Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
1. un 2.lekcija

1. Robežproblēmas jēdziens, to klasifikācija

1.1. Robežproblēmas definīcija

Piedāvāsim diferenciālvienādojuma robežproblēmas definīciju.

Aplūkosim vektoriālā formā pierakstītu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

kur $f : J \times G \to R^n$, J ir sakarīga reālās ass R apakškopa, $G \subset R^n$, un fiksēsim kādu apgabalā J definētu vektorfunkciju klasi $F(J, R^n)$. Tai piederošu vektorfunkciju x, kuras definīcijas apgabalā vienādojuma (1) abām pusēm ir jēga un kura to pārvērš identitātē, sauksim par šīs diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumu.

Definīcija 1.1. Par diferenciālvienādojumu sistēmas (1) robežproblēmu sauksim uzdevumu atrast (1) atrisinājumu, kurš pieder iepriekš uzdotās vektorfunkciju klases $F(J, R^n)$ apakškopai H.

Ja diferenciālvienādojumu sistēmas (1) labā puse ir formā

$$f(t, x) = A(t)x + b(t),$$

kur $A(t)$ ir $n \times n$ matrica ar elementiem $a_{ij} : J \to R$, $b : J \to R^n$, un H ir lineāra vektorfunkciju klases varietāte, tad robežproblēmu sauc par **lineāru**. Ja kaut viena no šīm divām linearitātes prasībām neizpildās, tad robežproblēmu sauc par **nelineāru**.

Piemērs 1.2. Pieņemsim, ka f ir nepārtraukta vektorfunkcija, $t_0 \in J$ un

$$H = \{x \in C_1(J, R^n) : x(t_0) = x_0\}.$$

Saskaņā ar definīciju 1.1., tā ir robežproblēma, kura atgādina labi pazīstamo Košī problēmu. Atšķirībā no Košī problēmas, kur diferenciālvienādojumu sistēmai (1) ar sākuma nosacījumu

$$x(t_0) = x_0$$

atrisinājums x eksistē, bet tas var nebūt turpināms visā apgabalā J, robežproblēmas atrisinājumam jābūt definētam visā apgabalā J.

Vingrinājums 1.3. Pārliecinieties, ka skalāra diferenciālvienādojuma robežproblēmai

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

atrisinājums neeksistē, ja $J = [0, a], \quad a \geq 1$.

Mēs robežproblēmas aplūkosim arī diferenciālvienādojumu sistēmas (1) speciālgadījumam - n-tās kārtas diferenciālvienādojumam

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{2}$$

kur $g : J \times R^n \to R$.

Parasti uzskatīsim, ka (1) un (2) labās puses ir nepārtrauktas, meklējamie sistēmas (1) atrisinājumi pieder funkciju klasei $C_1(J, R^n)$, bet vienādojuma (2) atrisinājumi - funkciju klasei $C_n(J, R)$.

Sekojošais vingrinājums parādīs, ka ir ļoti svarīgi uzrādīt funkciju gluduma klasi, kurai jāpieder meklētajam robežproblēmas atrisinājumam,.

Vingrinājums 1.4. Pārliecinieties, ka robežproblēmai

$$x'' = 2(x')^3, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0$$

nav atrisinājuma, kurš piederētu funkciju klasei $C_2([0, 1], R)$, bet atrisinājums $x(t) = \sqrt{(1 - t)}$ ir nepārtraukts apgabalā $[0, 1]$ un katram $\sigma \in (0, 1)$ šī atrisinājuma sašaurinājums ir divreiz nepārtraukti diferencējams apgabalā $[0, \sigma]$.

1.2. Robežproblēmu klasifikācija

Dosim īsu pielietojumos biežāk sastopamo robežproblēmu klasisfikāciju.

Pieņemsim, ka $t_1, t_2, \ldots, t_n \in J, \quad c \in R^n$ un aplūkosim nosacījumu

$$x_i(t_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Definīcija 1.5. Robežproblēmu (1), (3) sauc par **Košī - Nikoleti problēmu**.

