \cdot \eta_1\right).$$

   No šejienes seko, ka $|\varrho(\xi, \eta)| \leq 1$.

2. Ja ξ un η ir neatkarīgi, tad $\varrho(\xi, \eta) = 0$.
   No gadījuma lielumu ξ un η neatkarības seko ξ_1 un η_1 neatkarība. Tad

   $$\varrho(\xi, \eta) = \mathbb{E}\left\{\xi_1 \cdot \eta_1\right\} = \mathbb{E}\left\{\xi_1\right\} \cdot \mathbb{E}\left\{\eta_1\right\} = 0.$$

   Apgrieztais apgalvojums, protams, nav pareizs.

   Piemērs. Pieņemsim, ka ξ un ζ neatkarīgi gadījuma lielumi, pie kam $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\zeta = 0$. Ņemam $\eta = \xi \cdot \zeta$. Tad ξ un η, acīm redzot, ir atkarīgi (izņemot dažus triviālus gadījumus, kā, piemēram, kad $\xi = const$). Bet

   $$\varrho(\xi, \eta) = \mathbb{E}\left\{\xi_1 \cdot \eta_1\right\} = \frac{1}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}\mathbb{E}\left\{\xi \cdot \eta\right\} = \frac{1}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}\mathbb{E}\left\{\xi^2 \cdot \zeta\right\} =$$
   $$= \frac{1}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}\mathbb{E}\left\{\xi^2\right\} \cdot \mathbb{E}\zeta = 0.$$

3. $|\varrho(\xi,\eta)|=1$ tad un tikai tad, kad eksistē tādi skaitļi $a\neq 0$ un b, ka

$$\mathbb{P}\{\omega:\eta=a\xi+b\}=1.$$

Pierādījums. Pieņemsim, ka $\mathbb{P}\{\omega:\eta=a\xi+b\}=1$.
Apzīmēsim $\mathbb{E}\xi=\alpha$ un $\sqrt{\mathbb{D}\xi}=\beta$, tad

$$\mathbb{E}\eta=a\alpha+b,$$

$$\mathbb{D}\eta=\{a\xi+b-a\alpha-b\}^2=a^2\beta^2$$

un

$$\varrho(\xi,\eta)=\mathbb{E}\left\{\frac{(\xi-\alpha)}{\beta}\cdot\frac{(a\xi+b-a\alpha-b)}{|a|\beta}\right\}=\mathbb{E}\left\{\frac{(\xi-\alpha)^2\cdot a}{\beta^2\cdot|a|}\right\}=$$

$$=\frac{a}{|a|}=\operatorname{sign}(a).$$

Pieņemsim tagad, ka $|\varrho(\xi,\eta)|=1$.

a) Apskatīsim gadījumu, kad $\varrho(\xi,\eta)=1$. Tad

$$\mathbb{D}(\xi_1-\eta_1)=2-2\varrho(\xi,\eta)=0.$$

Tas ir $\mathbb{E}(\xi_1-\eta_1)^2=0$ un $(\xi_1-\eta_1)^2\geq 0$. Tātad secinām, ka

$\mathbb{P}\{\omega:\xi_1-\eta_1=0\}=1$ vai $\mathbb{P}\{\omega:\eta=a\xi\pm b\}=1$, kur

$$a=\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi},\ b=\mathbb{E}\eta-\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\mathbb{E}\xi.$$

b) Ja $\varrho(\xi,\eta)=-1$, tad, apskatot $\mathbb{D}(\xi_1+\eta_1)$, iegūstam, ka

$$\mathbb{P}\{\omega:\xi_1+\eta_1=0\}=1,$$

un līdz ar to trešā īpašība ir pierādīta.

Ja $\varrho>0$, tad gadījuma lielumus ξ un η sauc par ***pozitīvi korilētiem***. Savukārt, ja $\varrho<0$, tad gadījuma lielumus ξ un η sauc par ***negatīvi korilētiem.***

Piemērs. Vektoru $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ sauc par ***normālu***, ja tā blīvums ir

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c\cdot e^{-\Theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)},$$

kur $c-const$, $\Theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$pozitīvi definīta kvadrātiskā forma attiecībā pret (x_i-a_i), $i=1,2,\ldots,n$ un a_i - konstanti skaitļi.

Divdimensiju gadījumā lielums (ξ_1, ξ_2) sadalīts normāli, ja tā sadalījuma blīvums ir šāds:

$$f(x_1, x_2) = c \cdot e^{-\Theta(x_1, x_2)}.$$

Ir zināms, ka pozitīvi definītu kvadrātisko formu $\Theta(x_1, x_2)$ attiecībā pret $(x_1 - a_1)$ un $(x_2 - a_2)$ var uzrakstīt formā

$$\Theta(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - a_1)^2}{2A^2} - r\frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{A \cdot B} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{2B^2},$$

kur A un B pozitīvi skaitļi, bet r, a_1, a_2 - reāli skaitļi, turklāt $|r| \leq 1$. Noskaidrosim divdimensiju normāli sadalīta gadījuma lieluma (ξ_1, ξ_2) sadalījuma blīvuma formulā

$$f(x_1, x_2) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{A^2} - 2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{A\cdot B} + \frac{(x_2-a_2)^2}{B^2}\right]}.$$

ietilpstošo parametru jēgu. Izmantojot gadījuma vektora sadalījuma sadalījuma funkcijas saskaņošanas noteikumus, uzrakstīsim sadalījuma likumus komponentēm ξ_1 un ξ_2

$$F_{\xi_1}(x_1) = F(x_1, \infty) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2dx_1 =$$

$$= c \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1-a_1)^2}{A^2}(1-r^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_2-a_2)}{B} - r\frac{(x_1-a_1)}{A}\right]^2} dx_2dx_1 =$$

$$= \sqrt{2\pi}\cdot B\cdot c\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1-a_1)^2}{A^2}(1-r^2)}dx_1,$$

$$\text{jo} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-a_1)}{B} - r\frac{(x_1-a_1)}{A}\right]^2} dx_2 = \sqrt{2\pi}\cdot B.$$

Līdzīgi iegūstam sadalījuma funkciju lielumam ξ_2

$$F_{\xi_2}(x_2) = \sqrt{2\pi}\cdot A\cdot c\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_2-a_2)^2}{B^2}(1-r^2)}dx_1.$$

Viegli redzēt, ka pie $r^2 \neq 1$ gadījuma lielumi ξ_1 un ξ_2 ir sadalīti pēc sekojošiem viendimensiju normāliem sadalījuma likumiem

$$f_{\xi_1}(x_1) = \sqrt{2\pi}B \cdot c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1-a_1)^2}{A^2}(1-r^2)}, \tag{1}$$

$$f_{\xi_2}(x_2) = \sqrt{2\pi}A \cdot c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2-a_2)^2}{B^2}(1-r^2)}. \tag{2}$$

Izmantojot to, ka $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$, izsakam parametru c ar A, B un r palīdzību

$$1 = \sqrt{2\pi}B \cdot c \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2A^2}(1-r^2)} dx_1 = \tag{3}$$

$$= \frac{A \cdot B \cdot c \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{1-r^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}} dz = \frac{2\pi A \cdot B \cdot c}{\sqrt{1-r^2}}.$$

No šejienes

$$c = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi A \cdot B}.$$

Ievietojot (1) un (2) izteiksmē (3), izsakām parametrus A, B ar ξ_1 un ξ_2 dispersiju palīdzību

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot B \cdot \sqrt{1-r^2}}{2\pi \cdot A \cdot B} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\xi_1}};$$

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot A \cdot \sqrt{1-r^2}}{2\pi \cdot A \cdot B} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\xi_2}}.$$

Iegūstam $A = \sigma_{\xi_1} \cdot \sqrt{1-r^2}$, $\quad B = \sigma_{\xi_2} \cdot \sqrt{1-r^2}$, $\quad c = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}\sqrt{1-r^2}}$,

$a_1 = \mathbb{E}\xi_1$, $\quad a_2 = \mathbb{E}\xi_2$.

Gadījumā, kad $r^2 \neq 1$, divdimensiju normālā sadalījuma likums izskatīsies šādi:

$f(x_1, x_2) =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \cdot \frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}.$$

Noskaidrosim vēl koeficienta r jēgu. Tādēļ izrēķināsim korelācijas koeficientu starp divdimensiju gadījuma lieluma (ξ_1, ξ_2) komponentēm ξ_1 un ξ_2.

$$\varrho(\xi_1,\xi_2) = \mathbb{E}\left\{\frac{(\xi_1-a_1)(\xi_2-a_2)}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}}f(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u\cdot v\cdot e^{\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2r\cdot u\cdot v+v^2\right]\right\}}dudv =$$

$$= c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u\cdot v\cdot e^{\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[(u-r\cdot v)^2-\frac{v^2\cdot(1-r^2)}{2(1-r^2)}\right]\right\}}dudv =$$

$$= c\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u\cdot v\cdot e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}[u-r\cdot v]^2}dudv,$$

kur

$$c := \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}, u := \frac{(x_1-a_1)}{\sigma_{\xi_1}}, v := \frac{(x_2-a_2)}{\sigma_{\xi_2}}.$$

Izdarām integrālī sekojošas substitūcijas:

$$\left(\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_{\xi_1}} - r\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_{\xi_2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} = t, \quad z = \frac{x_2-a_2}{\sigma_{\xi_2}}.$$

Tad izteiksme $\varrho(\xi_1,\xi_2)$ aprēķināšanai būs šāda

$$\varrho(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z\sigma_{\xi_2}(t\sqrt{1-r^2}+rz)\sigma_{\xi_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dtdz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(zt\sqrt{1-r^2}+rz^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dtdz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}rz^2\sqrt{2\pi}dz = \frac{1}{2\pi}\cdot r\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi} = r$$

Tātad $r = \varrho(\xi_1, \xi_2)$.
Vienādība $\varrho(\xi_1, \xi_2) = 0$ normāli sadalītam gadījuma vektoram (ξ_1, ξ_2) ir nepieciešama un pietiekama, lai gadījuma lielumi ξ_1 un ξ_2 būtu neatkarīgi.

Daudzdimensiju gadījuma lieluma skaitliskie raksturotāji.

Iepriekš aplūkojām n dimensiju gadījuma lielumu $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ un tā sadalījuma funkciju $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n)$.
Ja gadījuma lielums ir diskrēts, tad diskrēta gadījuma lieluma ξ vērtības veido skaitļu matricu

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k_1} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk_n} \end{pmatrix},$$

kuras i-tajā rindiņā ir komponentes ξ_i vērtības $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik_i}$ (vērtību skaits var būt arī bezgalīgs). Ja šīm vērtībām atbilstošās varbūtības apzīmējam ar

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_{1,i_1},\ \xi_2 = x_{2,i_2},\ ...., \xi_n = x_{n,i_n}),$$

tad diskrēta gadījuma lieluma ξ sadalījuma funkcija būs

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{x_{1,i_1} < x_1, ..., x_{n,i_n} < x_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Sadalījuma funkcija nepārtrauktiem gadījuma vektoriem ir

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 ... dx_n,$$

kur $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir nepārtraukta gadījuma vektora blīvuma funkcija.
Agrāk konstatējam: ja $g(x)$ ir Bēra funkcija, tad $g(\xi)$ ir gadījuma lielums. Un, ņēmot vērā, ka varbūtība, ka gadījuma lieluma $g(\xi)$ vērtības piederēs apgabalam $S \subset \mathbf{R}^n$, aprēķina pēc formulas

$$\mathbb{P}\{g(\xi) \in S\} = \int_{\{\omega : g(\xi(\omega)) \in S\}} d\mathbb{P} = \int_S dF_{g(\xi)}(x) = \int_{g^{-1}(S)} dF_\xi(x),$$

kā arī,

$$\int_{\{\omega : \xi \in A\}} g(\xi) d\mathbb{P} = \int_A g(x) dF_\xi(x),$$

iegūsim

$$\mathbb{E}[g(\xi)] = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x) dF_\xi(x).$$

1.Definīcija. Par daudzdimensiju gadījuma lieluma ξ ***sākuma momentu*** sauc lielumu

$$\alpha_{k_1,\,k_2\,\ldots k_n} = \mathbb{E}[\xi_1^{k_1}\,\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}] = \int\limits_{\mathbf{R}^n} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\, dF_\xi(x_1, x_2, ..., x_n),$$

kur $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ ir momenta kārta, $k_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n.$

Otrās kārtas centrālos momentus iegūsim, aizvietojot iepriekšējā formulā ξ_i ar $\xi_i - \mathbb{E}\xi_i$. Otrās kārtas centrālos momentus apzīmēsim šādi:

$$m_{ii} = \mathbb{E}[\xi_i - \mathbb{E}\xi_i]^2 = D\xi_i = \sigma_i^2,$$

$$m_{ij} = \mathbb{E}[(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)(\xi_j - \mathbb{E}\xi_j)] = cov[\xi_i\xi_j],\ i, j = 1, 2, ..., n.$$

2.Definīcija. Otrās kārtas centrālo momentu matricu

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

sauc par ***kovariāciju matricu.***

3.Definīcija. Matricu

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix},\ \text{kur}\ \rho_{ik} = \frac{m_{ik}}{\sigma_i\sigma_k},\quad i, k = 1, 2, ..., n$$

sauc par ***korelāciju matricu.***

Abas matricas ir simetriskas, nenegatīvi defenītas. Tiešām, jebkuram $x \in \mathbf{R}^n$

$$(Mx, x) = \sum_{i,k=1}^{n} m_{ik} x_i x_k = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbb{E}\xi_i) x_i\right)^2 \geq 0.$$

Nosacītā matemātiskā cerība

Apskatām varbūtību telpu $< \Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P} >$ un σ - algebru $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.
$x(\omega)$ - $\mathcal{F}'$ - mērojama funkcija.

1.Definīcija. Par gadījuma lieluma $x(\omega)$ ***matemātisko cerību*** sauc skaitli

$$\mathbb{E}\{x(\omega)\} = \int\limits_{\Omega} x d\mathbb{P}.$$

Uzskatīsim, ka gadījuma lielumi ir tādi, ka

$$\mathbb{E}\{|x(\omega)|\} < \infty. \qquad (*)$$

2.Definīcija. Par gadījuma lieluma $x(\omega)$ ***nosacīto matemātisko cerību attiecībā pret σ - algebru $\mathcal{F}$*** [3] sauc tādu gadījuma lielumu $y(\omega)$, kurš apmierina sekojošas prasības:

A) $y(\omega)$ ir mērojama attiecībā pret algebru $\mathcal{F}$,

B) jebkurai kopai $A \in \mathcal{F}$

$$\int\limits_{A} y(\omega) d\mathbb{P} = \int\limits_{A} x(\omega) d\mathbb{P} \text{ un to apzīmē ar } y(\omega) = \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}.$$

Nosacītās matemātiskās cerības eksistenci garantē Radona - Nikodima teorēma, kuru mūsu gadījumā var noformulēt šādi [3],[1] :
Ja reāla kopu funkcija

$$\varphi(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda} x(\omega) d\mathbb{P}$$

ir galīga jebkuram Λ no $\mathcal{F}$, $\varphi(\phi) = 0$, ir σ - aditīva uz $\mathcal{F}$ un $\varphi \ll \mathbb{P}$, tad eksistē tāda $\mathcal{F}$ - mērojama funkcija $f(\omega)$, ka jebkuram $\Lambda \in \mathcal{F}$

$$\varphi(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda} f(\omega) d\mathbb{P}.$$

Tādējādi nosacītā matemātiskā cerība, ja izpildās (*), vienmēr eksistē, pie kam tā nav vienīgā, bet visi tās varianti gandrīz droši sakrīt, t.i., priekš mums ir neatšķirami.

