Graph genus and road interchanges

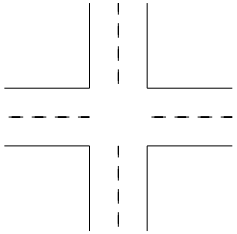
Valentas Kurauskas

Vilnius University

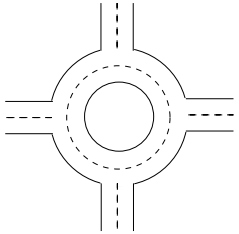
Joint Estonian-Latvian Theory Days – Rīga – 14 Oct 2018

An engineering question

Is it possible to design a motorway interchange where drivers do not need to change lanes, cross other traffic lanes or stop to give way to other vehicles while inside the junction?



Crossroads ✗



Roundabout ✗

Road junctions / interchanges

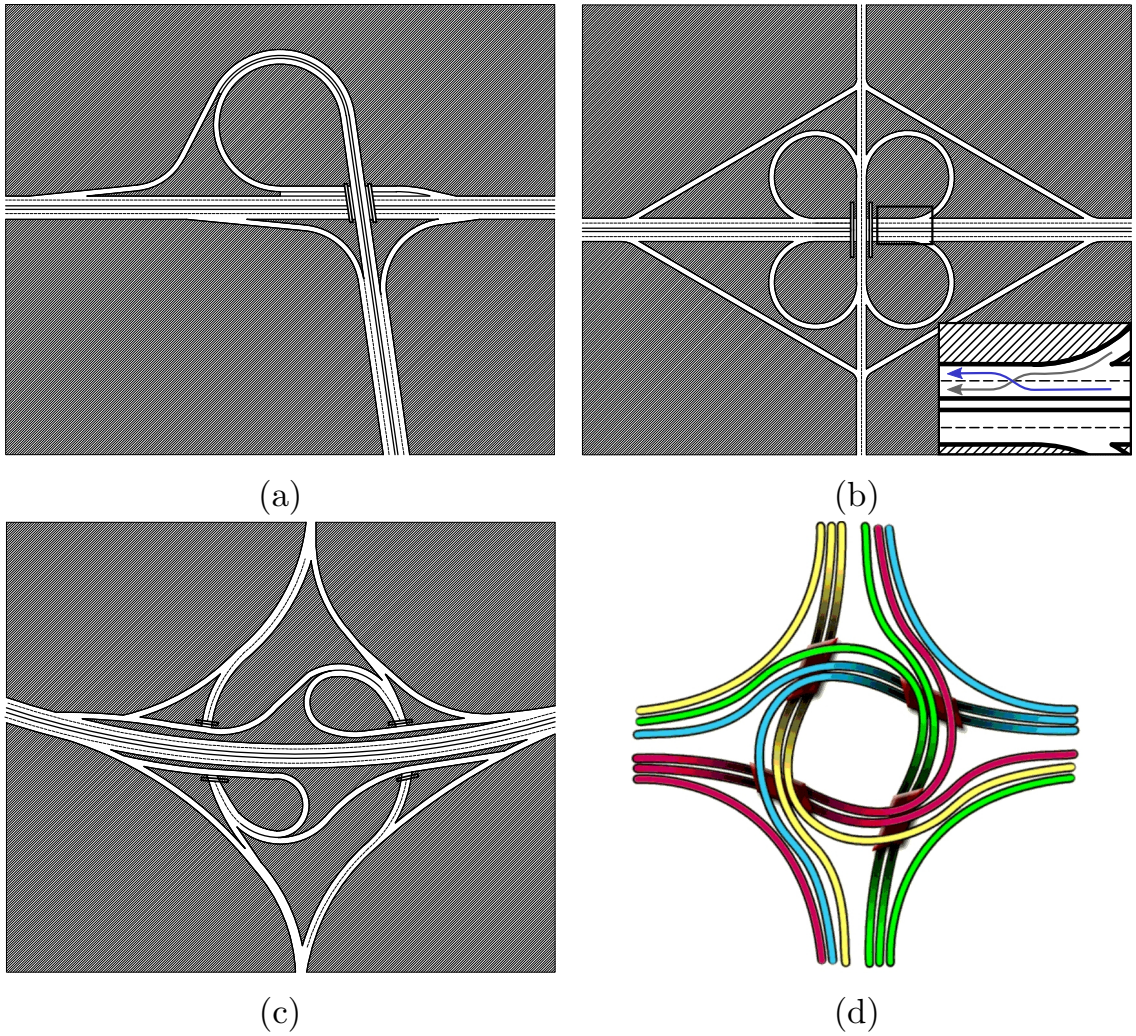
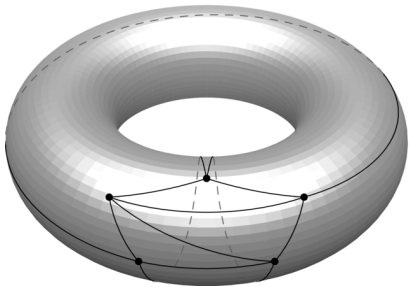


