Diferenciālvienādojumu bloka obligātās daļas saturs matemātikas bakalaura studiju programmā

1. Ievads

1.1. Diferenciālvienādojumu studiju kursu mērķis

Diferenciālvienādojumu bloks matemātikas bakalaura studiju programmā ir viens no diviem matemātiskās analīzes kursu dabīgajiem turpinājumiem un atzarojumiem, kurš īpaši nozīmīgs determinēto dabas un tehnloģisko procesu matemātiskajā modelēšanā. Tas nosaka pamatu nepieciešamajai matemātikas bakalaura grāda ieguvēja akadēmiskajai kvalifikācijai, kura ir priekšnoteikums reālai iespējai matemātiķim turpināt akadēmisko izglītošanos un iekļauties dažādos darba kolektīvos, kuri meklē dabaszinātnisku vai inženiertehnisku problēmu risinājumus. Vienlaicīgi diferenciālvienādojumu analītisko metožu un kvalitatīvās teorijas apgūšana sekmē kvalificētam matemātiķim nepieciešamo iemaņu un metodiskā arsenāla veidošanos.

Piebilstams, ka matemātikas studiju programmas diferenciālvienādojumu bloka saturam būtiski jāatšķiras no līdzīgu nosaukumu kursiem, kurus lasa, piemēram, datorzinātnes vai fizikas bakalaura studiju programmās. Ja minēto studiju programmās mūsdienās diferenciālvienādojumu bloka kursu saturu lielā mērā izmaina pieejamo programmu pakešu ekspluatācijas iespējas, tad matemātiķa kvalifikācija prasa prasmi attīstīt diferenciālvienādojumu kvalitatīvo teoriju, sekmīgi vienkāršot reālo parādību sarežģītos modeļos sastopamās diferenciālvienādojumu problēmas. Diferenciālvienādojumu bloka studiju kursi ieņem nozīmīgu vietu arī Eiropas industriālās matemātikas konsorcija (ECMI) veidotajās studiju programmās tehnomatemātikas jeb matemātisko tehnoloģiju nozarēs. Tradicionālā LU matemātiķu sadarbība ar ECMI izraisa nepieciešamību pēc pietiekoši solīdas bāzes LU matemātikas bakalauratūras beidzējiem, tajā pašā laikā tā ir arī labs priekšnoteikums šī bloka kursu attīstībai. Šī materiāla autors piedalījies ECMI studiju koncepcijas izstrādē, kura pieņemta minētās organizācijas studiju procesam veltītā darbseminārā Drēzdenē, Vācijā, 2003.gada 11.-13.septembrī. Savukārt, par zemāk izstrādātās studiju programmas atbilstību ECMI koncepcijai personīgi pārliecinājies, vērojot diferenciālvienādojumu kursa pasniegšanu vienā no vadošajām ECMI sistēmas universitātēm, Dānijas tehniskajā universitātē, Lungbijā.

Atbilstoši matemātikas bakalaura studiju programmas modifikācijas koncepcijai diferenciālvienādojumu bloks sastāv no obligātās un izvēles daļām, katra no tām paredzēta 7 kredītpunktu apmērā. Obligātā daļa satur minimālās nepieciešamās zināšanas matemātikas bakalaura akadēmiskā grāda pretendentiem, nodrošina iespējas turpināt studijas maģistratūrā. Izvēles daļa paredzēta studējošajiem, kuri paredzējuši specializēties ar determinēto dabas un tehnloģisko procesu matemātisko modelēšanu saistītās matemātikas apakšnozarēs.

Plaši diskutēts jautājums par parastajiem un parciālajiem diferenciālvienādojumu veltīto jautājumu sabalansēšanai diferenciālvienādojumu bloka studiju kursos. Šajā ziņā pasaules praksē atrodamas dažādas un ļoti atšķirīgas pieejas. Kā galējība mināma situācija, kad matemātikas bakalaura studiju programmā vispār netiek iekļauti ar parciālajiem diferenciālvienādojumiem saistīti jautājumi. Tam mūsu apstākļos nav iespējams piekrist, jo atbilstoši arī Boloņas deklarācijas nostādnēm nepieciešams, lai bakalaura studiju laikā vimaz daļa studējošo izstrādātu bakalaura darbus, kuros risināti praktiski matemātiskās modelēšanas uzdevumi. Kaut arī te runa ir par stipri vienkāršotiem matemātiskās modelēšanas uzdevumiem, būtu ļoti vienpusīgi, ja visi šādi darbi aprobežotos tikai ar parasto diferenciālvienādojumu lietošanu. Katrā ziņā arī saturīgas parasto diferenciālvienādojumu problēmas visbiežāk iegūstamas vienkāršojot uzdevumus, kuri saistīti ar parciālo diferenciālvienādojumu lietojumiem. To svarīgi apzināties arī bakalaura līmeņa studentiem, īpaši tiem, kuri šādā virzienā varētu izvēlēties specializāciju. Vienlaicīgi jāapzinās, ka mūsdienīgam parciālo diferenciālvienādojumu jautājumiem veltītam kursam būtu jābalstās uz funkcionālanalīzes bāzes, kas bakalaura studiju gados principā nav iespējams.

1.2. Diferenciālvienādojumu studiju kursu attīstība Latvijas Universitātē

Par šo jautājumu loku diferenciālvienādojumu bloka obligātās daļas programmas izstrādātājs izvērstu ziņojumu sniedza 7.starptautiskajā konferencē **Matemātikas mācīšana. Vēsture un perspektīvas** Tartu, Igaunijā, 2006.gada 13.-15.maijā, akcentējot vēsturiskās pārmantojamības un nepārtrauktības principu studiju procesā.

Pašreiz īstenojamie studiju kursi **Diferenciālvienādojumi I** (obligātajā daļā) un **Diferenciālvienādojumi II**, **Matemātiskās fizikas vienādojumi** (izvēles daļā) 4 kredītpunktu apmērā katrs, izveidoti reducējot līdz 1992. gadam lasītos obligātos studiju kursos **Diferenciālvienādojumi** un **Matemātiskās fizikas vienādojumi** (128 stundu apjomā katrs). Minēto kursu iedalījums obligātajā un izvēles daļās gan ir visai nosacīts. Patiesībā visi LU sagatavojamie matemātikas bakalauri, atskaitot vienīgi tos, kuri izvēlējušies vidusskolas matemātikas skolotāja profesionālo studiju programmu, šos kursus klausās.