1.§. Nosacītās matemātiskās cerības piemērs

Pieņemsim, ka uz $\Omega = [0,1)$ patvaļīgi tiek mests punkts, t.i., varbūtība punktam atrasties kādā kopā $[a,b), 0 \le a < b < 1$, ir vienāda ar šīs kopas Lebega mēru. Definējam gadījuma lielumu $x(\omega)$ šādi:

$$x(\omega) = \omega,\ \omega \in \Omega,$$

t.i., gadījuma lielums ir tieši vienāds ar to skaitli no $[a,b)$, kurā nokļuvis mestais punkts. Acīm redzami, $x(\omega)$ ir mērojama attiecībā pret Boreļa kopu no $[0,1)$ σ - algebru $\mathcal{B}$. Apzīmēsim

$\mathcal{F} = \{[0,\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},1), [0,1), \emptyset\}$, tad $\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} = y(\omega)$

ir gadījuma lielums, mērojams attiecībā pret $\mathcal{F}$, t.i., $\{\omega : y(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ jebkurai Boreļa kopai A. Starp citu, $\{\omega : y(\omega) = \alpha\} \in \mathcal{F}$, kur α - const. Un tā kā trīs kopas $\mathcal{F}$ nevar vairāk sasmalcināt, tad eksistē tādi skaitļi c_1, c_2, ka

$$\{\omega : y(\omega) = c_1\} = [0,\tfrac{1}{2}); \quad \{\omega : y(\omega) = c_2\} = [\tfrac{1}{2},1).$$

Bez tam, no nosacītās matemātiskās cerības definīcijas izriet, ka jekurai kopai Λ no $\mathcal{F}$ izpildās

$$\int\limits_{\Lambda} \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}d\mathbb{P} = \int\limits_{\Lambda} x(\omega)d\mathbb{P}, \quad \int\limits_{[0,\frac{1}{2})} \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}d\mathbb{P} = \int\limits_{[0,\frac{1}{2})} x(\omega)d\mathbb{P},$$

$$\int\limits_{[0,\frac{1}{2})} c_1 d\mathbb{P} = \int\limits_{[0,\frac{1}{2})} \omega d\mathbb{P}, \quad \text{t.i.,} \quad \frac{c_1}{2} = \frac{1}{8}, \quad c_1 = \frac{1}{4}.$$

Ja $\Lambda = [\frac{1}{2},1)$, tad iegūstam

$$\int\limits_{[\frac{1}{2},1)} c_2 d\mathbb{P} = \int\limits_{[\frac{1}{2},1)} \omega d\mathbb{P}, \quad \text{t.i.,} \ \frac{c_2}{2} = \frac{3}{8}, \quad c_2 = \frac{3}{4}.$$

Ja $\Lambda = [0,1)$, tad

$$\int\limits_{[0,1)} y(\omega)d\mathbb{P} = \int\limits_{[0,1)} \omega d\mathbb{P}, \ \text{t.i.,} \quad c_1\mathbb{P}([0;\frac{1}{2})) + c_2\mathbb{P}([\frac{1}{2},1)) = \frac{1}{2}.$$

Šī pēdējā sakarība pārliecina mūs par atrastā $y(\omega)$ pareizību. Tātad,

$$y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \ \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \frac{3}{4}, \ \omega \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

2.§. Nosacītās matemātiskās cerības īpašības [3]

Nosacītās matemātiskās cerības integrāļa īpašības

E1. Linearitāte

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i | \mathcal{F}\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left\{x_i | \mathcal{F}\right\}.$$

Pierādījums.

a) $\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i | \mathcal{F}\right\}$ - gadījuma lielums, mērojams attiecībā pret σ - algebru $\mathcal{F}$;

$\mathbb{E}\left\{x_i | \mathcal{F}\right\}$ - gadījuma lielums, mērojams attiecībā pret σ - algebru $\mathcal{F}$;

$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left\{x_i | \mathcal{F}\right\}$ - gadījuma lielums, mērojams attiecībā pret σ - algebru $\mathcal{F}$, kā mērojamu funkciju lineāra kombinācija.

b) ja $\Lambda \in \mathcal{F}$, tad

$$\int_{\Lambda} \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i | \mathcal{F}\right\} d\mathbb{P} = \int_{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\Lambda} x_i d\mathbb{P} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\Lambda} \mathbb{E}\left\{x_i | \mathcal{F}\right\} d\mathbb{P} = \int_{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left\{x_i | \mathcal{F}\right\} d\mathbb{P}.$$

E2. $\mathbb{E}\{c|\mathcal{F}\} = c$, kur c-const.

a) Tā kā $c = c(\omega)$, tad konstants lielums mērojams attiecībā pret jebkuru σ - algebru.

b)

$$\int_{\Lambda} \mathbb{E}\left\{c | \mathcal{F}\right\} d\mathbb{P} = \int_{\Lambda} c d\mathbb{P}.$$

E3. Ja $x(\omega) \geq 0$, tad $y = \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} \geq 0$.
Tiešām, no tā, ka $x(\omega) \geq 0$ izriet, ka $\int\limits_{\Lambda} x(\omega) d\mathbb{P} \geq 0$, bet jebkuram Λ no $\mathcal{F}$ izpildās

$$\int\limits_{\Lambda} \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}\, d\mathbb{P} = \int\limits_{\Lambda} x(\omega) d\mathbb{P}.$$

No šejienes, izmantojot integrāļa īpašības, izriet, ka

$$\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} \geq 0.$$

Kā sekas no īpaš ības E3 izriet, ka nosacītā matemātiskā cerība ir monotona. Tas ir, ja $x_n(\omega) \geq x_{n+1}(\omega)$, tad

$$\mathbb{E}\{x_n(\omega)|\mathcal{F}\} \geq \mathbb{E}\{x_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}\}.$$

E4. $|\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}| \leq \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\}$ Pierādījums. Acīm redzamas ir šādas nevienādības:

$$x(\omega) - |x(\omega)| \leq 0,$$
$$-x(\omega) - |x(\omega)| \leq 0.$$

Tad, izmantojot īpašības E3 un E1, iegūstam

$$\mathbb{E}\{x(\omega) - |x(\omega)||\mathcal{F}\} = \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} - \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\} \leq 0 \qquad (1)$$

$$\mathbb{E}\{-x(\omega) - |x(\omega)||\mathcal{F}\} = \mathbb{E}\{-x(\omega)|\mathcal{F}\} - \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\} = \qquad (2)$$
$$= -\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} - \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\} \leq 0.$$

No (1) un (2) seko, ka

$$\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} \leq \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\},$$

$$-\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} \leq \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\}.$$

No šīm īpašībām secinām, ka

$$|\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}| \leq \mathbb{E}\{|x(\omega)||\mathcal{F}\}.$$

E5. Nepārtrauktība.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{x_n(\omega)|\mathcal{F}\} = \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}, \qquad (3)$$

kur $x_n(\omega)$ - ierobežotas kopumā un $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\omega) = x(\omega)$ gandrīz droši.

Pierādījums. Apzīmējam

$$y_n(\omega) = \sup_{j \geq n} |x_j(\omega) - x(\omega)|. \tag{4}$$

Funkcijas $y_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ nenegatīvas, pie $n \to \infty$ monotoni tiecas uz nulli, un, tā kā $x_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ ir ierobežotas kopumā, tad $\mathbb{E}\{y_n(\omega)\} < \infty$.
Pārrakstām vienādību (3) sekojošā veidā:

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}\{x_n(\omega) - x(\omega)|\mathcal{F}\}| = 0 \text{ (gandrīz droši).} \tag{5}$$

Tad, izmantojot apzīmējumu (4), varam izdarīt sekojošu novērtējumu:

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}\{x_n(\omega) - x(\omega)|\mathcal{F}\}| \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|x_n(\omega) - x(\omega)||\mathcal{F}\} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\sup_{j\geq n} |x_j(\omega) - x(\omega)||\mathcal{F}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\}.$$

Pierādīsim, ka

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\} = 0 \text{ (gandrīz droši).} \tag{6}$$

Tad no (6) izrietēs, ka pareizi ir arī apgalvojumi (5) un (3). Tā kā $y_n(\omega) \geq 0$ un $\{y_n(\omega)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ monotoni dilst, tad gadījumu lielumu virkne $\mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ monotoni dilst un ir no apakšas ierobežota ar nulli. No tā secinām, ka $\mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ gandrīz droši konverģē uz gadījuma lielumu $y(\omega)$. Atliek pierādīt, ka $y(\omega) = 0$ gandrīz visur, t.i., ka

$$\mathbb{P}(\omega : y(\omega) \neq 0) = 0. \tag{7}$$

Ņemot vērā, ka $\mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ - nenegatīvi gadījuma lielumi, sakarību (7) varam pārrakstīt sekojoši

$$\mathbb{P}(\omega : y(\omega) > 0) = 0. \tag{8}$$

Pieņemam pretējo, ka eksistē tāds

$$\Lambda = \{\omega : y(\omega) > 0\}, \text{ ka } \mathbb{P}(\Lambda) \neq 0.$$

Tad, pamatojoties uz E3 un integrāļa nepārtrauktību, iegūstam

$$0 < \int_\Lambda y(\omega) d\mathbb{P} = \int_\Lambda \lim_{n\to\infty} \{\mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\}\} d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Lambda \{\mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\}\} d\mathbb{P} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda} y_n(\omega) d\mathbb{P} = \int_{\Lambda} \lim_{n\to\infty} y_n(\omega) d\mathbb{P} = 0.$$

Tātad pierādīts, ka $y(\omega) = 0$ gandrīz visur, un no tā izriet, ka nosacītā matemātiskā cerība ir nepārtraukta.
Var pierādīt, ka tā ir nepārtraukta ar varbūtību 1

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{y_n(\omega)|\mathcal{F}\} = \mathbb{E}\{y(\omega)|\mathcal{F}\}, \quad \text{ja}$$

1) $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ar varbūtību 1, un
2) eksistē gadījuma lielums $x(\omega) \geq 0$, kuram $\mathbb{E}\{x\} < \infty$, tāds, ka $|y_n| < x(\omega)$ ar varbūtību 1.

Dažas specifiskas nasacītās matemātiskās cerības īpašības

Pieņemsim, ka $\mathcal{F}_z$ - minimālā σ - algebra, attiecībā pret kuru mērojams lielums $z(\omega)$. Apzīmējam

$$E\{x_n(\omega)|\mathcal{F}_z\} = E\{x_n(\omega)|z(\omega)\}$$

E6.

$$E\{x_n(\omega)|z(\omega)\} = f(z(\omega)), \text{ kur } f(x) \text{ - Bēra funkcija.} \qquad (9)$$

Vienādība (9) izriet no teorēmas 8.2., kura norāda uz sakarību starp gadījuma lielumiem, kuri mērojami attiecībā pret vienu un to pašu, ar gadījuma lielumu $x(\omega)$ asociēto σ - algebru.

E7. Ja $x(\omega)$ - $\mathcal{F}$ - mērojams gadījuma lielums, tad

$$E\{x(\omega)|\mathcal{F}\} = x(\omega).$$

Noteikums A ir izpildīts, bet B - acīm redzams.

3.Definīcija. Teiksim, ka ***gadījuma lielums*** $x(\omega)$ ***nav atkarīgs no*** σ ***- algebras*** $\mathcal{F}$, ja jebkurai $\Lambda \in \mathcal{F}$ un jebkurai Boreļa kopai A

$$\mathbb{P}[(\omega : x(\omega) \in A) \cap \Lambda] = \mathbb{P}(\omega : x(\omega) \in A) \cdot \mathbb{P}(\Lambda) \qquad (10)$$

E8. Ja $x(\omega)$ nav atkarīgs no σ - algebras $\mathcal{F}$, tad

$$E\{x(\omega)|\mathcal{F}\} = E\{x(\omega)\}.$$

Noteikums A ir izpildīts, jo $E\{x(\omega)\}$ -skaitlis un tādēļ ir mērojams atiecībā pret jekuru σ - algebru. Pārbaudīsim noteikumu B pie vienkāršām funkcijām, t.i., gadījumas, kad

$$x(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{M_i}(\omega), \text{ kur } \mathcal{X}_{M_i}(\omega) \text{ kopu } M_i \in \mathcal{F}_x \text{ indikatori.}$$

$$E\{x(\omega)|\mathcal{F}\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{M_i}(\omega)|\mathcal{F}\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left\{\mathcal{X}_{M_i}(\omega)|\mathcal{F}\right\}. \qquad (11)$$

Ja izdotos parādīt, ka noteikums A izpildās to kopu indikatoriem, kuras pieder σ - algebrai $\mathcal{F}_z$, tad (11) varētu pārrakstīt formā

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left\{\mathcal{X}_{M_i}(\omega)|\mathcal{F}\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\{\mathcal{X}_{M_i}(\omega)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\Omega} \mathcal{X}_{M_i}(\omega) d\mathbb{P} =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{M_i}(\omega) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} x(\omega) d\mathbb{P} = \mathbb{E}\{x(\omega)\}.$$

Pārliecināsimies par noteikuma B pareizību pie σ - algebras $\mathcal{F}_x$ kopu indikatoriem. Pieņemsim, ka $\Lambda \in \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{F}_x$ un $\mathcal{X}_M(\omega)$ nav atkarīgs no σ - algebras $\mathcal{F}$. Tad

$$\int_{\Lambda} \mathbb{E}\left\{\mathcal{X}_M(\omega)|\mathcal{F}\right\} d\mathbb{P} = \int_{\Lambda} \mathcal{X}_M(\omega) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Lambda \cap M) = \mathbb{P}(\Lambda) \cdot \mathbb{P}(M) =$$

$$= \mathbb{P}(\Lambda) \int_{\Omega} \mathcal{X}_M(\omega) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Lambda) \mathbb{E}\{\mathcal{X}_M(\omega)\}.$$

Vēl atlicis pārbaudīt īpašību E8 gadījumā, kad

$$x(\omega) = \lim_{n\to\infty} x_n(\omega), \text{ kur } x_n(\omega),\ n = 1, 2, \ldots \text{ vienkāršas funkcijas.}$$

Tā kā $x(\omega)$ neatkarīgs no $\mathcal{F}$, tad, acīm redzot, arī $x_n(\omega)$ nav atkarīgi no $\mathcal{F}$. Bet tad no nosacītās matemātiskās cerības nepārtrauktības un no īpašības E8 pareizības pie vienkāršām funkcijām seko, ka

$$\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} = \mathbb{E}\left\{\lim_{n\to\infty} x_n(\omega)|\mathcal{F}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{x_n(\omega)|\mathcal{F}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{x_n(\omega)\right\} = \mathbb{E}\left\{\lim_{n\to\infty} x_n(\omega)\right\} = \mathbb{E}\{x(\omega)\}.$$

Līdz ar to īpašības E8 pārbaude ir pabeigta.

E9. Ja $G \subset \mathcal{F}$ un $\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}$ ir mērojama attiecībā pret G, tad $E\{x(\omega)|\mathcal{F}\} = E\{x(\omega)|G\}$.

Noteikums B izpildīts acīm redzami. Pārbaudām noteikumu B. Ja $\Lambda \in G$, tad $\Lambda \in F$ un

$$\int_\Lambda \mathbb{E}\{x(\omega)|G\}\, d\mathbb{P} = \int_\Lambda x(\omega) d\mathbb{P} = \int_\Lambda \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}\, d\mathbb{P}.$$

Atkārtotās nosacītās matemātiskās cerības un to īpašības

E10. Ja $F_1 \subset F_2$, tad

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}_2\}|\mathcal{F}_1\} = \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}_1\}.$$

Pierādījums. Noteikums A izpildīts acīm redzami. Pārbaudīsim B. Ja $\Lambda \in \mathcal{F}_1$, tad, sakarā ar to, ka $\Lambda \in \mathcal{F}_2$, iegūstam

$$\int_\Lambda \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}_2\}|\mathcal{F}_1\} d\mathbb{P} = \int_\Lambda \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}_2\} d\mathbb{P} =$$

$$= \int_\Lambda x(\omega) d\mathbb{P} = \int_\Lambda \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}_1\} d\mathbb{P}.$$

Piebilde. Tā kā $\mathbb{E}\{x(\omega)\}$ varam interpretēt kā $\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}_0\}$, kur $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, tad

$$\mathbb{E}\{x(\omega)\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}\} \text{ pie jebkuras } \sigma \text{ - algebras } \mathcal{F}.$$

E11. Ja gadījuma lielums $z(\omega)$ ir mērojams attiecībā pret σ - algebru $\mathcal{F}$, tad

$$\mathbb{E}\{z(\omega) \cdot x(\omega)|\mathcal{F}\} = z(\omega) \cdot \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\}.$$

Pierādījums. Lai pierādītu E11. pareizību, pietiek pārbaudīt noteikumu B. Ja $\Lambda \in \mathcal{F}$, $z(\omega) = \mathcal{X}_M(\omega)$, kur $M \in \mathcal{F}$, tad

$$\int_\Lambda \mathbb{E}\{\mathcal{X}_M(\omega) \cdot x(\omega)|\mathcal{F}\} d\mathbb{P} = \int_\Lambda \mathcal{X}_M(\omega) \cdot x(\omega) d\mathbb{P} =$$

$$= \int \mathcal{X}_{M\cap\Lambda}(\omega) \cdot x(\omega) d\mathbb{P} = \int_{M\cap\Lambda} x(\omega) d\mathbb{P} = \int_{M\cap\Lambda} \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} d\mathbb{P} =$$

$$= \int_{\Lambda} \mathcal{X}_M(\omega) \cdot \mathbb{E}\{x(\omega)|\mathcal{F}\} d\mathbb{P}.$$

Pārbaudīsim E11. pareizību vienkāršām funkcijām

$$z(\omega) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{M_j}(\omega), \text{ kur } M_j \in \mathcal{F} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Izmantojot matemātiskās cerības linearitāti, kā arī to, ka īpašība E11. ir spēkā σ - algebras $\mathcal{F}$ kopu indikatoriem, iegūstam

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{M_j}(\omega) \cdot x(\omega)|\mathcal{F}\right\} = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{M_j}(\omega) \cdot \mathbb{E}\left\{x(\omega)|\mathcal{F}\right\}.$$

E11. pareizība patvaļīgam gadījuma lielumam $z(\omega)$ izriet no nosacītās matemātiskās cerības nepārtrauktības.