Piebildīsim, ka Košī - Nikoleti problēma vispārina Košī problēmu, jo varam aplūkot tās speciālu gadījumu, kad

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n.$$

Pieņemsim, ka

$$m \in \{2, 3, \ldots, n\}; \quad t_1, t_2, \ldots, t_m \in J, \quad -\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty;$$

$$k = 1, 2, \ldots, m; \quad n_k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad \sum_{k=1}^{m} n_k = n;$$

$$j = 1, 2, \ldots, n_k; \quad c_{jk} \in R,$$

un aplūkosim nosacījumu

$$x^{(j-1)}(t_k) = c_{jk}, \tag{4}$$

kur $x^{(0)}$ apzīmē pašu funkciju x.

Definīcija 1.6. Robežproblēmu (2), (4) sauc par **Valle - Pussēna problēmu**.

Definīcija 1.7. Valle - Pussēna problēmas speciālu gadījumu, kad

$$m = n > 2,$$

sauc par **interpolācijas tipa robežproblēmu**.

Nozīmīgu vietu robežproblēmu vidū ieņem **divpunktu robežproblēmas**, kurās nosacījumi diferenciālvienādojuma atrisinājumiem tiek uzdoti tieši divos atšķirīgos punktos $t_1, t_2 \in J$. Vispārīgā veidā diferenciālvienādojumu sistēmai (1) divpunktu robežproblēmas nosacījums pierakstāms šādi:

$$L(x(t_1), x(t_2)) = 0, \tag{5}$$

kur $L : R^{2n} \to R^n$. Ja L ir savu argumentu lineāra funkcija, tad saka, ka robežnosacījumi ir lineāri.

Speciāls lineāru robežnosacījumu veids ir

$$x(t_1) = x(t_2). \tag{6}$$

Definīcija 1.8. Robežproblēmu (1) , (6) sauc par **periodisku robežproblēmu**.

Diferenciālvienādojumam (2) robežnosacījumi (6) izskatās šādi:

$$x^{(i-1)}(t_1) = x^{(i-1)}(t_2), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ja diferenciālvienādojumu sistēma (1) ir autonoma vai arī tās labā puse ir periodiska ar periodu $T = |t_2 - t_1|$, tad, turpinot periodiskas robežproblēmas atrisinājumu, iegūst diferenciālvienādojumu sistēmas (1) periodisku atrisinājumu.

Diferenciālvienādojumu sistēmas (1) periodiska (ar doto periodu T) atrisinājuma atrašana saskaņā ar robežproblēmas definīciju arī ir robežproblēma, kuru, vispārīgi runājot, nevajadzētu jaukt ar tikko minēto periodisko robežproblēmu.

Otrās kārtas diferenciālvienādojumam

$$x'' = h(t, x, x') \tag{7}$$

biežāk sastopamie divpunktu robežnosacījumi ir šādi

$$x(t_1) = a_1, \quad x(t_2) = a_2; \tag{8}$$

$$x'(t_1) = a_1, \quad x'(t_2) = a_2; \tag{9}$$

$$x'(t_1) = a_1, \quad x(t_2) = a_2, \tag{10}$$

kur $a_1, a_2 \in R$.

Definīcija 1.9. Pēc analoģijas ar matemātiskās fizikas robežproblēmu nosaukumiem, robežproblēmu (7), (8) sauc par **Dirihlē problēmu**,

robežproblēmu (7), (9) sauc par **Neimana problēmu**,

robežproblēmu (7), (10) sauc par **jaukta veida problēmu**.

Atzīmēsim, ka Dirihlē problēma ir Valle - Pussēna problēmas speciāls gadījums, jaukta veida problēma ir Košī - Nikoleti problēmas speciāls gadījums, bet Neimana problēma nepārstāv nevienu no šīm divām augstāk minētajām robežproblēmu klasēm.

Piemērs 1.10. Vēsturiski viena no pirmajām aktuālajām nelineārajām parasto diferenciālvienādojumu robežproblēmām bija Dirihlē problēma diferenciālvienādojumam

$$x'' = -\frac{1}{2x}(1 + (x')^2).$$

Tā radās risinot pazīstamo variāciju rēķinu uzdevumu par brahistohronu - līkni $x(t)$, pa kuru materiāls punkts pārvietojoties vertikālā plaknē gravitācijas spēku ietekmē, no punkta ar koordinātām (t_1, a_1) visīsākajā laikā nonāk punktā ar koordinātām (t_2, a_2).

