Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas
15. un 16. lekcija

1. Vispārīgā divpunktu robežproblēma

Šajā nodaļā aplūkosim robežproblēmu

$$x'' = f(t, x, x') \tag{1}$$

$$L_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = 0, \quad L_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = 0, \tag{2}$$

kur $f \in C([a, b] \times R^2, R)$; $L_1, L_2 \in C(R^4, R)$.

Īsuma pēc vienādību (2) kreisās puses apzīmēsim

$$L_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = L_i x; \quad i = 1, 2.$$

Definīcija 15.1. Teiksim, ka funkcijai $L \in C(R^4, R)$ ir **monotonitātes tips** $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, kur

$$\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

ja pie $\sigma_i = 0$ funkcija L nav atkarīga no $i-$tā argumenta,

pie $\sigma_i = -$ funkcija L neaug pēc $i-$tā argumenta,

pie $\sigma_i = +$ funkcija L nedilst pēc $i-$tā argumenta,

bet pie $\sigma_i = 1$ funkcijai L nav nekādu izturēšanās ierobežojumu attiecībā uz $i-$to argumentu.

Visas funkcijas $L \in C(R^4, R)$, kurām ir monotonitātes tips $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, veido **monotonitātes klasi** $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Pieņemsim, ka diferenciālvienādojumam (1) eksistē vispārinātā apakšējā funkcija α un vispārinātā augšējā funkcija β, tādas, ka

$$\alpha(t) \le \beta(t), \quad t \in [a, b],$$

$$L_i\alpha \geq 0 \geq L_i\beta, \quad i = 1, 2.$$

Teorēma 15.2. Ja $L_1 \in M(1, +, +, 0)$, $\quad L_2 \in M(+, 1, 0, -)$ tad robežproblēmai (1), (2) eksistē vispārinātais atrisinājums x, kurš apmierina novērtējumu

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b]. \tag{3}$$

Vispirms pierādīsim sekojošo lemmu.

Lemma 15.3. Ja $L_1 \in M(1, +, +, 0)$, $\quad B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, tad diferenciālvienādojumam (1) eksistē vispārinātais atrisinājums x, kurš apmierina robežnosacījumus

$$L_1 x = 0, \quad x(b) = B \tag{4}$$

un novērējumu (3).

Pierādījums. Saskaņā ar teorēmu 14.5 katram $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ eksistē diferenciālvienādojuma (1) vispārinātais atrisinājums x, kurš apmierina nosacījumus

$$x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{5}$$

un novērējumu (3). Izvēlēsimies $A = \alpha(a)$ un robežproblēmas (1),(5) vispārināto atrisinājumu apzīmēsim ar α_1. Izpildās

$$\alpha_1 = \alpha(a), \quad \alpha_1'(a) \geq \alpha'(a), \quad \alpha_1(b) \geq \alpha(b).$$

No šīm sakarībām funkcijai L_1 uzlikto monotonitātes nosacījumu dēļ iegūstam

$$L_1\alpha_1 \geq L_1\alpha \geq 0.$$

Tātad pierādāmās lemmas nosacījumos funkcijas α vietā varam ņemt funkciju α_1. Ja $A = \beta(a)$ un β_1 ir robežproblēmas (1),(5) vispārinātais atrisinājums, kurš apmierina novērtējumu

$$\alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b],$$

tad izpildās

$$\beta_1(a) = \beta(a), \quad \beta_1(b) \leq \beta(b), \quad \beta_1'(a) \leq \beta'(a).$$

No šīm sakarībām funkcijai L_1 uzlikto monotonitātes nosacījumu dēļ iegūstam

$$L_1\beta_1 \leq L_1\beta \leq 0.$$

Tātad pierādāmās lemmas nosacījumos funkcijas β vietā varam ņemt funkciju β_1.