Illustration from V. K., On the genus of the complete tripartite graph $K_{n,n,1}$, Discrete Math 340 (2017).

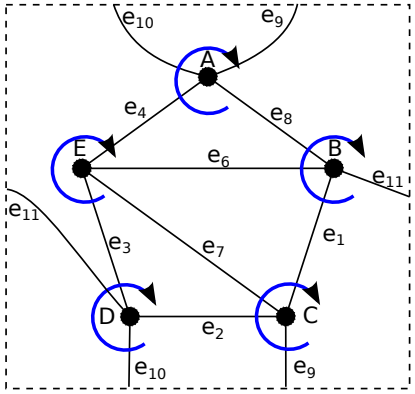
The Pinavia interchange

4-way “Pinavia” interchange: Buteliauskas (2008); Buteliauskas, Krasauskas ir Juozapavičius (2010); `www.pinavia.com`

Graphs embedded into a surface



http://wwwmathlabo.univ-poitiers.fr/~phan/exemples2.html.



$$\pi_A = (e_4, e_{10}, e_9, e_8)$$

$$\pi_B = (e_1, e_6, e_8, e_{11})$$

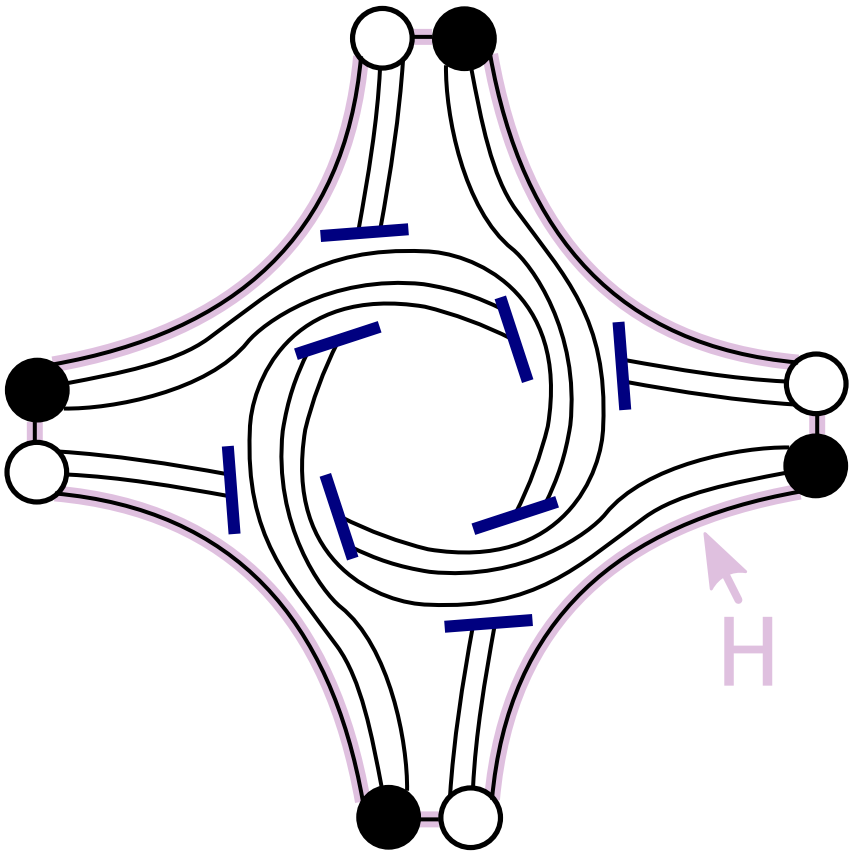
$$\pi_C = (e_9, e_2, e_7, e_1)$$

$$\pi_D = (e_{10}, e_{11}, e_3, e_2)$$

$$\pi_F = (e_4, e_6, e_7, e_3)$$

Euler's formula: $2 - 2 \cdot \mathrm{genus} = \#\mathrm{vertices} + \#\mathrm{faces} - \#\mathrm{edges}$

Modeling a road interchange as an embedding



Any such interchange $\longleftrightarrow$ embedding of a bipartite graph with a Hamiltonian facial cycle.

Can go to any other direction $\longleftrightarrow$ $K_{n,n}$

Not much prior literature

Наша обложка

Топология автомобильной развязки

Четыре точки на границе круга или квадрата (например, вершины квадрата) нельзя попарно соединить непересекающимися линиями (путями), проведенными внутри фигуры. В этом нетрудно убедиться, взяв в руки карандаш и бумагу, хотя для строгого доказательства необходимы познания из области топологии. Если же заменить квадрат на такой кусок поверхности с фигурным вырезом и «мостиком», как на рисунке 1, задача легко решается.

Подобные топологически сложные поверхности представляют не только умозрительный интерес — они полезны в практике проектирования и строительства автомагистралей, железнодорожных путей, сети городских улиц и т. п. Глядя на рисунок 1, читатель наверняка узнал современную автомобильную развязку «клеверный лист». На первый взгляд, возможность попарно соединить непересекающимися путями четыре пункта означает, что можно организовать беспрепятственное движение автомобильных потоков.