Diferenciālvienādojumu sistēmai (1) lineārus robežnosacījumus iespējams pierakstīt sekojošā formā:

$$A_1 x(t_1) + A_2 x(t_2) + \ldots + A_m x(t_m) = c, \tag{11}$$

kur $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ir $n \times n$ matricas ar reāliem, konstantiem elementiem, $m \leq n, \quad c \in R^n$. Šos robežnosacījumus ir dabīgi saukt par lineāriem m punktu robežnosacījumiem.

Vingrinājums 1.11. Pārliecinieties, ka, ja $m = n$ un A_k ir matricas, kuru visi elementi, atskaitot pirmās rindiņas k-to elementu ir nulles, tad iegūstam Koši - Nikoleti problēmas robežnosacījumus.

Vingrinājums 1.12. Pārliecinieties, ka, ja matricām A_k no nulles atšķirīgs ir tikai pirmās kolonas k-tais elements, tad iegūstam interpolācijas tipa robežproblēmas nosacījumus.

Visus iepriekš minētos robežnosacījumus vispārina robežnosacījums

$$\Phi(x) = 0,$$

kur Φ ir funkciju klasē, kurā meklējam robežproblēmas atrisinājumu, definēts vektorfunkcionālis.

No robežproblēmas definīcijas izriet arī iespējas formulēt robežproblēmas uz reālās pusass, visas reālās ass, galīgā vai bezgalīgā reālās ass apgabalā ar uzdotu kvalitatīvo izturēšanos (asimptotiku, oscilācijas un monotonitātes īpašībām,u.tml.).

2. Lineāras robežproblēmas

2.1. Eksistences un unitātes teorēmas

Aplūkosim robežproblēmu lineārai nehomogēnai diferenciālvienādojumu sistēmai

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{12}$$

ar lineāriem m punktu robežnosacījumiem (11), kur A ir $n \times n$ funkciju matrica ar apgabalā J definētiem nepārtrauktiem elementiem, bet b ir apgabalā J definēta nepārtraukta funkcija.

Reizē ar robežproblēmu (12),(11) aplūkosim arī atbilstošo lineāro homogēno robežproblēmu

$$x' = A(t)x, \tag{13}$$

$$A_1x(t_1) + A_2x(t_2) + \ldots + A_mx(t_m) = 0. \tag{14}$$

Teorēma 2.1. Robežproblēmai (12),(11) ir viens vienīgs atrisinājums tad un tikai tad, ja atbilstošajai lineārajai homogēnajai robežproblēmai (13),(14) ir tikai triviālais, ar nulli identiski vienādais atrisinājums.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $X(t)$ ir apgabalā J definēta diferenciālvienādojumu sistēmas (13) fundamentālā matrica. Tad diferenciālvienādojumu sistēmas (13) vispārīgais atrisinājums pierakstāms šādi:

$$x(t) = X(t)C,$$

kur C - patvaļīgs n-dimensiju vektors ar konstantām komponentēm. Ievedīsim apzīmējumu

$$D = A_1X(t_1) + A_2X(t_2) + \ldots + A_mX(t_m).$$

Ievietojot diferenciālvienādojumu sistēmas (13) vispārīgo atrisinājumu robežnosacījumos (14), iegūstam

$$DC = 0.$$

Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem, lineārajai homogēnajai robežproblēmai (13),(14) ir tikai triviālais atrisinājums, tādēļ

$$detD \neq 0. \tag{15}$$

Diferenciālvienādojumu sistēmas (12) vispārīgais atrisinājums uzrakstāms formā

$$x(t) = X(t)C + z(t), \tag{16}$$

kur z ir kāds diferenciālvienādojumu sistēmas (12) partikulārais atrisinājums. Izvēlēsimies vektoru C tā, lai (16) apmierinātu nosacījumu (11). Ievietojot (16) nosacījumā (11), iegūstam lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu attiecībā uz vektora C komponentēm

$$DC = c - A_1 z(t_1) - A_2 z(t_2) - \ldots - A_m z(t_m). \tag{17}$$

No (15) seko, ka lineāru algebrisku vienādojumu sistēmai (17) ir viens vienīgs atrisinājums $C^{[0]}$, tātad

$$x(t) = X(t)C^{[0]} + z(t)$$

ir robežproblēmas (12),(11) vienīgais atrisinājums.

