Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
9. un 10. lekcija

1. Robežproblēmu atrisinājuma unitāte un nepārtrauktā atkarība

1.1. Robežproblēmu atšķirība no Košī problēmas

No parasto diferenciālvienādojumu kursa zināms, ka Košī problēmai

$$x' = f(t,x), \quad x(a) = A,$$

kur $f \in C(J \times R^n, R^n), a \in J, A \in R^n$ ir viens vienīgs apgabalā J turpināms atrisinājums, ja funkcija f pēc mainīgā x apmierina globālo Lipšica nosacījumu. Tādā gadījumā ir spēkā arī šīs Košī problēmas atrisinājuma nepārtrauktā atkarība no sākuma nosacījumā ietilpstošajiem parametriem a un A. Demonstrēsim piemērus, kuri pārliecinās, ka robežproblēmām situācija ir krietni sarežģītāka.

Piemērs 9.1. Robežproblēmai

$$x'' = -xx',$$

$$x(0) - x'(0) = -k^2, \quad x(\tau) + x'(\tau) = k^2,$$

$$k > 1, \quad \tau = \frac{1}{2k}\ln(\frac{k+1}{k-1}),$$

kā viegli pārliecināties eksistē divi atrisinājumi

$$x_1(t) = k\tanh(kt),$$

$$x_2(t) = \alpha \frac{\alpha \sinh(\alpha t) - r \cosh(\alpha t)}{\alpha \cosh(\alpha t) - \sinh(\alpha t)},$$

kur $\alpha = \sqrt{k^2 + r^2 - r}, r \in (0, 1)$ ir vienīgā transcendentā vienādojuma

$$\frac{1}{\alpha} \ln(\frac{\alpha + r}{\alpha - r}) = \frac{1}{2k} \ln(\frac{k+1}{k-1})$$

sakne.

Piemērs 9.2. Robežproblēmai

$$x'' + x = \frac{x^2}{1 + x^2},$$

$$x(0) = x(\pi) = 0$$

ir atrisinājums $x(t) = 0, \quad t \in [0, \pi]$, un viegli pārliecināties, ka citu atrisinājumu tai nav. Tajā pašā laikā robežproblēmai ar tiem pašiem robežnosacījumiem diferenciālvienādojumam

$$x'' + x = \frac{x^2}{1 + x^2} + \epsilon,$$

nav atrisinājuma, ja $\epsilon > 0$.

Tiešām, ja šai robežproblēmai būtu atrisinājums x_0, tad tas apmierinātu arī lineāru robežproblēmu

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = x(\pi) = 0,$$

kur

$$f(t) = \frac{x_0^2(t)}{1 + x_0^2(t)} + \epsilon, \quad t \in [0, \pi],$$

kas iespējams tikai pie nosacījuma

$$\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0,$$

bet šī vienādība neizpildās nevienam $\epsilon > 0$, no kā arī seko apgalvojums par atrisinājuma neeksistenci.

1.2. Unitātes teorēma Dirihlē problēmai

Aplūkosim Dirihlē problēmu

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \tag{2}$$

kur $f \in C([a,b] \times R^2, R); A, B \in R$.

Teorēma 9.3. Pieņemsim, ka funkcija f nedilst pēc otrā argumenta un katram $M > 0$ eksistē tāds $k \in R$, ka vai nu

$$\frac{f(t, x_1(t), x_1'(t)) - f(t, x_1(t), x_2'(t))}{x_1'(t) - x_2'(t)} \geq k,$$

vai arī

$$\frac{f(t, x_1(t), x_1'(t)) - f(t, x_1(t), x_2'(t))}{x_1'(t) - x_2'(t)} \leq k,$$

visām funkcijām $x_1, x_2 \in C_2([a,b], R)$, kuras apmierina novērtejumus

$$|x_i(t)| \leq M, \quad |x_i'(t)| \leq M, \quad t \in [a,b]; \quad i = 1, 2,$$

un visiem $t \in [a,b]$, ja vien $x_1'(t) \neq x_2'(t)$. Tad robežproblēmai (1), (2) nevar būt divu atrisinājumu.

Pierādījums Pieņemsim, ka robežproblēmai (1), (2) ir divi atrisinājumi x_1 un x_2. Aplūkosim funkciju

$$u(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad t \in [a,b].$$

Neierobežojot vispārību, varam uzskatīt, ka eksistē punkts $\tau \in (a,b)$, kurā $u(\tau) > 0$. Apzīmēsim ar (t_1, t_2) $(t_1 < t_2)$ lielāko intervālu, kurš satur punktu τ un kurā $u(t) > 0$. No robežnosacījumiem seko, ka $t_1, t_2 \in (a,b)$ un

