Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
5. un 6.lekcija

1. Robežproblēmas diferenciālvienādojumiem ar neintegrējamām singularitātēm

1.1. Emdena - Faulera tipa vienādojumi

Piemērs 5.1. Izvedīsim robežproblēmu nelineāram diferenciālvienādojumam, kuru, apskatot astrofizikas problēmu par izplatījumā esošas gāzes masas līdzsvara nosacījumiem, ieguva 1907.gadā. Tas bija viens no pirmajiem pielietojumos sastopamajiem nelineārajiem diferenciālvienādojumiem.

Gāzes masa, uz kuru darbojas tās daļiņu savstarpējās pievilkšanās spēki, bet uz tās aizņemtā tilpuma virsmas - pastāvīgs spiediens (iespējams, arī vienāds ar nulli), pieņem lodveida formu, ja vien tā atrodas līdzsvarā. Gāzes blīvumam ρ un iekšējam spiedienam P tādā gadījumā raksturīga sfēriski centrālā simetrija, un šo fizikālo parametru vērtības konkrētos lodes punktos ir atkarīgas tikai no to attāluma r līdz lodes centram.

Izvēlēsimies nelielu patvaļīgu sfēras gabaliņu ar virsmas laukumu σ attālumā r no gāzes aizņemtā lodveida tilpuma centra. Konstruēsim uz šī virsmas gabaliņa cilindru ar augstumu dr. Uz šo gāzes tilpuma cilindru darbojas spiediena izraisīts spēks σdP un gāzes daļiņu savstarpējās pievilkšanās spēks $\rho g \sigma dr$, kur g ir gravitācijas spēka radītais paātrinājums gāzes tilpuma cilindra punktos. No šiem apsvērumiem izriet, ka gāzes masas līdzsvara nosacījums izskatās šāds:

$$\sigma dP + \rho g \sigma dr = 0$$

vai, pārveidojot,

$$\frac{dP}{dr} + \rho g = 0. \tag{1}$$

Saskaņā ar Ņūtona gravitācijas likumu, $g = \gamma M_r r^{-2}$, kur γ ir gravitācijas konstante, bet M_r ir gāzes masa, kura atrodas lodē ar rādiusu r. Gāzes masa, kura ieslēgta starp sfērām ar rādiusiem r un $r+dr$, vienāda ar $4\pi^2 r^2 \rho dr$, tādēļ

$$M_r = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr,$$

līdz ar to no diferenciālvienādojuma (1) iegūstam

$$\frac{dP}{dr} + \frac{4\pi\rho\gamma}{r^2} \int_0^r r^2 \rho dr = 0.$$

Pareizinot šo vienādību ar $\frac{r^2}{\rho}$ un abas tās puses atvasinot pēc r, iegūstam diferenciālvienādojumu

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr}) + 4\pi\rho\gamma = 0. \tag{2}$$

Ja nav siltuma apmaiņas starp gāzes aizpildīto lodi un apkārtējo telpu, tad

$$P = k\rho^{\frac{n+1}{n}},$$

kur k, n ir kādas pozitīvas konstantes. Izvēloties jaunu mainīgo y tā, lai

$$\rho = (\frac{y}{k(n+1)})^n,$$

iegūstam

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{dy}{dr},$$

un diferenciālvienādojumu (2) varam pārrakstīt šādi

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy}{dr} + \alpha^2 y^n = 0,$$

ja ievests apzīmējums

$$\alpha^2 = \frac{4\pi\gamma}{(k(n+1))^n}.$$

Izdarot vēlreiz mainīgo maiņu

$$y = y(0)x, \quad r = \frac{t}{\alpha} y^{\frac{1-n}{2}}(0),$$

iegūstam diferenciālvienādojumu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{dx}{dt} + x^n = 0. \tag{3}$$

Ja gāzes masas veidotajai lodei ir galīgs rādiuss R, tad pie $r = R$

$$P(R) = 0, \quad \rho(R) = 0,$$

un, ja

$$t_0 = \alpha R y^{\frac{n-1}{2}}(0),$$

tad

$$x(t_0) = 0.$$

Savukārt, no sfēriski centrālās simetrijas apsvērumiem izriet, ka lodes centrā pie $r = 0$ fizikālajiem parametriem P un ρ jāpieņem ekstremālas vērtības, tādēļ, ievērojot izdarītās mainīgo maiņas, iegūstam arī robežnosacījumu

$$x'(0) = 0. \tag{4}$$

Ievērosim, ka diferenciālvienādojumam (3) pie $t = 0$ ir neintegrējama singularitāte, tādēļ iegūtās robežproblēmas izpētei nav lietojami klasiskie dife- renciālvienādojumu teorijas rezultāti. Vienlaicīgi robežnosacījums (4) šo neintegrējamo singularitāti pārvērš $\frac{0}{0}$ tipa nenoteiktībā, tādēļ robežproblēmām ar šādu nosacījumu iespējama atrisinājuma eksistence.