Ja lineārajai homogēnajai robežproblēmai (13),(14) ir arī netriviāli atrisinājumi, tad neizpildās (15), tādēļ lineāru algebrisku vienādojumu sistēmai (17) un reizē ar to arī robežproblēmai (12),(11) vai nu atrisinājuma nav, vai arī to ir bezgalīgi daudz. Teorēma pierādīta.

Konkrētām robežproblēmām var formulēt efektīvākus atrisināmības un unitātes nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus.

Aplūkosim Dirihlē problēmu lineāram otrās kārtas vienādojumam

$$x'' = p(t)x' + q(t)x + r(t), \tag{18}$$

$$x(t_1) = A, \quad x(t_2) = B, \tag{19}$$

kur p, q, r ir nepārtrauktas funkcijas un $A, B \in R$.

Vienlaicīgi ar diferenciālvienādojumu (18) aplūkosim arī tam atbilstošo lineāro homogēno diferenciālvienādojumu

$$x'' = p(t)x' + q(t)x. \tag{20}$$

Teorēma 2.2. Robežproblēmai (18),(19) eksistē viens vienīgs atrisinājums tad un tikai tad, ja lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma (20) partikulārajam atrisinājumam x_1, kurš apmierina nosacījumus $x_1(t_1) = 0$, $x_1'(t_1) = 1$, izpildās nevienādība $x_1(t_2) \neq 0$.

Pierādījums. Reizē ar lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma (20) partikulāro atrisinājumu x_1 aplūkosim arī tā partikulāro atrisinājumu x_2, kurš apmierina nosacījumus

$$x_2(t_1) = 1, \quad x_2'(t_1) = 0.$$

Abi izvēlētie atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi, jo no tiem punktā t_1 sastādītais Vronska determinants ir atšķirīgs no nulles. Līdz ar to diferenciālvienādojuma (18) vispārīgais atrisinājums izsakāms sekojoši:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + z(t), \tag{21}$$

kur z ir kāds tā partikulārais atrisinājums. Lai noteiktu konstantes c_1, c_2, ievietosim izteiksmi (21) robežnosacījumos (19). Iegūstam divus lineārus algebriskus vienādojumus konstanšu c_1, c_2 noteikšanai:

$$c_1 x_1(t_1) + c_2 x_2(t_1) = A - z(t_1),$$

$$c_1 x_1(t_2) + c_2 x_2(t_2) = B - z(t_2).$$

Šīs lineāro algebrisko vienādojumu sistēmas galvenais determinants

$$D = x_1(t_1)x_2(t_2) - x_2(t_1)x_1(t_2) = -x_1(t_2)$$

saskaņā ar teorēmas nosacījumu ir atšķirīgs no nulles, tādēļ konstantes c_1, c_2 nosakāmas viennozīmīgi, līdz ar to arī robežproblēmai (18),(19) eksistē viens vienīgs atrisinājums.

No otras puses, ja atrisinājums robežproblēmai (18),(19) ir viens vienīgs, tad $D \neq 0$. Līdz ar to arī $x_1(t_2) \neq 0$. Teorēma pierādīta.

2.2. Grīna funkcija

Aplūkosim lineāro homogēno diferenciālvienādojumu (20) un lineārus homogēnus divpunktu robežnosacījumus

$$a_1 x(t_1) + b_1 x'(t_1) = 0, \quad a_2 x(t_2) + b_2 x'(t_2) = 0, \tag{22}$$

kur $a_i, b_i \in R; \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0; \quad i = 1, 2.$

Definīcija 2.3. Funkciju $G \in C([t_1, t_2] \times [t_1, t_2] \to R^n)$ sauksim par robežproblēmas (20), (22) **Grīna funkciju**, ja

(1) funkcijai $G(t,s)$ definīcijas apgabalā, izņemot taisni $t = s$, eksistē nepārtraukti atvasinājumi

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2},$$

(2) funkcija $G(t,s)$ kā argumenta t funkcija, ja vien $t \neq s$, apmierina vienādojumu (20) un robežnosacījumus (22),

(3)

$$\lim_{t \to s+} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} - \lim_{t \to s-} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = 1.$$

Pierādīsim Grīna funkcijas eksistences un unitātes teorēmu, kura vienlaicīgi dos algoritmu Grīna funkcijas praktiskai konstruēšanai.

