Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
3. un 4.lekcija

1. Kvazilineāras robežproblēmas atrisināmība

Aplūkosim robežproblēmu

$$x' = A(t)x + g(t, x) \tag{1}$$

$$A_1x(t_1) + A_2x(t_2) + \ldots + A_mx(t_m) = \phi(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p)), \tag{2}$$

kur A ir $n \times n$ matrica ar apgabalā J definētiem nepārtrauktiem elementiem, $g \in C(J \times R^n, R^n)$; $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ir $n \times n$ matricas ar konstantiem elementiem, $\phi \in C(R^{np}, R^n), t_s \in J, s = 1, 2, \ldots, \max(p, m)$. Pieņemsim, ka eksistē tādi skaitļi $M, \gamma \in (0, +\infty)$, ka izpildās

$$|g(t, x)| < M, \quad (t, x) \in J \times R^n,$$

$$|\phi(u)| < \gamma, \quad u \in R^{np}.$$

Stipro ierobežojumu dēļ, kuri uzlikti aplūkotajā robežproblēmā ietilpstošajām nelinearitātēm, to sauksim par **kvazilineāru robežproblēmu**.

Reizē ar robežproblēmu (1),(2) aplūkosim arī atbilstošo lineāro homogēno robežproblēmu

$$x' = A(t)x, \tag{3}$$

$$A_1x(t_1) + A_2x(t_2) + \ldots + A_mx(t_m) = 0. \tag{4}$$

Teorēma 3.1. Ja atbilstošajai lineārajai homogēnajai robežproblēmai (3),(4) ir tikai triviālais, ar nulli identiski vienādais atrisinājums, tad kvazilineārajai robežproblēmai (1),(2) eksistē atrisinājums.

Šīs teorēmas pierādījumam izdalīsim divas lemmas.

Lemma 3.2. Teorēma 3.1. ir spēkā, ja funkcija g pēc x apmierina lokālo Lipšica nosacījumu.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $X(t)$ ir apgabalā J definēta diferenciālvienādojumu sistēmas (3) fundamentālā matrica. Tad diferenciālvienādojumu sistēmas (3) vispārīgais atrisinājums pierakstāms šādi:

$$x(t) = X(t)C,$$

kur C patvaļīgs n-dimensiju vektors ar konstantām komponentēm. Ievedīsim apzīmējumu

$$D = A_1X(t_1) + A_2X(t_2) + \ldots + A_mX(t_m)$$

un tāpat kā teorēmas 2.1. pierādījumā parādīsim, ka

$$detD \neq 0.$$

Tātad matricai D eksistē apgrieztā matrica, kuras norma ir ierobežota. Ar $x(t, c)$ apzīmēsim diferenciālvienādojumu sistēmas (1) atrisinājumu, kurš apmierina nosacījumu

$$x(t_1) = c, \quad c \in R^n.$$

Tā kā funkcija g pēc x apmierina lokālo Lipšica nosacījumu, tad $x(t, c)$ ir nepārtraukta parametra funkcija, kura definēta visiem $t \in J, c \in R^n$. Lietojot konstantes variācijas metodi, iegūstam, ka $x(t, c)$ apmierina integrālvienādojumu

$$x(t, c) = X(t)c + \int_{t_1}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(s, x(s, c))ds.$$

Apzīmēsim šī integrālvienādojuma labās puses otro saskaitāmo ar $\tilde{g}(t, c)$. Viegli redzēt, ka $\tilde{g} \in C(J \times R^n, R^n)$ un kādam $N_0 \in (0, +\infty)$

$$|\tilde{g}(t, c)| \leq N_0, \quad (t, c) \in J \times R^n. \tag{5}$$

Tātad

$$x(t, c) = X(t)c + \tilde{g}(t, c). \tag{6}$$

Lai $x(t, c)$ apmierinātu nosacījumus (2), ievietojam tajos izteiksmi (6) un iegūstam

$$Dc = \phi_0(c), \tag{7}$$

kur

$$\phi_0(c) = \phi(x(t_1, c), x(t_2, c), \dots, x(t_p, c)) -$$
$$A_1\tilde{g}(t_1, c) - A_2\tilde{g}(t_2, c) - \dots - A_m\tilde{g}(t_m, c).$$