$$u(t_1) = u(t_2) = 0$$

Parādīsim, ka visiem $t \in [t_1, t_2]$ $u'(t) > 0$. Tiešām, pretējā gadījumā atradīsies punkts $t_0 \in (t_1, t_2)$, kurā $u'(t_0) < 0$. Punkta t_0 apkārtnē, kur

$$u(t) < 0$$

, funkcija $v = u'$ apmierina lineāru pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$v' = F(t) + a(t), \qquad (3)$$

kur

$$F(t) = \frac{f(t, x_2(t), x_1'(t)) - f(t, x_2(t), x_2'(t)))}{x_1'(t) - x_2'(t)}$$

$$a(t) = f(t, x_1(t), x_1'(t)) - f(t, x_2(t), x_2'(t)).$$

Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem $a(t) \geq 0, \quad t \in [t_1, t_2]$. Noteiktības pēc pieņemsim, ka šajā intervālā $F(t) \leq k$, kur lielums k atbilst skaitlim

$$M = \max_{i=1,2}\{\max_{t\in[a,b]} |x_i(t)|, \max_{t\in[a,b]} |x_i'(t)|\}.$$

No diferenciālvienādojuma (3) iegūstam

$$v(t) = \exp(B(t))(v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-B(s))a(s)ds, \qquad (4)$$

kur

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} F(s)ds.$$

Tā kā $v(t_0) < 0$, tad no sakarības (4) seko, ka

$$u'(t) = v(t) \leq v(t_0)\exp(B(t)) \leq v(t_0)\exp(k(t - t_0)) < 0, \quad t \in [t_1, t_0].$$

Integrējot pēdējo nevienādību no t_1 līdz t_0, iegūstam $u(t_1) > u(t_0) > 0$, kas ir pretrunā punkta t_1 izvēlei. Tātad pieņēmums par punkta t_0 eksistenci izrādījies nepamatots. Beidzot, viegli saskatīt, ka nevienādības

$$u(t) > 0, \quad u'(t) \geq 0, \quad t \in (t_1, t_2)$$

nav savietojamas ar vienādību $u(t_2) = 0$. Teorēma pierādīta.

Piemērs 9.4. Turpinot demonstrēt robežproblēmu atšķirības no Koši problēmas, uzrādīsim Koši problēmu, kurai teorēmas 9.3 nosacījumi izpildās, bet nav spēkā atrisinājuma unitāte. Tiešām, Koši problēmai

$$x'' = x^{\frac{1}{3}}, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

eksistē divi atrisinājumi

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = (\frac{t}{\sqrt{6}})^3.$$

1.3. Nepārtrauktās atkarības teorēma Dirihlē problēmai

Tagad vienlaicīgi ar robežproblēmu (1), (2) aplūkosim robežproblēmu

$$x'' = h(t, x, x'), \tag{5}$$

$$x(a) = \tilde{A}, \quad x(b) = \tilde{B}, \tag{6}$$

kur $h \in C([a, b] \times R^2, R)$; $\tilde{A}, \tilde{B} \in R$. Pieņemsim, ka robežproblēmai (1), (2) ir viens vienīgs atrisinājums x_0, bet robežproblēma (5), (6) tiek apskatīta tādiem $h, \tilde{A}, \tilde{B}$, ka tai atrisinājums eksistē, pie tam eksistē tāds $M > 0$, ka katram robežproblēmas (5), (6) atrisinājumam x ir spēkā novērtējums

$$\max_{t \in [a,b]} |x_0^{(j)}(t) - x^{(j)}(t)| \leq M; \quad j = 0, 1.$$

Teorēma 9.5 Pie nosacījumiem, kuri uzlikti robežproblēmām (1), (2) un (5), (6), katram $\epsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka, ja

$$|f(t, x, y) - h(t, x, y)| + |A - \tilde{A}| + |B - \tilde{B}| < \delta, \quad (t, x, y) \in [a, b] \times R^2,$$

tad

$$|x_0(t) - x(t)| < \epsilon, \quad |x_0'(t) - x'(t)| < \epsilon, \quad t \in [a, b].$$

Pierādījums. Ja teorēmas apgalvojums neizpildās, tad atradīsies skaitlis $\epsilon > 0$ un katram naturālam k funkcija $f_k \in C([a, b] \times R^2, R)$, skaitļi $A_k, B_k \in R$ un robežproblēmas

$$x'' = f_k(t, x, x'), \quad x(a) = A_k, \quad x(b) = B_k$$

atrisinājums $x_k \in C_2([a, b], R)$, kuram

$$\max_{t \in [a,b]} |x_0^{(j)}(t) - x_k^{(j)}(t)| \leq M; \quad j = 0, 1;$$

$$|f(t, x_k(t), x_k'(t)) - f_k(t, x_k(t), x_k'(t))| < \frac{1}{k}, \quad t \in [a, b],$$

