Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
13. un 14. lekcija

1. Dirihlē problēmas atrisināmība (turpinājums)

1.1. Atrisināmība kā atrisinājuma unitātes sekas

Formulēsim un pierādīsim Dirihlē problēmas atrisināmības teorēmu, kura ilustrē iespēju konstatēt atrisinājuma eksistenci ja spēkā atrisinājuma unitāte.

Papildus pieņemsim, ka eksistē skaitļi $c \in (-\infty, a)$, $\quad d \in (b, +\infty)$ tādi, ka diferenciālvienādojuma

$$x'' = f(t, x, x') \tag{1}$$

labā puse $F \in C([c, d] \times R^2, R)$ un tā atrisinājumi visā šajā plašākajā apgabalā apmierina Šrēdera nosacījumu.

Teorēma 13.1. Pieņemsim, ka visiem

$$t_1 \in (c, d), \quad t_2 \in (t_1, d), \quad x_1, x_2 \in R,$$

Dirihlē problēmai diferenciālvienādojumam (1) ar robežnosacījumiem

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2$$

nevar būt divu atrisinājumu. Tad Dirihlē problēmai diferenciālvienādojumam (1) ar robežnosacījumiem

$$x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{2}$$

eksistē atrisinājums.

Pierādījums. Diferenciālvienādojumam (1) aplūkosim Koši problēmu ar sākuma nosacījumiem

$$x(b) = B, \quad x'(b) = 0,$$

un tās atrisinājumu apzīmēsim ar x_b.

Ja $x_b(a) = A$, tad teorēmas apgalvojums konstatēts. Pieņemsim, ka tā tas nav, un, neierobežojot vispārību, uzskatīsim, ka $x_b(a) < A$ (pretējā gadījumā mēs diferenciālvienādojumā (1) izdarītu mainīgo maiņu $y = -x$). Turpināsim atrisinājumu x_b apgabalā $(c, a]$, un ar x_a apzīmēsim Koši problēmas atrisinājumu diferenciālvienādojumam (1) ar sākuma nosacījumiem

$$x(a) = A, \quad x'(a) = 0,$$

kuru arī turpināsim apgabalā $(c, a]$. Kādam $t_1 \in (c, a]$ izpildīsies

$$x_b(t) < x_a(t), \quad t \in [t_1, a].$$

Aplūkosim diferenciālvienādojumam (1) Dirihlē problēmu ar robežnosacījumiem

$$x(t_1) = x_b(t_1), \quad x(a) = A, \tag{3}$$

kurai eksistē atrisinājums $x^* : [t_1, a] \to R$, jo funkcijas x_b un x_a ir robežproblēmas (1), (3) apakšējā un augšējā funkcijas. Turpinot atrisinājumu x^* apgabalā $[a, b]$, iegūstam

$$x^*(t) > x_b(t), \quad t \in (t_1, b),$$

pretējā gadījumā neizpildītos teorēmas nosacījums par Dirihlē problēmas atrisinājuma unitāti. Izvēloties apgabalā $[a, b]$ x_b par apakšējo, bet x_a par augšējo funkcijām, saskaņā ar teorēmu 12.2. konstatējam, ka Dirihlē problēmai (1), (2) eksistē atrisinājums, kurš turklāt ir viens vienīgs. Teorēma pierādīta.

1.2. Atrisinājuma, kurš apmierina aprioro novērtējumu, unitāte

Pieņemsim, ka diferenciālvienādojuma (1) labajai pusei eksistē arī nepārtraukti parciālie atvasinājumi $\partial f/\partial x, \partial f/\partial x'$.

Ja u ir apgabalā $[a, b]$ definēts diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums, tad diferenciālvienādojumu

$$x'' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t), u'(t))x + \frac{\partial f}{\partial x'}(t, u(t), u'(t))x' \tag{4}$$

sauksim par diferenciālvienādojuma (1) linearizēto diferenciālvienādojumu.