Piemērs 5.2. Diferenciālvienādojumu (3) vispārina sekojošie diferenciālvienādojumi, kurus sauc par Emdena - Faulera vienādojumiem:

$$(t^\rho x')' + t^\sigma x^n = 0, \tag{5}$$

kur $\rho, \sigma \in R, \quad n \in (0, +\infty)$,

$$(p(t)x')' + q(t)x^n = 0, \tag{6}$$

kur funkcijas $p, q \in C([0, +\infty), R)$.

Vingrinājums 5.3. Parādīt, ka, ja $p(t) > 0$, tad, lietojot mainīgo maiņu

$$s = \int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{p(\tau)} = +\infty,$$

$$s = (\int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{p(\tau)})^{-1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{p(\tau)} < +\infty,$$

$$u = x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{p(\tau)} = +\infty,$$

$$u = sx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{p(\tau)} < +\infty,$$

diferenciālvienādojums (4) pārveidojams sekojošā formā:

$$u'' + a(s)u^n = 0,$$

kur $a \in C([0, +\infty), R)$.

Piezīme 5.4. Lai vingrinājumā 5.3 iegūtais diferenciālvienādojums būtu aplūkojams arī negatīvām funkcijas u vērtībām ar racionāliem kāpinātājiem n, tā vietā parasti lieto diferenciālvienādojumu

$$x'' + a(t)|x|^n sgn(x) = 0, \tag{7}$$

kuru sauc par Emdena - Faulera tipa vienādojumu

Ievērosim, ka aplūkojot Emdena - Faulera tipa vienādojumu pie negatīvām kāpinātaja n vērtībām, iegūstam diferenciālvienādojumu, kuram ir arī singularitāte pēc mainīgā x. Robežproblēmu šādam diferenciālvienādojumam iegūst, piemēram, mehānikā pētot plānas, elastīgas un homogēnas membrānas deformāciju:

$$x'' + \frac{1}{32}t^2 x^{-2} = \lambda, \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \mu x(1),$$

kur $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$.

1.2. Puasona vienādojums ar nelineāru avota funkciju cilindriskajās un sfēriskajās koordinātās

Piemērs 5.5. Aplūkosim Puasona diferenciālvienādojumu, kurš apraksta siltumvadīšanas vai difūzijas procesus ar nelineāru avota funkciju:

$$\triangle x + f(x) = 0.$$

Pārejot uz cilindriskajām koordinātām un pieņemot, ka process ir centrāli simetrisks attiecībā pret cilindra asi, iegūstam parasto diferenciālvienādojumu ar neintegrējamu singularitāti

$$x'' + \frac{1}{t}x' + f(x) = 0. \tag{8}$$

Analoģiski, pārejot uz sfēriskajām koordinātām un pieņemot, ka process ir centrāli simetrisks attiecībā pret sfēras centru, iegūstam līdzīgu diferenciālvienādojumu

$$x'' + \frac{2}{t}x' + f(x) = 0. \tag{9}$$

Abiem iegūtajiem diferenciālvienādojumiem ir dabīgi par vienu no robežnosacījumiem ņemt robežnosacījumu (4), izmantojot apstākli, ka pie $t = 0$ parametrs x pieņem ekstremālu vērtību. Savukārt, pie $t = t_0, \quad t_0 > 0$ varam aplūkot lineāros robežnosacījumus vispārīgā veidā, kurus pierakstīsim sekojoši

$$x(t_0) = a_0 x'(t_0) + b_0, \quad a_0, b_0 \in R. \tag{10}$$

Minēsim dažus praksē sastopamu nelineāru avota funkciju piemērus. Ja viela, kurā notiek aplūkotais siltumvadīšanas process, ir pašuzliesmojoša, tad $f(x) = \lambda(1 + \alpha x)^{\beta}$, kur $\lambda, \alpha, \beta \in R$. Šajā izteiksmē parametriem α un β vienlaicīgi tiecoties uz 0 robežpārejā iegūstam

$$f(x) = \lambda \exp(x). \tag{11}$$

Piemēros aplūkosim arī avota funkciju

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x^2}, \tag{12}$$

kura rodas elektrodinamikā, pētot šķidruma pilienu saplūšanu, kā arī ķīmisko reaktoru teorijā sastopamo avota funkciju

$$f(x) = \beta \exp(-\frac{1}{x + \alpha}).$$

Šajā paragrāfā aplūkotās robežproblēmas vispārina robežproblēma diferenciālvienādojumam

$$x'' + \frac{p}{t}x' + f(t, x, x') = 0 \tag{13}$$

ar robežnosacījumiem (4), (10).

