Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
7. un 8. lekcija

1. Automodeļu diferenciālvienādojumu robežproblēmu piemēri

1.1. Robežproblēmas Blaziusa un Foknera - Skeinas vienādojumiem

Bieži to vai citu matemātiskās fizikas problēmu ar formālām mainīgo maiņām var reducēt uz robežproblēmu nelineāram parastajam diferenciālvienādojumam vai to sistēmām. Tādā veidā iegūto parasto diferenciālvienādojumu sauc par automodeļu diferenciālvienādojumu, bet atbilstošos formālos mainīgos sauc par automodeļu mainīgajiem. Tādu problēmu iegūšanu apskatīsim **Blaziusa vienādojuma** piemērā.

Piemērs 7.1. Aplūkosim nostabilizējušos viskoza, nesaspiežama šķidruma plūsmu gar pusbezgalīgu plāksnīti, kura novietota perpendikulāri koordinātu sistēmas (x, y, z) y asij pozitīvās x pusass plaknē. Ar u un v apzīmēsim šķidruma plūsmas ātruma komponentes, attiecīgi, x un y asu virzienos. Sākotnējai plūsmai šīs komponentes pieņem vērtības

$$u = u_0, \quad v = 0.$$

Viskozitātes iedarbība novērojama tikai šaurā slānī plāksnītes tuvumā, kuru sauc par robežslāni. Šķidruma plūsmas ātruma komponentes u vērtības mainās no lieluma 0 uz plāksnītes virsmas līdz u_0 uz robežslāņa ārējās robežas. Šķidruma plūsmas pētīšana iespējama, izmantojot Navjē - Stoksa vienādojumu sistēmu, kuru iegūst no masas un kustības daudzuma nezūdamības likumiem.

Ja uzskatām, ka robežslānis ir ļoti plāns un $u >> v$, tad Navjē - Stoksa vienādojumu sistēma izskatās tāda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

kur ν ir viskozitātes koeficients.

Robežnosacījumus varam pierakstīt tā:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = u_0. \tag{3}$$

Pirmais no šiem nosacījumiem parāda, ka caur plāksnītes virsmu nenotiek masas pārnese un gar plāksnīti nenotiek šķidruma daļiņu slīdēšana. Otrais nosacījums iegūts no apsvēruma, ka šķidruma plūsmas ātruma komponente u, ja $y \to \infty$, asimptotiski tiecas uz sākotnējo šķidruma plūsmas ātrumu u_0.

Ievedīsim potenciāla funkciju ψ ar vienādībām

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

kura diferenciālvienādojumu (1) pārvērš identitātē, bet diferenciālvienādojums (2) tad pārrakstāms šādi

$$[(\frac{\partial \psi}{\partial y}) - (\frac{\partial \psi}{\partial x})]\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Robežnosacījumi attiecīgi pārveidojas tā:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, +\infty) = u_0.$$

1908.gadā Blaziuss ieteica pēdējā no iegūtajiem vienādojumiem, pāriet uz automodeļu mainīgajiem, izdarot mainīgo maiņu

$$t = \frac{y\sqrt{u_0}}{\sqrt{\nu x}}, \quad z = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x u_0}},$$

kura to pārveido parastajā diferenciālvienādojumā

$$z''' + \frac{1}{2}zz'' = 0, \tag{4}$$

kuru mūsdienu literatūrā sauc par **Blaziusa vienādojumu**.

Ja $y = 0$, tad $t = 0$ un, tā kā

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = z' \frac{\partial t}{\partial y} \sqrt{\nu x u_0} = z' u_0,$$

tad no otrā un trešā robežnosacījumiem iegūstam robežnosacījumus

$$z'(0) = 0, \quad z'(+\infty) = 1. \tag{5}$$

Beidzot, ievērojot, ka

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{z' y u_0}{2x} + \frac{z}{2} \sqrt{\frac{\nu u_0}{x}},$$

no pirmā robežnosacījuma iegūstam robežnosacījumu

$$z(0) = 0. \tag{6}$$

Līdz ar to (4), (5), (6) veido robežproblēmu Blaziusa vienādojumam.

Piemērs 7.2. Ja aplūkotajā hidrodinamiskajā procesā plāksnītes vietā simetriski pret x asi novietots ķīlis ar virsotni koordinātu sākumpunktā, tad sakarā ar to, ka ātrums galvenajai šķidruma plūsmai kļuvis atkarīgs no koordinātas x, diferenciālvienādojumā (2) parādīsies papildu saskaitāmais un diferenciālvienādojuma (4) vietā rodas diferenciālvienādojums

$$z''' + zz'' + \beta(1 - (z')^2) = 0, \tag{7}$$

kur koeficients $\beta \in R$ raksturo ķīli, bet robežnosacījumi (5), (6) nemainās. Diferenciālvienādojumu (7) sauc par **Foknera - Skeinas vienādojumu**.

Vingrinājums 7.3. Veicot pāreju uz automodeļu mainīgajiem iegūt Foknera - Skeinas vienādojumu.