Tālāk konstruēsim funkciju virknes

$$n \to \alpha_n, \quad n \to \beta_n \tag{6}$$

sekojošā veidā. Ja funkcijas $\alpha_k, \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots$ ir konstruētas, tad ņemsim $A = (\alpha_k(a) + \beta_k(a))/2$ un ar u apzīmēsim robežproblēmas (1),(5) vispārināto atrisinājumu, kurš apmierina novērtējumu

$$\alpha_k(t) \leq u(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_k(t), \quad t \in [a, b] \tag{7}$$

Ja $L_1 u \leq 0$, tad definēsim $\alpha_{k+1} = u, \quad \beta_{k+1} = \beta_k$,

ja $L_1 u < 0$, tad, savukārt definēsim $\alpha_{k+1} = \alpha_k, \quad \beta_{k+1} = u$.

Novērtējuma (7) dēļ eksistē robežas funkciju virknēm (6), kuras atbilstoši apzīmēsim ar α_0 un β_0. Saskaņā ar funkciju virkņu (6) konstrukciju izpildās nevienādības

$$L_1 \alpha_0 \geq 0 \geq L_1 \beta_0, \tag{8}$$

$$\alpha_0(a) = \beta_0(a), \quad \alpha_0(b) = B = \beta_0(b),$$

$$\alpha_0(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in [a, b].$$

Ievērojot monotonitātes nosacījumus, kurus apmierina funkcija L_1, iegūstam

$$L_1 \alpha_0 \leq L_1 \beta_0,$$

kas kopā ar (8) dod

$$L_1 \alpha_0 = 0 = L_1 \beta_0.$$

Tātad funkcijas α_0 un β_0 saskaņā ar teorēmu 14.6 ir diferenciālvienādojuma (1) vispārinātie atrisinājumi, kuri apmierina robežnosacījumus (4). Lemma pierādīta.

Teorēmas 15.2. pierādījums. Definēsim $\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta$ un konstruēsim funkciju virknes (6) sekojošā veidā. Ja kādam $k \in \{1, 2, \ldots\}$ funkcijas α_k un β_k ir konstruētas, turklāt α_k ir diferenciālvienādojuma (1) vispārinātā apakšējā funkcija, bet β_k ir diferenciālvienādojuma (1) vispārinātā augšējā funkcija, tad saskaņā ar lemmu 15.3. eksistē robežproblēmas (1), (4) vispārinātais atrisinājums u, ja $B = (\alpha_k(b) + \beta_k(b))/2$.

Ja $L_2 u \geq 0$, tad definēsim $\alpha_{k+1} = u, \quad \beta_{k+1} = \beta_k$,

ja, savukārt, $L_2 u < 0$, tad definēsim $\alpha_{k+1} = \alpha_k, \quad \beta_{k+1} = u$.

Skaidrs, ka šādi konstruētās funkcijas α_{k+1} un β_{k+1} ir atbilstoši diferenciālvienādojuma (1) vispārinātās apakšējā un augšējā funkcijas un apmierina teorēmas nosacījumus. Konstruēto funkciju virkņu (6) robežas α_0 un β_0 eksistē un vismaz viena no funkcijām α_0 un β_0 ir diferenciālvienādojuma (1) vispārinātais atrisinājums, kurš apmierina pirmo no robežnosacījumiem (2). No sakarībām

$$L_2\alpha_0 \geq L_2\beta_0,$$

$$\alpha_0(b) = \beta_0(b), \quad \alpha_0(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in [a, b]$$

un funkcijai L_2 spēkā esošajiem monotonitātes nosacījumiem seko

$$L_2\alpha_0 = L_2\beta_0.$$

Tātad diferenciālvienādojuma (1) vispārinātais atrisinājums apmierina arī otro no robežnosacījumiem (2). Teorēma pierādīta.