Šajā paragrāfā pieņemsim, ka eksistē funkcijas $\alpha, \beta \in C([a, b], R)$, diferenciālvienādojumam (1) apgabalā

$$\omega = \{(t, x, x') : t \in [a, b], x \in [\alpha(t), \beta(t)], x' \in R\}$$

izpildās Šrēdera nosacījums, un visiem diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumiem x, kuri apmierina novērtējumu

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b],$$

atbilstošā linearizētā diferenciālvienādojuma (4) atrisinājumam, kurš apmierina sākuma nosacījumus

$$x(a) = 0, \quad x'(a) = 1,$$

izpildās $x(t) \neq 0, \quad t \in (a, b]$.

Definīcija 13.2. Teiksim, ka Dirihlē problēmas (1), (2) atrisinājumam x_0 spēkā **lokālā unitāte**, ja eksistē $\epsilon > 0$ tāds, ka jebkuram citam Dirihlē problēmas (1), (2) atrisinājumam x no nevienādībām

$$|x(t) - x_0(t)| < \epsilon, \quad |x'(t) - x_0'(t)| < \epsilon,$$

seko

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 13.3. Pie augstāk minētajiem pieņēmumiem, ja x_0 ir diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums, kurš apmierina novērtējumu

$$\alpha(t) \leq x_0(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b],$$

visiem $c \in [a,b), \quad d \in (c,b]$ Dirihlē problēmai diferenciālvienādojumam (1) ar robežnosacījumiem

$$x(c) = x_0(c), \quad x(d) = x_0(d),$$

izpildās lokālā unitāte.

Šīs lemmas pierādījums ir tiešs sekojošās lemmas pielietojums.

Lemma 13.4. Pieņemsim, ka $\lambda \in R$ un x_λ ir diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums, kurš apmierina nosacījumus

$$x_\lambda(c) = x_0(c), \quad x'_\lambda(c) = \lambda.$$

Tad jebkuram $\epsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka visiem λ, kuri apmierina nevienādības

$$0 < |x'(c) - \lambda| < \delta, \tag{5}$$

x_λ ir turpināms apgabalā $[a,b]$, un tajā izpildās

$$|x_\lambda(t) - x_0(t)| < \epsilon, \quad |x'_\lambda(t) - x'_0(t)| < \epsilon, \tag{6}$$

$$x_\lambda(t) - x_0(t) \neq 0, \quad t \in (c,d]. \tag{7}$$

Pierādījums. Ja skaitlis λ apmierina nevienādības (5), tad atrisinājuma x_λ turpināmība apgabalā $[a,b]$ un nevienādības (6) seko no diferenciālvienādojumu kursā pierādītās teorēmas par atrisinājuma nepārtraukto atkarību nos sākuma nosacījumiem. Atliek pierādīt nevienādību (7).

Pieņemsim, ka nevienādība (7) neizpildās. Tad eksistē skaitļu virknes $n \to \lambda_n, \quad n \to t_n$ tādas, ka

$$t_n \in (c,], \quad \lambda_n < x'_0(c), \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = x'_0(c)$$

un $x_{\lambda_n}(t_n) = x_0(t_n)$. Neierobežojot vispārību, uzskatīsim, ka $t_n \to t_0$ (pretējā gadījumā mēs izdalītu konverģējošu apakšvirkni).Ievedīsim funkcijas

$$z_n(t) = \frac{x_0(t) - x_{\lambda_n}(t)}{x'_0(a) - \lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Visiem n izpildās $z_n(c) = 0, \quad z'_n(c) = 1$, un z_n apmierina diferenciālvienādojumu

$$z''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), x'_0(t))z_n + \frac{\partial f}{\partial x'}(t, x_0(t), x'_0(t))z'_n + r_n(t)z_n + s_n(t)z'_n,$$

kur r_n, s_n ir nepārtrauktas un apgabalā $[a, b]$ vienmērīgi pie $n \to +\infty$ uz nulli konverģējošas funkcijas.

Līdz ar to funkciju virkne $n \to z_n$ apgabalā $[a, b]$ vienmērīgi konverģē uz diferenciālvienādojuma

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), x_0'(t))z + \frac{\partial f}{\partial x'}(t, x_0(t), x_0'(t))z'$$

atrisinājumu z, kurš apmierina nosacījumus

$$z(c) = 0, \quad z'(c) = 1, \quad z(t_0) = 0.$$

Saskaņā ar mūsu pieņēmumiem $t_0 = a$, tātad

$$z_n(c) - z_n(t_n) = z_n'(\xi_n)(c - t_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

kur $\xi_n \in (c, t_n)$ un līdz ar to $z_n'(\xi_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$, sekojoši $z'(c) = 0$, kas nav iespējams. Lemma pierādīta.