4.Definīcija. Divus ***gadījuma lielumus*** $x(\omega)$ ***un*** $y(\omega)$ ***sauksim par neatkarīgiem***, ja jebkurā Boreļa kopām A_1, A_2 izpildās

$$\mathbb{P}\{\omega : x(\omega) \in A_1,\ y(\omega) \in A_2\} = \mathbb{P}\{\omega : x(\omega) \in A_1\} \cdot \mathbb{P}\{\omega : y(\omega) \in A_2\}.$$

Ar gadījumu lieluma neatkarības jēdzienu ir cieši saistīts σ - algebru neatkarības jēdziens: σ - algebras $\mathcal{F}_1$ un $\mathcal{F}_2$ no varbūtību telpas $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ sauc par neatkarīgām, ja jebkurām divām kopām A_1, A_2, kur $A_1 \in \mathcal{F}_1$ un $A_2 \in \mathcal{F}_2$, izpildās vienādība

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2).$$

Viegli pierādīt, ka gadījuma lielumi $x(\omega)$ un $y(\omega)$ ir neatkarīgi tad un tikai tad, ja ir neatkarīgas asociētās σ - algebras $\mathcal{F}_x$ un $\mathcal{F}_y$.

E12. Neatkarīgiem gadījuma lielumiem $x(\omega)$ un $y(\omega)$ ir spēkā vienādība

$$\mathbb{E}\{x(\omega) \cdot y(\omega)\} = \mathbb{E}\{x(\omega)\} \cdot \mathbb{E}\{y(\omega)\}.$$

Tiešām izmantojot E8. un piezīmi pie īpašības E10., varam uzrakstīt sekojošu vienādību virkni

$$\mathbb{E}\{x(\omega) \cdot y(\omega)\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{x(\omega) \cdot y(\omega)|\mathcal{F}_x\}\} = \mathbb{E}\{x(\omega) \cdot \mathbb{E}\{y(\omega)|\mathcal{F}_x\}\} =$$

$$= \mathbb{E}\{x(\omega) \cdot \mathbb{E}\{y(\omega)\}\} = \mathbb{E}\{x(\omega)\} \cdot \mathbb{E}\{y(\omega)\}.$$

3.§. Gadījuma skaita gadījumu lielumu summas matemātiskā cerība

1.Teorēma [1].

Pieņemsim, ka varbūtību telpā $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir definēta gadījumu lielumu virkne $\{x_n(\omega)\}$, kur $n = 1, 2, \ldots$ un gadījuma lielums $\nu(\omega) > 0$, kas pieņem tikai veselas vērtības, tādas, ka σ - algebra $\mathcal{F}_\nu$ nav atkarīga no σ - algebras L, attiecībā pret kuru ir mērojami visi $x_n(\omega)$. Ja ir spēkā nosacījumi:

1. $\mathbb{E}\{|x_n(\omega)|\} = C_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) \geq k\} < \infty$,

tad gadījuma skaita gadījuma lielumu summas matemātiskā cerība ir

$$\mathbb{E}\Big\{\sum_{n=1}^{\nu(\omega)} x_n(\omega)\Big\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{x_n(\omega)\} \cdot \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) > n\}. \tag{1}$$

Pierādījums. Apskatām sekojošas kopas no σ - algebras $\mathcal{F}_\nu$:

$$S_m = \{\omega : \nu(\omega) = m\}.$$

Tad kopu $A_n = \{\omega : \nu(\omega) \geq n\} \in \mathcal{F}_\nu$ var attēlot šādā veidā

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega : \nu(\omega) = m\} = \bigcup_{m=n}^{\infty} S_m.$$

Bez tam $\Omega = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m$, kur $S_j \bigcap S_i = \emptyset$, ja $i \neq j$.

No šejienes

$$\mathbb{E}\Big\{\sum_{n=1}^{\nu(m)} x_n(\omega)\Big\} = \int\limits_{\Omega} \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} x_n(\omega) d\mathbb{P} = \int\limits_{\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} S_l} \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} x_n(\omega) d\mathbb{P} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{S_l} \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} x_n(\omega) d\mathbb{P} = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{S_l} \sum_{n=1}^{l} x_n(\omega) d\mathbb{P} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{l} \int\limits_{S_l} x_n(\omega) d\mathbb{P}. \tag{2}$$

Izmainot integrēšanas kārtību, vienādība (2) pārrakstāma sekojoši:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l}\int\limits_{S_l} x_n(\omega)d\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\bigcup\limits_{l=n}^{\infty} S_l} x_n(\omega)d\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_n} x_n(\omega)d\mathbb{P} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_n} \mathbb{E}\{x_n(\omega)|\mathcal{F}_\nu\}\, d\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_n} \mathbb{E}\{x_n(\omega)\}\, d\mathbb{P} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\{x_n(\omega)\}\cdot\mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega)\geq n\}.$$

Integrēšanas kārtību mēs drīkstējām izmainīt tādēļ, ka

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\int\limits_{S_l}|x_n(\omega)|d\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_n}\mathbb{E}\{|x_n(\omega)||\mathcal{F}_\nu\}\, d\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\{|x_n(\omega)|\}\cdot\mathbb{P}(A_n),$$

bet šī pēdējā izteiksme ir $< \infty$ pēc otrā teorēmas nosacījuma. Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

4.§. Pilnās matemātiskās cerības formula

Apskatīsim varbūtību telpu $<\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}>$ un σ - algebru $\mathcal{F}' = \{A, \overline{A}, \emptyset, \Omega\}$: $\mathbb{P}(A)\neq 0$. $\xi(\omega) - \mathcal{F}$- mērojamu funkcija: $\mathbb{E}|\xi| < \infty$.
Tad, gadījuma lielums $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')$ ir

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}') = \begin{cases}\mathbb{E}(\xi|A) = c_1\\ \mathbb{E}(\xi|\overline{A}) = c_2\end{cases}$$

kur $c_i\in\mathbb{R},\ i=1,2$. No nosacītās matemātiskās cerības definīcijas izriet, ka

$$\int\limits_A c_1 d\mathbb{P} = \int\limits_A \xi d\mathbb{P},\ \Rightarrow\ c_1\mathbb{P}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbb{P}\ \Rightarrow\ \mathbb{E}(\xi|A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int\limits_A \xi d\mathbb{P}.$$

Ja $\{H_i\}_{i\geq 1}$ veido pilnu notikumu sistēmu, tad

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\bigcup\limits_{i\geq 1} H_i}\xi d\mathbb{P} = \sum_{i\geq 1}\int\limits_{H_i}\xi d\mathbb{P} = \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(H_i)\mathbb{E}(\xi|H_i).$$

Tātad, ja $\{H_i\}_{i\geq 1}$ veido pilnu notikumu sistēmu ir spēkā ***pilnās matemātiskās cerības formula***

$$E\xi = \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(H_i)\mathbb{E}(\xi|H_i).$$

Iegūto formulu var pārakstīt formā

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')\},$$

kur $\mathcal{F}'$ ir minimāla σ - algebra, kas satur $\{H_i\}_{i\geq 1}$, ko veida kopas PNS.

Piemērs. Gar ceļu atrodas n - mājas vieniniekā attālumā viena no otras. Ātrās palīdzības mašina apkālpo katru izsaukumu ar varbūtību $1\backslash n$, un brauc uz katru nākamo izsaukumu no iepriekšā izsaukuma vietas. Aprēķināt vienā reisā nobraukuma gāruma ξ vīdējo vērtību.

Atrisinājums. Apzīmēsim H_k - "ātrā palīdzība atrodas punktā ar numuru k", $\mathbb{P}(H_k) = 1\backslash n$, $k = 1, ..., n$. Tad

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|H_k)\mathbb{P}(H_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i} |k-i|\frac{1}{n}\mathbb{P}(H_k),$$

kur, ņēmot vērā, ka atrās palīdzības mašina apkālpo katru nākamo izsaukumu ar varbūtību $1\backslash n$, mašinas no punkta k nobraukuma gāruma vidējais vienā reisā ir

$$\mathbb{E}(\xi|H_k) = \sum_{i} |k-i|\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\frac{1}{n} + \sum_{i=k+1}^{n}(i-k)\frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{n} + \frac{1+n-2k}{2}.$$

Tātad,

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \frac{1+n}{2} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{(n-1)}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Līdz ar to secinām, ka pie lieliem n, ja viena diena laikā bija a izsaukumus, ātrās palīdzības nobraukuma gāruma vidēja vērtība ir $a\frac{(n-1)}{3}$, kur $n-1$ - apvidus gārums.

Robežteorēmas

1.§. Lielo skaitļu likums

1. *Čebiševa nevienādība*

1.Teorēma. Katram gadījuma lielumam ξ, kuram ir galīga dispersija, pie jebkura $\varepsilon > 0$ ir spēkā nevienādība

$$\mathbb{P}\{\omega : |\xi(\omega) - \mathbb{E}\xi(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{D}\xi(\omega)}{\varepsilon^2}.$$

Pierādījums. Apzīmēsim ar $A = \{\omega : |\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon\}$.

$$\text{Tad } \mathbb{P}(A) = \int\limits_A d\mathbb{P} \leq \int\limits_A \frac{|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{\varepsilon^2} d\mathbb{P} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_\Omega |\xi - \mathbb{E}\xi|^2 d\mathbb{P} = \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Piezīme.

1) Katram gadījuma lielumam ξ, kuram ir galīgs k-tās kārtas centrālais moments: $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k$, pie jebkura $\varepsilon > 0$ izpildās nevienādība

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\{|\xi - \mathbb{E}\xi|^k\}}{\varepsilon^k}.$$

2) Čebiševa nevienādību bieži lieto arī šādā formā:

$$\mathbb{P}\{|\xi(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}|\xi|.$$

3)

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon\} \leq 1 - \mathbb{P}|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

4) Ja $k > 0$, $\mathbb{E}e^{k\xi} < \infty$, tad

$$\mathbb{P}\{\xi \geq x\} \leq e^{-\lambda x}\mathbb{E}e^{\lambda\xi}$$

jebkuram $\lambda \in [0, k]$. Šī apgalvojuma pierādījums seko no teorēmas 1., ja to pielietojam gadījuma lielumam $\eta = e^{\lambda\xi} \geq 0$.

Tiešām: $\mathbb{P}\{\xi \geq x\} = \mathbb{P}\left\{e^{\lambda\xi} \geq e^{\lambda x}\right\} \leq \dfrac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda\xi}\right)}{e^{\lambda x}}$ jebkuram $\lambda \in [0, k]$.

Pierādīsim, ka pie jebkura $\lambda \in [0, k]$ $\mathbb{E}(e^{\lambda\xi})$ eksistē.

$$\mathbb{E}(e^{\lambda\xi}) = \int\limits_{\Omega} e^{\lambda\xi}d\mathbb{P} = \int\limits_{(\omega:\xi>0)} e^{\lambda\xi}d\mathbb{P} + \int\limits_{(\omega:\xi\leq 0)} e^{\lambda\xi}d\mathbb{P} <$$

$$< \mathbb{E}(e^{k\xi}) + \int\limits_{(\omega:\xi\leq 0)} e^{\lambda\xi}d\mathbb{P} < \infty.$$

2. ***Gadījuma lielumu konverģences jēdzieni*** [1]

I Pieņemsim, ka telpā $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definēta gadījumu lielumu virkne $\{\xi_n\}_{(n\geq 1)}$ un gadījuma lielums ξ.
Virkne $\{\xi_n\}$ ***konverģē pēc varbūtības*** uz ξ, ja katram $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} = 0,$$

un to pieraksta sekojoši $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$.

II Virkne $\{\xi_n\}$, ***konverģē*** uz ξ ***gandrīz droši*** (vai ar ***varbūtību 1***), ja $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, ja $n \to \infty$ visiem ω, izņemot varbūt vienīgi kopā $N \subset \Omega$, kur $\mathbb{P}(N) = 0$; šo konverģenci apzīmē sekojoši:

$$\xi_n \to \xi \ g.d.$$

Šādu konverģenci var saukt par konverģenci gandrīz visur.
Konverģence $\xi_n \to \xi$ $g.d.$ nozīmē, ka kopā $\Omega - N$, sākot ar kaut kādu $n = n(\omega)$, ir spēkā nevienādība

$$\sup_{k\geq n} |\xi_n - \xi| \leq \varepsilon.$$

Tātad

$$\Omega - N = \left\{\omega : \sup_{k\geq n} |\xi_k - \xi| \leq \varepsilon\right\} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} \{\omega : |\xi_k - \xi| \leq \varepsilon\}.$$

Pārejot uz notikuma papildinājumu, iegūstam

$$N = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{\omega : |\xi_k - \xi| > \varepsilon\}.$$

Ņemot vērā, ka ω - kopu virkne

$$\left\{ \bigcup_{k\geq n} (\omega : |\xi_k - \xi| \leq \varepsilon) \right\}, \text{ kur } (n \geq 1),$$

monotoni dilst un arī to, ka varbūtību mērs ir nepārtraukts, iegūtam

$$\mathbb{P}(N) = 0 = \mathbb{P}\left\{ \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{\omega : |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \bigcup_{k\geq n} (\omega : |\xi_k - \xi| > \varepsilon) \right\}.$$

Tādējādi no konverģences gandrīz droši seko konverģence pēc varbūtības. Apgrieztais apgalvojums nav pareizs.
Piemēram, pieņemsim, ka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir $[0,1]$ ar Boreļa kopu σ-algebru intervālā $[0,1]$, $\mathbb{P}$ - Lebega mērs.

$\chi_n^i(\omega)-$ kopu $\mathbb{E}_n^i = \left\{ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\}$, $(n \geq 1, i \geq 1, i \leq n)$ indikatori.

Pieņemsim, ka

$$\xi_n^i(\omega) = \chi_n^i(\omega), \ (n \geq 1, i \geq 1).$$

Tad gadījuma lielumu virkne $\{\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_2^2, \xi_3^1, \xi_3^2 \ldots\}$ konverģē pēc varbūtības, bet nekonverģē gandrīz droši uz $\xi(\omega) = 0$, jo nevienā punktā ω gadījumu lielumu virkne nekonverģē uz $\xi(\omega)$.

III Gadījumu lielumu virkne $\{\xi_n\}$ ***konverģē*** uz ξ ***vidējā kvadrātiskā nozīmē***, ja

$$\mathbb{E}\left\{ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^2 \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

un to apzīmē šādi: $\xi_n(\omega) \Longrightarrow \xi(\omega)$.
No konverģences vidējā kvadrātiskā nozīmē izriet konverģence pēc varbūtības. Par to viegli varam pārliecināties, izmantojot Čebiševa nevienādību:

$$\mathbb{P}\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\left\{ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^2 \right\}}{\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

IV Pieņemsim, ka $\mathbb{P}(\xi < x) = F(x)$, $\mathbb{P}(\xi_n < x) = F_n(x)$.
Teiksim, ka ξ_n ***konverģē*** uz ξ ***pēc sadalījuma***, ja $n \to \infty$ un katrā $F(x)$ nepārtrauktības punktā $F_n(x) \to F(x)$. Šo konverģenci sauc arī par sadalījumu F_n ***vājo konverģenci***, un to apzīmē

$$F_n \Longrightarrow F.$$

Nav grūti pierādīt, ka no konverģences pēc varbūtības (un vēl vairāk no konverģences vidējā kvadrātiskā vai konverģences gandrīz droši) seko konverģence pēc sadalījuma.

3. *Lielo skaitļu likums*

2.Teorēma [1]. (*Čebiševa*). Ja $\xi_1, \xi_2, \ldots$ pa pāriem neatkarīgu gadījumu lielumu virkne, visiem gadījuma lielumiem ir galīgas dispersijas, un tās ir ierobežotas kopumā: $\mathbb{D}\xi_i < c$, $i = 1, 2, \ldots$, tad katram $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k \right| < \varepsilon \right\} = 1. \qquad (1)$$

Pierādījums. Teorēmas apzīmējumos

$$\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k \le \frac{c}{n}.$$

Pēc Čebiševa nevienādības

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k \right| < \varepsilon \right\} \ge 1 - \frac{\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \right)}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Pārejot uz robežu, kad $n \to \infty$, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k \right| < \varepsilon \right\} \ge 1.$$

Bet, tā kā varbūtība nevar būt lielāka par vienu, tad no šejienes seko teorēmas pierādījums.
Atzīmēsim dažus svarīgus Čebiševa teorēmas speciālgadījumus:

a. **3.Teorēma [1].** (*Bernulli*). Ja μ ir skaitlis, kas rāda, cik reizes notikums A noticis n neatkarīgos mēģinājumos, un p - varbūtība notikumam A notikt katrā no mēģinājumiem, tad katram $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\omega : \left|\frac{\mu}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0. \tag{2}$$

Pierādījums. Ievedam gadījuma lielumus ξ_i vienādus ar notikuma A notikšanas saitu i - tajā mēģinājumā. Tātad

$$\xi_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A, \end{cases}$$

kur $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\mathbb{E}\xi_i = \mathbb{P}(A) = p;\ \mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = p - p^2 \leq \frac{1}{4},\ \mu(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega).$$

Tad neatkarīgu gadījuma lielumu virknei $\{\xi_i\}$ izpildās Čebiševa teorēmas nosacījumi, un līdz ar to varam teikt, ka Bernulli teorēma ir vienkāršākais Čebiševa teorēmas speciālgadījums.

b. **4.Teorēma[1].** (*Puasona*) Ja neatkarīgu mēģinājumu virknē varbūtība notikt notikumam A k - tajā mēģinājumā ir p_k, tad

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \left|\frac{\mu}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3}$$

kur μ ir skaits, cik reizes notikums A ir noticis pirmajos n mēģinājumos.
Pierādījums. Ievedam gadījumu lielumus ξ_i, kas rāda, cik reizes i-tajā mēģinājumā noticis notikums A. Ņemot vērā, ka

$$\mathbb{E}\xi_i = p_i; \quad \mathbb{D}\xi_i = p_i(1 - p_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pārliecinamies, ka Puasona teorēma ir Čebiševa teorēmas speviālgadījums.

c. Ja pa pāriem neatkarīgu gadījumu lielumu virkne $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ir tāds, ka $\mathbb{E}\xi_i = a$, $(i \geq 1)$, $\mathbb{D}\xi_i < c$, $(i \leq 1)$, tad katram $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Šis Čebiševa teorēmas speciālgadījums dod mums pamatojumu vidējā aritmētiskā likumam, kuru vienmēr pielieto mērījumu teorijā.