20. gadsimta vidū šo kursu lasīšanas tradīcijas Latvijas Universitātē noteica profesors A.Lūsis (Diferenciālvienādojumi) un docents E.Riekstiņš (Matemātiskās fizikas vienādojumi), ilgstoši tos lasot un izveidojot labus mācību līdzekļus. Īpaši tas sakāms par E.Riekstiņa fundamentālo darbu - mācību grāmatu **Matemātiskās fizikas vienādojumi**. Tiesa, mūsdienās šīs literatūras izmantošana studiju procesā ir visai problemātiska. Tomēr E.Riekstiņa grāmata iesakāma studentiem kā izcils kultūrvēsturisks fenomens latviešu zinātniskajā literatūrā.

Pēc tam samērā neilgu laiku, bet atstājot nozīmīgus un paliekošus impulsus LU tradīcijās, šos kursus lasīja docents A.Liepa (Diferenciālvienādojumi) un profesors Ļ.Rubinšteins (Matemātiskās fizikas vienādojumi). A.Liepa bija ievērojamā Krievijas matemātiķa Ļ.Pontrjagina iedibinātās diferenciālvienādojumu kvalitatīvās teorijas skolas audzēknis un vērtējams kā izcils metodiķis. Savukārt, vēlākajos gados Ļ.Rubinšteins kopīgi ar savu dēlu I.Rubinšteinu ASV publicēja mācību grāmatu **Matemātiskās fizikas vienādojumi**, kura kļuva par vienu no iecienītākajām šī priekšmeta mācību grāmatām ASV un Rietumeiropā.

No 20. gadsimta 70-tajiem gadiem **Diferenciālvienādojumu** kursu LU lasa docente S.Čerāne un asociētais profesors J.Cepītis, kuri abi ir speciālisti kvalitatīvajā diferenciālvienādojumu teorijā, tiesa, katrs ar savām, atšķirīgām interesēm. S.Čerāne ir nelaikā mirušā ievērojamā Latvijas matemātiķa L.Reiziņa audzēkne, bet J.Cepītis pieder plaši pazīstamajai Rīgas diferenciālvienādojumu nelineāro robežproblēmu skolai, kuru iedibinājuši profesori J.Klokovs un A.Lepins. Šī dažādība ir sekmējusi LU lasītā **Diferenciālvienādojumu** kursa attīstību, liedzot tam kļūt vienpusīgam. Kaut arī minētie docētāji ir uzrakstījuši vairākus mācību līdzekļus, par pamata mācību grāmatu un studiju kursa ideoloģisko pamatu lielā mērā uzskatāma bijušā Maskavas universitātes rektora I.Petrovska **Lekcijas parasto diferenciālvienādojumu teorijā**, kura krievu valodā piedzīvojusi daudzus atkārtotus izdevumus. Šajā grāmatā tiek arī piedāvāti ļoti daudz netriviālu uzdevumu, kuri var tikt izmantoti arī kursa un pat bakalaura darba tēmu izveidē.

Savukārt, **Matemātiskās fizikas vienādojumu** kursu šajā laikā lasījuši profesori A.Buiķis un H.Kalis, kuri priekšmetā sagatavojuši un publicējuši vairākus mācību līdzekļus. Tomēr kā galvenā mācību grāmata bakalaura studiju līmenim mināma izcilo Krievijas akadēmiķu A.Samarska un A.Tihonova daudzkārt izdotā apjomīgā, bet ļoti vienkāršā valodā uzrakstītā grāmata **Matemātiskās fizikas vienādojumi**. Neskatoties uz to, ka grāmatā praktiski nelieto funkcionālanalīzes aparātu, tā vērtējama arī kā nozīmīgs palīglīdzeklis mūsdienīgu matemātiskās modelēšanas uzdevumu risināšanā, ļaujot šādos darbos aktīvi iesaistīties arī bakalaura līmenī studējošajiem.

1.3. Saistība ar citiem bakalaura studiju programmas kursiem

No vienas puses diferenciālvienādojumu bloks matemātikas bakalaura studiju programmā ir matemātiskās analīzes kursu dabīgs turpinājums, no otras puses to atzarojums. Tādēļ iespējama neizbēgamā nepieciešamība studiju kursus lasīt paralēli. **Diferenciālvienādojumu I** kursu jau tagad nākas lasīt vienlaicīgi ar **Matemātisko analīzi III**, bet **Matemātiskās fizikas vienādojumu** kursu nāksies lasīt paralēli kursam **Matemātiskā analīze IV**. Pēdējais apstāklis izsauc virkni vienkāršojumu kursam, kurš atbildīs **Matemātiskās fizikas vienādojumiem**. Tomēr arī kursu **Diferenciālvienādojumi** grūti stādīties priekšā bez Arcela teorēmas izmantošanas, bez teorēmas par nekustīgā punkta eksistenci saspiedējattēlojumam, u.tml. Jāpiebilst, ka līdz šim tradicionāli kursā **Diferenciālvienādojumi II** pierādīta Bola - Brauera teorēma par nekustīgā punkta eksistenci nepārtrauktam attēlojumam, kura plaši lietota diferenciālvienādojumu kvalitatīvajā teorijā. Šo parādību izsaucis apstāklis, ka P.Bols ir izcils Latvijas matemātikas klasiķis, kur vārdā turklāt nosaukta Latvijas Zinātņu Akadēmijas vārda balva par sasniegumiem matemātikā. Te paveras viena no iespējām studējošos iepazīstināt ar P.Bola darbību.

Arī vairākus lineāru diferenciālvienādojumu teorijai nozīmīgus jautā- jumus nebūs iespējams aplūkot lineārās algebras kursos. Minēsim kaut vai matricas kanonisko formu kompleksi saistītu īpašvērtību gadījumā, matricas Žordāna normālformas iespējamu modifikāciju ar patvaļīgi mazu lielumu ε uz blakus diagonāles, u.tml. No vienas puses mūsdienās prasības pēc lineāro diferenciālvienādojumu teorijas lietojumiem vairs nav īpaši aktuālas un lineārajiem diferenciālvienādojumiem veltītās sadaļas varētu sašaurināt. No otras puses tas būtu pretrunā ar matemātikas vienotības principu. Topošajiem matemātiķiem būtu svarīgi redzēt kā vienādas idejas darbojas atšķirīgās matemātikas disciplīnās. Šajā ziņā interesants ir vektoru lauka pagrieziena jēdziena lietojums autonomu parasto diferenciālvienādojumu sistēmu izpētē, kuru tiek piedāvāts iekļaut parastajiem diferenciālvienā- dojumiem veltīta studiju kursa programmā.

Matemātiķu sagatavošanā liela nozīme ir skaitlisko metožu izpratnē. Diskutabls ir jautājums par to vai Eilera lauztās līnijas jēdziens izklāstāms diferenciālvienādojumu vai skaitlisko metožu kursā. Ja jau nav iespējams lietot Arcela teorēmu, tad Eilera lauzto līniju varētu atstāt skaitlisko metožu kursam. No otras puses, Eilera lauztā līnijas jēdziens palīdz izprast integrāllīniju izturēšanos.

