Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
11. un 12. lekcija

1. Dirihlē problēmas atrisināmība

1.1. Apakšējā un augšējā funkcijas

Aplūkosim robežproblēmu

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \tag{2}$$

kur $f \in C([a, b] \times R^2, R)$; $\quad A, B \in R$.
Ja $x, y, z \in R$, tad ievedīsim apzīmējumu

$$\delta(x, y, z) = 2^{-1}(x + |x - y| - |y - z| + z)$$

Pieņemsim, ka eksistē funkcijas

$$\alpha, \beta \in C_2([a, b], R); \quad \phi, \psi \in C([a, b], R)$$

tādas, ka

$$\alpha(a) \leq A \leq \beta(a), \quad \alpha(b) \leq B \leq \beta(b),$$

šo funkciju definīcijas apgabalā ir spēkā nevienādības

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad \phi(t) \leq \psi(t),$$

$$\phi(t) \leq \alpha'(t) \leq \psi(t)$$

$$\phi(t) \leq \beta'(t) \leq \psi(t)$$

un izpildās nosacījumi:

(A)

funkciju definīcijas apgabalā spēkā nevienādības

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)),$$

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)),$$

(B)

katram $x \in C_2([a, b], R)$ tā definīcijas apgabalā no sakarībām

$$x'' = f(t, x(t), \delta(\phi(t), x', \psi(t))) \tag{3}$$

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \tag{4}$$

seko nevienādības

$$\phi(t) \leq x'(t) \leq \psi(t). \tag{5}$$

Šādi nosacījumu apzīmējumi ir literatūrā tradicionāli pieņemti - par **(A)** tipa nosacījumiem sauc nosacījumus, kuri nodrošina atrisinājuma aprioro novērtējumu, bet par **(B)** tipa nosacījumiem sauc nosacījumus, kuri nodrošina ierobežota atrisinājuma atvasinājuma aprioro novērtējumu.

Teorēma 11.1. Nosacījumi **(A)** un **(B)** ir nepieciešami un pietiekami robežproblēmas (1), (2) atrisināmībai, pie tam eksistē tāds šīs problēmas atrisinājums $x : [a, b] \to R$, kuram izpildās novērtējumi (4) un (5).

Pierādījums. Nosacījumu **(A)** un **(B)** nepieciešamība robežproblēmas (1), (2) atrisināmībai ir acīmredzama.

Tiešām, pieņemsim, ka x ir tās atrisinājums un definēsim

$$\alpha(t) = \beta(t) = x(t), \quad \phi(t) = \psi(t) = x'(t), \quad t \in [a, b].$$

Redzam, ka teorēmas nosacījumi un apgalvojums izpildās triviālā kārtā.

Lai pierādītu pietiekamību, definēsim funkciju $F : [a, b] \times R^2 \to R$ sekojoši

$$F(t, x, x') = -\delta(\alpha(t), x, \beta(t)) + f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(\phi(t), x', \psi(t))).$$

Tā kā funkcija F savā definīcijas apgabalā ir nepārtraukta un ierobežota, tad saskaņā ar teorēmu par kvazilineāras robežproblēmas atrisināmību vienādojumam

$$x'' = x + F(t, x, x') \tag{6}$$

ar robežnosacījumiem (2) eksistē atrisinājums, kuru apzīmēsim ar u.

Parādīsim, ka izpildās nevienādība

$$\alpha(t) \leq u(t), \quad t \in [a, b]. \tag{7}$$

Pieņemsim, ka šī nevienādība neizpildās un punkts $t_0 \in [a, b]$ ir punkts, kurā

$$\alpha(t_0) > u(t_0), \quad \alpha'(t_0) > u'(t_0), \quad \alpha''(t_0) > u''(t_0).$$

No robežnosacījuma (2) izriet, ka t_0 ir apgabala $[a, b]$ iekšējs punkts. Tādā gadījumā izpildās

$$u''(t_0) = u(t_0) - \delta(\alpha(t_0), u(t_0), \beta(t_0)) +$$

$$f(t_0, \delta(\alpha(t_0), u(t_0), \beta(t_0)), \delta(\phi(t_0), u'(t_0), \psi(t_0))) =$$

$$u(t_0) + f(t_0, \alpha(t_0), \alpha'(t_0)) - \alpha(t_0) \leq \alpha''(t_0) - (\alpha(t_0) - u(t_0)) < \alpha''(t_0).$$

Iegūtā pretruna rāda, ka nevienādība (7) ir pareiza.