5.**Teorēma[1].**(*Hinčina*). Ja gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ir neatkarīgi, vienādi sadalīti, un tiem ir galīgas vidējās vērtības $\mathbb{E}\xi_i = a$, $(i \geq 1)$, tad

$$\mathbb{P}\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| \geq \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Lielo skaitļu likuma nepieciešamie un pietiekamie nosacījumu

6.**Teorēma [1].** Lai gadījumu lielumu virknei $\left\{\xi_i\right\}_{i=1}^{\infty}$, kuras locekļi var būt jebkurā veidā savā starpā atkarīgi, izpildītos sakarība

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\xi_k\right| \geq \varepsilon\right\} = 0 \tag{5}$$

(jebkuram pozitīvam ε) nepieciešami un pietiekami, lai

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k\right)\right]^2}{n^2 + \left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k\right)\right]^2}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}. \tag{6}$$

Pierādījums. Ievedam apzīmējumus

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k\right) \quad (n \geq 1).$$

Tad sakarības (5) un (6) pārrakstāmas sekojošā formā:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\omega : |\eta_n| \geq \varepsilon\right\} = 0, \tag{7}$$

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Pierādīsim *pietiekamību.* Pieņemsim, ka izpildās sakarība (8). Tad

$$\mathbb{P}\left\{\omega : |\eta_n| \geq \varepsilon\right\} = \int\limits_{(\omega:|\eta_n|\geq\varepsilon)} d\mathbb{P} = \int\limits_{(\omega:|\eta_n|\geq\varepsilon)} \frac{1+\eta_n^2}{\eta_n^2}\cdot\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}d\mathbb{P} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{(\omega:|\eta_n|\geq\varepsilon)}\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}d\mathbb{P} \leq \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega}\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}d\mathbb{P} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \cdot \mathbb{E}\left\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \right\}.$$

No šejienes secinām, ka

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : |\eta_n| \geq \varepsilon\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nepieciešamība. Pieņemsim, ka izpildās (7). Tad no tā, ka

$$\mathbb{P}\left\{\omega : |\eta_n| \geq \varepsilon\right\} = \int\limits_{(\omega:|\eta_n|\geq\varepsilon)} d\mathbb{P} \geq \int\limits_{(\omega:|\eta_n|\geq\varepsilon)} \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} d\mathbb{P} = \tag{9}$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\eta_n}{1+\eta_n^2} d\mathbb{P} - \int\limits_{(\omega:|\eta_n|<\varepsilon)} \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} d\mathbb{P} \geq \mathbb{E}\left\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \right\} - \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega} d\mathbb{P} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \right\} - \varepsilon^2$$

iegūstam

$$\mathbb{E}\left\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \right\} \leq \mathbb{P}\left\{\omega : |\eta_n| \geq \varepsilon\right\} + \varepsilon^2. \tag{10}$$

No nevienādības (10) izriet, ka

$$\mathbb{E}\left\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

jo ε ir patvaļīgi izvēlēts.
Atzīmēsim, ka visas teorēmas, kas tika pierādītas šajā paragrāfā, izriet no teorēmas 6. Tā, piemēram, no Čebiševa teorēmas nosacījumiem izriet, ka

$$\mathbb{E}\Big\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \Big\} \leq \mathbb{E}\Big\{ \eta_n^2 \Big\} = \mathbb{E}\Big\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i \Big) \Big\}^2 = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{ \xi_i - \mathbb{E}\xi_i \right\}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\xi_i.$$

Izvedot pēdējo nevienādību, tika ņemta vērā gadījumu lielumu ξ_i $(i \geq 1)$ neatkarība. Tālāk, no (11) seko, ka

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{ \frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \right\} = 0.$$

2.§. Pastiprinātais lielo skaitļu likums

1. **Boreļa - Kantanelli lemma[1].** Lai gadījumu lielumu virkne $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ konverģētu uz $\xi(\omega)$ gandrīz droši, ir pietiekami, lai katram $\varepsilon > 0$ konverģētu rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\right\}. \qquad (*)$$

Pierādījums. Konverģence gandrīz droši nozīmē, ka

$$\mathbb{P}\Big\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} [\omega : \big|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\big| \geq \varepsilon] \Big\} = 0,$$

vai, citādi uzrakstot,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{ \bigcup_{k \geq n} [\omega : \big|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\big| \geq \varepsilon] \Big\} = 0. \qquad (**)$$

No $(*)$ izriet $(**)$. Tiešām

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{ \bigcup_{k \geq n} [\omega : \big|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\big| \geq \varepsilon] \Big\} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left\{[\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon]\right\}.$$

Pēdējās nevienādības labā puse tiecas uz 0, kad $n \to \infty$ kā konverģējošas rindas $(*)$ atlikums, un līdz ar to teorēma ir pierādīta.

7.**Teorēma[1].**(*Boreļa teorēma.) (Pastiprinātais lielo skaitļu likums).* Ja μ skaits, cik reizes n neatkarīgos mēģinājumos noticis notikums A, un katrā atsevišķā mēģinājumā notikums A notiek ar varbūtību p, tad

$$\mathbb{P}\big\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = p\big\} = 1. \qquad (1)$$

Pierādījums. Lai pierādītu teorēmu, pēc Boreļa - Kantanelli lemmas, ir pietiekami, lai konverģētu rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big\{\omega : \big|\frac{\mu}{n} - p\big| \geq \varepsilon\big\}, \qquad (2)$$

kur ε - jebkurš pozitīvs skaitlis.
Apskatīsim sekojošus palīglielumus

$$\mu_i(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ ja } \omega \in A, \\ 0, \text{ ja } \omega \notin A. \end{cases}$$

Acīm redzot, $\mathbb{E}\left\{\mu_i^k(\omega)\right\} = p$ jebkuram $k \geq 1$;

$$\mathbb{D}\{\mu_i(\omega)\} = p(1-p), \quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \quad \mathbb{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right\} = p.$$

Tālāk izmantosim faktu, ka jebkuram gadījuma lielumam, kuram eksistē $\mathbb{E}\{\xi - \mathbb{E}\xi\}^4$, ir spēkā nevienādība

$$\mathbb{P}\{\omega : |\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\{\xi - \mathbb{E}\xi\}^4}{\varepsilon^4}.$$

Šī nevienādība ir viegli pierādāma līdzīgi tam, kā tika pierādīta Čebiševa nevienādība.
Tad

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i - p\Big| \geq \varepsilon\Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\Big\{\frac{1}{\varepsilon^4}\sum_{i=1}^{n}\mu_i - p\Big\}^4. \tag{3}$$

Tā kā

$$\frac{\mu}{n} - p = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i - p),$$

tad

$$\mathbb{E}\Big\{\frac{\mu}{n} - p\Big\}^4 = \frac{1}{n^4}\mathbb{E}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - p)\Big\}^4 = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\mu_i - p)(\mu_k - p)(\mu_j - p)(\mu_l - p).$$

Tā kā $\mathbb{E}\{\mu_i - p\} = 0$, tad summā (4) visi tie saskaitāmie, kuri satur kaut vienu no reizinātājiem $(\mu_i - p)$, pirmajā pakāpē būs vienādi ar nulli. Tātad summā (4) atšķirīgi no nulles būs tikai saskaitāmie, kuri ir formā

$$\mathbb{E}\{\mu_i - p\}^4 \text{ un } \mathbb{E}\{(\mu_i - p)^2(\mu_j - p)^2\} \ (i \neq j).$$

Tā kā mēģinājumi ir neatkarīgi, tad

$$\mathbb{E}\{(\mu_i - p)^2(\mu_j - p)^2\} = \mathbb{E}\{(\mu_i - p)^2\} \cdot \mathbb{E}\{(\mu_j - p)^2\} =$$

$$= (\mathbb{E}\mu_i^2 - 2\mathbb{E}\mu_i p + \mathbb{E}p^2)^2 = (p - 2p^2 + p^2)^2 = p^2q^2,$$

$$\mathbb{E}\{\mu_i - p\}^4 = \mathbb{E}\{\mu_i^4 - 4\mu_i^3 p + 6\mu_i^2 p^2 - 4\mu_i p^3 + p^4\} = p + p^4 - 4p^2 + 6p^3 - 4p^4 =$$

$$= p(1 - 3p + 3p^2 - p + 3p^2 - 3p^3) = p(1 - 3p + 3p^2)(1 - p) = pq(p^3 + q^3).$$

Saskaitāmie veidā $\mathbb{E}\{\mu_i - p\}^4$ pavisam ir n, saskaitāmie ar formu $\mathbb{E}\{(\mu_i - p)^2(\mu_j - p)^2\}$ ir pavisam $3n(n-1)$, jo i var sakrist ar$j$, vai ar k, vai ar l un

var pieņemt vienu no n vērtībām, sākot ar 1 un beidzot ar n, bet tajā pašā laikā j var pieņemt tikai vienu no $n-1$ vērtībām, jo $j \neq i$.
Tādējādi

$$\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\mu}{n}-p\right)^4\right\} = \frac{1}{n^4}[npq(p^3+q^3)+3n(n-1)p^2q^2] =$$

$$= \frac{n^2}{n^4}pq\left[\frac{p^3+q^3}{n}+3pq\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] < \frac{1}{4n^2}.$$

Pēdējā nevienādība seko no tā, ka

$$pq < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{n}(p^3+q^3-3pq)+3pq < 1.$$

Tad iegūstam, ka

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i - p\Big| \geq \varepsilon\Big\} < \frac{1}{4\varepsilon^2 n^2}. \tag{5}$$

No šīs nevienādības seko rindas (2) konverģence, un līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Hajeka - Reņji nevienādība[9].
Pieņemsim, ka dota neatkarīgu gadījumu virkne $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, tāda, ka $\mathbb{E}\xi_i = 0$, $\mathbb{E}\xi_i^2 = d_i$, $(i \geq 1)$, un vēl dota neaugoša pozitīvu skaitļu virkne $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$. Tad jebkuriem veseliem pozitīviem skaitļiem m un n, ja $m > n$, un patvaļīgi izvēlētam $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{n\leq k\leq m} c_k\Big|\sum_{l=1}^{k}\xi_l\Big| \geq \varepsilon\Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[c_n^2\sum_{k=1}^{n}d_k + \sum_{k=n+1}^{m}c_k^2 d_k\Big]. \tag{6}$$

Gadījumā, kad $c_i = 1$, kur $i \geq 1$, $\xi_i = \eta_i - \mathbb{E}\eta_i$, Hajeka-Reņji nevienādība ir šāda:

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{k\leq m}\Big|\sum_{i=1}^{k}(\eta_i - \mathbb{E}\eta_i)\Big| < \varepsilon\Big\} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{m}d_i.$$

Pēdējo nevienādību sauc par ***Kolmogorova nevienādību.***[1],[9].

Gadījumā, kad $c_i = \frac{1}{i}$, kur $i \geq 1$, Hajeka-Reņji nevienādība ir formā

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{n\leq k\leq m} c_k\Big|\sum_{i=1}^{k}\xi_l\Big| \geq \varepsilon\Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}d_i + \sum_{i=n+1}^{m}\frac{d_i}{i^2}\Big). \tag{7}$$

8.**Teorēma [1].** (I.*Kolmogorova teorēma*). Ja savstarpēji neatkarīgu gadījumu lielumu virkne $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ apmierina nosacījumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{D}\xi_n < \infty,$$

tad šai virknei ir spēkā pastiprinātais lielo skaitļu likums.

Pierādījums. Pielietosim Hajeka - Reņji nevienādību gadījuma lielumu virknei $\eta_i = \xi_i - \mathbb{E}\xi_i$, $c_i = \frac{1}{i}$, kur $i \geq 1$.

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{n \leq k \leq m} \frac{1}{k} \Big| \sum_{i=1}^{k} \eta_i \Big| \geq \varepsilon \Big\} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Big(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\eta_i + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i^2} \mathbb{D}\eta_i \Big),$$

kur $\mathbb{D}\eta_i = \mathbb{D}(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i) = \mathbb{D}\xi_i$.
Pieņemot, ka $m \to \infty$, iegūstam

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{k \geq n} \frac{1}{k} \Big| \sum_{i=1}^{k} \eta_i \Big| \geq \varepsilon \Big\} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Big(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\eta_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathbb{D}\eta_i \Big).$$

Izmantojot teorēmas nosacījumu, pēdējo saskaitāmo nevienādības labajā pusē var padarīt pēc patikas mazu pie pietiekoši liela n.
Fiksējam $n = N$ un pārveidojam pirmo saskaitāmo par divu locekļu summu. Tad

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}\eta_i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=N}^{n} \mathbb{D}\eta_i \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}\eta_i + \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{i^2} \mathbb{D}\eta_i .$$

Izvēloties attiecīgu N, pietiekoši lieliem n varam $\sum\limits_{i=N}^{n} \frac{1}{i^2} \mathbb{D}\eta_i$ padarīt pēc patikas mazu (kā konverģentas rindas atlikumu). $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{D}\eta_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, pateicoties reizinātājam $\frac{1}{n^2}$. No šejienes secinām, ka

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{k \geq n} \frac{1}{k} \Big| \sum_{i=1}^{k} \eta_i \Big| \geq \varepsilon \Big\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pēdējā sakarība nozīmē, ka

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \eta_i = 0 \Big\} = 1 \text{ jeb}$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \lim_{k\to\infty}\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\xi_i\Big) = 0\} = 1,$$

bet šī sakarība nozīmē, ka gadījuma lielumu virkne $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ pakļaujas pastiprinātajam lielo skaitļu likumam.

9.**Teorēma [1].**(II.*Kolmogorova teorēma*) Matemātiskās cerības eksistence ir nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai varētu pastiprināto lielo skaitļu likumu pielietot vienādi sadalītu un savstarpēji neatkarīgu gadījuma lielumu virknei $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

3§. Raksturīgās (harakteristiskās) funkcijas

Reizē ar reāliem gadījuma lielumiem $\xi(\omega)$ var apskatīt arī kompleksos gadījuma lielumus $\xi_1(\omega)+i\xi_2(\omega)$, kur (ξ_1, ξ_2) - divdimensiju gadījuma vektors. Ir dabīgi definēt, ka

$$\mathbb{E}(\xi_1 + i\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1 + i\mathbb{E}\xi_2\,.$$

Kompleksie gadījuma lielumi $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ un $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ ir neatkarīgi, ja σ - algebras $\mathcal{F}_{\xi_1,\xi_2}$ un $\mathcal{F}_{\eta_1,\eta_2}$, kuras ir asociētas ar vektoriem (ξ_1, ξ_2) un (η_1, η_2) ir neatkarīgas. Viegli redzēt, ka

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta,$$

ja ξ un η ir neatkarīgi.

Definīcija. Par reāla gadījuma lieluma ξ ***harakteristisko funkciju*** $(h.f.)$ sauc kompleksu funkciju

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int e^{itx}dF(x), \tag{1}$$

kur t - reāls skaitlis.
Ja sadalījuma funkcijai eksistē blīvums $f(x)$, tad harakteristiskā funkcija ir vienāda ar

$$\varphi_\xi(t) = \int e^{itx}f(x)dx$$

un ir funkcijas $f(x)$ Furjē transformācija. Ja blīvuma funkcija eksistē, tad harakteristiskā funkcija ir funkcijas $F(x)$ Furjē - Stiltjesa transformācija.
No tā, ka

$$|\varphi_\xi(t)| = \left|\int e^{itx}dF(x)\right| = \int \left|e^{itx}\right| dF(x) = \int 1 \cdot dF(x) = 1$$

sacinām, ka harakteristiskā funkcija eksistē jebkuram gadījuma lielumam ξ.

Raksturīgo (harakteristisko) funkciju īpašības

1. Jebkuram gadījuma lielumam ξ $\varphi_\xi(0) = 1$ un $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$ visiem t.

2. $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$, kur a un b ir konstantes.
   Pierādījums seko no tā, ka

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}\left\{e^{it(a\xi+b)}\right\} = e^{itb}\mathbb{E}\left\{e^{ita\xi}\right\} = e^{itb}\varphi_\xi(at).$$

3. Ja $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - neatkarīgi gadījuma lielumi, tad

$$\varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t).$$

   Pierādījums seko no matemātiskās cerības īpašībām neatkarīgu gadījuma lielumu reizinājumam. Tiešām

$$\varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}(t) = \mathbb{E}\left\{\prod_{i=1}^{n} e^{it\xi_i}\right\} = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{e^{it\xi_i}\right\} = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t).$$

   Tātad kompozīcijai $F_{\xi_1} * F_{\xi_2}$ atbilst reizinājums $\varphi_{\xi_1} \cdot \varphi_{\xi_2}$.