Однако, присмотревшись внимательнее, можно заметить, что схема, приведенная на рисунке 1, недостаточно точна. На самом деле, движение транспорта — двухстороннее, и встречные потоки также не должны пересекаться, поэтому количество пунктов и путей следует удвоить. Как показано на рисунке 2, каждый из пунктов «отправления» *А, Б, В, Г* следует соединить ориентированным путем с каждым из пунктов «прибытия» *А′, Б′, В′, Г′*. И на поверхности «клеверного листа» сделать это без пересечений, как ни странно, не удается.

Красными кружочками на рисунке помечены точки пересечения потоков транспорта. Правда, эти пересечения происходят в местах, где потоки попутны (например, автомобилист, движущийся из пункта *А* в пункт *В′*, на мосту должен перестраиваться, так как его путь пересекает путь автомобилиста, следующего из пункта *В* в пункт *Б′*), но при интенсивном движении и такие перестроения нежелательны.

Как быть? Может быть, можно иначе направить потоки транспорта по такой развязке? Нет, устранить таким путем пересечения нельзя — это теорема, которую умеют доказывать топологи.

Но те же топологические соображения подсказывают нам и выход из создавшейся ситуации: надо усложнить «топологическое строение» развязки. Одно из решений, позволяющее беспрепятственно направить все транспортные потоки, показано на четвертой странице нашей обложки. Здесь в средней части поверхности образована еще одна конструкция с фигурным вырезом, которая соединяет поверхность «моста» с расположенной внизу поперечной дорогой.