Parādīsim, ka vienādojumu sistēmai (7) eksistē atrisinājums. No (5) un teorēmas 3.1. nosacījuma seko, ka ϕ_0 ir nepārtraukta un ierobežota argumenta c vektorfunkcija. No (7), ievedot apzīmējumu $\phi_1(c) = D^{-1}\phi_0(c)$, iegūstam

$$c = \phi_1(c), \tag{8}$$

kur arī ϕ_1 ir nepārtraukta un ierobežota argumenta c vektorfunkcija. Lai pierādītu vienādojumu sistēmas (8) atrisināmību, definēsim nepārtrauktu telpas R^n attēlojumu sevī

$$\bar{c} = \phi_1(c), \quad c \in R^n.$$

Ja skaitlim $N_1 \in (0, +\infty)$ izpildās

$$|\phi_1(c)| < N_1, \quad c \in R^n,$$

tad attēlojums ϕ_1 lodi $\{c \in R^n : |c| \leq N_1\}$ attēlo sevī un, saskaņā ar Bola - Brauera teorēmu, šim attēlojumam eksistē nekustīgais punkts $c^{[0]}$. Tātad $c^{[0]} = \phi_1(c^{[0]})$, un funkcija $x(t, c^{[0]})$ ir robežproblēmas (1),(2) atrisinājums. Lemma pierādīta.

Lemma 3.3. Jebkurai funkcijai $g \in C(J \times R^n, R^n)$, kura apmierina teorēmas 3.1. nosacījumus, eksistē tāda funkciju virkne

$$r \to g_r, \quad g_r \in C(J \times R^n, R^n),$$

kurai piederošās funkcijas pēc x apmierina lokālo Lipšica nosacījumu un kuras robeža katrā ierobežotā $J \times R^n$ apakšapgabalā, ja $r \to +\infty$, ir funkcija g. Šīs virknes konverģence pie fiksēta $t \in J$ ir vienmērīga pēc x.

Pierādījums. Vienkāršības pēc lemmu pierādīsim tikai gadījumam, kad $n = 1$. Vispārīgajā gadījumā pierādījums atšķiras tikai ar tehniskām detaļām.

Fiksēsim $r \in \{1, 2, \dots\}$ un izvēlēsimies uz x ass režģi

$$x_k = \frac{k}{r}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Katrā nogrieznī $[x_k, x_{k+1}]$ pie fiksēta t aizvietosim g ar lineāru argumenta x funkciju tā, lai nogriežņa galapunktos funkcijas g un g_r sakristu.

Tātad
$$g_r(t,x)=g(t,x_k)+(g(t,x_{k+1}-g(t,x_k))r(x-x_k),$$
$$t\in J;\quad x\in[x_k,x_{k+1}];\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots.$$
Viegli pārliecināties, ka funkcijas g_r ir nepārtrauktas un pēc x apmierina lokālo Lipšica nosacījumu. Ja pārraksta pēdējo vienādību tā:

$$g_r(t,x)=g(t,x_k)(1-r(x-x_k))+g(t,x_{k+1})r(x-x_k),$$

tad viegli saskatīt funkciju g_r vienmērīgo ierobežotību. Beidzot, no funkcijas g vienmērīgās nepārtrauktības pēc katrā kompaktā apgabalā pie fiksēta t seko mums vajadzīgā konverğences vienmērība. Lemma pierādīta.