Teorēma 13.5. Pie augstāk minētajiem pieņēmumiem Dirihlē problēmai (1), (2) nav divu atrisinājumu x_1 un x_2, kuri apmierina novērtējumu

$$\alpha(t) \le x_i(t) \le \beta(t), \quad t \in [a, b], \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Pierādījums. Tā kā saskaņā ar lemmu 13.3. apgabalā $[a, b]$ izpildās lokālā unitāte, tad Dirihlē problēmai (1), (2) nevar būt bezgalīgi daudz atrisinājumu, kuri apmierina novērtējumu (8), pretējā gadījumā mēs izdalītu atrisinājumu apakšvirkni, kuras robežai neizpildītos lokālās unitātes nosacījums. Atliek parādīt, ka Dirihlē problēmai (1), (2) nevar būt divu dažādu atrisinājumu.

Ja x_1 un x_2 ir divi dažādi Dirihlē problēmas (1), (2)atrisinājumi, kuri apmierina novērtējumu (8), tad

$$\max_{t \in [a,b]}(|x_1(t) - x_2(t)|) > 0.$$

Neierobežojot vispārību, uzskatīsim, ka

$$x_1'(a) > x_2'(a), \quad x_1(t) > x_2(t), \quad t \in [a, b],$$

(pretējā gadījumā mēs izvēlētos kādu atbilstošu apgabala $[a, b]$ apakšintervālu). Aplūkosim diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumus x_r, kuri apmierina sākuma nosacījumus

$$x_r(a) = A, \quad x_r'(a) = r, \quad r \in [x_2'(a), x_1'(a)].$$

Saskaņā ar Šrēdera nosacījumu, atrisinājumi x_r turpināmi līdz to grafikas pa labi no punkta a krusto atrisinājumu x_1 vai x_2 grafikas. No lemmas 13.4. seko, ka gadījumā, ja starpība $r - x_r'(a)$ ir pietiekami maza, tad

$$x_r(t) > x_2(t), \quad t \in (a, b], \tag{9}$$

un tādēļ funkcijas x_r grafika krusto funkcijas x_1 grafiku kādā punktā $t_r < b$, pie tam t_r pārvietojas pa kreisi, ja r samazinās. Izvēlēsimies to $r \in (x_2'(a), x_1'(a))$ kopu, kuriem izpildās nevienādība (9). Tā ir netukša, vaļēja, ierobežota no augšas, un tās suprēms ir $x_1'(a)$. Tas ir pretrunā ar to, ka, ja starpība $x_1'(a) - r > 0$ ir pietiekoši maza, tad $x_1(t) > x_r(t), \quad t \in (a, b]$, un x_r grafika saskaņā ar lemmu 13.4. noteikti krustos atrisinājuma x_2 grafiku. Teorēma pierādīta.

1.3. Apakšējās un augšējās funkciju jēdziena vispārinājums

Apašējās un augšējās funkcijas, kuras nodrošināja robežproblēmas atrisinājuma aprioro novērtējumu un kuras izmantojām iepriekšējā paragrāfā, tika uzskatītas par divreiz nepārtraukti diferecējamām. Kā izriet no piezīmes 12.2, varētu rasties vajadzība tās dažādi definēt apgabala $[a, b]$ apakšapgabalos un nepārtraukti savienot. Šādā gadījumā nosacījums par apašējo un augšējo funkciju divkāršo diferencējamību ir ļoti apgrūtinošs. Būtu arī vēlams, lai diferenciālvienādojuma (1) ierobežotas apakšējo funkciju virknes suprēms arī būtu apakšējā funkcija un ierobežotas augšējo funkciju virknes infīms - augšējā funkcija.

Pirmo no minētajiem trūkumiem likvidēt samērā viegli. Ar $AC_1([a, b], R)$ apzīmēsim apgabalā $[a, b]$ definētu funkciju klasi, kurām eksistē absolūti nepārtraukts atvasinājums. Kā zināms absolūti nepārtrauktām funkcijām gandrīz visur definīcijas apgabalā eksistē atvasinājums.