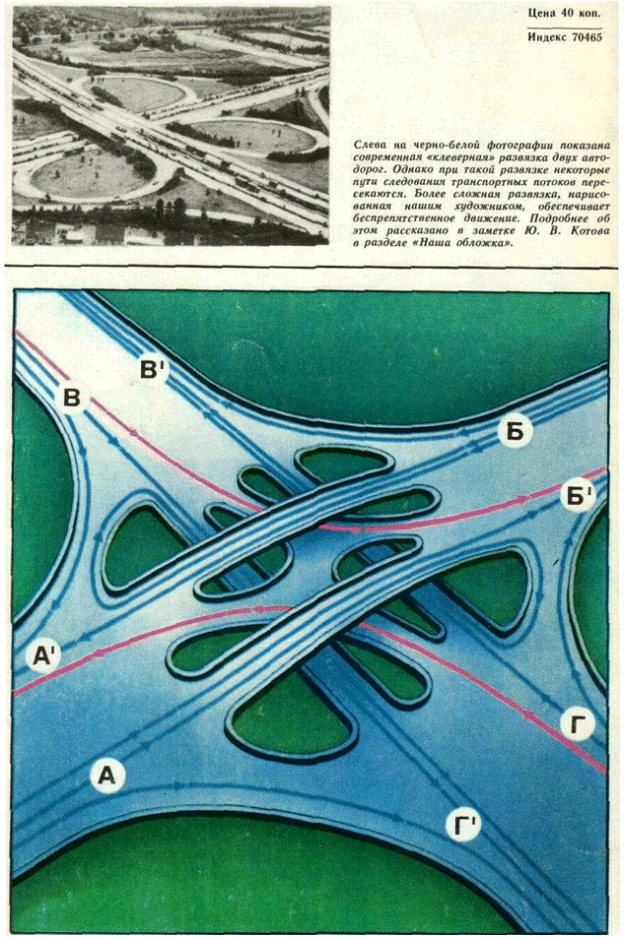
Возможно, показанное решение не удовлетворит конструкторов автомагистралей. Но в практике современного строительства есть примеры топологически весьма сложных узлов и развязок.

Ю. В. Котов

52

Рис. 1

Рис. 2



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Слева на черно-белой фотографии показана современная «клеверная» развязка двух автодорог. Однако при такой развязке некоторые пути следования транспортных потоков пересекаются. Более сложная развязка, нарисованная нашим художником, обеспечивает беспрепятственное движение. Подробнее об этом рассказано в заметке Ю. В. Котова в разделе «Наша обложка».

Yu. Kotov, Topology of an automobile interchange, Kvant 5 (1983) (in Russian).

Genus of specific graphs

- Genus of complete graphs K_n Ringel and Youngs (1968)
- Genus of complete bipartite graphs $K_{m,n}$ Ringel (1965)
- Genus of complete tripartite graphs $K_{m,n,l}$ $m \geq n \geq l$ **conjecture** White (1965):

$$g(K_{m,n,l}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n+l-2)}{4} \right\rceil$$

- The conjecture proved very recently by Ellingham, Stephens and Zha (2018+)

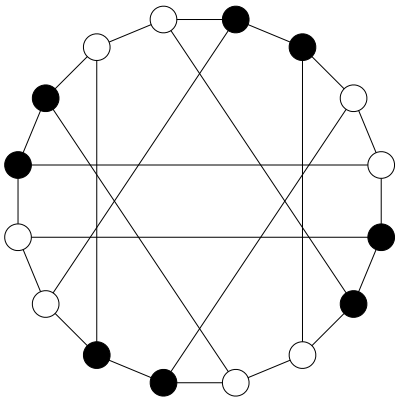
The answer for even n

Theorem (VK, 2016)
For n even the minimum genus of an embedding of $K_{n,n}$ with a face bounded by a Hamiltonian cycle is $\lceil (n-1)(n-2)/4 \rceil$.

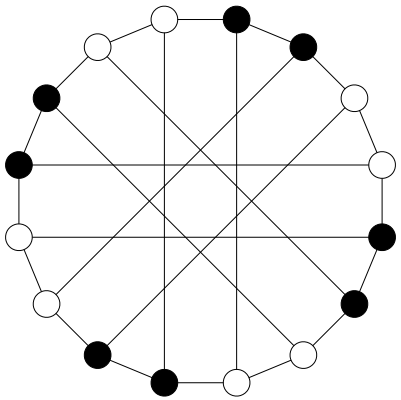
Corollary
For n even the genus of the complete tripartite graph $K_{n,n,1}$ is $\lceil (n-1)(n-2)/4 \rceil$.