4. Harakteristiskā funkcija $\varphi_\xi(t)$ - vienmērīgi nepārtraukta funkcija.
   Tiešām

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \int \left|e^{it\xi}\right| \cdot \left|e^{ih\xi} - 1\right| d\mathbb{P} \leq$$

$$\leq \int\limits_{(\omega:|\xi|\geq N)} \left|e^{ih\xi} - 1\right| d\mathbb{P} + \int\limits_{(\omega:|\xi|<N)} \left|e^{ih\xi} - 1\right| d\mathbb{P} = I_1 + I_2.$$

   Jebkuram $\varepsilon > 0$ varam atrast tādu N, ka

$$I_2 \leq 2 \int\limits_{(\omega:|\xi|\geq N)} d\mathbb{P} < \frac{\varepsilon}{2},$$

   un pēc tad izvēlēties h tādu, ka neatkarīgi no t

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

5. Ja eksistē k - tās kārtas moments $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$, kur $k \geq 1$, tad $\varphi_\xi(t)$ ir k reizes diferencējama, un, ja $n \leq k$, tad

$$\varphi_\xi^{(n)}(0) = i^n\mathbb{E}\xi^n.$$

Tiešām, pēc n - kārtīgas ($n \leq k$) formālas harakteristiskās funkcijas $\varphi_\xi(t)$ diferencēšanas, iegūstam vienādību

$$\varphi_\xi^{(n)}(t) = i^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{itx} dF(x). \tag{2}$$

Tātad

$$\left|\varphi_\xi^{(n)}(t)\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^n| \, dF(x) = \mathbb{E}\,|\xi|^n ,$$

un pēc pieņēmuma nevienādības labā puse eksistē. Līdz ar to integrālis (2) eksistē, un tāpēc diferencēšana ir likumīga.
Ievietojot vienādībā (2) $t = 0$, iegūstam

$$\varphi_\xi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}\xi^n.$$

Gadījuma lieluma matemātiskā cerība un dispersija ir ļoti viegli izsakāmas ar atvasinājumiem no harakteristiskās funkcijas logaritma

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{i}\psi'(0), \quad \mathbb{D}\xi = -\psi''(0), \text{ kur } \psi(t) = \ln \varphi_\xi(t).$$

Svarīgāko sadalījuma likumu harakteristiskās funkcijas

1. Ja $\xi = c$ ar varbūtību 1, tad $\varphi_\xi(t) = e^{itc}$.

2. Ja ξ ir sadalīts pēc Bernulli likuma, tas ir:

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi = 1\} = p, \quad \mathbb{P}\{\omega : \xi = 0\} = q = 1 - p, \text{ tad}$$

$$\varphi_\xi(t) = e^{it}p + q = 1 + p\left(e^{it} - 1\right).$$

3. Ja ξ ir normāli sadalīts ar $\mathbb{E}\xi = a$ un $\mathbb{D}\xi = \sigma^2$, tad

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{e^{ita}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma} - \sigma it\right)^2} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dx.$$

Izmantojot substitūciju $z = \frac{x-a}{\sigma} - it\sigma$, $\varphi_\xi(t)$ reducējam formā

$$\varphi_\xi(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty-it\sigma}^{\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Apskatam integrāli no kompleksas funkcijas $e^{-\frac{z^2}{2}}$ pa taisnstūra kontūru Γ ar virsotnēm punktos: $-N$, N, $N - i\sigma t$, $-N - i\sigma t$. Tā kā $e^{-\frac{z^2}{2}}$ ir analītiska, tad

$$0 = \int\limits_{\Gamma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int\limits_{-N}^{N} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int\limits_{N-i\sigma t}^{-N-i\sigma t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int\limits_{\Gamma_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

kur Γ_1 ir nogriežņu $[N, N - i\sigma t]$ un $[-N - i\sigma t, N]$ apvienojums.

$$\int\limits_{N}^{N-i\sigma t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int\limits_{0}^{-t\sigma} e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}} dy = e^{-\frac{z^2}{2}} \int\limits_{0}^{-t\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot e^{-2ixy} dy.$$

No šejienes secinām, ka integrālis pa $[N, N-i\sigma t]$ tiecas uz 0, ja $N \to \infty$. Analoģiski uz nulli tiecas integrālis pa nogriezni $[-N - i\sigma t, -N]$.

$$\lim_{N\to\infty} \left(- \int\limits_{N-i\sigma t}^{-N-i\sigma t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-N-i\sigma t}^{N-i\sigma t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + ita}.$$

Pieņemsim, ka η - normāli sadalīts gadījuma lielums ar parametriem $(0, 1)$. Tad

$$\varphi_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

4. Ja gadījuma lielums ξ sadalīts pēc Puasona likuma ar parametru μ, tad

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{it} \cdot \mu\right)^k}{k!} = e^{-\mu} \cdot e^{\mu e^{it}} = e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}.$$

5. Pieņemsim, ka gadījuma lielums ξ vienmērīgi sadalīts intervālā $[0,1]$, tad

$$\varphi_\xi(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Apvēršanas formula un unitātes teorēma

Parādīsim, ka dažādām sadalījuma funkcijām atbilst dažādas harakteristiskās funkcijas un ka harakteristiskā funkcija viennozīmīgi nosaka sadalījuma likumu.

1.**Teorēma [1].[9].** (Apvēršanas formula). Ja $F(x)$ ir gadījuma lieluma ξ sadalījuma funkcija, un $\varphi(t)$ ir tā $h.f.$, tad jebkuriem punktiem x_1, x_2, kuros $F(x)$ ir nepārtraukta, izpildās sakarība

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt. \tag{3}$$

Šajā formulā labajā pussē integrālis jāsaprot galvenās vērtības nozīmē, jo $\frac{\varphi(t)}{t}$ var būt neintegrējama. Ja eksistē blīvums $f(x)$ un $h.f.$ $(\varphi(t))$ ir integrējama, tad formulu (3) viegli iegūt no Furjē transformācijas apvēršanas formulas

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt,$$

nointegrējot abas puses robežās no x_1 līdz x_2.

Pierādījums. Pie $x_2 > x_1$, apskatīsim integrāli

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dF(z) dt.$$

No tā, ka

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(z-x_1)}-e^{it(z-x_2)}}{it}dF(z)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{it(z-x_1)}\right|\cdot\left|\frac{1-e^{it(x_1-x_2)}}{it}\right|dF(z) \le$$

$$\le \left|e^{\frac{1}{2}it(x_1-x_2)}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}it(x_1-x_2)}-e^{\frac{1}{2}it(x_1-x_2)}}{it}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\sin\frac{t(x_1-x_2)}{2}}{\frac{t(x_1-x_2)}{2}}\right|\cdot|x_1-x_2| \le |x_1-x_2|$$

izriet, ka integrālī (4) varam izmainīt integrēšanas kārtību. Tādēļ

$$I_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-c}^{c}\frac{e^{it(z-x_1)}-e^{it(z-x_2)}}{it}dt\right]dF(z) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{c}\frac{1}{it}\left[e^{it(z-x_1)}-e^{-it(z-x_1)}-e^{it(z-x_2)}+e^{-it(z-x_2)}\right]dtdF(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{c}\left[\frac{\sin t(z-x_1)}{t}-\frac{\sin t(z-x_2)}{t}\right]dtdF(z).$$

No analīzes kursa zināms, ka

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c}\frac{\sin\alpha t}{t} = \begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ ja } \alpha>0,\\ -\frac{1}{2}, \text{ ja } \alpha<0,\end{cases} \tag{6}$$

pie tam konverģence jabkurā apgabalā $\alpha > \delta > 0$ (atbilstoši $\alpha < -\delta < 0$) ir vienmērīga attiecībā pret α, un pie $|\alpha| \le \delta$ un visiem c

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c}\frac{\sin\alpha t}{t}\right| < 1. \tag{7}$$

Pieņemsim, ka $x_2 > x_1$ un attēlosim integrāli I_c sekojošas summas veidā

$$I_c = \int_{-\infty}^{x_1-\delta} + \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} + \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} + \int_{x_2+\delta}^{\infty},$$

kur δ izvēlēts tāds, lai $x_1 + \delta < x_2 - \delta$.
Ievedam apzīmējumu

$$\psi(c, z, x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^c \left\{ \frac{\sin t(z - x_1)}{t} - \frac{\sin t(z - x_2)}{t} \right\} dt \tag{8}$$

Apgabalā $-\infty < z < x_1 - \delta$ izpildās nevienādības $z - x_1 < -\delta$ un $z - x_2 < -\delta$. tādēļ, izmantojot (6), iegūstam, ka , $c \to \infty$, tad

$$\int_{-\infty}^{x_1 - \delta} \psi(c, z, x_1, x_2) dF(z) \underset{c \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Analoģiski, ja $x_2 + \delta < z < \infty$ un ja $c \to \infty$, tad

$$\int_{x_2 + \delta}^{\infty} \psi(c, z, x_1, x_2) dF(z) \underset{c \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tālāk, tā kā apgabalā $x_1 + \delta < z < x_2 - \delta$ pastāv nevienādības $z - x_1 > \delta$ un $z - x_2 < -\delta$, tad izmantojot (6),

$$\int_{x_1 + \delta}^{x_2 - \delta} \psi(c, z, x_1, x_2) dF(z) \underset{c \to \infty}{\longrightarrow} \int_{x_1 + \delta}^{x_2 - \delta} dF(z) = F(x_2 - \delta) - F(x_1 + \delta).$$

Beidzot, balstoties uz (7), mēs varam izmantot novērtējumus

$$\left| \int_{x_1 - \delta}^{x_1 + \delta} \psi(c, z, x_1, x_2) dF(z) \right| < 2 \int_{x_1 - \delta}^{x_1 + \delta} dF(z) = 2 \left[F(x_1 + \delta) - F(x_1 - \delta) \right],$$

un

$$\left| \int_{x_2 - \delta}^{x_2 + \delta} \psi(c, z, x_1, x_2) dF(z) \right| < 2 \int_{x_2 - \delta}^{x_2 + \delta} dF(z) = 2 \left[F(x_2 + \delta) - F(x_2 - \delta) \right].$$

Tādējādi, pie jebkuriem $\delta > 0$

$$\lim_{c \to \infty} I_c = F(x_2 - \delta) - F(x_1 + \delta) + R(\delta, x_1, x_2),$$

kur $|R(\delta, x_1, x_2)| < 2[F(x_1 - \delta) - F(x_1 - \delta) + F(x_2 + \delta) - F(x_2 - \delta)]$.

Pieņemsim, ka $\delta \to 0$. No tā, ka punktos x_1 un x_2 sadalījuma funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta, seko vienādības

$$\lim_{\delta\to 0} F(x_1+\delta) = \lim_{\delta\to 0} F(x_1-\delta) = F(x_1)$$

un

$$\lim_{\delta\to 0} F(x_2+\delta) = \lim_{\delta\to 0} F(x_2-\delta) = F(x_2).$$

Bet tā kā I_c nav atkarīgs no δ, tad

$$\lim_{c\to\infty} I_c = F(x_2) - F(x_1).$$

Sekas. (***Unitātes teorēma [1].***) Sadalījuma funkcija ir viennozīmīgi noteikta ar savu harakteristisko funkciju.
Šī appgalvojuma pierādījums seko tieši no apvēršanas formulas

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to-\infty} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ity} - e^{itx}}{it} \varphi(t)dt,$$

kur robeža pēc y tiek ņemta pa to punktu y kopu, kuros funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta.

Piemērs. Pieņemsim, ka neatkarīgi gadījuma lielumi ξ_1 un ξ_2 ir normāli sadalīti ar parametriem: $\mathbb{E}\xi_1 = a_1$, $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma_1^2$, $\mathbb{E}\xi_2 = a_2$, $\mathbb{D}\xi_2 = \sigma_2^2$. Parādīsim, ka gadījuma lielums $\xi_1 + \xi_2$ ir sadalīts normāli.
No harakteristiskās funkcijas īpašībām seko, ka

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(a_1+a_2)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}.$$

Bet šī sakarība ir harakteristiskā funkcija normāli sadalītam gadījuma lielumam ar parametriem

$$\mathbb{E}\{\xi_1+\xi_2\} = a_1+a_2, \quad \mathbb{D}\{\xi_1+\xi_2\} = \sigma_1^2+\sigma_2^2.$$

No unitātes teorēmas secinām, ka sadalījuma funkcija gadījuma lielumam $\xi_1 + \xi_2$ ir normāla. Pareizs ir arī pretējais apgalvojums: ja $\varphi_1(t)$ un $\varphi_2(t)$ ir $h.f.$ un $\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) = e^{-\frac{1}{2}}$, tad

$$\varphi_1(t) = e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}, \quad \varphi_2(t) = e^{-ita-\frac{1}{2}(1-\sigma^2)t^2}, \quad \text{kur } 0 \le \sigma \le 1.$$

2.Teorēma[1]. Ja harakteristiskā funkcija $|\varphi(t)|$ ir integrējama uz visas taisnes, tad atbilstošā sadalījuma funkcija $F(x)$ ir absolūti nepārtraukta, un tās atvasinājums $F'(x)$ ir nepārtraukts un vienāds ar

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt. \tag{9}$$

Pierādījums. Reālā mainīgā reālu funkciju saucam par absolūti nepārtrauktu, ja jebkuram pozitīvam $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$$

jebkurai galīgai nešķeļošu ierobežotu vaļēju intervālu klasei $\{(a_i, b_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, kurai $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$.
Pierādīsim, ka $F(x)$ ir absolūti nepārtraukta.
Vispirms no tā, ka $|\varphi(t)|$ ir integrējama un no tā, ka $\left|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right| \leq 1$ pie jebkura α, seko, ka

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) \right| dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{-itx_1} - 1}{it} - \frac{e^{-itx_2} - 1}{it} \right| \cdot |\varphi(t)| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left| \frac{e^{-\frac{itx_1}{2}}}{t} \cdot \frac{\left(e^{-\frac{itx_1}{2}} - e^{\frac{itx_1}{2}}\right)}{i} \right| + \left| \frac{e^{-\frac{itx_2}{2}}}{t} \cdot \frac{\left(e^{-\frac{itx_2}{2}} - e^{\frac{itx_2}{2}}\right)}{i} \right| \right] |\varphi(t)| dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left| -e^{-\frac{itx_1}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{tx_1}{2}}{\frac{tx_1}{2}} x_1 \right| + \left| -e^{-\frac{itx_2}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{tx_2}{2}}{\frac{tx_2}{2}} x_2 \right| \right] |\varphi(t)| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{|x_1| + |x_2|\} |\varphi(t)| dt = \{|x_1| + |x_2|\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt, \tag{10}$$

kur x_1, x_2 - punkti, kuros $F(x)$ - nepārtraukta. Izmantojot (9), apvēršanas formulu varam uzrakstīt šādā formā

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt. \tag{11}$$

Pieņemsim, ka h ir tāds, ka $x_2 = x + h$, $x_1 = x - h$, kur x_1, x_2 - punkti, kuros $F(x)$ nepārtaukta. Tad

$$F(x+h) - F(x-h) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \frac{e^{ith} - e^{-ith}}{it} \varphi(t)dt = \tag{12}$$

$$= 2h \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \frac{\sin th}{th} \varphi(t)dt.$$

Tā kā $\left|\frac{\sin th}{th}\right| \leq 1$, tad

$$F(x+h) - F(x-h) = 2h \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt. \tag{13}$$

Izvēlamies tagad tādu galīgu, nešķeļošos, ierobežotu, vaļēju intervālu kopu $\{(a_i, b_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, ka $x_i + h_i = b_i$, $x_i - h_i = a_i$. Tad

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^{n} |F(x_i + h_i) - F(x_i - h_i)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt \cdot \sum_{i=1}^{n} 2h_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} 2h_i,$$

tas ir jebkuram $\varepsilon > 0$ varam atrast $\delta \leq \frac{\varepsilon}{c}$, un līdz ar to ir pierādīta $F(x)$ absolūtā nepārtrauktība.

Tālāk, ņemot vērā to, ka pie $h \to 0$ $\frac{\sin th}{th}$ vienmērīgi konverģē uz 1, un, izmantojot Lebega teorēmu ar robežpāreju zem integrāļa zīmes, iegūstam

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \frac{\sin th}{th} \varphi(t)dt = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)dt.$$

No šejienes seko, ka sadalījuma blīvums eksistē gandrīz visur. Vēl jāpierāda, ka $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija. No tā, ka

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-itx}\right| \cdot \left|e^{-ith} - 1\right| \cdot |\varphi(t)|dt = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin th}{2} \right| \cdot |\varphi(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-A} \left| \frac{\sin th}{2} \right| \cdot |\varphi(t)| dt + \int_{-A}^{A} \left| \frac{\sin th}{2} \right| \cdot |\varphi(t)| dt + \int_{A}^{\infty} \left| \frac{\sin th}{2} \right| \cdot |\varphi(t)| dt \right]$$

un, ņemot vērā arī to, ka $|\varphi(t)|$ ir integrējama, secinām: nevienādības labajā pusē pirmais un trešais saskaitāmie, attiecīgi izvēloties A var tikt padarīti katrs mazāks par $\frac{\varepsilon}{4}$, bet otrais saskaitāmais, izvēloties pietiekoši mazu h var tikt padarīts mazāks par $\frac{\varepsilon}{2}$. Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Helli teorēmas [9],[1]

1.Lemma. Lai sadalījuma funkciju virkne $\{F_n\}$ vāji konverģētu (pēc sadalījuma) un nedilstošu funkciju F ir pietiekoši, ka sakarība

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$$

pastāv visiem x no kādas visur blīvas reālo skaitļu kopas D.