Definīcija 14.1. Funkciju $\alpha \in AC_1([a, b], R)$, kurai

$$D^-\alpha'(t) \leq D_+\alpha'(t), \quad t \in (a, b)$$

un gandrīz visur apgabalā $[a, b]$ izpildās

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)),$$

sauksim par diferenciālvienādojuma (1) apakšējo funkciju.

Funkciju $\beta \in AC_1([a,b],R)$, kurai

$$D_-\beta'(t) \geq D^+\beta'(t), \quad t \in (a,b)$$

un gandrīz visur apgabalā $[a,b]$ izpildās

$$\beta''(t) \leq f(t,\beta(t),\beta'(t)),$$

sauksim par diferenciālvienādojuma (1) augšējo funkciju.

Viegli pārliecināties, ka šādi definētām apakšējai un augšējai funkcijām spēkā visi teorēmas 11.1 pierādījuma spriedumi. Tiešām, šo funkciju atvasinājumiem uzliktās nevienādības nodrošina to otro atvasinājumu eksistenci punktos, kuros attiecīgi funkcijas $\alpha(t) - u(t)$ un $(u(t) - \beta(t)$ sasniedz pozitīvus maksimumus.

Nosacījumi par ierobežotas apakšējo funkciju virknes suprēmu un ierobežotas augšējo funkciju virknes infīmu šādi definētām apkšējām un augšējām funkcijām joprojām nav spēkā, tādēļ turpināsim vispārināt apakšējās un augšējās funkciju jēdzienus.

Definīcija 14.2. Teiksim, ka funkcija $\alpha \in BB^+([a,b],R)$, ja visiem

$$c_1 \in R, \quad c_2 \in (-\infty, c_1)$$

eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [a,b]$ no nevienādībām

$$t_1 < t_2 \leq< t_3 < t_4,$$

$$c_1(t_2 - t_1) < \alpha(t_2) - \alpha(t_1),$$

$$\alpha(t_4) - \alpha(t_3) < c_2(t_4 - t_3)$$

seko $\delta < t_4 - t_1$.

Teiksim, ka funkcija $\beta \in BB^-([a,b],R)$, ja visiem

$$c_1 \in R, \quad c_2 \in (c_1, \infty)$$

eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [a,b]$ no nevienādībām

$$t_1 < t_2 \leq< t_3 < t_4,$$

$$\beta(t_2) - \beta(t_1) < c_1(t_2 - t_1),$$

$$c_2(t_4 - t_3) < \beta(t_4) - \beta(t_3)$$

seko $\delta < t_4 - t_1$.

Ievērosim, ka $BB^+([a,b],R)$ klases funkcijām, ja vien eksistē atvasinājums, tad tas mazā intervalā nevar strauji dilt, bet $BB^+([a,b],R)$ klases funkcijām - strauji augt. Lai labāk definīcijas 14.2 jēgu, uzrādīsim dažas vienkāršākās funkciju klasēm $BB^+([a,b],R)$ un $BB^+([a,b],R)$ piederošu funkciju īpašības. To pierādījumi samērā viegli seko no definīcijas 14.2 un mēs tos izlaidīsim. Interesents tos var atrast rakstā L.Lepins. Vispārinātās apakšējās un augšējās funkcijas un to īpašibas. *Latvijas matemātikas gadagrāmata* - **24**, Zinātne, Rīgā, 1980., 113.-123.lpp. (krievu val.).

Ja $\alpha \in BB^+([a,b],R), \beta \in BB^+([a,b],R)$, tad funkcijām $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$

1) $\quad D_+\gamma(t) = D^+\gamma(t) = D_r\gamma((t), \quad t \in [a,b),$
$D_-\gamma(t) = D^-\gamma(t) = D_l\gamma((t), \quad t \in (a,b],$

2) $\quad D_l\alpha(t) \leq D_r\alpha(t), \quad t \in (a,b),$
$D_l\beta(t) \geq D_r\beta(t), \quad t \in (a,b),$