Optimal interchanges for $n = 4$ and $n = 5$

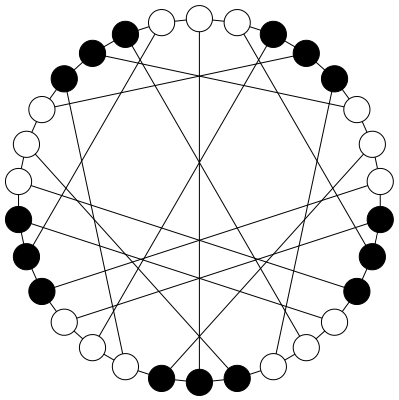
The only (up to isomorphism) optimal genus solutions for $n = 4$ and $n = 5$.



n=4



n=4

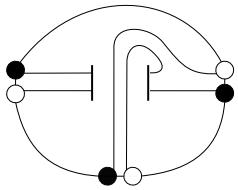


n=5

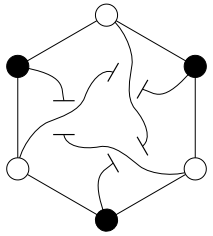
Rotationally symmetric interchanges of minimum genus

Two types of n-fold rotational symmetry:

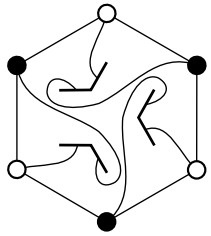
1. **Combinatorial / topological**: rotation system invariant under the cyclic shift along H by 2.
2. **Geometric**: the surface in $\mathbb{R}^3$, the embedded graph and the outer face are *all* invariant under rotation by $2\pi/n$.



1: ✓ 2: ✗



1: ✓ 2: ✓

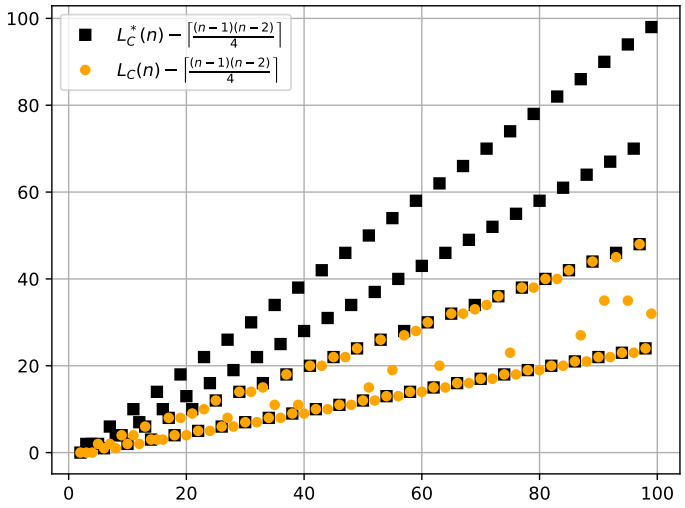


1: ✓ 2: ✓

Results

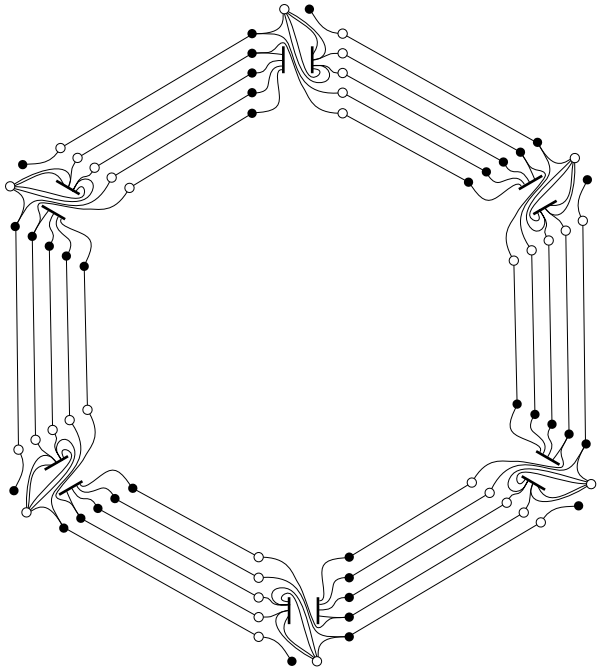
We find the *minimum genus* for n-fold rotationally symmetric interchanges in both cases:

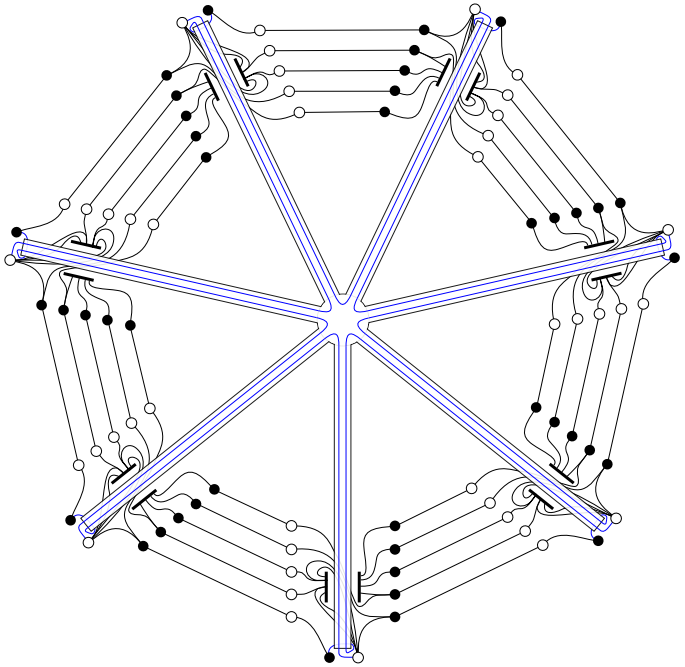
1. For topological/combinatorial symmetry, it depends on n mod 4 as well as on the *smallest prime divisor* of n.
2. For geometric ($\mathbb{R}^3$) symmetry, it depends *only* on n mod 4.



Optimal symmetric constructions

"ring road" $n \bmod 4 \in \{1, 2\}$...





... extra "star bridge" $n \bmod 4 \in \{0, 3\}$, $n \neq 4$.

Thank you.

- V. Kurauskas, On the genus of the complete tripartite graph $K_{n,n,1}$, Discrete Mathematics (2016), `arXiv:1612.07888`.
- V. Kurauskas, U. Šiurienė, Symmetric road interchanges, `arXiv:1801.03860`.

Some details

Detailed result 1

Theorem (combinatorial symmetry)
The minimum genus for a complete interchange with n-fold combinatorial symmetry is $L_C(n)$ where

$$L_C(n) = \begin{cases} \frac{n(n-2)}{4}, & \text{if } n \text{ is even}; \\ \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_1} + p_1\right), & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4, p_1 \neq n \text{ and } p_1^2 \nmid n; \\ \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_1} + 1\right), & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4 \text{ and } p_1^2 \mid n; \\ \frac{n(n-1)}{4} - 1, & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4, 3 \mid n \text{ and } 9 \nmid n; \\ \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

where p_1 is the smallest prime divisor of n.

Detailed result 2

Theorem (geometric symmetry)
For $n \neq 4$, the minimum genus for a complete interchange with n-fold geometric symmetry is $L_C^*(n)$ where

$$L_C^*(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} - 1, & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4; \\ \frac{n(n-1)}{4}, & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4; \\ \frac{n(n-2)}{4}, & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4; \\ \frac{n(n+1)}{4} - 1, & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Building block for ringroad construction