1.2. Transformācijas metode

Piemērs 7.4. Aplūkosim Blaziusa vienādojuma robežproblēmas(4), (5), (6) skaitlisku risināšanu, lietojot **transformāciju metodi**.

Veiksim mainīgo maiņu

$$t = A^{\alpha_1} s, \quad z = A^{\alpha_2} y, \tag{8}$$

kur $A, \alpha_1, \alpha_2 \in R$ ir kādi pagaidām nezināmi parametri. Iegūstam

$$A^{\alpha_2 - 3\alpha_1} y''' + \frac{1}{2} A^{2(\alpha_2 - \alpha_1)} y y'' = 0.$$

Ja

$$\alpha_2 - 3\alpha_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_1), \tag{9}$$

tad iegūtais diferenciālvienādojums nav atkarīgs no parametra A, un mums ir diferenciālvienādojums

$$y''' + \frac{1}{2} y y'' = 0. \tag{10}$$

Pieņemam, ka $z''(0) = A$. Mainīgo maiņa (8) dod

$$A^{\alpha_2 - 2\alpha_1} y''(0) = A.$$

Ja

$$\alpha_2 - 2\alpha_1 = 1, \tag{11}$$

tad arī šis sākuma nosacījums nesatur parametru A un ir pierakstāms šādi:

$$y''(0) = 1. \tag{12}$$

Abi pārējie sākuma nosacījumi diferenciālvienādojumam (10) ir homogēni

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{13}$$

No lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas (9), (11) iegūstam

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{1}{3}.$$

Beidzot, no robežnosacījuma bezgalībā iegūstam

$$A^{\alpha_2 - \alpha_1} y'(+\infty) = 1, \quad A = (y'(+\infty))^{-\frac{2}{3}}.$$

Tātad, skaitliski risinot Koši problēmu (10), (12), (13) līdz brīdim, kad tās atrisinājums y asimptotiski pietuvojies kādai konstantai vērtībai, iegūstam parametra A vērtību un, lietojot transformācijas formulas (8), Blaziusa vienādojuma robežproblēmas(4), (5), (6) atrisinājumu.

Rezumējot izklāstīto, formulēsim transformāciju metodes lietojuma shēmu.

1. Tiek uzdota diferenciālvienādojumā ietilpstošo mainīgo transformācija, kura satur reālas vērtības pieņemošus parametrus, tāda, ka pēc tās izpildes diferenciālvienādojums šos parametrus nesatur.

2. Trūkstošajā sākuma nosacījumā iekļauj kādu no transformācijas parametriem, dodot iespēju noteikt pārējo parametru skaitliskās vērtības. Pēc mainīgo transformācijas izpildes arī sākuma nosacījumi nedrīkst saturēt parametrus.

3. Transformācijas parametru, kurš atbilst trūkstošajam sākuma nosacījumam, nosaka robežnosacījums atrisinājuma definīcijas apgabala otrajā galapunktā. Šeit būtiska ir šī robežnosacījuma nehomogenitāte.

4. Tiek pārveidoti arī robežnosacījumi atrisinājuma definīcijas apgabala pirmajā galapunktā, te būtiska ir šo robežnosacījumu homogenitāte.

5. Risinot Košī problēmu un izmantojot uzdotās mainīgo transformācijas formulas, iegūstam robežproblēmas tuvinātu skaitlisko atrisinājumu.

2. Transformāciju metode robežproblēmai diferenciālvienādojumam ar neintegrējamu singularitāti

2.1. Robežproblēmas skaitliska risināšana

Piemērs 8.1. Aplūkosim iepriekšējās lekcijās minēto robežproblēmu diferenciālvienādojumam ar neintegrējamu singularitāti

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \lambda \exp(x) = 0, \tag{14}$$

$$x'(0) = x(1) = 0. \tag{15}$$

Lietosim mainīgo transformāciju

$$t = s\exp(\alpha_1 A), \quad x = y + \alpha_2 A,$$

kur $\alpha_1, \alpha_2, A \in R$ ir transformācijas parametri. Pēc tās izpildes iegūstam

$$\exp(-2\alpha_1 A)(y'' + \frac{1}{s}y') + \lambda \exp(\alpha_2 A)\exp(y) = 0.$$

Ja $\alpha_2 = -2\alpha_1$, tad iegūtais diferenciālvienādojums nav atkarīgs no parametra A. Tālāk ievērojam, ka $y'(0) = 0$, un no $x(0) = A$ seko $y(0) = A - \alpha_2 A$.

Ja $\alpha_2 = 1$, tad $y(0) = 0$ un līdz ar to $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$. Beidzot, izmantojot robežnosacījumu pie $t = 1$, varam rakstīt

$$y(\exp(-\alpha_1 A)] + \alpha_2 A = 0, \quad y(\exp(\frac{A}{2}) = -A.$$

Ievērojot, ka $s = \exp(-\alpha_1 A)$, un izslēdzot parametru A, iegūstam

$$s = \exp(-\frac{y}{2}). \tag{16}$$

Košī problēmas

$$y'' + \frac{1}{s}y' + \lambda \exp(y) = 0,$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

atrisinājuma grafika atkarībā no koeficienta λ vērtības var līkni (16) šķērsot vairākas reizes, vienu reizi (tai pieskarties), kā arī var to vispār nešķērsot. Šie gadījumi atbilst situācijām, kurās robežproblēmai (14), (15) ir vairāki atrisinājumi, ir viens atrisinājums, nav atrisinājuma, jo minētie krustpunkti nosaka parametra A vērtības.