Analoģiski pierādāma arī nevienādība

$$u(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b]. \tag{8}$$

No (7) un (8), kā arī funkciju δ, F definīcijām seko, ka u apmierina diferenciālvienādojumu

$$u'' = f(t, u, \delta(\phi(t), u', \psi(t))),$$

pie tam

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b].$$

Tādēļ no nosacījuma **B** seko, ka

$$\phi(t) \leq u'(t) \leq \psi(t), \quad t \in [a, b],$$

un līdz ar to u ir robežproblēmas (1), (2) atrisinājums. Teorēma pierādīta.

Definīcija 11.2. Funkcijas α un β, kuras figurē nosacījumā **A**, atbilstoši sauc par **apakšējo** un **augšējo** funkcijām.

Ar apakšējo un augšējo funkcijām mēs sastapāmies jau 4.lekcijas izklāstā par aprioro novērtējumu metodes shēmu, tiesa gadījumā, kad diferenciālvienādojuma labā puse nav atkarīga no nezināmās funkcijas atvasinājuma. Tur minētais par šo funkciju praktisku konstrukciju pilnā mērā attiecināms arī uz teorēmā 11.1. aplūkoto vispārīgāko gadījumu.

Apakšējai un augšējai funkcijām uzlikti viegli pārbaudāmi nosacījumi diferenciālnevienādību formā. Nosacījuma **B** tieša pārbaude nav iespējama, tādēļ formulēsim un pierādīsim teorēmu, kur arī funkcijām ϕ un ψ uzlikti nosacījumi diferenciālnevienādību formā.

Teiksim, ka izpildās nosacījums B_0, ja papildus iepriekšējiem pieņēmumiem funkcijas $\phi, \psi \in C_1([a,b] \times R, R)$ un eksistē tādi skaitļi $\gamma_1, \gamma_2 \in \{-1, 1\}$, ka izpildās sekojošās sakarības:

$$(f(t, x, \phi(t)) - \phi'(t))\gamma_1 \geq 0, \quad t \in [a, b],$$

$$(f(t, x, \psi(t)) - \psi'(t))\gamma_2 \geq 0, \quad t \in [a, b],$$

$$(1 + \gamma_1)\alpha(a) + (1 - \gamma_1)\beta(b) = (1 + \gamma_1)A + (1 - \gamma_1)B,$$

$$(1 - \gamma_2)\beta(a) + (1 + \gamma_2)\alpha(b) = (1 - \gamma_2)A + (1 + \gamma_2)B.$$

Teorēma 11.3. Ja izpildās nosacījums B_0, tad izpildās arī nosacījums**B**.

Pierādījums. Lai teorēmas apgalvojumu pierādītu, jāparāda, ka diferenciālvienādojuma (3) atrisinājumiem, kuri apmierina novērtējumu (4), spēkā nevienādība (5).

Pieņemsim, ka x ir diferenciālvienādojuma (3) patvaļīgs atrisinājums, un vispirms parādīsim, ka apgabalā $[a, b]$ no nevienādības

$$x'(t) \leq \phi(t) \tag{9}$$

seko nevienādība

$$\gamma_1(x''(t) - \phi'(t)) \geq 0. \tag{10}$$

Tiešām, pieņemsim, ka kādam $t \in [a, b]$ izpildās nevienādība (9), tad saskaņā ar nosacījumu B_0

$$\gamma_1(x''(t) - \phi'(t)) = \gamma_1(f(t, x(t), \delta(\phi(t), x', \psi(t))) - \phi'(t)) =$$

$$\gamma_1(f(t, x(t), \phi(t)) - \phi'(t)) \geq 0,$$

un nevienādība (10) pierādīta.