$$|A - A_k| < \frac{1}{k}, \quad |B - B_k| < \frac{1}{k}$$

un vismaz vienam $j \in \{0, 1\}$

$$\max_{t \in [a,b]} |x_0^{(j)}(t) - x_k^{(j)}(t)| \geq \epsilon; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Funkciju virkņu $k \to x_k, \quad k \to x_k'$ vienmērīgā ierobežotība, kā arī virknes $k \to x_k$ vienādā nepārtrauktība ir acīmredzamas. Parādīsim virknes x_k' vienādo nepārtrauktību. Visiem $t_1, t_2 \in [a,b] \quad (t_1 < t_2), \quad k \in \{1,2,\ldots\}$ ir spēkā novērtējumu virkne

$$|x_k'(t_1) - x_k'(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |x_k''(t)|dt \leq$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |f_k(t, x_k(t), x_k'(t)) - f(t, x_k(t), x_k'(t)) + f(t, x_k(t), x_k'(t))|dt \leq$$

$$\frac{1}{k}(t_2 - t_1) + \tilde{M}(t_2 - t_1) \leq (1 + \tilde{M})(t_2 - t_1),$$

kur

$$\tilde{M} = max\{|f(t,x,y)| : t \in [a,b], |x - x_0(t)| \leq M, |y - x_0'| \leq M\}.$$

Neierobežojot vispārību, varam uzskatīt, ka aplūkojamā funkciju virkne konverğē uz funkciju $y \in C_2([a,b], R)$, pie tam

$$\max_{t\in[a,b]} |x_0^{(j)}(t) - y^{(j)}(t)| \leq M; \quad j = 0, 1;$$

un vismaz vienam $j \in \{0, 1\}$

$$\max_{t\in[a,b]} |x_0^{(j)}(t) - y^{(j)}(t)| \geq \epsilon,$$

turklāt funkcija y apmierina nosacījumus (2). Beidzot, veicot robežpāreju, iegūstam

$$\lim_{k\to\infty} |f(t, y(t), y'(t)) - f_k(t, x_k(t), x_k'(t))| \leq$$

$$\lim_{k\to\infty} |f(t, y(t), y'(t)) - f(t, x_k(t), x_k'(t))| +$$

$$\lim_{k\to\infty} |f(t, x_k(t), x_k'(t)) - f_k(t, x_k(t), x_k'(t)| \leq$$

$$\lim_{k\to\infty} |f(t, y(t), y'(t)) - f(t, x_k(t), x_k'(t))| + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Tātad y apmierina arī diferenciālvienādojumu (1), bet konstrukcijas dēļ nesakrīt ar robežproblēmas (1), (2) vienīgo atrisinājumu $x_0(t)$. Iegūtā pretruna noslēdz teorēmas pierādījumu.

2. Robežproblēmu skaitliska risināšana, izmantojot diferencēšanu pēc parametra

2.1. Metodes vienkāršākā shēma Dirihlē problēmai

Aplūkosim Dirihlē problēmu diferenciālvienādojumam

$$x'' = f(t, x, x', \lambda), \tag{7}$$

kur $f \in C([a,b] \times R^3, R)$, ar robežnosacījumiem (2). Tās atrisinājumu varam uzlūkot arī kā parametra λ funkciju, tādēļ to apzīmēsim ar $x(t, \lambda)$.

Pieņemsim, ka pie parametra λ vērtības λ_0 ir iegūts robežproblēmas (7), (2) atrisinājums $x(t, \lambda_0)$, un ir nepieciešams atrast tās atrisinājumu $x(t, \lambda_1)$, kur $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$. Šim nolūkam ievedīsim funkciju

$$\phi(t) = \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} \tag{8}$$

un atvasināsim diferenciālvienādojumu (7) un robežnosacījumus (2) pēc λ. Iegūstam

$$\phi'' = \frac{\partial f}{\partial x}\phi + \frac{\partial f}{\partial x'}\phi' + \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \tag{9}$$

$$\phi(a) = 0, \quad \phi(b) = 0. \tag{10}$$

Sakarībā (9) ietilpstošos funkcijas f parciālos atvasinājumus izrēķinot pie $\lambda = \lambda_0$, iegūstam lineāru diferenciālvienādojumu attiecībā pret funkciju ϕ. Atrisinot lineāro Dirihlē problēmu (9), (10) un integrējot vienādību (7) no λ_0 līdz λ_1, iegūstam

$$x(t, \lambda_1) = x(t, \lambda_0) + \phi(t)\Delta\lambda. \tag{11}$$

Ja $\Delta\lambda$ ir mazs, tad formula (11) dod labu atrisinājuma $x(t, \lambda_1)$ tuvināto vērtību. Ja $\Delta\lambda$ ir liels, tad intervālu starp λ_0 un λ_1 sadalām vairākos mazos apakšintervālos un atkārtoti risinām Dirihlē problēmu (9), (10), pielietojot formulu (11) katram no šiem apakšintervāliem.