1.4. Diferenciālvienādojumu bloka obligātās daļas struktūra

Tiek piedāvāts matemātikas bakalaura studiju programmas diferenciālvienādojumu bloka obligātās daļas kursus 7 kredītpunktu apmērā sadalīt divos kursos. Pirmo - 4 kredītpunktu apjomā veltīt parastajiem diferenciālvienādojumiem un lasīt 3 studiju semestrī, bet otro - 3 kredītpunktu apjomā pamatā veltīt parciālajiem diferenciālvienādojumiem un lasīt 4 studiju semestrī. Parasto diferenciālvienādojumu sadaļā 2 kredītpunkti paredzēti lekcijām, bet 2 kredītpunkti - praktiskajām nodarbībām. Parciālo diferenciālvienādojumu sadaļā arī 2 kredītpunkti paredzēti lekcijām, bet praktisko darbu apjoms paredzēts tikai 1 kredītpunkts. Tas izskaidrojams ar to, ka šajā laikā interesentiem būs iespējams risināt praktiskus uzdevumus, kuros pielietojami diferenciālvienādojumi arī citos studiju kursos.

2. Parasto diferenciālvienādojumu sadaļa

2.1. Vispārīgie apsvērumi

Kursa mērķis ir iemācīt studējošajiem diferenciālvienādojumu pamatjēdzienus, izpratni par atrisinājumu un integrāllīniju izturēšanās iespējām, par dažādi formulētu problēmu korektību, uzsverot Košī problēmu lokālā un globālā izpratnē, vienkāršākās robežproblēmas, īsi iepazīstināt ar analītiskās risināšanas metodēm, kā arī dot nelielu ieskatu kvalitatīvās teorijas metodikā. Nozīmīgi arī parādīt parasto diferenciālvienādojumu lietojumus praksē nozīmīgu uzdevumu risināšanā, tas īpaši akcentējams praktiskajās nodarbībās. Kursam studējošie jāsagatavo parciālo diferenciālvienādojumu kursa un matemātikas bakalaura studiju programmas diferenciālvienādojumu bloka izvēles kursu apguvei.

Rezumējot teikto, kursā izdalāmi sekojošie posmi:

1) parasto diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni, to ģeometriska un fizikālā interpretācija,

2) atklātā formā uzdota pirmās kārtas parastā diferenciālvienādojuma atrisinājumu un integrāllīniju izturēšanās,

3) elementāro pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu analītiskās risināšanas metodes, Rikkati diferenciālvienādojums,

4) Košī problēmas atrisināmības jautājumi atklātā formā uzdotam pirmās kārtas parastam diferenciālvienādojumam,

5) aizklātā formā uzdoti parastie pirmās kārtas diferenciālvienādojumi, to singulārās līnijas un singulārie atrisinājumi,

6) augstākas kārtas parasto diferenciālvienādojumu kārtas pazemināšanas metodes,

7) lineāru parasto diferenciālvienādojumu un sistēmu vispārīgā atrisinājuma iegūšana,

8) otrās kārtas lineāro parasto diferenciālvienādojumu analītiskās un kvalitatīvās metodes,

9) robežproblēmu atrisināmības īpatnību demonstrēšana uz parastā otrās kārtas lineāra diferenciālvienādojuma bāzes, jēdziens par Šturma - Liuvila problēmu,

10) rindu izmantošana otrās kārtas lineāra parastā diferenciālvienādojuma risināšanai,

11) autonomas diferenciālvienādojumu sistēmas jēdziens, trajektorijas un to veidi,

12) divu pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmas trajektoriju izturēšanās stacionārā punkta apkārtnē,

13) vektoru lauka izmantošana autonomu sistēmu pētīšanā,

14) Bola-Brauera teorēma un tās lietojumi,

15) atrisinājuma stabilitātes jēdziens un stabilitātes izpētes metodika,

16) pirmintegrāļi to īpašības un izmantošana.

Kā redzams izdalīto tēmu skaits praktiski sakrīt ar kursam atvēlēto lekciju un tām atbilstošo praktisko nodarbību skaitu. Dažus no minētajiem jautājumiem (piemēram, 7), 9), u.c.) nebūs iespējams izklāstīt vienā lekcijā, tādēļ citu izklāsts varētu būt konspektīvāks, ilustratīvo materiālu reizēm pat atstājot patstāvīgajam darbam. Dažas tēmas (piemēram, 6)) varētu tikt apskatītas tikai praktisko darbu nodarbībās, turpretīm citas (piemēram, 13), 14)) īpaši praktisko darbu nodarbības neprasa. Dažs sastādītās programmas kritiķis varētu iebilst pret šādu tēmu iekļaušanu studiju kursā, tomēr programmas autora pārliecība ir tāda, ka studiju kursos nepieciešams dot priekšstatu par matemātikas vienotību, Latvijas matemātikas klasiķu paveikto, u.tml. lietām. Turklāt šādu jautājumu iekļaušana studiju kursā sekmētu arī studējošo ieinteresētību specializēties ar diferenciālvienādojumu teoriju saistītos matemātikas apakšvirzienos.

2.2. Kursa satura apraksts

1. Parasto diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni, to ģeometriska un fizikālā interpretācija.

Diferenciālvienādojuma jēdziens kā vienādojuma jēdziena vispārinājums (nezināmais vairs nav skaitlis, bet funkcija). Apsvērumi par diferenciālvienādojumā iesaistīto funkciju gluduma īpašībām. Parastie un parciālie diferenciālvienādojumi. Diferenciālvienādojuma kārta, diferenciālvienādojumu sistēmas. Augstākas kārtas diferenciālvienādojuma ekvivalence pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmai. Pirmās kārtas parastā diferenciālvienādojuma uzdošanas formas - aizklātā, atklātā, simetriskā. Simetriskās formas priekšrocības diferenciālvienādojuma atrisinājumu ģeometriskajā interpretācijā, atrisinājumu grafikas un integrāllīnijas. Parastie un singulārie punkti $(t, x)-$ plaknē. Izoklīnas un to izmantošana priekšstata gūšanai par diferenciālvienādojuma atrisinājumu izturēšanos. Jēdziens par sākuma nosacījumiem un Koši problēmu. Diferenciālvienādojuma atrisinājumi - vispārīgais, partikulārais, to uzdošanas formas - atklātā, aizklātā, parametriskā. Diferenciālvienādojuma ģeometriskā interpretācija, Eilera lauztā līnija, tās iegūšana un izmantošana. Diferenciālvienādojuma vienkāršākās fizikālās interpretācijas, kuras balstās uz parādības kāda parametra maiņas tieši vai apgriezti proporcionālo atkarību no cita parametra, kuru uzlūko par neatkarīgo argumentu. Principā tam nav nepieciešamas priekšzināšanas fizikā, kuras nereti studējošajiem, pateicoties apstāklim, ka fizikas apgūšana nav obligāta vidusskolas kursā, pietrūkst.