Teorēmas 3.1. pierādījums. Saskaņā ar lemmu 3.3. izvēlēsimies visā apgabalā $J\times R^n$ ierobežotu funkciju virkni $r\to g_r$. No lemmas 3.2. seko, ka katram $r\in\{1,2,\dots\}$ diferenciālvienādojumam

$$x'=A(t)x+g_r(t,x) \tag{9}$$

eksistē atrisinājums x_r, kurš apmierina robežnosacījumus (2). No lemmas 3.2. pierādījuma saskatāma virknes $r\to x_r$ vienmērīgā ierobežotība apgabalā J. Integrējot diferenciālvienādojuma (9) abas puses no t_1 līdz t, iegūstam

$$x_r(t)=x_r(t_1)+\int_{t_1}^{t}(A(s)x_r(s)+g_r(s,x_r(s)))ds. \tag{10}$$

Ja $\bar t,\tilde t\in J$, no (10) iegūstam

$$|x_r(\bar t)-x_r(\tilde t)|\le\int_{\tilde t}^{\bar t}(A(s)x_r(s)+g_r(s,x_r(s)))ds.$$

No šīs nevienādības un funkciju virkņu $r\to x_r$,$r\to g_r$ vienmērīgās ierobežotības seko virknes $r\to x_r$ funkciju vienādā nepārtrauktība apgabalā J.

Neierobežojot vispārību, uzskatīsim, ka pati funkciju virkne $r\to x_r$ apgabalā J vienmērīgi konverğē uz kādu funkciju x_0 (pretējā gadījumā saskaņā ar Arcela teorēmu mēs izvēlētos kādu konverğējošu apakšvirkni). Tā kā visas virknes $r\to x_r$ funkcijas apmierina robežnosacījumus (2), tad arī funkcija x_0 apmierina robežnosacījumus (2).

Pamatojoties uz Lebega teorēmu, vienādībā (10) varam veikt robežpāreju, ja $r \to +\infty$. Iegūstam

$$x_0(t) = x_0(t_1) + \int_{t_1}^{t} (A(s)x_0(s) + g(s, x_0(s)))ds.$$

Atvasinot šo vienādību, secinām, ka funkcija x_0 apgabalā J apmierina diferenciālvienādojumu (1). Tātad funkcija $x_0 \in C_1(J, R^n)$ ir kvazilineārās robežproblēmas (1),(2) atrisinājums. Teorēma pierādīta.

Vingrinājums 3.4. Pielietojot teorēmu 3.1., pierādiet Skorca - Dragoni teorēmu - robežproblēmai

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{11}$$

$$x(t_1) = A, \quad x(t_2) = B \tag{12}$$

eksistē atrisinājums, ja $f \in C(J \times R^2); A, B \in R$ un eksistē $M \in (0, +\infty)$ tāds, ka

$$|f(t, x, x')| \leq M, \quad (t, x, x') \in J \times R^2.$$

Piezīme 3.5. Ja diferenciālvienādojumam (11) aplūkojam Neimana problēmu, tad teorēmu 3.1. nevaram pielietot, jo atbilstošajai lineārajai homogēnajai robežproblēmai eksistē netriviāli atrisinājumi. Tomēr, diferenciālvienādojuma (11) vietā aplūkojot diferenciālvienādojumu

$$x'' = -x + f(t, x, x')$$

un ievērojot, ka atbilstošajai lineārajai homogēnajai robežproblēmai

$$x'' = -x, \quad x'(t_1) = x'(t_2) = 0,$$

ja vien $t_2 - t_1 \neq \pi n, n$- vesels skaitlis, ir tikai triviālais atrisinājums, teorēmu 3.1. varam lietot arī Neimana problēmas atrisināmības pierādīšanai.

2. Nelineāru robežproblēmu atrisināmības pierādīšanas metodika

2.1. "Piešaudes metode"

Piemērs 4.1. Pielietojumos kodolfizikā sastopamās Tomasa - Fermi vienādojuma robežproblēmas

$$x'' = t^{-1/2}x^{3/2}, \tag{13}$$

$$x(0) = 1, \quad x(+\infty) = 0 \tag{14}$$

atrisināmības pierādījumā demonstrēsim tā saukto **piešaudes metodi**.