Tagad pierādīsim pirmo no nevienādībām (5). Ja $\gamma_1 = 1$,tad no nosacījuma B_0 seko

$$\alpha(a) = A = x(a), \quad x'(a) \geq \alpha'(a) \geq \phi(a).$$

Kādam $t_0 \in (a,b]$ $\quad x'(t_0) < \phi(t_0)$, tādēļ atradīsies tāds $t_1 \in [a, t_0)$, ka

$$x'(t_1) = \phi(t_1), \quad x'(t) < \phi(t), \quad t \in (t_1, t_0],$$

bet kādam $t_2 \in (t_1, t_0]$ $\quad x''(t_2) < \phi'(t_2)$, kas nav iespējams nevienādības (10) dēļ. Savukārt, ja $\gamma_1 = -1$, tad

$$\beta(b) = B = x(b), \quad x'(b) \geq \beta'(b) \geq \phi(b).$$

Kādam $t_0 \in [a,b)$ $\quad x'(t_0) < \phi(t_0)$, tādēļ atradīsies tāds $t_1 \in (t_0, b]$, ka

$$x'(t_1) = \phi(t_1), \quad x'(t) < \phi(t), \quad t \in [t_0, t_1),$$

bet kādam $t_2 \in [t_0, t_1)$ $\quad x''(t_2) > \phi'(t_2)$, kas atkal nav iespējams nevienādības (10) dēļ.

Lai pierādītu otro no nevienādībām (5), rīkosimies analoģiski, izmantojot nosacījumu B_0. Teorēma pierādīta.

Teorēma 11.3. rāda, ka funkcijām ϕ, ψ uzliktie nosacījumi diferenciālnevienādību formā rada papildu nosacījumus apakšējai un augšējai funkcijām α un β apgabala $[a,b]$ galapunktos. Tādēļ atbrīvosimies no šiem papildu nosacījumiem, uzliekot **B** tipa nosacījumus diferenciālvienādojuma (1) labajai pusei.

1.2. Nagumo nosacījums

Teorēma 12.1. Pieņemsim, ka spēkā novērtējums

$$|f(t,x,x')| \leq w(|x'|), \quad t \in [a,b], x \in [\alpha(t), \beta(t)], x' \in R, \tag{11}$$

$w \in C([0,+\infty),(0,+\infty))$, un skaitlim

$$\lambda = max\{\frac{|\alpha(b) - \beta(a)|}{b-a}, \frac{|\alpha(a) - \beta(b)|}{b-a}\}$$

izpildās

$$\int_\lambda^{+\infty} \frac{sds}{w(s)} > \max_{t\in[a,b]} \beta(t) - \min_{t\in[a,b]} \alpha(t), \tag{12}$$

tad spēkā nosacījums **B**.

Pierādījums. Izmantojot skaitli M, kuru nevienādības (12) dēļ nosaka vienādība

$$\int_\lambda^{M} \frac{sds}{w(s)} = \max_{t\in[a,b]} \beta(t) - \min_{t\in[a,b]} \alpha(t), \tag{13}$$

un skaitli

$$N = 1 + \max\{M, \max_{t\in[a,b]} |\alpha'(t)|, \max_{t\in[a,b]} |\beta'(t)|\}, \tag{14}$$

definēsim funkcijas ϕ un ψ sekojoši:

$$-\phi(t) = \psi(t) = N, \quad t \in [a, b].$$

Parādīsim, ka šādi definētām funkcijām ϕ un ψ izpildās nosacījums **B**.

Pieņemsim, ka $x : [a, b] \to R$ ir diferenciālvienādojuma

$$x'' = f(t, x, \delta(-N, x', N)) \tag{15}$$

atrisinājums, kurš apmierina nevienādības (4). Ja mēs varēsim parādīt, ka šis atrisinājums apmierina arī nevienādības

$$-N \le x'(t) \le N, \quad t \in [a, b], \tag{16}$$

tad nosacījuma **B** izpilde būs pierādīta.

Šim nolūkam vispirms parādīsim, ka kādam $t_0 \in [a, b] \quad |x'(t_0)| \le \lambda$. Tiešām, pieņemot, ka visiem $t \in [a, b] \quad x'(t) > \lambda$, iegūstam

$$x(b) - x(a) > \lambda \int_a^b dt = \lambda(b - a) = \max\{|\alpha(b) - \beta(a)|, |\alpha(a) - \beta(b)|\},$$

kas nav iespējams nevienādību (4) dēļ. Līdzīgi pretrunu iegūstam no pieņēmuma, ka visiem $t \in [a, b] \quad x'(t) < -\lambda$.