2. Atklātā formā uzdota pirmās kārtas parastā diferenciālvienādojuma atrisinājumu un integrāllīniju izturēšanās.

Uzmanība tiek pievērsta skalāram pirmās kārtas parastajam diferenciālvienādojumam atklātā formā

$$x' = f(t,x)$$

ar nepārtrauktu labo pusi. Kaut vai piemēri

$$x' = x,$$

$$x' = \sqrt{x},$$

$$x' = x^2,$$

$$x' = 3x^{\frac{2}{3}},$$

$$x' = -\frac{t}{x}$$

parāda atšķirīgas situācijas integrāllīniju izturēšanās sakarā. Atrisinājuma eksistences, neeksistences punkti, unitātes un neunitātes punkti, lokālās un globālās unitātes punkti, sazarojuma punkti $(t,x)-$ plaknē. Nozīmīgi varētu būt diferenciālvienādojumam $x' = f(x), \quad f(0) = 0$ parādīt neīstā integrāļa

$$\int_0^c (\frac{dx}{f(x)}$$

konverğences vai diverğences ietekme uz atrisināmības situāciju. Piemēri ļauj pareizi izprast arī singulārā atrisinājuma jēdzienu, demonstrē gadījumu, kad diferenciālvienādojumam eksistē partikulārais atrisinājums, kurš nav iegūstams no vispārīgā atrisinājuma, bet nav singulārais atrisinājums. Diferenciālvienādojuma pilnā atrisinājuma jēdziens. Beidzot, pēdējais no minētajiem piemēriem labi parāda atrisinājuma neturpināmības iespēju. Rezumējums - turpmāk par Košī problēmu lietderīgi runāt lokālā nozīmē.

3. Elementāro pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu analītiskās risināšanas metodes, Rikkati diferenciālvienādojums

Tēma prasa vairākas praktiskās nodarbības. Elementāro pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu jēdziens. Izejas pozīcija varētu būt gadījums, kad simetriskā formā uzdota diferenciālvienādojuma kreisā puse ir kādas funkcijas pilnais diferenciālis, t.s. diferenciālvienādojums pilnos diferenciāļos. Integrējošā reizinātāja lietošana, gadījumi kad integrējošais reizinātājs ir nulle vai arī pieņem bezgalīgi lielu vērtību. Diferenciālvienādojums ar atdalītiem un atdalāmiem mainīgajiem, mainīgo atdalīšana kā integrējošā rezinātāja lietošanas piemērs. Homogēnie un uz tiem ar mainīgo maiņu $x = z^m$ reducējamie diferenciālvienādojumi. Diferenciālvienādojuma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}$$

atrisināmības analīze. (Labs piemērs saistībai ar lineārās algebras kursu!). Lineārs diferenciālvienādojums, ieskaitot gadījumu, kad diferenciālvienādojums kļūst lineārs mainot funkciju un argumentu vietām. Lineāra diferenciālvienādojuma risināšana izmantojot tikai no argumenta atkarīgu integrējošo reizinātāju, kā arī pamatā iesakot lietot konstantes variācijas metodi. Bernuli diferenciālvienādojums. Rikkati diferenciālvienādojums kā piemērs neelementāram parastajam pirmās kārtas diferenciālvienādojumam. Tēmas noslēgumā uzdevumi, kur diferenciālvienādojums reducējams uz elementāro diferenciālvienādojumu radoši piemeklējot piemērotu mainīgo maiņu.

4. Košī problēmas atrisināmības jautājumi atklātā formā uzdotam pirmās kārtas parastam diferenciālvienādojumam.

Pamatā jautājumu paredzēts izklāstīt skalāra diferenciālvienādojuma gadījumam, klausītāju brīdinot, ka iegūtie rezultāti spēkā arī vektoriālam gadījumam, vienīgi tad pierādījumos parādās tehniskas detaļas, kuras nepieredzējušam klausītājam varētu aizsegt jautājuma būtību. Peano teorēmas formulējums, pierādījums nav iespējams, ja klausītāji nav matemātiskās analīzes kursā iepazīstināti ar Arcela teorēmu. Jēdziens par Lipšica nosacījumu, konstatējums, ka Lipšica nosacījums ir spēkā, ja diferenciālvienādojuma labajai pusei $f(t, x)$ eksistē nepārtraukts atvasinājums pēc x. Te būtu arī lietderīgi pastāstīt, ka vektoriālā gadījumā šis rezultāts ir spēkā, ja Lipšica nosacījums izpildās izliektā apgabalā, tā pievēršot studējošo uzmanību matemātikā fundamentālajam izliektības jēdzienam. Košī problēmas ekvivalence integrālvienādojumam. Teorēma par Košī problēmas atrisinājuma lokālo unitāti, tās pierādījumam tradicionāli lietota atsauce uz vienīga nekustīgā punkta eksistenci sapiedējattēlojumam. Jēdziens par Koši problēmas atrisinājuma atkarību no parametriem diferenciālvienādojuma labajā pusē vai sākuma nosacījumos, tās praktiskā nozīmība lietojumos. Sakars starp parametriem diferenciālvienādojuma labajā pusē un sākuma nosacījumos, to pārneses iespēja. Formulējums teorēmai par atrisinājuma nepārtraukto atkarību no parametriem diferenciālvienādojuma labajā pusē vai sākuma nosacījumos. Formulējums teorēmai par atrisinājuma nepārtraukto diferencējamību pēc parametriem diferenciālvienādojuma labajā pusē vai sākuma nosacījumos. Šo teorēmu pierādījumus laika trūkuma dēļ, kā arī tādēļ lai klausītāju nenogurdinātu ar vienmuļu tehniku (matemātiskās analīzes definīciju un Gronuola lemmas lietojumi) nāktos izlaist.

5. Aizklātā formā uzdoti parastie pirmās kārtas diferenciālvienādojumi, to singulārās līnijas un singulārie atrisinājumi.