Tā kā diferenciālvienādojuma (13) labā puse pie fiksēta $x \in R$ pēc t ir integrējama apgabalos, kuru kreisais galapunkts ir $t = 0$, un apmierina Lipšica nosacījumu pēc x, tad, saskaņā ar Košī problēmas atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmu, jebkuram $\gamma \in R$ eksistē viens vienīgs diferenciālvienādojuma (13) atrisinājums x_γ, kurš apmierina sākuma nosacījumus

$$x_\gamma(0) = 1, \quad x'_\gamma(0) = \gamma$$

un kādam $\delta \in (0, +\infty)$ ir turpināms apgabalā $[0, \delta]$. Pie tam funkcijas x_γ un x'_γ ir pēc parametra γ nepārtrauktas funkcijas.

Parādīsim, ka, ja $\gamma > 0$, tad funkcija x_γ tās definīcijas apgabalā ir augoša argumenta t funkcija. Tiešām, saskaņā ar diferenciālvienādojumu (13),

$$x''_\gamma(t) \geq 0, \quad t \in [0, \delta],$$

tātad funkcija x'_γ aug un

$$x'_\gamma(t) \geq \gamma > 0, \quad t \in [0, \delta]$$

un arī funkcija x_γ aug.

No šīs funkcijas x_γ monotonitātes seko, ka to iespējams turpināt uz visas pusass $[0, +\infty)$, turklāt

$$x_\gamma(t) > 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad \lim_{t \to +\infty} x_\gamma(t) = +\infty.$$

Tālāk no diferenciālvienādojuma (13) saskatām, ka, ja $\gamma < -5$ un $t \in (0, 1/4)$, tad izpildās

$$x'_\gamma(t) = \gamma + \int_0^t \xi^{-1/2} x_\gamma^{3/2}(\xi) d\xi \leq \gamma + \int_0^{1/4} \xi^{-1/2} d\xi < -4.$$

No iegūtās nevienādības izriet, ka

$$x_\gamma(t) < 1 - 4t, \quad t \in [0, 1/4],$$

un funkcija x_γ pieņem vērtību 0 kādam $\bar{t} \in (0, 1/4)$.

Tātad eksistē suprēms γ_0 to parametra γ vērtību kopai, kurām funkcija x_γ sasniedz t asi, turklāt $\gamma_0 \in [-5, 0]$.

Ērtības pēc ievedīsim apzīmējumu $x_0 = x_{\gamma_0}$ un parādīsim, ka

$$x_0(t) > 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad \lim_{t\to+\infty} x_0(t) = 0. \tag{15}$$

Šim nolūkam pieņemsim, ka kādam $t_0 > 0 \quad x_0(t_0) = 0$. Šajā punktā nevar būt spēkā nevienādība $x_0'(t_0) > 0$, jo tad punktos, kuri atrodas pietiekoši tuvu punktam t_0 pa kreisi no tā funkcija x_0 būtu negatīva. Nevar izpildīties arī vienādība $x_0'(t_0) = 0$, jo diferenciālvienādojumam (13) ir tikai viens vienīgs triviālais atrisinājums, kuram t_0 ir vairākkārtīga nulle. Tātad atliek vienīgi iespēja, ka $x_0'(t_0) < 0$, bet tad γ vērtībām lielākām par γ_0 un pietiekoši tuvām γ_0 funkcija x_γ krusto t asi, kas nav iespējams skaitļa γ_0 izvēles dēļ. Līdz ar to mūsu pieņēmums izrādījies nepareizs un izpildās pirmā no sakarībām (15). Tālāk atzīmēsim, ka $x_0'(t) \leq 0, \quad t \in [0, +\infty)$. Tiešām, pieņemsim, ka kādam $\xi > 0 \quad x_0'(\xi) > 0$. Tas nozīmē, ka x_0' aug pie $t \geq \xi$ un funkcijas x_0 minimālā vērtība pie $t \in [0, +\infty)$ ir pozitīva. Ja $\gamma < \gamma_0$ un ir pietiekoši tuvs γ_0, tad funkcija x_γ arī būs pozitīva un tās grafika nekrustos t asi, kas nav iespējams skaitļa γ_0 izvēles dēļ. Tātad funkcija x_0 dilst un tai eksistē robeža