1.3. Robežproblēmas diferenciālvienādojumam, kura lineārā daļa ir diferenciāloperatoru ar neintegrējamām singularitātēm superpozīcija

Diferenciālvienādojuma (13) atbilstošajam lineārajam homogēnajam diferenciālvienādojumam

$$x'' + \frac{p}{t}x' = 0$$

varam pazemināt kārtu ar mainīgo maiņu $u = x'$, iegūstot

$$u' + \frac{p}{t}u = 0, \quad u(0) = 0. \tag{14}$$

Košī problēmā (14) ietilpstošā diferenciālvienādojuma kreiso pusi apzīmēsim ar $L^{[p]}u$.

Vingrinājums 5.6. Parādīt, ka Košī problēmai (14) eksistē tikai viens vienīgs triviālais atrisinājums, ja $p \geq 0$, bet bezgalīgi daudz atrisinājumu, ja $p < 0$.

No vingrinājuma 5.6. redzam, ka pie $p < 0$ Košī problēmas (14) atrisinājumam u

$$\lim_{t\to 0} u(t)t^p = const, \quad \lim_{t\to 0}(u'(t) + \frac{p}{t}u(t)) = 0.$$

Novērojums pamudina aplūkot diferenciālo operatoru $L^{[-p]}$ un $L^{[1+q]}$ superpozīciju, ja $p > 1, \quad q > -1$. Iegūstam

$$L^{[1+q]}L^{[-p]}x = (x' - \frac{p}{t}x)' + \frac{1+q}{t}(x' - \frac{p}{t}x) = x'' + \frac{1-p+q}{t}x' - \frac{pq}{t^2}x.$$

No vingrinājumā 5.6. gūtās pieredzes redzam, ka robežnosacījums (4) šajā diferenciālo operatoru superpozīcijā ietilpstošās singularitātes pārvērš nenoteiktībās $\frac{0}{0}$.

Piemērs 5.7. Robežproblēma diferenciālvienādojumam ar šāda veida diferenciālo operatoru radusies, piemēram, speciālajā relativitātes teorijā, kur gravitācijas spēks x lodē ar rādiusu $r = 2$ ir atrisinājums robežproblēmai

$$x'' + \frac{2}{r}x' - \frac{2}{r^2}x + \frac{x^3}{2r^2} + \frac{x}{4-x^2}((x')^2 + (1 - \frac{x^2}{4})^2) = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad x(2) = 2.$$

1.4. Fāzu plaknes analīzes metode

Piemērs 6.1. Aplūkosim diferenciālvienādojumam (9) ar nelineāro avota funkciju (12), kur $\alpha = 0, \beta = 1$ robežproblēmu

$$x'' + \frac{2}{t}x' + \frac{1}{x^2} = 0, \tag{15}$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = b, \tag{16}$$

kur $b \in R$.

Ar $x_c, \quad c \in R, \quad c \neq 0$, apzīmēsim diferenciālvienādojuma (15) Koši problēmas ar sākuma nosacījumiem

$$x(0) = c, \quad x'(0) = 0$$

atrisinājumu un ievedīsim jaunus mainīgos

$$r = t|c|^{-\frac{3}{2}}, \quad u(r) = x_c(r|c|^{\frac{3}{2}})|c|^{-1}.$$

Iegūstam Koši problēmu

$$u'' + \frac{2}{r}u' + \frac{1}{u^2} = 0, \tag{17}$$

$$u(0) = sign(c), \quad u'(0) = 0. \tag{18}$$

Tālāk ievedīsim fāzu plaknes (ξ, η) mainīgos

$$\xi(r) = r^{-\frac{2}{3}}u(r), \quad \eta(r) = r^{\frac{1}{3}}u'(r). \tag{19}$$

Atvasinot vienādības (19) un izmantojot diferenciālvienādojumu (17), lai izslēgtu lielumus u un u', iegūstam divu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{\eta - \frac{2}{3}\xi}{r}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{-\frac{5}{3}\eta + \frac{1}{\xi^2}}{r},$$

kura ekvivalenta fāzu plaknes diferenciālvienādojumam

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-\frac{5}{3}\eta + \frac{1}{\xi^2}}{\eta - \frac{2}{3}\xi}. \tag{20}$$