Aizklātā formā uzdota parastā pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināmības jautājumu analīze un praktiskās risināšanas metodes nepieciešamas sakarā ar kārtas pazemināšanas metožu vēlāku lietojumu augstākas kārtas parastajiem diferenciālvienādojumiem. Vienlaicīgi šis jautājumu loks pilnveido izpratni par 2. punktā aplūkotajiem diferenciālvienādojuma integrāllīniju izturēšanās jautājumiem. Teorētiskai daļai nepieciešama matemātiskās analīzes kursā pierādāmā teorēma par aizklātas funkcijas eksistenci un atvasinājuma izteikšanu. Praktiskajiem darbiem nozīmīga ir diferenciālvienādojuma atrisinājumu iegūšana ar parametra metodi, tā pieradinot pie diferenciālvienādojumu atrisinājumu parametriskās formas. Singulāro līniju un singulāro atrisinājumu iegūšanai atkal izmantojama augstāk pieminētā matemātikas analīzes kursā pierādāmā teorēma. Svarīgi apzināties, ka ne katra diferenciālvienādojuma singulārā līnija ir diferenciālvienādojuma singulārais atrisinājums. Ja laiks atļauj, šajā studiju kursa programmas punktā varētu arī iztirzāt apliecējas jēdzienu.

6. Augstākas kārtas parasto diferenciālvienādojumu kārtas pazemināšanas metodes.

Šim jautājumu lokam pamatā ir praktisks raksturs, tas paredzēts praktisko darbu nodarbībām. Aplūkojamas vienkāršākās kārtas pazemināšanas metodes - iespēja izteikt neatkarīgo argumentu, nezināmo funkciju, homogenitāte attiecībā pret nezināmo funkciju un tās atvasinājumiem, vispārinātā homogenitāte, iespēja sakatīt kādu lielumu atvasinājumus un veikt atbilstošu mainīgo maiņu. Kā likums šie uzdevumi reducējas uz aizklātā formā uzdotu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu, kuru atrisinājumi iegūstami ar iepriekšējā punktā aplūkoto parametra metodi.

7. Lineāru parasto diferenciālvienādojumu un sistēmu vispārīgā atrisinājuma iegūšana.

Jautājumu loks ieņēma tradicionāli nozīmīgu vietu agrāk lasītajos diferenciālvienādojumu kursos, mūsdienās tā galvenā nozīme ir parādīt studējošajiem lineārās algebras un lineāro parasto diferenciālvienādojumu teorijas saistību. Tādēļ jautājumu izklāstā vajadzētu aprobežoties ar vispārīgajiem principiem atstājot malā daudzu pierādījumu un algoritmu pamatojumu tehniskās detaļas. Ideālā gadījumā lekcijās varētu izklāstīt tikai teorētiskos jautājumus attiecībā uz pirmās kārtas lineāro parasto diferenciālvienādojumu sistēmām, teorijas lietojumus augstākas kārtas lineāriem parastajiem diferenciālvienādojumiem atstājot pilnīgi praktisko darbu ziņā. Diemžēl klausītāju uztvere vēl 3. studiju semestrī varētu neatbilst šādai pieejai, tādēļ galīgais lēmums būtu jāpieņem studiju kursa aprobācijas gaitā. Lineārs nehomogēns parastais augstākas kārtas parastais diferenciālvienādojums un lineāra nehomogēna parasto pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēma un tiem atbilstošais lineārais homogēnais parastais augstākas kārtas parastais diferenciālvienādojums un lineārā homogēnā parasto pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēma. Atrisinājumu lineārā atkarība un neatkarība, Vronska determinants, tā īpašības, fundamentālā atrisinājuma sistēma. Homogēnā vienādojuma atrisinājumi kā lineāra telpa. Vispārīgā atrisinājuma struktūra, konstanšu variācijas metode. Minētie lineārie diferenciālvienādojumi un lineāro diferenciālvienādojumu sistēmas ar konstantiem koeficientiem, to vispārīgo atrisinājumu iegūšana, analizējot gadījumus attiecībā uz harakteristiskā vienādojuma īpašvērtību kopumu, partikulāro atrisinājumu piemeklēšana nehomogēnajiem diferenciālvienādojumiem ar kvazilineāru saskaitāmo veidotu labo pusi. Tālākā materiāla izpratnē svarīga ir diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

redukcija kanoniskā formā ar nesingulāras matricas P palīdzību, lietojot mainīgo maiņu $x = Py$. Noslēdzot šo sadaļu būtu demonstrējama arī Eilera diferenciālvienādojuma risināšana, kura būs nozīmīga **Matemātiskās fizikas vienādojumiem** veltītos kursos.

8. Otrās kārtas lineāro parasto diferenciālvienādojumu analītiskās un kvalitatīvās metodes.

Lineāra homogēna otrās kārtas diferenciālvienādojuma

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

redukcija formā

$$z'' + Q(t)z = 0,$$

lietojot mainīgo maiņu $x = \alpha(t)z$. Jāsaprot, ka, šim diferenciālvienādojumam pazeminot kārtu, iegūstam Rikkati diferenciālvienādojumu. Praktiskai risināšanai nozīmīga būtu Ostrogradska - Liuvila formula, bet laika trūkuma dēļ visticamāk tās izvedums nebūs iespējams. Šis diferenciālvienādojums ir pateicīgs (un arī ļoti nozīmīgs) diferenciālvienādojumu kvalitatīvās teorijas demonstrējumam. Būtu pierādāma Šturma teorēma un no tās izrietošie secinājumi. Šturma teorēmas pierādīšanai nepieciešamās atrisinājuma nuļļu īpašības arī pašas par sevi ir interesanta ilustrācija diferenciālvienādojumu kursā.

9. Robežproblēmu atrisināmības īpatnību demonstrēšana uz parastā otrās kārtas lineāra diferenciālvienādojuma bāzes, jēdziens par Šturma - Liuvila problēmu.

Šī būtībā ir vienīgā tēma studiju kursā, kur studējošie tiek iepazīstināti ar robežproblēmām. Dirihlē, Neimana un jaukta veida problēmas demonstrējums diferenciālvienādojumam

$$x'' + \lambda x = 0.$$

Situācijas atšķirības no Košī problēmas komentēšana. Īpašvērtības un īpašfunkcijas jēdziens, to vienkāršākās īpašības (bez pierādījuma). Grīna funkcijas jēdziens. Lineāra otrās kārtas diferenciālvienādojuma robežproblēmas ar homogēniem robežnosacījumiem atrisinājuma izteikšana ar Grīna funkcijas palīdzību. Lineāra otrās kārtas diferenciālvienādojuma robežproblēmas ar nehomogēniem robežnosacījumiem atrisinājuma izteikšana. Nobeidzot šo tēmu, varētu arī demonstrēt nelineāras robežproblēmas redukciju uz integrālvienādojumu.