Tālāk noteiktības pēc pierādīsim otro no nevienādībām (16). Pieņemsim pretējo. Tā kā esam konstatējuši, ka

$$|x'(t_0)| \le \lambda, N,$$

tad atradīsies tādi $t_1, t_2 \in [a, b]$, ka

$$x'(t_1) = \lambda, \quad x'(t_2) = N.$$

Neierobežojot vispārību, uzskatīsim, ka $t_1 < t_2$ (pretējā gadījumā mēs diferenciālvienādojumā izdarītu mainīgo maiņu $t = -s$, kura novērtējumu (16) nemainītu), turklāt

$$\lambda \le x'(t) \le N, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Saskaņā ar funkcijas δ definīciju pie $t \in [t_1, t_2]$ iegūstam nevienādību

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \le w(|x'(t)|),$$

kuru varam pārrakstīt sekojoši

$$\frac{x''(t)x'(t)}{w(|x'(t)|)} \leq x'(t).$$

Integrējot šo nevienādību no t_1 līdz t_2 un izdarot tās kreisajā pusē mainīgo maiņu $x'(t) = s$, bet tās labajā pusē mainīgo maiņu $x(t) = z$, iegūstam

$$\int_{\lambda}^{N} \frac{sds}{w(s)} \leq \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} ds \leq \max_{t\in[a,b]} \beta(t) - \min_{t\in[a,b]} \alpha(t).$$

Tā kā $N > M$, tad šī nevienādība ir pretrunā ar nevienādību (13).

Līdzīgā veidā varam parādīt , ka spēkā arī pirmā no pierādāmajām nevienādībām (16). Līdz ar to teorēmas pierādījums noslēdzies.

Piezīme 12.2. Teorēmas 12.1. nosacījumu sauc par **vispārināto Nagumo nosacījumu**. Tas tādēļ, ka klasiskajos japāņu matemātiķa Nagumo darbos figurē tikai prasība, lai nevienādības (12) kreisajā pusē esošais neīstais integrālis diverģētu. Tātad mūsu minētais nosacījums vispārina **Nagumo nosacījumu**. Viegli pārliecināties, ka izvēloties

$$w(s) = c(1 + s^2), \quad c > 0,$$

Nagumo nosacījums izpildās, un esam ieguvuši jau no 4.lekcijas pazīstamo **Bernšteina nosacījumu**.

1.3. Šrēdera nosacījums

Tagad formulēsim citus Dirihlē problēmas (1), (2) atrisināmības nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, kuros **B** tipa nosacījums izteikts ar diferenciālvienādojuma (1) atrisinājuma īpašību palīdzību.

Definīcija 12.3. Pieņemsim, ka $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, un teiksim, ka diferenciālvienādojumam (1) apgabalā

$$\omega = \{(t, x, x') : t \in [a, b], x \in [\alpha(t), \beta(t)], x' \in R\}$$

izpildās nosacījums B_i, ja visiem $t_1 \in [a, b)$, $\quad t_2 \in (t_1, b]$ neeksistē tāds diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums $x : (t_1, t_2) \to R$, kurš šajā apgabalā apmierina novērtējumu (4) un kuram

$$\limsup_{t\to t_1+} x'(t) = +\infty, \quad (i=1),$$

$$\limsup_{t\to t_2-} x'(t) = +\infty, \quad (i=2),$$

$$\liminf_{t\to t_1+} x'(t) = -\infty, \quad (i=3),$$

$$\liminf_{t\to t_2-} x'(t) = -\infty, \quad (i=4).$$

Nosacījumu B_1, B_2, B_3, B_4 apvienojumu sauc par **Šrēdera nosacījumu**.

Teorēma 12.4. Dirihlē problēmas (1) (2) atrisināmībai nepieciešami un pietiekami, lai izpildītos nosacījums **A** un Šrēdera nosacījums.