Sākuma nosacījumi (18) kopā ar izteiksmēm (19) dod

$$\lim_{r \to 0+} r^{\frac{2}{3}}\xi(r) = sign(c), \eta(0) = 0.$$

Saskaņā ar pirmo no šīm vienādībām, ja $r \to 0+$, tad $\xi(r) \to +\infty$, ja $sign(c) = 1$ un $\xi(r) \to -\infty$, ja $sign(c) = -1$. Tātad, ja aplūko η kā ξ funkciju, no otrā no sākuma nosacījumiem (18) iegūstam

$$\eta(+\infty) = 0, \quad sign(c) = 1; \eta(-\infty) = 0, \quad sign(c) = -1. \tag{21}$$

Viegli pārliecināties, ka diferenciālvienādojumam (20) ir viens vienīgs singulārais punkts

$$\xi_0 = -(\frac{9}{16})^{\frac{1}{3}}, \quad \eta_0 = -(\frac{1}{6})^{\frac{1}{3}},$$

kurš ir fokuss.

Apskatīsim diferenciālvienādojuma (20) integrāllīnijas fāzu plaknē (ξ, η). Ja $c < 0$, tad nosacījumam (21) atbilstošā integrāllīnija, lielumam r augot, spirālveidīgi pulksteņa rādītāja virzienā tuvojas punktam (ξ_0, η_0), paliekot fāzu plaknes III kvadrantā. Mainīgā ξ vērtības, pie kurām

$$\frac{d\eta(\xi)}{d\xi} = 0,$$

tam dilstot no vērtības 0 līdz vērtībai ξ_0, secīgi apzīmēsim ar b_{2n}, bet, tam augot no $-\infty$ līdz vērtībai ξ_0, secīgi apzīmēsim ar b_{2n+1}, $n = 0, 1, \ldots$. Virkne $n \to b_{2n}$ monotoni dilst un konverģē uz ξ_0, bet virkne $n \to b_{2n+1}$ monotoni aug un arī konverģē uz ξ_0. Ja $\xi \in [b_1, b_0]$, tad aplūkotā integrāllīnija nosaka η kā daudzvērtīgu mainīgā ξ funkciju, un punkti $\ldots, b_{2n}, b_{2n+1}, \ldots$, ir šīs daudzvērtīgās funkcijas sazarojuma punkti. Savukārt, ja $c > 0$, tad diferenciālvienādojuma (20) integrāllīnija, kura atbilst nosacījumam (21), ir monotoni augoša argumenta ξ funkcija, kuras grafika atrodas fāzu plaknes IV kvadrantā.

Tagad izmantosim otro no robežnosacījumiem (16). Ja $t = 1$, tad $r = |c|^{-\frac{3}{2}}$ un

$$\xi(r) = \xi(|c|^{-\frac{3}{2}}) = (|c|^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}} u(|c|^{-\frac{3}{2}}) = x_c(1). \tag{22}$$

Tātad, ja $x_c(1) = b$, tad x_c apmierina arī otro no robežnosacījumiem (16), tas nozīmē, ka x_c ir arī robežproblēmas (15), (16) atrisinājums. No vienādības (22) seko, ka tādā gadījumā $\xi(r) = b$, un mums atliek iegūto integrāllīniju fāzu plaknē (ξ, η) krustot ar taisni $\xi = b$, lai iegūtu robežproblēmas (15), (16) atrisinājumu skaitu.

Rezumējot fāzu plaknē novēroto, atzīmēsim, ka robežproblēmai (15), (16) nav atrisinājuma, ja $b \in (b_0, 0]$, ir viens vienīgs atrisinājums, ja $b \in (-\infty, b_1)$ vai $b \in (0, +\infty)$, ir tieši $n+1$ atrisinājumi, ja $b = b_n$, ir tieši $2n$ atrisinājumi, ja $b \in (b_{2n}, b_{2n-2})$, ir tieši $2n+1$ atrisinājumi, ja $b \in (b_{2n-1}, b_{2n+1})$,
$n = 0, 1, \ldots$.

Vingrinājums 6.2. Lietojot fāzu plaknes analīzes metodi, izpētīt robežproblēmu (8),(16) un (9),(16) atrisināmību, ja funkcija f definēta ar sakarību (11) un $b = 0$.