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = c, \quad c \in [0, +\infty).$$

Lai parādītu, ka (15) izpildās pilnībā, atliek konstatēt, ka $c = 0$. Ja $c > 0$, tad no nevienādību virknes $x_0(t) > c > 0$ seko

$$x_0'(t) = \gamma_0 + \int_0^t \xi^{-1/2} x_0^{3/2}(\xi) d\xi > \gamma_0 + c^{3/2} \int_0^t \xi^{-1/2} d\xi,$$

bet tad

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = +\infty,$$

kas nav iespējams.

Tātad funkcija x_0 ir robežproblēmas (13), (14) atrisinājums, kura eksistenci vēlējāmies pierādīt.

2.2. Aprioro novērtējumu metode

Piemērs 4.2. Vienkāršas, bet ne kvazilineāras robežproblēmas

$$x'' = x^3, \tag{16}$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = -1 \tag{17}$$

atrisināmības pierādījumā demonstrēsim robežproblēmu atrisināmības pierādīšanas metodi, kuru sauc par **aprioro novērtējumu metodi**, un kura balstās uz iepriekš pierādīto teorēmu par kvazilineāras robežproblēmas atrisināmību.

Neviens diferenciālvienādojuma (16) atrisinājums x apgabalā$(0,1)$ nevar pieņemt pozitīvu maksimuma vērtību, ne arī negatīvu minimuma vērtību. Tiešām, ja punktā $t_0 \in (0,1)$ ir diferenciālvienādojuma (16) atrisinājuma x pozitīvs maksimums, tad

$$x'(t_0) = 0, \quad x''(t_0) \leq 0.$$

Tajā pašā laikā no diferenciālvienādojuma (16) iegūstam

$$x''(t_0) = x^3(t_0) > 0.$$

Līdzīgā veidā konstatējam, ka diferenciālvienādojuma (16) atrisinājumam x apgabalā $(0,1)$ nav arī negatīva minimuma. No teiktā izriet, ka jebkurš robežproblēmas (16), (17) atrisinājums x apmierina novērtējumu

$$|x(t)| \leq 1, \quad t \in [0,1]. \tag{18}$$

Šādā gadījumā saka, ka robežproblēmas (16), (17) iespējamajam atrisinājumam spēkā apriorais novērtējums.

Svarīgi apzināties, ka pats robežproblēmas (16), (17) atrisinājuma eksistences fakts no tā apriorā novērtējuma vēl neseko. Lai pierādītu robežproblēmas (16), (17) atrisinājuma eksistenci, kopā ar diferenciālvienādojumu (16) aplūkosim arī diferenciālvienādojumu

$$x'' = \phi(x), \tag{19}$$

kur

$$\phi(x) = -1, \quad x < -1; \quad \phi(x) = x^3, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad \phi(x) = 1, \quad x > 1.$$

Spēkā novērtējums $|\phi(x)| \leq 1, \quad x \in R$. Šī iemesla dēļ saka, ka notikusi diferenciālvienādojuma (16) labās puses 'apgriešana'.

Tā kā funkcija ϕ ir nepārtraukta un ierobežota, saskaņā ar teorēmu 3.1. robežproblēmai (19), (17) eksistē atrisinājums $\bar{x}$. Tāpat kā iepriekš viegli atkal pārliecināties, ka

$$|\bar{x}(t)| \leq 1, \quad t \in [0,1].$$

Secinām, ka diferenciālvienādojuma (19) atrisinājuma $\bar{x}$ grafika pilnībā pieder apgabalam, kurā diferenciālvienādojumu (16) un (19) labās puses sakrīt. Tātad funkcija $\bar{x}$ ir arī robežproblēmas (16), (17) atrisinājums.

Parādīsim aprioro novērtējumu metodes lietojumu krietni vispārīgākā gadījumā, aplūkojot Dirihlē problēmu diferenciālvienādojumam

$$x'' = f(t,x) \tag{20}$$

ar robežnosacījumiem (12), kur $f \in C([t_1,t_2] \times R, R)$.