Starp monotonitātes tipa apzīmējumu simboliem dabīgi ievest sekojošu daļēju sakārtojumu

$$1 > \{+, -\} > 0.$$

Teorēma 15.2. paliek spēkā, ja nosacījumos ietilpstošos monotonitātes tipus nomaina ar šī sakārtojuma nozīmē mazākiem monotonitātes tipiem. Šādā nozīmē teorēma 15.2. ir maksimālā, jo tā vairs nav spēkā, ja kādu no monotonitātes tipiem šīs teorēmas nosacījumos aizvieto ar lielāku tipu. Pierādīts, konstruējot pretpiemērus, ka pie spēkā esošajiem nosacījumiem, kuri uzlikti vispārinātajām apakšējai un augšējai funkcijām, ir tikai divas minētajā nozīmē maksimālās teorēmas. Otrajā no šīm teorēmām

$$L_1 \in M(+, +, 0, 0), \in L_2 \in M(1, 1, +, -).$$

Uzliekot papildus nosacījumus vispārinātajām apakšējai un augšējai funkcijām, var iegūt vēl citas vispārīgās divpunktu robežproblēmas atrisināmības teorēmas.

2. Robežproblēmas ar neintegrējamu singularitāti

Aplūkosim robežproblēmu

$$x'' = f(t, x, x') \tag{9}$$

$$x'(0) = x(1) = 0. \tag{10}$$

Ja $f \in C([0,1] \times R^2, R)$, tad no teorēmas 15.2. seko, ka no vispārinātās apakšējās funkcijas α un vispārinātās augšējās funkcijas β, kurām izpildās nevienādības

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad t \in [0,1],$$

$$\alpha'(0) \geq 0 \geq \beta'(0), \quad \alpha(1) \leq 0 \leq \beta(1),$$

eksistences seko robežproblēmas(9),(10) vispārinātā atrisinājuma x eksitence, kuram apgabalā $[0,1]$ spēkā novērtējums

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t). \tag{11}$$

Ja funkcijai f pie $t = 0$ ir neintegrējama singularitāte, tad, vispārīgi runājot, šis rezultāts nav spēkā. Formulēsim nosacījumus, pie kuriem šī eksistences teorēma saglabājas arī minētajā singularitātes gadījumā.

Teorēma 16.1. Pieņemsim, ka eksistē skaitlis $\sigma \in (0,1)$ un integrējama funkcija $\varepsilon : (0,\sigma) \to (0,+\infty)$ tāda, ka

$$\lim_{t \to 0+} \varepsilon(t) = 0, \tag{12}$$

$$\alpha' \geq -\varepsilon(t), \quad \beta'(t) \leq \varepsilon(t), \quad t \in (0,\sigma), \tag{13}$$

visiem $\tau \in (0,\sigma)$, $\quad t_0 \in (\tau,\sigma]$ un diferenciālvienādojuma (9) atrisinājumiem $x : [\tau, t_0] \to R$, kuri savā definīcijas apgabalā apmierina novērtējumu (11), no nevienādības

$$|x'(\tau)| \leq \varepsilon(\tau) \tag{14}$$

seko

$$|x'(t)| \leq \varepsilon(t), \quad t \in (\tau, t_0]. \tag{15}$$

Tad robežproblēmai (9),(10) eksistē vispārinātais atrisinājums $x : (0,1] \to R$, kurš savā definīcijas apgabalā apmierina novērtējumu (11) un pie $t \in (0,\sigma]$ - novērtējumu (15).

Teorēmas pierādījumam lietosim sekojošo lemmu.

Lemma 16.2. Pieņemsim, ka

$$\alpha_0 = \lim_{t\to 0+} \alpha(t) < \lim_{t\to 0+} \beta(t) = \beta_0, \tag{16}$$

$A \in (\alpha_0, \beta_0)$ un izpildās teorēmas 16.1. nosacījumi. Tad atradīsies $s \in (0, \sigma]$ un diferenciālvienādojuma (9) atrisinājums $x : (0, s] \to R$ tāds, ka $\lim_{t\to 0+} x(t) = A$, kuram definīcijas apgabalā izpildās novērtējumi (11) un (15).