2.2. Stabila atrisinājuma izdalīšana

Ja robežproblēmai (14), (15) ir vairāki atrisinājumi, tad interesi rada jautājums par stabila atrisinājuma atrašanu, jo nestabili atrisinājumi nerada matemātisko rezultātu pielietotāju interesi. Iepazīsimies ar metodi, kura ļauj noskaidrot robežproblēmas (14), (15) atrisinājumu stabilitāti.

Piemērs 8.2. Ja x_0 ir robežproblēmas (14), (15) atrisinājums, tad tas apmierina arī šādu diferenciālvienādojumam (14) atbilstošu nestacionāru diferenciālvienādojumu

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}(t\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}) + \lambda \exp(x(t,\tau)) \tag{17}$$

ar robežnosacījumiem

$$x(t,0) = x_0(t), \tag{18}$$

$$\frac{\partial x(0,\tau)}{\partial t} = 0, \quad x(1,\tau) = 0. \tag{19}$$

Uzliksim robežnosacījumam (18) mazu perturbāciju

$$x(t,0) = x_0(t) + \delta x_0(t) \tag{20}$$

un meklēsim robežproblēmas (17), (19), (20) atrisinājumu sekojošā formā

$$x(t,\tau) = x_0(t) + \delta x(t,\tau). \tag{21}$$

Ievietojot izteiksmi (21) diferenciālvienādojumā (17) un tur ietilpstošās nelinearitātes izvirzot Teilora rindā, aprobežojoties tikai ar lineārajiem saskaitāmajiem, iegūstam diferenciālvienādojumu attiecībā pret otro saskaitāmo izteiksmes (21) labajā pusē, kuru īsuma dēļ apzīmēsim ar u:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}(t\frac{\partial u}{\partial t}) + \lambda \exp(x_0(t))u. \tag{22}$$

Robežnosacījumi (19), (20) šajā situācijā pieņem izskatu

$$\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial t} = 0, \quad u(1,\tau) = 0, \tag{23}$$

$$u(t,0) = \delta x_0(t). \tag{24}$$

Ja robežproblēmai (22), (23), (24) ir neierobežoti augošs atrisinājums, tad viegli saprast, ka atbilstošais robežproblēmas (14), (15) atrisinājums $x_0(t)$ nav stabils.

Robežproblēmas (22), (23), (24) atrisinājumu meklēsim formā

$$u(t.\tau) = v(t)w(\tau),$$

to ievietojot diferenciālvienādojumā (22), iegūstam

$$\frac{dw}{d\tau}\frac{1}{w} = (\frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t\frac{dv}{dt}) + \lambda \exp(x_0(t))v)\frac{1}{v} = -\alpha,$$

kur α ir nezināma konstante.

Diferenciālvienādojuma

$$\frac{dw}{d\tau} + \alpha w = 0$$

atrisinājums ir $w(\tau) = C\exp(-\alpha\tau)$, kur C ir integrācijas konstante. No šejienes redzam, ka diferenciālvienādojuma (22) ierobežotam atrisinājumam konstante α nevar būt negatīva.

Savukārt, diferenciālvienādojums

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t\frac{dv}{dt}) + \lambda \exp(x_0(t))v + \alpha v = 0 \tag{25}$$

ar robežnosacījumiem

$$v'(0) = 0, \quad v(1) = 0 \tag{26}$$

ļauj noteikt funkciju v. Robežproblēma (25), (26) ir Šturma - Liuvila problēma, kurai pie pastāvošajiem nosacījumiem, kā zināms, ir sanumurējams skaits īpašvērtību

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots,$$

kurām atbilst robežproblēmas (25), (26) atrisinājumi $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ - Šturma - Liuvila problēmas īpašfunkcijas. Līdz ar to diferenciālvienādojuma (22) atrisinājums izsakāms rindas veidā

$$u(t,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp(-\alpha_i \tau) v_i(t),$$

bet robežnosacījums (24) dod

$$\delta x_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i v_i(t).$$

Perturbācijas $\delta x_0(t)$ patvaļīguma dēļ pēdējais izvirzījums var saturēt visas Šturma - Liuvila problēmas (25), (26) īpašfunkcijas v_i, no kā izriet, ka robežproblēmas (22), (23), (24) visi atrisinājumi būs ierobežoti tikai tad, ja $\alpha_1 > 0$. Tātad robežproblēmas (14), (15) atrisinājums x_0 būs stabils, ja mazākā īpašvērtība α_1 Šturma - Liuvila problēmai (25), (26) ir pozitīva.

Šīs īpašvērtības praktiskai noteikšanai var lietot, piemēram, no skaitlisko metožu kursa pazīstamo Gaļorkina metodi.