Teorēma 4.3. Pieņemsim, ka eksistē funkcijas $\alpha, \beta \in C_2([t_1,t_2], R)$ tādas, ka

$$\alpha(t_1) \leq A \leq \beta(t_1), \quad \alpha(t_2) \leq B \leq \beta(t_2),$$

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad t \in [t_1,t_2],$$

$$\alpha''(t) \geq f(t,\alpha(t)), \quad \beta''(t) \leq f(t,\beta(t)), \quad t \in [t_1,t_2]. \tag{21}$$

Tad robežproblēmai (20), (12) eksistē atrisinājums x, kuram spēkā novērtējums

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [t_1,t_2]. \tag{22}$$

Pierādījums. Definēsim funkciju $F \in C([t_1,t_2] \times R, R)$ sekojoši

$$F(t,x) = f(t,x), \quad \alpha(t) \leq x \leq \beta(t),$$

$$F(t,x) = \alpha(t), \quad x \leq \alpha(t),$$

$$F(t,x) = \beta(t), \quad \beta(t) \leq x.$$

Dirihlē problēmai diferenciālvienādojumam $x'' = F(t,x)$ ar robežnosacījumiem (12), saskaņā ar teorēmu 3.1., eksistē atrisinājums x. Parādīsim, ka tam spēkā novērtējums (22). Līdz ar to teorēmas apgalvojumu būs iespējams konstatēt, lietojot aprioro novērtējumu metodes spriedumus.

Pierādīsim tikai pirmo no novērtējumiem (22), otrais pierādāms analoģiski. Ja šis novērtējums nav spēkā, tad kādam $t_0 \in (t_1,t_2)$ funkcijai

$u(t) = \alpha(t) - x(t)$ ir pozitīvs maksimums, tātad $u'(t_0) = 0$. Savukārt, kādam $t_3 \in (t_1, t_0)$ $\quad u(t_3) = 0$ un

$$u'(t_3) > 0. \tag{23}$$

Ja $t \in [t_3, t_0]$, tad funkcijas F konstrukcijas un nevienādību (21) dēļ

$$\alpha''(t) \geq F(t, \alpha(t)) = F(t, x(t)) = x'',$$

tāpēc šajā apgabalā $u''(t) \geq 0$. Integrējot šo nevienādību no t_3 līdz t_0, iegūstam

$$u'(t_0) - u'(t_3) = -u'(t_3) \geq 0,$$

bet tas ir pretrunā nevienādībai (23). Teorēmas pierādījums principā ir noslēdzies.

Pierādītā teorēma ir samērā spēcīga. Tā, piemēram, ja saskatāmas funkcijas $\bar{f}, \tilde{f} \in C([t_1, t_2] \times R, R)$, tādas, ka

$$\bar{f}(t,x) \leq f(t,x) \leq \tilde{f}(t,x), \quad (t,x) \in [t_1, t_2] \times R,$$

turklāt diferenciālvienādojumu

$$x'' = \bar{f}(t,x), \quad x'' = \tilde{f}(t,x)$$

partikulārie atrisinājumi ir iegūstami analītiski, tad funkciju α, β konstrukcija ir reāli iespējama. Vēlreiz atgādināsim, ka metode dod iespēju ne tikai konstatēt atrisinājuma eksistenci, bet tam dod arī novērtējumu (22).

Tomēr robežproblēmas atrisinājuma pierādījums, lietojot aprioro novērtējumu metodi, kļūst ievērojami sarežģītāks, ja diferenciālvienādojuma labā puse ir atkarīga no x'. Šajā gadījumā bez iespējamā robežproblēmas atrisinājuma x apriorā novērtējuma vajadzīgs arī apriorais novērtējums robežproblēmas atrisinājuma atvasinājumam x', kurš nepieciešams, lai diferenciālvienādojuma labo pusi varētu 'apgriezt' arī pēc argumenta x' un atkal varētu pielietot teorēmu 2.1.