3) visiem $s \in (a,b)$ no nevienādībām

$$\lim_{t\to s-} \alpha(t) < \lim_{t\to s+} \alpha(t),$$

$$\lim_{t\to s-} \beta(t) > \lim_{t\to s+} \beta(t),$$

seko

$$D_r\alpha(s) = +\infty, \quad D_r\beta(s) = -\infty,$$

no nevienādībām

$$\lim_{t\to s+} \alpha(t) < \lim_{t\to s-} \alpha(t),$$

$$\lim_{t\to s+} \beta(t) > \lim_{t\to s-} \beta(t),$$

seko

$$D_l\alpha(s) = -\infty, \quad D_l\beta(s) = +\infty,$$

4) funkcijas α un β cieš pārtraukumu ne vairāk kā sanummurējamā skaitā punktu,

5) kopas
$\{s \in (a,b) : \lim_{t\to s-} D_l\alpha(t) = -\infty$ vai $\lim_{t\to s+} D_r\alpha(t) = +\infty\}$,
$\{s \in (a,b) : \lim_{t\to s-} D_l\beta(t) = +\infty$ vai $\lim_{t\to s+} D_r\beta(t) = -\infty\}$
ir galīgas,

6) kopas

$\{s \in [a,b] : D_l\alpha(s) = -\infty$ un $D_r\alpha(s) = +\infty\}$,
$\{s \in [a,b] : D_l\beta(s) = +\infty$ un $D_r\beta(s) = -\infty\}$
ir slēgtas un to mērs ir 0.

Definīcija 14.3. Funkciju $\alpha : [a,b] \to R$ sauksim par diferenciālvienādojuma (1) vispārināto apakšējo funkciju, ja

$$\alpha \in BB^+([a,b],R), \quad \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)| < +\infty$$

un katrā kompaktā $[a,b]$ apakšapgabalā J, kurā funkcija α apmierina Lipšica nosacījumu, tā ir diferenciālvienādojuma (1) apakšējā funkcija definīcijas 14.1 nozīmē.

Funkciju $\beta : [a,b] \to R$ sauksim par diferenciālvienādojuma (1) vispārināto augšējo funkciju, ja

$$\alpha \in BB^+([a,b],R), \quad \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)| < +\infty$$

un katrā kompaktā $[a,b]$ apakšapgabalā J, kurā funkcija β apmierina Lipšica nosacījumu, tā ir diferenciālvienādojuma (1) augšējā funkcija definīcijas 14.1 nozīmē.

Funkciju $x : [a,b] \to R$ sauksim par diferenciālvienādojuma (1) vispārināto atrisinājumu, ja tā vienlaicīgi ir diferenciālvienādojuma (1) vispārinātā apakšējā un augšējā funkcija.

Piezīme 14.4. Diferenciālvienādojuma (1) vispārinātais atrisinājums saskaņā ar $BB^+([a,b],R)$ un $BB^+([a,b],R)$ klasēm piederošo funkciju īpašībām kopā ar mēru 0 var pieņemt bezgalīgas atvasinājuma vērtības, līdz ar to šajos punktos vispārinātajam atrisinājumam var būt pārtraukumi. Viegli saprast, ka izpildoties Šrēdera (Bernšteina, Nagumo, u.tml.) nosacījumiem, diferenciālvienādojuma (1) vispārinātais atrisinājums ir arī tā atrisinājums klasiskā izpratnē.

Pieņemsim, ka $AG_f([a,b],R)$ ir visu diferenciālvienādojuma (1) vispārināto apakšējo funkciju kopa, bet $BG_f([a,b],R)$ tā visu vispārināto augšējo funkciju kopa. Bez pierādījuma formulēsim sekojošās teorēmas, kuru pierādījumu iespējams atrast rakstā L.Lepins. Vispārināto apakšējās un augšējās funkcijas robežīpašibas. *Latvijas matemātikas gadagrāmata* - **24**, Zinātne, Rīgā, 1980., 124.-132.lpp. (krievu val.).