Pirmā Helli teorēma [1],[9]. Jebkura nedilstošu un kopumā ierobežtu funkciju virkne $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ satur apakšvirkni $F_{11}(x), F_{22}(x), \ldots, F_{nn}(x), \ldots$, kura vāji konverģē uz kādu nedilstošu funkciju $F(x)$.

Otrā Helli teorēma [9], [1]. Ja $f(x)$ - nepārtraukta ierobežota funkcija un sadalījuma funkciju virkne $\{F_n(x)\}_{n\geq 1}$ vāji konverģē uz sadalījuma funkciju $F(x)$, tad

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) dF_n(x) = \int_a^b f(x) dF(x),$$

kur a un b funkcijas $F(x)$ nepārtrauktības punkti.

Vispārinātā otrā Helli teorēma [9],[1]. Ja $f(x)$ - nepārtraukta ierobežota funkcija un sadalījumua funkciju virkne $\{F_n\}$ vāji konverģē uz sadalījuma funkciju $F(x)$, tad

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x) dF_n(x) = \int f(x) dF(x).$$

Harakteristisko funkciju robežteorēmas **[9],[1]**

Tiešā un apgrieztā robežteorēma $h.f.$ konstatē, ka pastāvošās sakarības starp sadalījuma funkcijām un $h.f.$, ir ne tikai savstarpēji viennozīmīgas, bet arī nepārtrauktas.

Tiešā robežteorēma [9]. Ja sadalījuma funkciju virkne $\{F_n(x)\}_{n\geq 1}$ vāji konverģē uz sadalījuma funkciju $F(x)$, tad $\varphi_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t)$, kur $\varphi(t)$ - $h.f.$ sadalījuma funkcijai $F(x)$.

Pilnīgi analoģiski, kā otrās Helli teorēmas pierādījumā, var parādīt, ka šī konverģence jebkurā galīgā t intervālā ir vienmērīga.
Pieņemsim, ka $\{\varphi_n(t)\}_{n\geq 1}$ - $h.f.$ virkne, bet $\{F_n(x)\}_{n\geq 1}$ - atbilstošo sadalījuma funkciju virkne.

Apgrieztā robežteorēma [9]. *(Teorēma par nepārtrauktību).*
Ja pie $n \to \infty$ $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ jebkuram t, un $\varphi(t)$ ir nepārtraukta pie $t = 0$, tad

1. $\varphi(t)$ - $h.t.$ kaut kādai sadalījuma funkcijai $F(x)$,
2. $F_n(x) \Longrightarrow F(x)$.

Kā robežteorēmu izmantošanas piemēru apskatīsim integrālās Muavra - Laplasa teorēmas pierādījumu. Pieņemsim, ka katrā no n neatkarīgiem mēģinājumiem notikums A notiek ar varbūtību p. Apzīmēsim ar μ skaitli, kas rāda cik reizes šajos n mēģinājumos ir noticis notikums A. Atradīsim $h.f.$ gadījuma lielumam μ. Varam rakstīt, ka

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

kur μ_i - neakarīgi gadījuma lielumi, katrs no kuriem var pieņemt tikai divas vērtības 0 un 1, atbilstoši ar varbūtībām $q = 1 - p$ un p. Lieluma μ_i $h.f.$ ir

$$\varphi_{\mu_i}(t) = q + p \cdot e^{it}.$$

Tad

$$\varphi_{\mu}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\mu_i}(t) = (q + p \cdot e^{it})^n,$$

$$\varphi_{\eta}(t) = e^{-it\sqrt{\frac{np}{q}}} \left(q + p \cdot e^{it\frac{1}{\sqrt{npq}}}\right)^n = \left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + p \cdot e^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}\right)^n,$$

kur $\eta = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$.

Funkcijas $e^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}}$ un $e^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}$ izvirzam Maklorēna rindā. Tad $\varphi_\eta(t)$ izskatīsies šādi:

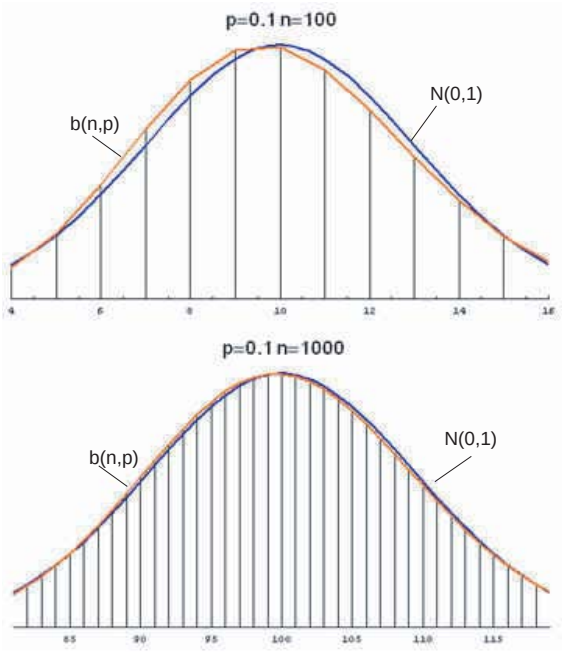
$$\varphi_\eta(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n}(1 + R_n)\right]^n,$$

kur

$$R_n = 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k-2} \cdot \frac{pq^k + q(-p)^k}{\sqrt{(pq)^k}}.$$

Tā kā $R_n \to 0$, kad $n \to \infty$, tad, izmantojot sakarību $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, iegūstam

$$\varphi_\eta(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ kad } n \to \infty.$$



1.zīm.

Balstoties uz apgriezto robežteorēmu, atrodam, ka

$$F_n(x) = \mathbb{P}\left\{\omega : \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(x).$$

Vēl atlicis pierādīt, ka $F_n(x)$ konverģē uz $F(x)$ vienmērīgi pa x.
No $F(x)$ nepārtrauktības seko, ka intervālā $[-X, X]$ $F_n(x)$ konverģē uz $F(x)$ vienmērīgi. Tiešām, pieņemsim, ka $x_0 = -X, x_1, \ldots, x_n = X$ ir intervāla $[-X, X]$ dalījuma punkti, tādi, ka

$$|F(x_k) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tad pietiekoši lieliem n visiem $x \in [x_k, x_{k+1}]$, visiem $k = 0, 1, \ldots, n-1$ un jebkuram iepriekš uzdotam ε iegūstam

$$F_n(x) \geq F_n(x_k) > F(x_k) - \frac{\varepsilon}{2} = F(x) + F(x_k) - F(x) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tātad

$$F_n(x) - F(x) > F(x_k) - F(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq -\varepsilon.$$

Analoģiski

$$F_n(\lambda) \leq F_n(x_{k+1}) < F(x_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2} = F(x) + F(x_{k+1}) - F(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$F_n(x) - F(x) < F(x_{k+1}) - F(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Tātad pietiekoši lieliem n, ja $|x| < X$,

$$|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

No tā, ka $F_n \Longrightarrow F(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ un, attiecīgi izvēloties X un n, iegūstam, ka gadījumā, ja $|x| < X$, $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ jebkuram iepriekš uzdotam $\varepsilon > 0$, kas arī pierāda $F_n(x)$ vienmērīgo konverģenci uz $F(x)$ uz visas reālās taisnes.

4.§ Centrālā robežteorēma [9]

Pārrakstām integrālo Muavra - Laplasa teorēmu sekojošā formā:

$$\mathbb{P}\Big\{\alpha \leq -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{D}\xi_k}} < \beta\Big\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (1)$$

(turklāt konverģence ir vienmērīga attiecībā pret α un β), kur ξ_k ir vienāds ar 1, ja notikums A notiek k - tajā mēģinājumā, un vienāds ar nulli pretējā

gadījumā, $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ - skaits, cik reizes notikums A noticis n mēģinājumos, p - varbūtība ar kādu notikums A notiek vienā mēģinājumā. $\mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = p \cdot n$ un $\mathbb{D}\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k = npq$.
Rodas jautājums, vai sakarība (1) izpildīsies, ja lielumiem ξ_k vai to sadalījuma funkcijām tiks uzlikti vājāki ierobežojumi? Šī uzdevuma nostādne un arī tā atrisinājums ir P.A.Čebiševa un viņa skolnieku A.A.Markova un A.M.Ļapunova darba rezultāts. Izrādās, ka ir pietiekoši, ja saskaitāmajiem ξ_k uzliek ļoti vispārīgus nosacījumus, kas pēc būtības nozīmē, ka katrs atseviškais saskaitāmais nedrīkst būtiski ietekmēt summu. Tā kā varbūtību teorija nodarbojas ar likumsakarību pētīšanu masu parādībās, bet to pamatā ir fakts, ka uz šāda procesa norisi iedarbojas liels skaits savstarpēji neatkarīgu faktoru, katrs no kuriem niecīgi ietekmē procesu gaitu, tad iegūtajiem rezultātiem ir milzīga nozīme pielietojumos. Piemēram, veicot dažādus mērījumus, neizbēgami darbojas tādi faktori, kā mēraparātu kļūdas, kas rodas atmosfēras un mehāniskās iedarbības rezultātā; novērotāja kļūdas - redzes, dzirdes, psihiskā un fiziskā stāvokļa īpatnību rezultātā, utt. Tā visa rezultātā rodas mērījumu kļūda, turklāt katra faktora radītā kļūda ir niecīga. Tādējādi novērojamā kļūda ir milzīga skaita, pēc lieluma niecīgu, savstarpēji neatkarīgu gadījuma lielumu summa.
Tai vietā, lai apskatītu liela, bet galīga skaita saskaitāmo summu, pētīsim summu virkni, kur saskaitāno skaits kļūst arvien lielāks un lielāks un lielāks, un uzskatīsim, ka interesējošā uzdevuma atrisinājumu dod sadalījuma funkcija, kuru iegūstam kā sadalījuma funkciju virknes robežu.

Teorēma [9]. (Centrālā robežteorēma).

Ja savstarpēji neatkarīgu gadījuma lielumu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ virkne jebkuram konstantam $\tau > 0$ apmierina Lindeberga nosacījumu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(\tau) = 0, \qquad (2)$$

kur

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k = \mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right), \quad a_k = \mathbb{E}\xi_k, \quad F_k(x) = \mathbb{P}(\xi_k < x),$$

tad vienmērīgi visiem $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \tag{3}$$

Pierādījums. Vispirms ievedam sekojošus apzīmējumus

$$\frac{\xi_k - a_k}{B_n} = \xi_{nk},\ F_{nk}(x) = \mathbb{P}(\xi_{nk} < x),\ A_k = \{\omega : |\xi_k - a_k| > \tau B_n\},\ k = 1, \ldots, n.$$

Jaunajos apzīmējumos Lindenberga nosacījums izskatās šādi:

$$\lim_{n\to\infty} L_{n_0}(\tau) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(\xi_k - a_k)^2 d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}\left(\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right)^2 d\mathbb{P} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}\xi_{nk}^2 d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk} = 0. \tag{4}$$

Aprēķināsim gadījuma lieluma harakteristisko funkciju

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}.$$

Ņemot vērā, ka gadījuma lielumi ξ_i, kur $i \geq 1$, ir neatkarīgi, iegūstam

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}\left\{e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_{nk}}\right\} = \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t),$$

kur $f_{nk}(t)$ - gadījuma lieluma ξ_{nk} harakteristiskā funkcija.
Ja mēs pierādītu, ka $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, tad no apgrieztās robežteorēmas un no unitātes teorēmas sekotu mūsu teorēmas pierādījums.
Šī fakta pierādījumu sadalīsim vairākos etapos:

1) Vispirms pierādīsim, ka $f_{nk}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ vienmērīgi pēc k, $(1 \leq k \leq n)$, ja t ir no galīga intervāla $|t| \leq 1$.
   Tiešām

$$f_{nk}(t) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nk}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dF_{nk}(x) - it\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{nk}(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dF_{nk}(x), \tag{5}$$

$$\text{jo} \int_{-\infty}^{\infty} dF_{nk}(x) = 1, \quad \mathbb{E}\xi_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{nk}(x) = 0.$$

Turklāt, jebkuram $\alpha > 0$

$$\left|e^{i\alpha} - 1\right| = \left|\int_0^{\alpha} e^{ix} dx\right| \leq \int_0^{\alpha} \left|e^{ix}\right| dx = \alpha. \tag{6}$$

$$\left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha\right| = \left|\int_0^{\alpha} \left(e^{ix} - 1\right) dx\right| \leq \int_0^{\alpha} \left|e^{ix} - 1\right| dx \leq \int_0^{\alpha} x dx = \frac{\alpha^2}{2}.$$

$$\left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right| = \left|\int_0^{\alpha} \left(e^{ix} - 1 - ix\right) dx\right| \leq \int_0^{\alpha} \left|e^{ix} - 1 - ix\right| dx \leq$$

$$\leq \int_0^{\alpha} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\alpha^3}{3}.$$

Izmantosim iegūtās nevienādības nākamajam novērtējumam:

$$|f_{nk}(t) - 1| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dF_{nk}(x)\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx\right| dF_{nk}(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 x^2}{2} dF_{nk}(x) = \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) =$$

$$= \frac{t^2}{2} \left[\int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)\right] \leq$$

$$\leq \frac{t^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)\right] \leq$$

$$\leq \frac{t^2}{2}\left[\varepsilon^2 + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)\right], \tag{7}$$

kur ε - patvaļīgs pozitīvs skaitlis.
Izmantojot Lindeberga nosacījumu, novērtējumā (7) pēdējo saskaitāmo var padarīt pēc patikas mazu, attiecīgi izvēloties n. Tātad visiem pietiekoši lieliem n vienmērīgi pēc k, kur $1 \leq k \leq n$, (novērtējums no k nav atkarīgs), izpildās nevienādība

$$|f_{nk}(t) - 1| \leq \varepsilon^2 T^2, \tag{8}$$

kur t no jabkura galīga intervāla $|t| \leq T$, t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} f_{nk}(t) = 1$, un pietiekoši lieliem n, vienmērīgi pēc k, kur $1 \leq k \leq n$, izpildās nevienādība

$$|f_{nk}(t) - 1| < \frac{1}{2}, \tag{9}$$

ja t ir no jebkura galīga intervāla $|t| \leq T$.