Vingrinājums 1.4. rāda, ka diferenciālvienādojuma atrisinājumam x, kuram savā definīcijas apgabalā ir spēkā novērtējums (18), tajā pašā laikā tā atvasinājums x' punkta $t = 1$ apkārtnē kļūst neierobežots. Lai šāda situācija nebūtu iespējama, diferenciālvienādojuma labajai pusei, attiecībā uz izturēša- nos pēc nezināmās funkcijas atvasinājuma, jāuzliek ierobežojumi.

Diferenciālvienādojumam (11) iespējamā ierobežota atrisinājuma atvasinājuma aprioro novērtējumu nodrošina sekojošais klasiskais nosacījums, kuru sauc par **Bernšteina nosacījumu**.

Nosacījums 4.4. Eksistē funkcija $c \in C([0,+\infty) \times R, [0,+\infty))$, kurai visiem $(t,x,y) \in J \times R^2$ ir spēkā nevienādība

$$|f(t,x,y)| \leq c(t,x)(1+y^2).$$

Piemērs 4.5. Pieņemsim, ka $M \in R$, diferenciālvienādojuma (11) atrisinājumiem x, kuriem apgabala $[t_1,t_2]$ galapunktos spēkā nevienādības $|x(t_i)| \leq M; \quad i = 1,2$, spēkā apriorais novērtējums, ja

$$f(t,x,0) \leq 0, \quad t \in [t_1,t_2], \quad x \in [-\infty, M),$$

$$f(t,x,0) \geq 0, \quad t \in [t_1,t_2], \quad x \in [M,+\infty).$$

Pierādījumam pietiek konstatēt, ka šādam diferenciālvienādojuma (11) atrisinājumam x nevar būt ne pozitīva maksimuma, ja $x(t) > M$, ne negatīva minimuma, ja $x(t) < -M$.

Pieņemsim, ka punktā $t_0 \in (t_1,t_2)$ diferenciālvienādojuma (11) atrisinājumam x ir pozitīvs maksimums un $x(t_0) > M$. Tādā gadījumā $x'(t_0) = 0$. No vienādības

$$x'' = f(t,x,0) + \frac{f(t,x,x') - f(t,x,0)}{x'}x',$$

apzīmējot $f(t,x(t),0) = \tilde{a}(t)$,

$$\frac{f(t,x(t),x'(t)) - f(t,x(t),0)}{x'(t)} = \tilde{b}(t),$$

iegūstam vienādību

$$x'' = \tilde{a}(t) + \tilde{b}(t)x'.$$

Ievērosim, ka $\tilde{a}, \tilde{b}$ ir nepārtrauktas un ierobežotas funkcijas, $\tilde{a}(t) > 0$, ja t pieder kādai punkta t_0 apkārtnei. Pieņemsim, ka $\tau \in [t_1,t_0)$ ir tāds, ka

$$x'(\tau) = \gamma > 0, \quad \tilde{a}(t) \geq 0, \quad t \in [\tau, t_0],$$

un integrēsim iegūto vienādību no τ līdz t_1. Iegūstam

$$x'(t) = \exp(B(t))(\gamma + \int_\tau^{t_0} \exp(-B(s))\tilde{a}(s)ds),$$

kur ieviests apzīmējums $B(t) = \int_\tau^t \tilde{b}(s)ds$. Ievietojot šajā vienādībā $t = t_0$, iegūstam $x'(t_0) > 0$, kas nav iespējams.

Analoģiskā veidā pārliecināmies, ka diferenciālvienādojuma (11) atrisinājumam x nevar būt negatīva minimuma, ja $x(t) < -M$.

Vingrinājums 4.6. Nosacījums 4.4. ir būtisks robežproblēmas (11), (12) atrisinājuma eksistencei. Risinot robežproblēmu

$$x'' = (x')^{2+\epsilon}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = b,$$

parādīt, ka tai nav atrisinājuma, ja

$$b > \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0.$$