Teorēma 14.5. Ja $\alpha \in AG_f([a,b],R), \beta \in BG_f([a,b],R)$,

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a,b], \tag{10}$$

tad visiem $t_1 \in [a,b), \quad t_2 \in (t_1,b]$,

$$A \in [\alpha(t_1), \beta(t_1)], \quad B \in [\alpha(t_2), \beta(t_2)]$$

atradīsies diferenciālvienādojuma (1) vispārinātais atrisinājums x, kurš apmierina robežnosacījumus

$$x(t_1) = A, \quad x(t_2) = B$$

un novērtējumu

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{11}$$

Teorēma 14.6. Pieņemsim, ka

$$A < AG_f([a,b],R), \quad B < BG_f([a,b],R)$$

ir netukšas kopas,

$$\alpha_0(t) = \sup_{\alpha \in A} \alpha(t), \quad \beta_0(t) = \inf_{\beta \in B} \beta(t),$$

$$\sup_{t \in [a,b]} \alpha_o(t) < +\infty, \quad \inf_{t \in [a,b]} \beta_0(t) > -\infty,$$

tad $\alpha_0 \in AG_f([a,b],R), \quad \beta_0 \in BG_f([a,b],R)$.

Pieņemsim, ka diferenciālvienādojumam (1) eksistē vispārinātās apkšējās un augšējās funkcijas α un β, kurām izpildās (10), un ievedīsim funkcijas $\lambda, \mu : [a,b] \to R$, kuras sauksim par **diagonālēm** un kurām apgabalā $[a,b]$ izpildās nevienādības:

$$\alpha(t) \leq \lambda(t) \leq \beta(t),$$

$$\alpha(t) \leq \mu(t) \leq \beta(t),$$

$$D_+\lambda(t) > -\infty, \quad D^+\mu(t) < +\infty,$$

$$D_-\lambda(t) > -\infty, \quad D^-\mu(t) < +\infty,$$

$$\mu(a) \leq \lambda(a), \quad \lambda(b) \leq \mu(b).$$

Ievedīsim arī sekojošos kopu apzīmējumus:

$$\omega_1 = \{(t,x) : t \in [a,b], x \in [\lambda(t), \beta(t)\},$$

$$\omega_2 = \{(t,x) : t \in [a,b], x \in [\mu(t), \beta(t)\},$$

$$\omega_3 = \{(t,x) : t \in [a,b], x \in [\alpha(t), \lambda(t)\},$$

$$\omega_4 = \{(t,x) : t \in [a,b], x \in [\alpha(t), \mu(t)\}.$$

Teorēma 14.7. Ja katram $i \in \{1,2,3,4\}$ diferenciālvienādojumam (1) kopā ω_i izpildās Šrēdera nosacījums B_i,

$$A \in [\mu(a), \lambda(a)], \quad B \in [\lambda(b), \mu(b),$$

tad eksistē diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums, kurš apmierina robežnosacījumus (2).

Pierādījums. Teorēma būs pierādīta, ja parādīsim, ka vispārinātais atrisinājums x, kurš eksistē saskaņā ar teorēmu 14.5. un apmierina novērtējumu (11), apmierina arī novērtējumu

$$|x'(t)| < +\infty, \quad t \in [a,b].$$

Iesākumā parādīsim, ka

$$x'(t) < +\infty, \quad t \in [a,b]. \tag{12}$$

Pieņemsim pretējo, ka kādam $t_0 \in R, x'(t_0) = +\infty$. Iespējami divi gadījumi, vai nu $t_0 \in (a,b]$ un $x(t_0) \leq \mu(t_0)$, vai arī $t_0 \in [a,b)$ un $x(t_0) \geq \mu(t_0)$. Pirmajā gadījumā no nevienādības

$$D^- \mu(t_0) < x'(t_0)$$

seko, ka kādam

$$t_1 \in [a, t_0) \quad x(t) \leq \mu(t), \quad t \in [t_1, t_0],$$

bet tādā gadījumā kopā ω_2 neizpildās nosacījums B_2, kas saskaņā ar teorēmas nosacījumiem nav iespējams. Otrajā gadījumā spēkā nevienādība

$$D^+ \mu(t_0) < x'(t_0),$$

tādēļ kādam

$$t_1 \in (t_0, b] \quad x(t) \geq \mu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

bet tad, savukārt, kopā ω_4 neizpildās nosacījums B_4, kas atkal saskaņā ar teorēmas nosacījumiem nav iespējams. Līdz ar to nevienādība (12) pierādīta.

Analoģiski, izmantojot funkcijai λ spēkā esošos nosacījumus, varam parādīt, ka

$$x'(t) > -\infty, \quad t \in [a, b].$$

Teorēma pierādīta.