2) Tālāk, intervālā $|t| \leq T$ uzrakstām $\lg \varphi_n(t)$ izvirzījumu, kur
lg - logaritma galvenā vērtība.

$$\lg \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lg f_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lg\left(1 + f_{nk}(t) - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \lg\left(f_{nk}(t) - 1\right) + R_n, \tag{10}$$

$$\text{kur} \quad R_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s} \left(f_{nk}(t) - 1\right)^s.$$

Ņemot vērā sakarību (9), iegūstam

$$|R_n| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=2}^{\infty} |f_{nk}(t) - 1|^s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f_{nk}(t) - 1|^2}{1 - |f_{nk}(t) - 1|} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f_{nk}(t) - 1|^2 \leq \max_{1\leq k\leq n} |f_{nk}(t) - 1| \sum_{k=1}^{n} |f_{nk}(t) - 1|. \tag{11}$$

Izmantojot iepriekšējos novērtējumus, iegūstam

$$\sum_{k=1}^{n} |f_{nk}(t) - 1| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dF_{nk}(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_{nk} = \frac{t^2}{2}. \tag{12}$$

Līdz ar to iegūstam

$$|R_n| = \frac{t^2}{2} \max_{1 \leq k \leq n} |f_{nk}(t) - 1| .$$

Ņemot vērā (5) iegūstam, ka vienmērīgi pēc t, jebkurā galīgā intervālā $|t| \leq T$

$$R_n \underset{n\to}{\longrightarrow} \infty 0. \tag{13}$$

3) Tagad novērtēsim pirmo saskaitāmo sakarības (10) labajā pusē.

$$\sum_{k=1}^{n} (f_{nk}(t) - 1) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dF_{nk}(x) = -\frac{t^2}{2} + \rho_n, \tag{14}$$

$$\text{kur} \quad \rho_n = \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dF_{nk}(x).$$

No tā, ka $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_{nk} = 1$, izriet vienādība:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{t^2}{2}.$$

Tātad patvaļīgam $\varepsilon > 0$ iegūstam

$$\rho_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right) dF_{nk}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \int_{|x| \leq \varepsilon} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right) dF_{nk}(x) +$$

$$+ \int_{|x| > \varepsilon} \left(\frac{t^2 x^2}{2} + e^{itx} - 1 - itx\right) dF_{nk}(x) \Big\}.$$

Tā kā $|e^{itx} - 1 - itx| < \frac{x^2t^2}{2}$, tad

$$|\rho_n| \le \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x|\le\varepsilon} \frac{|tx|^3}{6} dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} t^2x^2 dF_{nk}(x) \right\} = \qquad (15)$$

$$= \frac{|t^3|}{6} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \int\limits_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \sum_{k=1}^{n} t^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \le$$

$$\le \frac{|t^3|}{6} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \left[\int\limits_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} t^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{|t^3|}{6} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon + t^2 \left(1 - \frac{|t|}{6}\varepsilon \right) \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x).$$

Izmantojot Lindenberga nosacījumu, otro saskaitāmo nevienādībā (15) var pēc patikas samazināt, atiecīgi izvēloties n. Tātad dotajam $\eta > 0$ fiksējam τ. Pēc tam izvēlamies $\varepsilon(\tau, \eta)$ tā, lai samazinātu pirmo saskaitāmo nevienādībā (15). Tālāk izvēlamies $n(\varepsilon, \tau, \eta)$, lai samazinātu otro saskaitāmo tajā pašā nevienādī. Līdz ar to iegūstam, ka patvaļīgam $\eta > 0$, $|\rho_n| < \eta$ vienmērīgi pēc t, ja $|t| \le \tau$,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0. \qquad (16)$$

Izmantojot sakarības (10), (13), (14), (16), iegūstam, ka funkcija $\lg \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2} + \rho_n + R_n$, gadījumā ja $n \to \infty$, konverģē uz $-\frac{t^2}{2}$ vienmērīgi pēc t no jebkura galīga intervāla $|t| < \tau$, t.i.,

$$\varphi_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

un līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Sekas. Ja neatkarīgi gadījuma lielumi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ir vienādi sadalīti un tiem ir atšķirīgas no nulles dispersijas b_k^2, $k = 1, 2, \ldots$, tad ir spēkā centrālā robežteorēma, t.i.,

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbb{E}\xi_i) < x \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z).$$

Lai pierādītu šo apgalvojumu, pietiek pārbaudīt Lindeberga nosacījumu. Pieņemam, ka

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k = nb_k^2 = nb^2, \quad a_k = a \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Tad

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^2 n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a|>\tau B_n} (x-a)^2 dF_k(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^2 n} \cdot n \int\limits_{|x-a|>\tau B_n} (x-a)^2 dF_k(x) = \frac{1}{b^2} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{|x-a|>\tau B_n} (x-a)^2 dF_k(x).$$

Tā kā mēs pieņemam, ka eksistē galīgas disperijas, tad

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|x-a|>\tau B_n} (x-a)^2 dF_k(x) = 0$$

Tātad Lindeberga nosacījums ir izpildīts, un līdz ar to esam pārbaudījuši mūsu apgalvojuma pareizību.

Ļapunova teorēma [9],[1]. Ja kopumā neatkarīgu gadījumu lielumu virknei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ var atrast tādu $\delta > 0$, ka gadījumā, ja $n \to \infty$,

$$\lambda_n = \frac{1}{B^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{1}$$

tad par $n \to \infty$ vienmērīgi pēc x izpildās centrālā robežteorēma.
Teorēma būs pierādīta, ja mēs pamatosim, ka gadījumā, ja izpildās Ļapunova nosacījums, tad izpildīsies arīLindeberga nosacījums.
Šo faktu viegli iegūt no nākamās nevienādību virknes

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n} \frac{(x-a_k)^2 |x-a_k|^{\delta}}{(\tau B_n)^{\delta}} dF_k(x) =$$

$$= \frac{1}{B_n^{2+\delta} \cdot \tau^{\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-a_k|^{2+\delta} dF_k(x) = \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(|x-a_k|^{2+\delta}\right)}{B_n^{2+\delta}} = \frac{1}{\tau^{\delta}} \cdot \lambda_n.$$

No tā, ka $\lambda_n \to 0$, izriet $L_n(\tau) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, un līdz ar to Ļapunova teorēma ir pierādīta.

Centrālās robežteorēmas pielietojumi

Ļapunova nosacījums uzliek lielākus ierobežojumus nekā Lindeberga nosacījumus, bet daudzos gadījumos to ir vieglāk pārbaudīt.

1. Piemērs. Pieņemsim, ka ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, neatkarīgi gadījuma lielumi ar sadalījumiem

$$\xi_n(x) = \begin{cases} k, & \text{ar varbūtību } \frac{1}{2}, \\ -k, & \text{ar varbūtību } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nepieciešams pierādīt, ka gadījuma lielumu virkne

$$\eta_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k), \quad k \geq 1,$$

ir asimptotiski normāla. Lai atrisinātu šo uzdevumu, ir pietiekami, ja pārliecināsimies, ka Ļapunova nosacījums izpildās.

Mūsu gadījumā

$$\mathbb{E}\xi_k = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} = 0, \quad \mathbb{D}\xi_k = \mathbb{E}\xi_k^2 = \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2} = k^2, \quad \mathbb{E}|\xi_k|^{2+\delta} = k^{2+\delta}.$$

Ja $\delta = 1$, tad iegūstam

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k|^{2+\delta} = \sum_{k=1}^{n} k^3, \quad \lambda_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{\left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}\right)^3}.$$

Tā kā

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n^3 \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right] \approx$$

$$\approx n^3 \int_0^1 x^2 dx = \frac{n^3}{3}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \right] \approx n^4 \int_0^1 x^3 dx = \frac{n^4}{4},$$

tad

$$\lambda_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k|^{2+\delta}}{\left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k}\right)^{2+\delta}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2+\delta}}{\left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}\right)^{2+\delta}} \approx \frac{\frac{n^{2+\delta+1}}{2+\delta+1}}{\left(\sqrt{\frac{n^3}{3}}\right)^{2+\delta}} =$$

$$= c \cdot \frac{n^{3+\delta}}{n^{\frac{3}{2}(2+\delta)}} = \frac{c}{n^{\frac{\delta}{2}}}.$$

Seko, ka $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, pie jebkura $\delta > 0$. Tā, piemēram, ja $\delta = 1$, $\lambda_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$ tiecas uz nulli, ja $n \to \infty$.

Centrālās robežteorēmas pielietošanas shēma

Vienkārša un uzskatāma ilustrācija pierādītajām teorēmām ir artilērijas šāviņu izkliede, šaujot mērķī.

Uz šāviņa lidojuma trajektoriju iedarbojas liels skaits neatkarīgu faktoru, turklāt katra faktora iedarbība ir neliela. Šādi faktori ir, piemēram, novirzes pulvera lādiņu daudzumā, novirzes lādiņa svarā un izmēros, gaisa mitruma un temperatūras izmaiņas, vēja virziens un ātrums dažādos augstumos, utt. Visa tā rezultātā šāviņa novirze no tēmējama punkta ļoti labi aprakstāma ar normālā sadalījuma likumu.
Ar normālo sadalījumu iznāk saskarties ne tikai šaušanas teorijā, bet arī daudzās citās nozarēs, piemēram, mērīšanas kļūdu teorijā. Lielākajā daļā gadījumu kļūdas, kas rodas mērot fizikālus lielumus, ir sadalītas normāli, jo mērījumu kļūdu veido daudzas elementārkļūdas, kas rodas dažādu iemeslu dēļ.
Centrālā robežteorēma ir "teicama" tādā nozīmē, ka to neietekmē dažu tās nosacījumu neizpildīšanās. Galvenais teorēmas nosacījums - neatkarība. Šo pieņēmumu var stipri pavājināt (Bernšteina darbi).
Tā kā tas tika norādīts iepriekš, lielākā daļā gadījumu mērījumu kļūdas ir normāli sadalītas. Katrs mēģinājums ir atkarīgs no daudziem daļēji atkarīgiem faktoriem, kas dod savu ieguldījumu kopējā kļūdā. Protams, ne vienmēr summārā kļūda būs atsevišķo faktoru summa $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$. Pareizāk būtu to uzskatīt par kaut kādu funkciju $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Bet lielumus $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ir dabīgi uzskatīt partādiem, kuri maz novirzās no kaut kādām savām determinētām vērtībām $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\xi_k = a_k + \eta_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \text{ kur } \eta_k \text{ ir mazi.}$$

$$\text{Tad} \quad f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \approx f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial a_k} \cdot \eta_k.$$

Summa, kas atrodas labajā pusē, vedina uz domām par normālo sadalījumu. Normālais sadalījums, bez šaubām, ir pats universālākais no visiem sadalījuma likumiem. Tomēr nevajag no normālā sadalījuma prasīt varāk, kā tas var dot. Tā mēs nevaram gaidīt, ka normālais sadalījums labi aprakstīs sadalījumu "astēs", tas ir pie ļoti lielām vai ļoti mazām sadalījuma vērtībām. Tātad, balstoties uz centrālo robežteorēmu, varam apgalvot, ka

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{1}{B_k} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

bet nav pareizi apgalvot, ka

$$\frac{\mathbb{P}\left\{ \frac{1}{B_k} \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x \right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

vienmērīgi pa visiem x. Parasti ar tādiem gadījumiem mēs sastopamies, apskatot retu un bīstamu notikumu varbūtības, piemēram, tādu notikumu, kuru rezultātā rodas avārijas situācijas. Tomēr rēķinot varbūtības šāda veida notikumiem, acīm redzot, ir riskanti pielietot vienkāršoto Bernulli tipa varbūtību shēmu (tas nenozīmē, ka ir labāk meklēt sarežģītāku shēmu, ja tas var radīt rezultātu pasliktināšanos). Šajā gadījumā vislabāk ir vispār atteikties no varbūtiskiem novērtējumiem.

Rupja kļūda ir pielietot normālo sadalījumu gadījumos, kad novērojumiem piemīt zināma nenoteiktība, bet šai nenoteiktībai nepiemīt varbūtības raksturs, t.i., nav statistiski stabila. Piemēram, derīgās komponentes daudzums rūdā var pakāpeniski un likumsakarīgi pieaugt tovojoties atradnes centram. Tāpēc datus par derīgās komponentes daudzumu rūdā (pakļautus gan gadījuma kļūdām, likumsakarīgam pieaugumam) nevar apstrādāt tā, it kā tie būtu viena un tā paša gadījuma lieluma realizācijas.

Parasti centrālo robežteorēmu pielieto pēc sekojošas shēmas. Pieņemsim, ka jāaprēķina varbūtību tam, ka gadījuma lielums $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ pieņem vērtību

no intervāla $[A, B]$, $\mathbb{P}(A \leq \eta \leq B)$, ξ_i - neatkarīgi gadījuma lielumi $i = 1, 2, \ldots, n$. Aprēķināsim $\mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i$, $\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\xi_i$. Tad

$$\mathbb{P}\{A \leq \eta \leq B\} = \mathbb{P}\left\{\frac{A - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}} \leq \frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}} \leq \frac{B - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{B - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}\right) - \Phi\left(\frac{A - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}\right),$$

kur Φ - Laplasa funkcija.

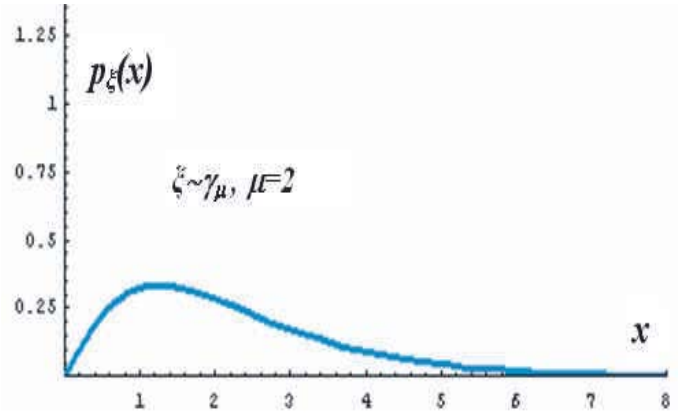
Svarīgākie sadalījumi, kas saistīti ar normālo sadalījumu

1.§. Visbiežāk sastopamās sadalījuma funkcijas

- *Gamma sadalījums*

1.Definīcija. Gadījuma lieluma γ sadalījumu sauc par ***gamma sadalījumu***, ja tā varbūtību sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$p_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \; a, \mu > 0, \; \Gamma(\mu) = \int\limits_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx.$$



1.zīm.

Ja $\mu = 1$, tad iegūsim eksponenciālo sadalījumu, ja $\mu = N$, tad gamma sadalījumu sauc par ***Erlanga*** sadalījumu.
Vispirms aplūkosim gamma sadalījumam raksturīgo funkciju

$$\varphi_\gamma(t) = \mathbb{E}e^{it\gamma} = \frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^\infty e^{-x(a-it)} x^{\mu-1} dx.$$

Veicot transformāciju $x(a-it)=z$, iegūstam

$$\varphi_\gamma(t)=\frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\infty(a-it)}e^{-z}\frac{z^{\mu-1}}{(a-it)^\mu}dz=\frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)(a-it)^\mu}\int\limits_0^{\infty(a-it)}e^{-z}z^{\mu-1}dz.$$

Ņemot vērā, ka, ar rezīdiju palīdzību, var pierādīt

$$\int\limits_0^{\infty(1-it)}e^{-z}z^{\mu-1}dz=\int\limits_0^{\infty}e^{-z}z^{\mu-1}dz=\Gamma(\mu),$$

iegūstam sakarību $\varphi_\gamma(t)=a^\mu(a-it)^{-\mu}$. No kurienes, pēc raksturīgo funkciju īpašībām, gadījuma lieluma γ sākuma momenti ir

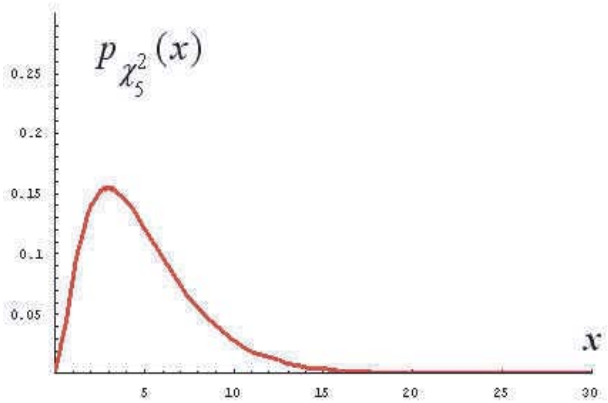
$$\alpha_k=\mathbb{E}\gamma^k=(-i)^k\varphi_\gamma^{(k)}(0)=\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdot\ldots\cdot(\mu+k-1)}{a^k}.$$

Gadījumā $a=1,\mu\in\mathbf{N}$

$$\varphi_{\gamma_\mu}(t)=(1-it)^{-\mu},\ \ \alpha_k=\frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}.$$

- *Pīrsona jeb hī-kvadrāta sadalījums* (χ^2)

2.Definīcija. Ja $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n$ ir normēti normāli sadalīti neatkarīgi gadījuma lielumi, tad gadījuma lieluma $\chi_n^2:=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2$ sadalījumu sauc par ***Pīrsona jeb hī-kvadrāta ar n brīvības pakāpēm*** sadalījumu.



2.zīm.

Vispirms atradīsim χ_n^2 raksturīgo funkciju. Balstoties uz $\{\xi_k^2,\ k \geq 1\}$ neatkarību un rasturīgo funkciju īpašībām iegūstam

$$\varphi_{\chi_n^2}(t) = \varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k^2}(t).$$

Pie tam

$$\varphi_{\xi_k^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}(1-2it)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-2it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ievietojot to iepriekšējā formulā, iegūstam

$$\varphi_{\chi_n^2}(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} = \varphi_{\gamma_{\frac{n}{2}}}(2t),$$

un

$$\varphi_{\chi_n^2}(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\infty} e^{2itx} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1} dx = |2x = z| = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^{\infty} e^{itz} e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{n}{2}-1} dz.$$

Kā iepriekš tika minēts, starp raksturīgām funkcijām un sadalījuma funkcijām eksistē viennozīmīga un nepārtraukta atbilstība. Līdz ar to

$$p_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Tātad, χ_n^2 sadalījuma blīvuma funkcija tiek viennozīmīgi noteikta.
Pēc raksturīgo funkciju īpašībām, viegli atrast χ_n^2 sadalījuma matemātisko cerību un dispersiju
$\mathbb{E}\chi_n^2 = -i\varphi'_{\chi_n^2}(0) = n,\ D\chi_n^2 = -(ln\varphi_{\chi_n^2}(0))'' = 2n.$
Bez tam, ir spēkā secinājums

$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1) \text{ pēc sadalījuma.}$$

Tas secināms no tā, ka gadījuma lielumu virknei $\chi_n^2 := \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2,\ n \geq 1$, izpildās centrālās robežteorēmas nosacījumi.

Atzīmēsim, ka

$$F_{\chi_n}(x) = \mathbb{P}(\chi_n < x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\chi_n^2 < x^2), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Līdz ar to

$$p_{\chi_n}(x) = \frac{dF_{\chi_n}(x)}{dx} = 2xp_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$F_{\frac{\chi_n}{\sqrt{n}}}(x) = \mathbb{P}(\chi_n < x\sqrt{n}) = F_{\chi_n}(x\sqrt{n})$, no kurienes,

$$p_{\frac{\chi_n}{\sqrt{n}}}(x) = \frac{dF_{\chi_n}(x\sqrt{n})}{dx} =$$

$$= \sqrt{n}p_{\chi_n}(x\sqrt{n}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{nx^2}{2}} \left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

- *Stjūdenta jeb t– sadalījums*

Pieņemsim, ka χ_n un $\xi \sim N(0,1)$ ir neatkarīgi gadījuma lielumi.