Pierādījums. Pieņemsim, ka $s_1 \in (0, \sigma]$ ir tāds, ka

$$A \in (\alpha(t), \beta(t)), \quad t \in t \in (0, s],$$

$$s_1 > s_2 > \ldots > s_k > \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} s_k = 0, \quad , t_k \in (s_k, \sigma],$$

un $x_k : [s_k, t_k] \to R$ ir diferenciālvienādojuma (9) atrisinājumi, kuri apmierina nosacījumus

$$x_k(s_k) = A, \quad x_k'(s_k) = 0,$$

$$\alpha(t) < x_k(t) < \beta(t), \quad t \in [s_k, t_k).$$

No nevienādības $|x_k'(s_k)| < \varepsilon(s_k)$ seko, ka

$$|x_k'(t)| \le \varepsilon(t), \quad t \in (s_k, t_k]. \tag{17}$$

Tādēļ, ja t_k izvēlēts lielākais iespējamais, izpildāas vismaz viena no trijām sekojošām sakarībām

$$x_k(t_k) = \alpha(t_k), \quad x_k(t_k) = \beta(t_k), \quad t_k = \sigma.$$

No sakarībām (16) un (17) izriet, ka $\inf\{t_k\} \in (0, \sigma]$, līdz ar to apzīmēsim $s = \inf\{t_k\}$. No funkciju virknes $k \to x_k$ apgabalā $(0, s]$ varam izvēlēties konverğējošu apakšvirkni

$$n \to x_{n_k},$$

tādā gadījumā funkcija $x : (0, s] \to R$, kuru definējam tā

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}(t),$$

ir lemmas apgalvojumā minētais diferenciālvienādojuma (9) atrisinājums. Lemma pierādīta.

Teorēmas 16.1. pierādījums. Ja izpildās nevienādības (16), tad apgabalā $(0,1]$ konstruēsim funkciju virknes $n \to \alpha_n, \quad n \to \beta_n$ sekojošā veidā. Definēsim

$$\alpha_1(t) = \alpha(t), \quad \beta_1(t) = \beta(t), \quad t \in (0,1],$$

un pieņemsim, ka jau definētas funkcijas $\alpha_i, \quad \beta_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$, kuras atbilstoši ir diferenciālvienādojuma (9) vispārinātās apakšējās un augšējās funkcijas un apmierina lemmas 16.2. nosacījumus,

$$a_i = (\lim_{t\to 0+} \alpha_i(t) + \lim_{t\to 0+} \beta_i(t))/2.$$

Saskaņā ar lemmu 16.2, atradīsies $t_i \in (0, \sigma]$ un diferenciālvienādojuma (9) atrisinājums $u_i : (0, t_i] \to R$, kurš apmierina nosacījumus

$$\lim_{t\to 0+} u_i(t) = a_i,$$

$$\alpha_i(t) < u_i(t) < \beta_i(t), \tag{18}$$

$$|u_i'(t)| \leq \varepsilon(t), \quad t \in (0, t_i]$$

Tālāk izvēlēsimies skaitļus $r_i \in [t_i, 1]$ tādus, ka intervāls $(0, r_i]$ ir maksimālais, kurā izpildās novērtējums (18). Tad, ja $r_n < 1$ un $\alpha_n(r_n) = u_n(r_n)$ vai $\lim_{t\to r_n-} u_n' = -\infty$, tad

$$\alpha_{n+1}(t) = u_n(t), \quad t \in (0, r_n),$$

$$\alpha_{n+1}(t) = \alpha_n(t), \quad t \in (r_n, 1],$$

$$\beta_{n+1}(t) = \beta_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

ja $r_n < 1$ un $\beta_n(r_n) = u_n(r_n)$ vai $\lim_{t\to r_n-} u_n' = +\infty$, tad

$$\alpha_{n+1}(t) = \alpha_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$\beta_{n+1}(t) = u_n(t), \quad t \in (0, r_n),$$