10. Rindu izmantošana otrās kārtas lineāra parastā diferenciālvienādojuma risināšanai.

Šis tālākajām studijām svarīgais jautājums būtu aplūkojams piemērā, risinot Besseļa diferenciālvienādojumu. No matemātikas zinātnes viedokļa kopumā nozīmīgi arī akcentēt situāciju diferenciālvienādojuma atrisināmībā atkarībā no tā vai diferenciālvienādojuma parametrs ir vesels skaitlis vai no vesela skaitļa atšķirīgs reāls skaitlis. Problēmas varētu izraisīt apstāklis, ka matemātiskās analīzes kursos vēl nebūs iztirzāts jautājums par nosacījumiem iespējai rindu diferencēt pa locekļiem un vienmērīgai iegūto rindu konverģencei.

11. Autonomas diferenciālvienādojumu sistēmas jēdziens, trajektorijas un to veidi.

Autonoma diferenciālvienādojumu sistēma, sakars starp autonomām un neautonomām diferenciālvienādojumu sistēmām. Aplūkojamajām autonomajam sistēmām tiek pieņemts, ka diferenciālvienādojuma labā puse ir nepārtraukti diferencējama. Fāzu plaknes un trajektorijas jēdzieni. Trajektoriju veidi - parastas, slēgtas, stacionāras. Vēlams demonstrēt arī specifiskās trajektoriju īpašības plaknē, plaknes topoloģiskās īpašības izmantojošo **Bendiksona maisu**. Pēdējā ilustrācija vēlreiz klausītājiem akcentēs Koši problēmas atrisinājuma unitāti nepārtraukti diferencējamas diferenciālvienādojuma labās puses gadījumā.

12. Divu pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmas trajektoriju izturēšanās stacionārā punkta apkārtnē.

Sākumā tiek aplūkota lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu sistēma, to reducējot, kā mācīts 7.punktā, kanoniskā formā, analizēts stacionārais punkts - koordinātu sākuma punkts. Praktiskajos darbos veltāma uzmanība trajektoriju izturēšanās attēlošanai stacionārā punkta apkārtnē, veicams maksimāli pilnīgs pētījums. Patvaļīgas sistēmas gadījumā akcentējams, ka, neierobežojot vispārību, var uzskatīt par stacionāro punktu koordinātu sākuma punktu. Atbilstošā teorēma formulējama bez pierādījuma. Praktiskajiem darbiem atbilstošajā patstāvīgajā darbā būtu nepieciešams studējošajiem izpētīt, uzzīmējot trajektorijas, vairākas sistēmas, kurām ir daži stacionārie punkti.

13. Vektoru lauka izmantošana autonomu sistēmu pētīšanā.

Vektoru lauka pagrieziens gar līkni, tā īpašības, stacionārā punkta indekss, indeksu aditivitāte. Šis jautājums kalpo kā skaists ilustratīvs materiāls dažādu matemātikas apakšnozaru savstarpējai mijiedarbībai. Turklāt pēc novērojuma, ka vektoru lauka pagrieziens pa slēgtu līkni ir 0 (protams, ja tās iekšienē nav nulles vektora), studējošajiem pārsteidzoši konstatēt, ka vektoru lauka pagrieziens gar slēgtu trajektoriju ir 1.

14. Bola-Brauera teorēma un tās lietojumi.

Bola - Brauera teorēmas formulējums un pierādījums, izmantojot Špernera lemmu. Pierādījumā studējošajiem interesants ir arī lodes homeomorfais attēlojums trijstūrī. Bola - Brauera teorēmas pierādījumu demonstrē vienkāršos lietojumos attiecībā uz autonomu sistēmu trajektoriju īpašībām.

15. Atrisinājuma stabilitātes jēdziens un stabilitātes izpētes metodika.

Jautājumu izklāsts pamatā attiecībā uz autonomu sistēmu triviālā atrisinājuma stabilitāti, paskaidrojot, ka vispārīgais gadījums bez problēmām uz aplūkojamo reducējams. Stabilitātes jēdziena demonstrējums vienkāršos piemēros. Stabilitāte Ļapunova nozīmē, asimptotiskā stabilitāte, precīzas definīcijas. Funkcijas atvasinājuma sakaņā ar sistēmu jēdziens (būs nepieciešams arī 16.punktā), Ļapunova funkcijas jēdziens. Ļapunova teorēmu par stabilitāti un asimptotisko stabilitāti pierādījums. Piemēri. Teorēma par stabilitāti pēc lineārā tuvinājuma (visticamāk bez pierādījuma), tās praktiski lietojumi praktisko darbu nodarbībās.

16. Pirmintegrāļi to īpašības un izmantošana.

Pirmintegrāļa jēdziens. Pamatā jautājums izklātāms autonomām sistēmām, paskaidrojot sakaru ar neutonomu sistēmu gadījumu. Pazīme tam, ka patvaļīga funkcija ir autonomas sistēmas pirmintegrālis, pirmintegrāļu īpašības, atkarība un neatkarība, neatkarīgu pirmintegrāļu eksistence. Pirmintegrāļu izmantošana. Tā kā daži teorēmu pierādījumi balstās uz Koši problēmas nepārtrauktās atkarības teorēmām, kuras 4. punktā ir pieminētas tikai garām ejot, tad, acīm redzot, arī šie pierādījumi ir izlaižami. Praktiskajos darbos pirmintegrāļi izmantojami nelineāru sistēmu risināšanā, pamatā tos pārveidojot simetriskā formā un izmantojot proporcijas pamatīpašību, veidojot integrējamās kombinācijas. Jautājums par pirmintegrāļiem iezīmē pāreju uz matemātikas bakalaura studiju programmas diferenciālvienādo- jumu bloka obligātās daļas otru studiju kursu, kurš veltīts parciālajiem diferenciālvienādojumiem.

3. Parciālo diferenciālvienādojumu sadaļa

3.1. Vispārīgie apsvērumi

Kurss iepazīstina klausītājus ar parciālo diferenciālvienādojumu teorijas atsevišķiem jautājumiem. No pirmās kārtas parciālajiem diferenciālvienādojumiem galvenā vērība tiek pievērsta kvazilineārajam pirmās kārtas parciālajam diferenciālvienādojumam, kurš nepieciešams matemātiskās fizikas vienādojumu klasifikācijai. Uz šo diferenciālvienādojumu bāzes tiek aplūkota arī parciālo diferenciālvienādojumu atrisinājumu ğeometriska interpretācija un Koši problēma parciālajiem diferenciālvienādojumiem, akcentējot parciālo diferenciālvienādojumu specifiku šajā jomā. Vienlaicīgi te parādās arī aplūkojamo objektu saistība ar autonomām parasto diferenciālvienādojumu sistēmām. Tālāk tiek veikta gandrīz lineāro otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu (matemātiskās fizikas vienādojumu) klasifikācija un redukcija kanoniskā formā, fiksējot trīs tālāk aplūkojamo parciālo diferenciālvienādojumu klases. Tālāk seko fizikālo procesu aplūkojums, kurš pie šīm parciālo diferenciālvienādojumu klasēm noved no cita skatu punkta, formulētas nozīmīgākās problēmas. Tālākajā kursa gaitā klausītājs tiek iepazīstināts ar vienkāršākajiem šo problēmu risināšanas gadījumiem. Kursam studējošie jāsagatavo bakalauru studiju programmas izvēles daļas kursu apgūšanai.