Teorēma 2.4. Ja robežproblēmai (20), (22) eksistē tikai triviālais atrisinājums, tad tai eksistē viena vienīga Grīna funkcija.

Pierādījums. Pieņemsim, ka x_1 ir diferenciālvienādojuma (20) netriviāls atrisinājums, kurš apmierina pirmo no robežnosacījumiem (22), bet x_2 ir diferenciālvienādojuma (20) netriviāls atrisinājums, kurš apmierina otro no robežnosacījumiem (22). Šie atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi, jo pretējā gadījumā kādam $c \in R$, $\quad x_1 = cx_2$ un abi atrisinājumi pilnībā apmierina robežnosacījumus (22), kas saskaņā ar teorēmas nosacījumu nav iespējams.

Meklēsim Grīna funkciju sekojošā formā:

$$G(t,s) = u_1(s)x_1(t), \quad t_1 \leq t < s;$$

$$G(t,s) = u_2(s)x_2(t), \quad s < t \leq t_2,$$

piemeklējot funkcijas u_1, u_2 tā, lai funkcija G apmierinātu definīcijas 2.3. prasības.

Neatkarīgi no funkciju u_1, u_2 izvēles funkcija G apmierina definīcijas 2.3. pirmās divas prasības. Funkcijas G nepārtrauktības prasība kopā ar definīcijas 2.3. trešo prasību ļauj uzrakstīt divu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu funkciju u_1, u_2 noteikšanai:

$$u_2(s)x_2(s) - u_1(s)x_1(s) = 0, \quad u_2(s)x_2'(s) - u_1(s)x_1'(s) = 1. \qquad (23)$$

Šīs sistēmas galvenais determinants ir vienāds ar Vronska determinantu, kurš sastādīts no lineāri neatkarīgajiem diferenciālvienādojuma (20) atrisinājumiem x_1 un x_2, tātad atšķirīgs no nulles. Līdz ar to lineāro algebrisko vienādojumu sistēmai (23) atrisinājums u_1, u_2 eksistē un noteikts viennozīmīgi, turklāt tās ir nepārtrauktas funkcijas. Grīna funkcija konstruēta.

Lai pārliecinātos, ka tā ir vienīgā iespējamā Grīna funkcija, ievērosim, ka konstrukcijā vienīgā iespēja izvēlēties citu diferenciālvienādojuma (20) netriviālu atrisinājumu pāri ir ņemot x_1 vietā kx_1 un x_2 vietā lx_2, kur k, l ir kādas no nulles atšķirīgas konstantes. Atkārtojot iepriekšējos spriedumus un risinot lineāro algebrisku vienādojumu sistēmu (23), iegūstam jau atrasto Grīna funkciju. Teorēma pierādīta.

Nodaļā formulētās pēdējās divas teorēmas, kuras pierādāmas ar tiešu pārbaudi, parāda Grīna funkcijas lietojumu.

Teorēma 2.5. Ja robežproblēmai (20), (22) eksistē tikai triviālais atrisinājums, tad robežproblēmas (18), (22) vienīgais atrisinājums x izsakāms sekojoši:

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,s)r(s)ds.$$

Lineāro homogēno robežnosacījumu (22) vietā aplūkosim vispārīgākus nehomogēnos robežnosacījumus

$$a_1x(t_1) + b_1x'(t_1) = c_1, \quad a_2x(t_2) + b_2x'(t_2) = c_2, \tag{24}$$

kur $c_i \in R; \quad i = 1, 2.$

Teorēma 2.6. Ja robežproblēmai (20), (22) eksistē tikai triviālais atrisinājums, tad robežproblēmas (18), (24) vienīgais atrisinājums x izsakāms sekojoši:

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,s)r(s)ds + z(t),$$

kur z ir diferenciālvienādojuma (20) partikulārais atrisinājums, kurš apmierina robežnosacījumu (24).

Piebildīsim, ka gadījumā, ja esam ieguvuši divus diferenciālvienādojuma (20) partikulāros atrisinājumus x_1 un x_2, kuri nepieciešami Grīna funkcijas konstrukcijai, tā atrisinājuma z iegūšana nesagādā grūtības.