$$\beta_{n+1}(t) = \beta_n(t), \quad t \in (r_n, 1],$$

ja $r_n = 1$ un $u_n(1) > 0$, tad

$$\alpha_{n+1}(t) = \alpha_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$\beta_{n+1}(t) = u_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

ja $r_n = 1$ un $u_n(1) < 0$, tad

$$\alpha_{n+1}(t) = u_n(t), \quad t \in (0,1],$$

$$\beta_{n+1}(t) = \beta_n(t), \quad t \in (0,1],$$

beidzot, ja $r_n = 1$ un $u_n(1) = 0$, tad konstrukciju beidzam, jo u_n ir diferenciālvienādojuma (9) vispārinātais atrisinājums, kura eksistenci teorēmā pierāda. Ievērosim, ka konstruētās funkcijas $\alpha_{n+1}(t)$ un $\beta_{n+1}(t)$ atbilstoši ir diferenciālvienādojuma (9) vispārinātās apakšējā un augšējā funkcijas, kuras apmierina lemmas 16.2. nosacījumus. Ja izpildās nevienādības (16), tad definēsim funkcijas $\bar{\alpha}$ un $\bar{\beta}$ tā:

$$\bar{\alpha} : t \to \sup_i \alpha_i(t), \quad \bar{\beta} : t \to \inf_i \beta_i(t), \quad t \in (0,1],$$

ja spēkā vienādība $\alpha_0 = \beta_0$, tad definēsim

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t), \quad \bar{\beta}(t) = \beta(t), \quad t \in (0,1].$$

No teorēmas 14.5. seko, ka $\bar{\alpha}$ un $\bar{\beta}$ ir diferenciālvienādojuma (9) vispārinātās apakšējā un augšējā funkcijas, un, saskaņā ar teorēmu 14.6. eksistē diferenciālvienādojuma (9) vispārinātais atrisinājums x, kurš apmierina nosacījumus $x(1) = 0$,

$$\alpha(t) \le \bar{\alpha}(t) \le x(t) \le \bar{\beta}(t) \le \beta(t), \quad t \in (0,1],$$

$$\lim_{t\to 0+} \bar{\alpha}(t) = \lim_{t\to 0+} x(t) = \lim_{t\to 0+} \bar{\beta}(t). \tag{19}$$

Atliek parādīt, ka pie $t \in (0,\sigma]$ izpildās novērtējums (15). Šim nolūkam vispirms atzīmēsim, ka veiktās konstrukcijas dēļ izpildās nevienādības

$$\bar{\alpha}'(t) \ge -\varepsilon(t), \quad \bar{\beta}'(t) \le \varepsilon(t), \quad t \in (0,\sigma].$$

No teorēmas nosacījuma seko, ka novērtējuma (15) izpilde ekvivalenta nosacījumam, ka katram $s \in (0,\sigma]$ atradīsies $\tau \in (0,\sigma)$, kuram spēkā novērtējums (14). Ja nevienādība (14) neizpildās, tad spēkā viena no divām nevienādībām

$$x'(t) > \varepsilon(t), \quad x'(t) < -\varepsilon(t), \quad t \in (0,s].$$

Pirmajā gadījumā iegūstam

$$\bar{\beta}'(t) \le \varepsilon(t) < x'(t), \quad t \in (0,s],$$

bet otrā no aplūkojamajām nevienādībām dod

$$\bar{\alpha}'(t) \geq -\varepsilon(t) > x'(t), \quad t \in (0, s].$$

Integrējot iegūtās sakarības no 0 līdz t, iegūstam atbilstoši nevienādības

$$x(t) > \bar{\beta}(t), \quad x(t) < \bar{\alpha}(t), \quad t \in (0, s],$$

kuras ir pretrunā nevienādībām (19). Teorēma pierādīta.

Noslēgumā formulēsim un pierādīsim teorēmu, kura precizē aplūkojamā diferenciālvienādojuma (9) labo pušu klasi un ļauj pielietot teorēmu 16.1. minētajai robežproblēmai.