Rezumējot teikto,kursā izdalāmi sekojošie posmi:

1) lineārs homogēns un kvazilineārs pirmās kārtas parciālais diferenciālvienādojums, ğeometriskā interpretācija un saistība ar autonomām parasto diferenciālvienādojumu sistēmām,

2) Koši problēmas piemērs pirmās kārtas parciālajam diferenciālvienādojumam,

3) gandrīz lineāro otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu klasifikācija un redukcija kanoniskā formā,

4) stīgas svārstības vienādojuma izvedums, tā problēmas, citi radniecīgi fizikālie procesi,

5) siltuma vadīšanas vienādojuma izvedums, tā problēmas, citi radniecīgie fizikālie procesi,

6) stacionārie procesi, Laplasa un Puasona vienādojumi, to problēmas,

7) matemātiskās fizikas problēmu superpozīcijas princips, jēdziens par to korektību,

8) Koši problēma hiperboliska tipa vienādojumam, Dalambēra formula, tās interpretācija,

9) jaukta veida problēma hiperboliska tipa vienādojumam,

10) jaukta veida problēma paraboliska tipa vienādojumam,

11) paraboliska tipa vienādojuma automodeļu atrisinājumu iegūšana,

12) harmonisko funkciju īpašības, Laplasa vienādojuma fundamentālie atrisinājumi plaknē un telpā,

13) robežproblēmu risināšana Laplasa vienādojumam riņķī, Puasona integrālis.

Redzams, ka izdalīto tēmu skaits ir mazāks par kursam atvēlēto lekciju skaitu, bet jāņem vērā, ka šajā kursā ir mazāk praktisko darbu nodarbību un ne visām uzskaitītajām tēmām būs iespējams atvēlēt pilnu praktisko darbu nodarbību, tādēļ lekcijas bagātīgi jāilustrē ar praktiskiem piemēriem, nereti tajās demonstrējot arī uzdevumu risināšanu. Rezultātā ārpus šīs programmas palikuši daudzi tradicionāli **Matemātiskās fizikas kursā** lasīti jautājumi, piemēram, Grīna funkcijas lietojums Laplasa vienādojuma robežproblēmām, potenciālu teorijas elementi. Tomēr 4. semestrī studējošo priekšzināšanas arī neļauj šos jautājumus izklāstīt, turklāt kursa pārblīvēšana ar grūti izprotamu materiālu ievērojami mazinātu studējošo vēlmi specializēties ar diferenciālvienādojumu lietojumiem saistītos virzienos.

3.2. Kursa satura apraksts

1. Lineārs homogēns un kvazilineārs pirmās kārtas parciālais diferenciālvienādojums, ģeometriskā interpretācija un saistība ar autonomām parasto diferenciālvienādojumu sistēmām.

Šis jautājumu loks būtībā ir iepriekšējā kursa 16.punkta turpinājums. Svarīga ir parciālajiem diferenciālvienādojumiem atbilstošā autonomā sistēma, t.s. harakteristiskā sistēma, uz kuras risināšanu reducējama vispārīgā atrisinājuma iegūšana. Svarīgi ir saprast sakaru starp parciālā diferenciālvienādojumu atrisinājumu noteikto virsmu - integrālvirsmu, un virsmu, kuras veido harakteristiskās sistēmas trajektorijas - harakteristikas. Šīs virsmas sakrīt.

2. Košī problēmas piemērs pirmās kārtas parciālajam diferenciālvienādojumam.

Košī problēma tiek aplūkota divu neatkarīgo argumentu gadījumā kvazilineāram pirmās kārtas parciālajam diferenciālvienādojumam ar nepārtraukti diferencējamiem koeficientiem, kad tās formulējums ģeometriski ir šāds - atrast virsmu, kura iet caur doto līniju. Jāapzinās, ka Košī problēmas atrisinājuma unitātes nav, ja šī līnija ir harakteristika. Tas ir pazīstamās Kovaļevskas teorēmas speciālgadījums. Vajadzētu formulēt arī Košī problēmu parciālam diferenciālvienādojumam vispārīgā gadījumā, arī Kovaļevskas teorēmu, protams bez pierādījuma. Praktiskai integrālvirsmas - Košī problēmas atrisinājuma atrašanai lietojama līnijas vienādojuma izteikšana parametriskā formā, tā ievietošana pirmintegrāļos un parametra izslēgšana. Šī metode labi demonstrē dabas dialektikas likumu - nolieguma noliegumu.

3. Gandrīz lineāro otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu klasifikācija un redukcija kanoniskā formā.

Divu neatkarīgo argumentu gadījumā redukcija kanoniskā formā tiek veikta ar jau no parastajiem diferenciālvienādojumiem pazīstamu paņēmienu (8.punkts) - veicot mainīgo maiņas, atbrīvoties no pēc iespējas vairākiem locekļiem diferenciālvienādojuma pierakstā. Realizējot šo ideju, rodas sarežģījumi, kuri noved pie aplūkojamās diferenciālvienādojumu klases iedalījuma hiperboliska, paraboliska un eliptiska tipa vienādojumos. Patvaļīga neatkarīgo argumentu skaita gadījumā šī klasifikācija un kanonisko formu izskats tiek iegūts pēc analoģijas ar situāciju kvadrātisko formu redukcijā algebrā.

4. Stīgas svārstības vienādojuma izvedums, tā problēmas, citi radniecīgi fizikālie procesi.

Kā hiperboliskā tipa vienādojuma paraugs tradicionāli tiek izvests stīgas svārtības vienādojums. Tam pievienojot fizikāli interpretējamus sākuma un robež- nosacījumus iegūstam dažādas problēmas. Līdzīgi aplūkojam arī stieņa gare- nisko svārstību, membrānas svārstību, viļņu, u.tml. svārstību procesus, kurus apraksta hiperboliska tipa vienādojumi ar papildus nosacījumiem.