Pierādījums. Nosacījumu nepieciešamība izpildās triviālā kārtā. Tiešām, ja x ir Dirihlē problēmas (1), (2) atrisinājums, tad atliek izvēlēties

$$\alpha(t) = \beta(t) = x(t), \quad t \in [a,b].$$

Pietiekamības pierādījumam izvēlēsimies skaitļus N, kuri apmierina vienādību (14), un ievedīsim funkcijas $F_N : [a,b] \times R^2 \to R$ sekojoši

$$F_N(t,x,x') = f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(-N, x', N)).$$

Saskaņā ar teorēmu par kvazilineāras robežproblēmas atrisināmību, diferenciālvienādojumam

$$x'' = F_N(t,x,x')$$

eksistē atrisinājums x_N, kurš apmierina robežnosacījumus (2). Tāpat kā teorēmas 11.1. pierādījumā iespējams parādīt, ka šim atrisinājumam izpildās novērtējums

$$\alpha(t) \le x_N(t) \le \beta(t), \quad t \in [a,b].$$

Tālāk ievedīsim funkciju $G_N : R^3 \to R$

$$G_N(t,x,x') = F_N(\delta(a,t,b), x, x')$$

un turpināsim nepārtraukti atrisinājumu x_N uz visas ass R, lai ārpus apgabala $[a,b]$ tas apmierinātu diferenciālvienādojumu

$$x'' = G_N(t,x,x').$$

To iespējams izdarīt, jo funkcija G_N savā definīcijas apgabalā ir ierobežota un nepārtraukta visiem N. Katrā kompaktā R^3 apakšapgabalā funkciju virkne $N \to G_N$ konverģē vienmērīgi uz funkciju h, kura pierakstāma šādi:

$$h(t, x, x') = f(\delta(a, t, b), \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), x').$$

Izvēlēsimies punktus $t_N \in (a, b)$, kuros

$$x_N(b) - x_N(a) = x'_N(t_N)(b - a).$$

Tādā gadījumā

$$|x'_N(t_N)| = \frac{|x_N(b) - x_N(a)|}{b - a} = \frac{|B - A|}{b - a}.$$

Tā kā funkciju virknes

$$N \to t_N, \quad N \to x_N(t_N), \quad N \to x'_N(t_N)$$

ir ierobežotas, tad, neierobežojot vispārību, uzskatīsim, ka līdz ar $N \to +\infty$

$$t_N \to t_0, \quad x_N(t_N) \to \bar{x}_0, \quad x'_N(t_N) \to \bar{x}'_0,$$

un x_0 ir Košī problēmas

$$x'' = h(t, x, x'), \quad x(t_0) = \bar{x}_0, \quad x'(t_0) = \bar{x}'_0$$

atrisinājums ar maksimālo turpināmības intervālu (w_-, w_+), kurš iegūts, izdarot atbilstošo robežpāreju funkciju virknē $N \to x_N$.

Funkcijai x_0 tātad apgabalu (a, b) un (w_-, w_+) šķēlumā spēkā novērtējums

$$\alpha(t) \leq x_0(t) \leq \beta(t), \tag{17}$$

un līdz ar to, funkcijas h definīcijas dēļ x_0 minētajā apgabalu šķēlumā apmierina arī diferenciālvienādojumu (1). Novērtējuma (17), nosacījumu B_1 un B_3 dēļ $a > w_-$, bet novērtējuma (17), nosacījumu B_2 un B_4 dēļ $b < w_+$, tātad atrisinājums x_0 apmierina arī robežnosacījumus (2). Teorēmas pierādījumu noslēdz aprioro novērtējumu metodes standarta spriedums.

Vingrinājums 12.5. Parādīt, ka Šrēdera nosacījumu teorēmas 12.4. formulējumā var aizstāt ar jebkuru no sekojošajiem nosacījumu komplektiem:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \alpha(b) = B = \beta(b), \quad \mathbf{B_1}, \mathbf{B_3},\\
&(2) \quad \alpha(a) = A = \beta(a), \quad \mathbf{B_2}, \mathbf{B_4},\\
&(3) \quad \alpha(a) = A, \alpha(b) = B, \quad \mathbf{B_1}, \mathbf{B_4},\\
&(4) \quad \beta(a) = A, \beta(b) = B, \quad \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}.
\end{aligned}
$$

Redzam, ka šajos formulējumos iespēja pavājināt Šrēdera nosacījumu kompensēta ar ierobežojumiem apakšējās un augšējās funkciju vērtībām aplūkojamā apgabala $[a, b]$ galapunktos.