Teorēma 16.3. Pieņemsim, ka

$$\sigma = 1, \quad \gamma \in C((0, 1], R), \quad c \in [0, 1), \quad g : (0, 1] \to R$$

ir tādi, ka funkcijas $t \to (g(t) + c/t)$ negatīvā daļa $(g(t) + c/t)_-$ apgabalā $(0, 1])$ ir integrējama un izpildās nevienādība (vienpusīgais novērtējums)

$$f(t, x, x')sign(x') \leq -g(t)|x'| + \gamma(t), \quad (t, x, x') \in (0, 1] \times R^2. \tag{20}$$

Tad robežproblēmai (9), (10) eksistē vispārinātais atrisinājums x, kurš pie $t \in (0, 1]$ apmierina novērtējumus (11) un (15), kur

$$\varepsilon(t) = t^c \int_0^t \gamma(\xi)\xi^{-c} \exp(\int_\xi^t (g(s) + c/s)_- ds) d\xi. \tag{21}$$

Pierādījums. Izvēlēsimies patvaļīgus $\tau \in (0, 1), \quad t_0 \in (\tau, 1]$ un diferenciālvienādojuma (9) atrisinājumu $u : [\tau, t_0] \to R$, kurš apmierina novērtējumus (11) un (14), kur funkcija ε definēta ar izteiksmi (21). Ja $t \in [\tau, t_0]$,tad saskaņā ar nevienādību (20)

$$|u'(t)|' \leq -g(t)|u'(t)| + \gamma(t).$$

Šo nevienādību pārveidojot iegūstam,

$$|u'(t)|' \leq ((g(t) + c/t)_- + c/t)|u'(t)| + \gamma(t),$$

no kurienes

$$|u'(t)| \leq t^c \int_\tau^t \gamma(\xi)\xi^{-c} \exp(\int_\xi^t (g(s) + c/s)_- ds) d\xi +$$

$$+|u'(t)|\tau^{-c}t^c \exp(\int_\tau^t (g(s)+c/s)_- ds).$$

Tālāk izmantojot nevienādību (14) un izteiksmi (21), pārveidojam pēdējo nevienādību

$$|u'(t)| \le t^c \int_\tau^t \gamma(\xi)\xi^{-c} \exp(\int_\xi^t (g(s)+c/s)_- ds)d\xi +$$

$$+t^c \int_0^\tau \gamma(\xi)\xi^{-c} \exp(\int_\xi^t (g(s)+c/s)_- ds)d\xi = \varepsilon(t),$$

tātad pie $t \in (0,1]$ izpildās novērtējums (15). Nosacījums (12) izpildās triviālā kārtā. Pierādīisim, ka izpildās arī nevienādības (13). Aprobežosimies gan tikai ar pirmo no šīm nevienādībām, jo otra no tām pierādāma analoģiski. Ja

$$\alpha'(t) \ge 0, \quad t \in (0,1],$$

tad nevienādība (13) izpildās. Pieņemsim, ka kādam $s \in (0,1]$ $\alpha'(s) < 0$, tad atradīsies tāds $s_0 \in (0,s)$, ka

$$\alpha'(t) < 0, \quad t \in [s_0, s]. \tag{22}$$

Iegūstam, ka gandrīz visiem t izpildās

$$|\alpha'(t)|' = \alpha''(t) sign(\alpha'(t)) \le f(t,\alpha(t),\alpha'(t) sign(\alpha'(t)) \le$$

$$\le ((g(t)+c/t)_- + c/t)|\alpha'(t)| + \gamma(t),$$

no kurienes ar pārveidojumiem, kuri ir analoģiski augstāk lietotajiem, iegūstam $|\alpha'(t)| \le \varepsilon(t)$, kas kopā ar nevienādību (22) dod vajadzīgo no nevienādībām (13).

Tā esam konstatējuši, ka izpildās visi teorēmas 16.1. nosacījumi, tad, pielietojot šo teorēmu, teorēmas 16.3. pierādījums noslēdzas.