5. Siltuma vadīšanas vienādojuma izvedums, tā problēmas, citi radniecīgie fizikālie procesi.

Kā paraboliskā tipa vienādojuma paraugs tradicionāli tiek izvests siltuma vadīšanas vienādojums. Jāpiebilst, ka šī vienādojuma izvedums atšķiras viendimensiju un daudzdimensiju gadījumos. Uz šīm atšķirībām vēlams vērst klausītāju uzmanību. Tam pievienojot fizikāli interpretējamus sākuma un robežnosacījumus iegūstam dažādas problēmas. Līdzīgi aplūkojam arī difūzijas u.tml. procesus. Jāatzīmē, ka 4. un 5.punktā minēto vienādojumu izvedumam nepieciešama samērā triviāla lemma, kura ļauj ar integrāļu palīdzību uzrakstītu sakarību pārrakstīt kā diferenciālvienādojumu. Abi šie jautājumi ir arī pateicīgi, lai lekcijā kaut virspusēji klausītājus iepazīstinātu ar matemātiskās modelēšanas galvenajiem principiem.

6. Stacionārie procesi, Laplasa un Puasona vienādojumi, to problēmas.

Aplūkojot stacionāro siltuma vadīšanas procesu nonākam pie Laplasa vai Puasona vienādojumiem, tie ir eliptiska tipa vienādojumi. Tā kā Puasona vienādojumu, līdzīgi kā tas parasto diferenciālvienādojumu gadījumā bija ar Rikkati diferenciālvienādojumu, ar kāda tā partikulārā atrisinājuma palīdzību iespējams reducēt uz Laplasa vienādojumu, tad nozīmīgi ir aplūkot Laplasa vienādojumu. Laplasa vienādojuma atrisinājumi tiek saukti par harmoniskajām funkcijām, to īpašības paredzēts aplūkot vēlāk, 12. punktā. Laplasa vienādojuma robežproblēmu fizikāla interpretācija, svarīgs ir arī klasiskais Adamāra piemērs, kurš rāda, ka Košī problēma eliptiska vienādojumiem var nebūt korekta.

7. Matemātiskās fizikas problēmu superpozīcijas princips, jēdziens par to korektību.

Būtībā ar šajā punktā iekļauto problemātiku esam saskārušies jau 4. - 6. punktā. Ņemot vērā jautājumu nozīmību, tai akcentējama īpaša uzmanība, jo arī tālākajos punktos, praktiski risinot, dažādas matemātiskās fizikas problēmas tie būs aktuāli. Tātad rūpīgi aplūkojama matemātiskās fizikas problēmu sadalīšana pamatproblēmās, ar paskaidrojošiem piemēriem sniedzama korektības definīcija. Jāpievērš uzmanība arī bieži vien studējošo īsti nenovērtētam un neizprastam jautājumam par matemātiskās fizikas problēmas atrisinājuma jēdzienu. Svarīgi ir definēt funkciju klasi, kurai jāpieder meklējamajam atrisinājumam.

8. Košī problēma hiperboliska tipa vienādojumam, Dalambēra formula, tās interpretācija.

Košī problēmu aplūkosim viendimensiju gadījumā. Dalambēra formulas izvedums, tās lietošana praktiskajos darbos konkrētu problēmu risināšanā. Ja laiks atļauj, varētu aplūkot arī hiperboliskā tipa vienādojuma problēmas ar sākuma nosacījumiem uz pusass.

9. Jaukta veida problēma hiperboliska tipa vienādojumam.

Mainīgo atdalīšanas metodes lietojums jaukta veida problēmai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x), \quad u(t,0) = u(t,l) = 0$$

balstās uz izpratni par Šturma - Liuvila problēmu, un iespēju izvirzīt funkcijas rindā pēc Šturma - Liuvila problēmas īpašfunkcijām - šajā gadījumā tas ir izvirzījums Furjē rindā, kas klausītājiem pazīstams no matemātiskās analīzes kursiem. Metodiski šie jautājumi jau sagatavoti, aplūkojot parasto diferenciālvienādojumu kursa punktus 9. un 10.. Pirmo reizi lietojot mainīgo atdalīšanas metodi vērība jāpievērš arī iespējai iegūto rindu atvasināt pa locekļiem un nepieciešamajam vienmērīgās konverģences pamatojumam. Mainīgo atdalīšanas metodes lietojums nehomogēnai jaukta veida problēmai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x), \quad u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t).$$

10. Jaukta veida problēma paraboliska tipa vienādojumam. Mainīgo atdalīšanas metodes lietojums jaukta veida problēmām

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u(t,0) = u(t,l) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t).$$

Praktisko darbu nodarbībās būtu lietderīgi aplūkot arī 9. un 10. punktos minētās problēmas ar cita veida robežnosacījumiem.

11. Paraboliska tipa vienādojuma automodeļu atrisinājumu iegūšana

Tā kā auditorijas priekšzināšanu trūkuma dēļ problemātiski aplūkot Koši problēmu paraboliskā tipa vienādojumam, lietderīgi uzmanību veltīt speciālam gadījumam

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,x) = 0, x < 0, \quad u(0,x) = 1, x > 0,$$

kuru ar jaunu mainīgo, t.s. automodeļu mainīgo $z = \frac{x}{2\sqrt{(t)}}$ iespējams reducēt uz robežproblēmu parastam diferenciālvienādojumam. Šis piemērs demonstrē bieži sastopamo situāciju matemātiskās fizikas problēmu risināšanā - redukciju uz parastā diferenciālvienādojuma robežproblēmu. Turklāt iegūtajā atrisinājumā redzams arī no varbūtību teorijas kursa pazīstamais kļūdu integrālis $erf(z)$.

12. Harmonisko funkciju īpašības, Laplasa vienādojuma fundamentālie atrisinājumi plaknē un telpā.

Vismaz vienu lekciju lietderīgi veltīt harmonisko funkciju īpašībām. Kā harmonisko funkciju piemērus vajadzētu minēt arī Laplasa vienādojuma fundamentālos atrisinājumus plaknē un telpā, tā akcentējot atšķirības šajās varietātēs.

13. Robežproblēmu risināšana Laplasa vienādojumam riņķī, Puasona integrālis.

Kursa noslēgumā varētu aplūkot robežproblēmas Laplasa vienādojumam riņķī. Aplūkojot iekšējās un ārējās robežproblēmas, parādās līdzības starp iekšējās Dirihlē problēmas un ārējās Neimana problēmas, kā arī ārējās Dirihlē problēmas un iekšējās Neimana problēmas atrisinājumu izturēšanos. Te kārtējo reizi tiek demonstrēta mainīgo atdalīšanas metode, turklāt šoreiz polārajās koordinātās. Praktiskajos darbos varētu arī piedāvāt robežproblēmu risināšanu Laplasa vienādojumam taisnstūrī.