3.Definīcija. Gadījuma lielumu $t_n = \frac{\xi}{\chi_n}\sqrt{n}$ sauc par ***Stjūdenta jeb t- sadalījumu ar*** n ***brīvības pakāpēm.***

Atradīsim t–sadalījuma blīvuma funkciju.

$$F_{t_n}(z) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\chi_n}\sqrt{n} < z\right) = \mathbb{P}\left(\xi < \frac{\chi_n}{\sqrt{n}}z\right) = \mathbb{P}\left(\left(\xi, \frac{\chi_n}{\sqrt{n}}\right) \in D\right) =$$

$$= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{yz} p_\xi(x) p_{\frac{\chi_n}{\sqrt{n}}}(y)dx = \int_0^\infty p_{\frac{\chi_n}{\sqrt{n}}}(y)F_\xi(yz)dy;$$

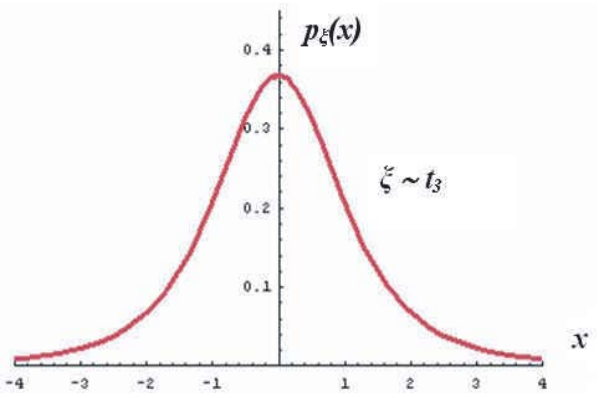
$$p_{t_n}(z) = \frac{dF_{t_n}(z)}{dz} = \int_0^\infty p_{\frac{\chi_n}{\sqrt{n}}}(y)p_\xi(yz)ydy =$$

$$= \int_0^\infty y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2y^2}{2}} \frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{ny^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}(n+z^2)} \left(\frac{y^2 n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} ydy = \left| \frac{y^2}{2}(n+z^2) =: u, ydy = \frac{du}{n+z^2} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-u} \left(\frac{un}{n+z^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{du}{n+z^2} = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n+z^2)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}} du,$$

$$p_{t_n}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left[1 + \frac{z^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad z \in \mathbf{R}.$$



3.zīm.

Stjūdenta sadalījuma blīvuma funkcija ir simetriska attiecība pret ordinātu asi. $\mathbb{E}t_n = 0$, $Dt_n = \frac{n}{n-2}, n > 2$. Ja $n = 1$, tad iegūsim Košī sadalījumu.
t-sadalījums ir asimptotiski normālais sadalījums. Šis fakts izriet no Stirlinga formulas

$$\Gamma(z) = e^z z^{z-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left[1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi\, n}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

un tā, kā

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{x^2}\left[-\frac{x^2}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tādējādi,

$$p_{t_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

tas nozīmē, t-sadalījums konverģē uz normēto normālo sadalījumu pēc sadalījuma.
Atzīmēsim, ka Stjūdenta sadalījums, tāpat kā χ^2-sadalījums, nepieciešams daudzu matemātiskās statistikas uzdevumu atrisināšanai. Turklāt abiem minētajiem sadalījumiem ir izveidotas to sadalījumu funkciju tabulas.

- *Snedekora jeb F - sadalījums*

Dažreiz šo gadījuma lielumu sauc par Fišera sadalījumu. Pieņemsim ka χ^2_n un χ^2_m ir neatkarīgi gadījuma lielumi.

4.Definīcija. Gadījuma lieluma $F_{n,m} := \frac{\chi^2_n}{\chi^2_m}\frac{m}{n}$ sadalījumu sauc par ***F-sadalījumu ar n un m brīvības pakapēm.***

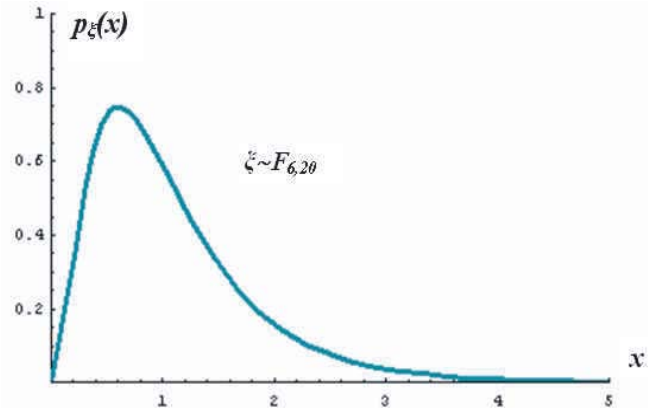
$F_{n,m}$ sadalījuma funkcija atšķiras no nulles tikai pozitīvām argumenta vērtībām. Tādēļ jāaprēķina sadalījuma blīvuma funkciju tikai pozītīvām argumenta vērtībām z.

$$p_{F_{n,m}}(z) = \frac{dF_{F_{n,m}}(z)}{dz} = \int_0^\infty p_{\chi^2_m}(y) p_{\chi^2_n}\left(yz\frac{n}{m}\right) y\frac{n}{m}dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}\frac{n}{m}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+z\frac{n}{m}\right)} y^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-2}\left(z\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}-1} ydy =$$

$$\left|t := \frac{y}{2}\left(1+z\frac{n}{m}\right)\right| = \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+z\frac{n}{m}\right)^{-\frac{m+n}{2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{m+n}{2}-1}dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}-1}\left(1+z\frac{n}{m}\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \; z>0.$$



4.zīm.

Tā kā šim sadalījumam arī ir liela nozīmē matemātiskajā statistikā, $F_{n,m}$ sadalījuma funkcija ir tabulēta.

► Atzīmēsim, ka normālais, χ^2, Stjūdenta, Snedekora sadalījumi ir matemātiskās statistikas pamatsadalījumi.

- *Beta β - sadalījums*

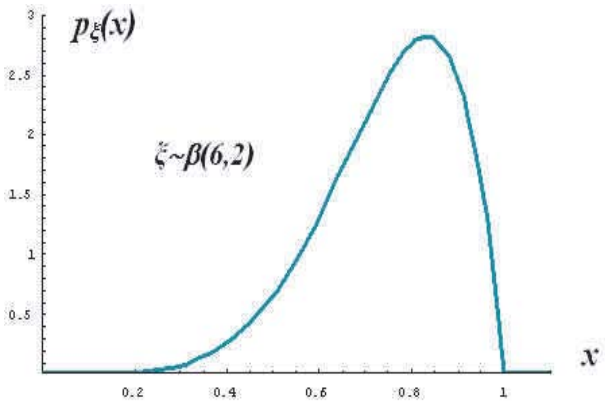
5.Definīcija. Gadījuma lieluma β sadalījumu, kas atkarīgs no diviem pozitīviem parametriem a un b sauc par ***beta sadalījumu***, ja tā varbūtību sadalījuma funkcija ir

$$F_{\beta(a,b)}(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz, \ 0 \leq x \leq 1,$$

kur $B(a,b) = \int_0^x z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Tātad, $\beta_{(a,b)}$ - varbūtību sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$p_{\beta(a,b)}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}.$$



5.zīm.

Tā kā spēkā identitāte

$$F_{\beta(a,b)}(x) = 1 - F_{\beta(b,a)}(1-x),$$

beta sadalījuma tabulas tika konstruētas gadījumam, kad $0 < a \leq b$. Jāatzīmē, ka β sadalījuma matemātiskā cerība un dispersija ir

$$\mathbb{E}\beta = \frac{a}{a+b}, \ D\beta = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Ja $a > 1$ un $b > 1$, tad sadalījums ir unimodāls, tā moda ir $Mo_\beta = \frac{a-1}{a+b-2}$ un intervālā galapunktos blīvuma funkcijas vērtība ir nulle.
Ja $a < 1$ un $b < 1$, tad interāla $(0,1)$ galapunktos blīvuma funkcijas vērtība neierobežoti aug.
Ja $a = 1$ un $b = 1$, tad iegūsim vienmērīgo sadalījumu.
Kā redzams, F-sadalījumam ar n un m brīvības pakapēm sadalījuma funkcija ir

$$F_{F_{n,m}}(x) = F_{\beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}\left(\frac{nx}{m+nx}\right),\ a = \frac{n}{2},\ b = \frac{m}{2}.$$

2.§. Daudzdimensiju normālais sadalījums

Mācību literatūrā daudzdimensiju sadalījumu sauc par ***normālo sadalījumu***, ja tā varbūtību sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$p_\xi(x,a,A) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(Az,z)},$$

kur $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, A-simmetriskā pozitīvi definīta matrica, $z := x - a$, $|A|$ - matricas A determinants, $|A| \neq 0$, (Az, z)- vektoru Az un z skalārais reizinājums n-dinensiju telpā.
Izrēķināsim daudzdimensiju normālā sadalījuma raksturīgo funkciju

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{i(t,\xi)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i(t,x)}p_\xi(x,a,A)dx,\ t \in \mathbf{R}^n.$$

Uzskatīsim, ka $a = 0$. Atzīmēsim šādu faktu: ja A ir simmetriska, reala, tad eksistē tāda ortogonālā matrica D, ka $D^*AD = E$, kur D^* -matricas D saistītā, E -diagonālmatrica ar diagonālelementiem $e_1, e_2, ..., e_n$. Izdarot transformāciju $x = Du$, iegūstam
$(t,x) = (D^*t, u)$, $(Ax, x) = (D^*ADu, u) = (Eu, u)$, $|A| = |E|$.
Apzīmējot ar $t_1^*, t_2^*, ..., t_n^*$ vektora D^*t koordinātes, varam rakstīt, ka

$$\varphi_\xi(t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{e_j}\int\limits_{\mathbf{R}^n} exp\left[i(D^*t,u) - \frac{1}{2}(Eu,u)\right]du =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{e_j}}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{R}} exp\left[it_j^*u_j - \frac{1}{2}e_ju_j^2\right]du_j.$$

Zināms, ka gadījuma lieluma $\eta_j \sim N(0, e_j^{-1})$ raksturīga funkcija ir

$$\varphi_{\eta_j}(t) = \mathbb{E}e^{it\eta_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e_j^{-1}}} \int\limits_{\mathbf{R}} exp\left[itx - \frac{x^2}{2e_j^{-1}}\right] dx = exp\left[-\frac{t^2 e_j^{-1}}{2}\right].$$

Tad,

$$\varphi_\xi(t) = \prod_{j=1}^{n} exp\left[-\frac{t^{*^2} e_j^{-1}}{2}\right] = exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} t^{*^2} e_j^{-1}\right] = exp\left[-\frac{1}{2}(E^{-1}t^*, t^*)\right] =$$

$$= exp\left[-\frac{1}{2}(E^{-1}D^*t, D^*t)\right] = exp\left[-\frac{1}{2}(DE^{-1}D^*t, t)\right] = exp\left[-\frac{1}{2}(A^{-1}t, t)\right].$$

Tālāk, gadījumā $a \neq 0$, ņemot vērā to, ka $p_\xi(x, a, A) = p_\xi(x-a, 0, A)$, varam rakstīt

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} exp\left[i(t,x)\right] p(x, a, A)dx =$$

$$= exp\left[i(t,a)\right] \int\limits_{\mathbf{R}^n} exp\left[i(t, x-a)\right] p(x-a, 0, A)dx = exp\left[i(t,a) - \frac{1}{2}(A^{-1}t, t)\right].$$

Tātad, vispārīgā gadījumā

$$\varphi_\xi(t) = exp\left[i(t,a) - \frac{1}{2}(A^{-1}t, t)\right].$$

Saskaņā ar raksturīgo funkciju īpašībām, iegūstam

$$\frac{\partial \varphi_\xi(0)}{\partial t_j} = i\mathbb{E}\xi_j,\ \frac{\partial^2 ln\varphi_\xi(0)}{\partial t_j \partial t_k} = -\mathbb{E}(\xi_j\xi_k) + \mathbb{E}\xi_j\mathbb{E}\xi_k = -cov(\xi_j\xi_k),$$

kur ξ_j ir gadījuma vektora ξ j- tā koordināte. Tad

$$\frac{\partial \varphi_\xi(t)}{\partial t_j}|_{t=0} = ia_j;\ -\frac{\partial^2 ln\varphi_\xi(t)}{\partial t_j t_k}|_{t=0} = a_{jk}^{-1} = cov(\xi_j, \xi_k),$$

kur a_{jk}^{-1} - matricas A^{-1} elementi. Tātad, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – gadījuma lieluma ξ matemātisko cerību vektors , $M := A^{-1} = \| cov(\xi_j, \xi_k) \|$, t.i. matrica A^{-1}, kas ir matricas A inversā, ir sadalījuma kovariāciju matrica.

1.Definīcija. Daudzdimensiju gadījuma lieluma ξ sadalījumu sauc par ***normālo sadalījumu,*** ja tā raksturīgā funkcija ir

$$\varphi_\xi(t) = exp\left[i(t,a) - \frac{1}{2}(Mt,t)\right],$$

kur $t \in \mathbf{R}^n$, $i = \sqrt{-1}$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – gadījuma vektora $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ matemātisko cerību vektors, M-gadījuma vektora ξ kovariāciju matrica.
Ja eksistē M^{-1}, tad eksistē gadījuma vektora ξ blīvuma funkcija formā

$$p_\xi(x,a,M) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|M^{-1}|^{\frac{1}{2}} exp\left[\frac{1}{2}\left(M^{-1}(x-a), x-a\right)\right],$$

kur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $|M^{-1}|$-matricas M determinants, (y,z)- vektoru y un z skalārais reizinājums n-dinensiju telpā.
Ja A^{-1} ir diagonālmatrica, tad $a_{jj}^{-1} = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, ..., n$, normālā vektora komponentes ir neatkarīgas un

$$p_\xi(x,a,A) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j^{-1} exp\left[-\frac{(x_j - a_j)^2}{2\sigma_j^2}\right].$$

Atzīmēsim, ja normālā vektora komponentes ir neatkarīgas, tad atbilstošā kovariācijas matrica ir diagonāla.
Turpmāk normālu vektoru ξ ar matemātisko cerību vektoru a un kovariācijas matricu M apzīmēsim $\xi \sim N(a, M)$.

Lemma Ja $\xi \sim N(a, M)$ un $\eta = C\xi$, kur C dotā matrica, tad $\eta \sim N(Ca, CMC^*)$.
Tiešām,

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{i(t,\eta)} = \mathbb{E}e^{i(t,C\xi)} = \mathbb{E}e^{i(C^*t,\xi)} = \varphi_\xi(C^*t) =$$

$$= e^{i(C^*t,a) - \frac{1}{2}(MC^*t,C^*t)} = e^{i(t,Ca) - \frac{1}{2}(CMC^*t,t)}.$$

Rezultātā iegūstam $\eta \sim N(Ca, CMC^*)$. Lemma ir pierādīta.

► Tā kā jebkuru pozitīvi definītu matricu M var pārveidot diagonālformā $E = D^*MD$, kur D ir ortogonāla, E ir diagonālā matrica, tad jebkuru normāli sadalītu vektoru var iegūt no normāli sadalīta vektora ar neatkarīgām koordinātēm, izdarot lineāru transformāciju.

► Tātad, gadījuma vektors ξ, kas pieņem vērtības no telpas $\mathbf{R}^n$, ir normāli sadalīts telpā $\mathbf{R}^n$, ja visiem $t \in \mathbf{R}^n$ skalārais gadījuma lielums (ξ, t) ir normāli sadalīts.

Literatūra

1. Боровков, А.А. *Теория Вероятностей*.- Москва, Наука, 1986.
2. Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Vol. 1,2. – NY, John Wiley&Sons, 1966.
3. Doob, J.L. *Stochastic Processes.* – NY, John Wiley&Sons, 1953.
4. Халмош, П. *Теория Меры.* – Москва, ИЛ, 1953.
5. Lehmann, E.L. *Testing Statistical Hypotheses.* - NY, John Wiley&Sons, 1964.
6. Ширяев, А.Н. *Вероятность*. – Москва, Наука, 1980.
7. Ross, S. *Introduction to Probability Models.* NY, Academic Press Inc., 1985.
8. Тутубалин, В.Н. *Теория Вероятностей.* Москва, МГУ, 1972.
9. Гнеденко, Б.В. *Курс Теории Вероятностей*. Москва:Наука, 1969.
10. Schmetterer, L. *Einführung in die Mathematische Statistik.* – NY , Springer-Verlag. 1966.
11. Cox, D.R., Hinkley, D.V. *Mathematical Statistics.* - London, Chapman and Hall, 1974.
12. Carkova, V., Buiķis, M. 25 lekcijas varbūtību teorijā. – Rīga, LU, 1975.
13. Дунин-Барковский, И.В., Смирнов, Н.В. *Курс Теории Вероятностей и Математической Статистики*. - Москва, Наука, 1969.