2.2. Metodes lietojums Foknera-Skeinas vienādojuma robežproblēmai

Piemērs 10.1. Pielietosim aprakstīto metodi Foknera-Skeinas vienādojuma robežproblēmai

$$x''' + \frac{1}{2}xx'' + \beta(1 - (x')^2) = 0, \tag{12}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x'(+\infty) = 1, \tag{13}$$

jo Foknera-Skeinas vienādojums (12) pie parametra vērtības $\beta = 0$ pārvēršas Blaziusa vienādojumā, kuram robežproblēmu ērti varam atrisināt ar transformācijas metodi. Apzīmēsim šo speciālajā gadījumā iegūto atrisinājumu ar z. Ievedīsim mainīgo

$$\phi(t) = \frac{\partial x(t, \beta)}{\partial \beta}$$

un atvasināsim diferenciālvienādojumu (12) un robežnosacījumus (13) pēc β, ievietojot iegūtajā sakarībā Blaziusa vienādojuma atrisinājumu z. Iegūstam lineāru robežproblēmu

$$\phi''' + \frac{1}{2} z\phi'' + 2\beta z'\phi' + \frac{1}{2} z''\phi = (z')^2 - 1,$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi'(+\infty) = 0.$$

Šo robežproblēmu varam risināt ar superpozīcijas metodi, meklējot tās atrisinājumu formā $\phi(t) = u(t) + cv(t)$. Funkciju u un v atrašanai jārisina Košī problēmas

$$u''' + \frac{1}{2} zu'' + 2\beta z'u' + \frac{1}{2} z''u = (z')^2 - 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0.$$

$$v''' + \frac{1}{2} zv'' + 2\beta z'v' + \frac{1}{2} z''v = (z')^2 - 1,$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(0) = 1.$$

Konstanti c noteiksim ar sakarību

$$\lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{u'(t)}{v'(t)}\right).$$

Līdz ar to robežproblēmas (12), (13) atrisinājums x mazām parametra β vērtībām tuvināti izsakāms ar formulu

$$x(t) = z(t) + \phi(t)\beta.$$

Ja robežproblēma (12), (13) jārisina patvaļīgai parametra β vērtībai, tad atrisinājumu iegūstam, izmantojot mazu parametra β maiņas soli $\frac{\beta}{n}$ un n reizes atkārtojot uzrādīto algoritmu.

2.3. Kubičeka-Hlavačeka metode

Parādīsim punktā 2.1. aprakstītās metodes modifikāciju, kuru literatūrā sauc par **Kubičeka-Hlavačeka metodi**.

Ja x ir Dirihlē problēmas (7), (2) atrisinājums, tad ievedīsim apzīmējumu $C = x'(a)$, acīmredzot $C = C(\lambda)$. Atvasinot diferenciālvienādojumu (7) un sākuma nosacījumus

$$x(a) = A, \quad x'(a) = C \tag{14}$$

pēc λ, iegūstam diferenciālvienādojumu (9) un sākuma nosacījumus

$$\phi(a) = 0, \quad \phi'(a) = 0, \tag{15}$$

kur

$$\phi(t) = \frac{\partial x(t, \lambda, C)}{\partial \lambda},$$

bet atvasinot diferenciālvienādojumu (7) un sākuma nosacījumus (14) pēc C, iegūstam

$$\psi'' = \frac{\partial f}{\partial x}\psi + \frac{\partial f}{\partial x'}\psi' + \frac{\partial f}{\partial C}, \tag{16}$$

$$\psi(a) = 0, \quad \phi'(a) = 1, \tag{17}$$

kur

$$\psi(t) = \frac{\partial x(t, \lambda, C)}{\partial C}.$$

Izmantojot otro no robežnosacījumiem (2), ievedīsim funkciju

$$F(\lambda, C) = x(b, \lambda, C) - B. \tag{18}$$

Meklējamajai funkcijai $C(\lambda)$ izpildās

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial F}{\partial C}dC = 0,$$

no šejienes

$$\frac{dC}{d\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\frac{\partial F}{\partial C})^{-1},$$

bet, ievērojot (18)

$$\frac{dC}{d\lambda} = -\frac{\phi(b)}{\psi(b)}. \tag{19}$$

Atrisinot pie kāda $\lambda = \lambda_0$ Košī problēmas (9), (15) un (16), (17), kā arī zinot vērtību $c(\lambda_0)$ un integrējot vienādību (19) no λ_0 līdz λ_1 , iegūstam tuvinātu vērtību lielumam $c(\lambda)$. Līdz ar to robežproblēma (7), (2) reducēta uz Košī problēmu.

Vingrinājums 10.2. Pielietot Kubičeka-Hlavačeka metodi punktā 2.2. aplūkotajai Foknera-Skeinas vienādojuma robežproblēmai.