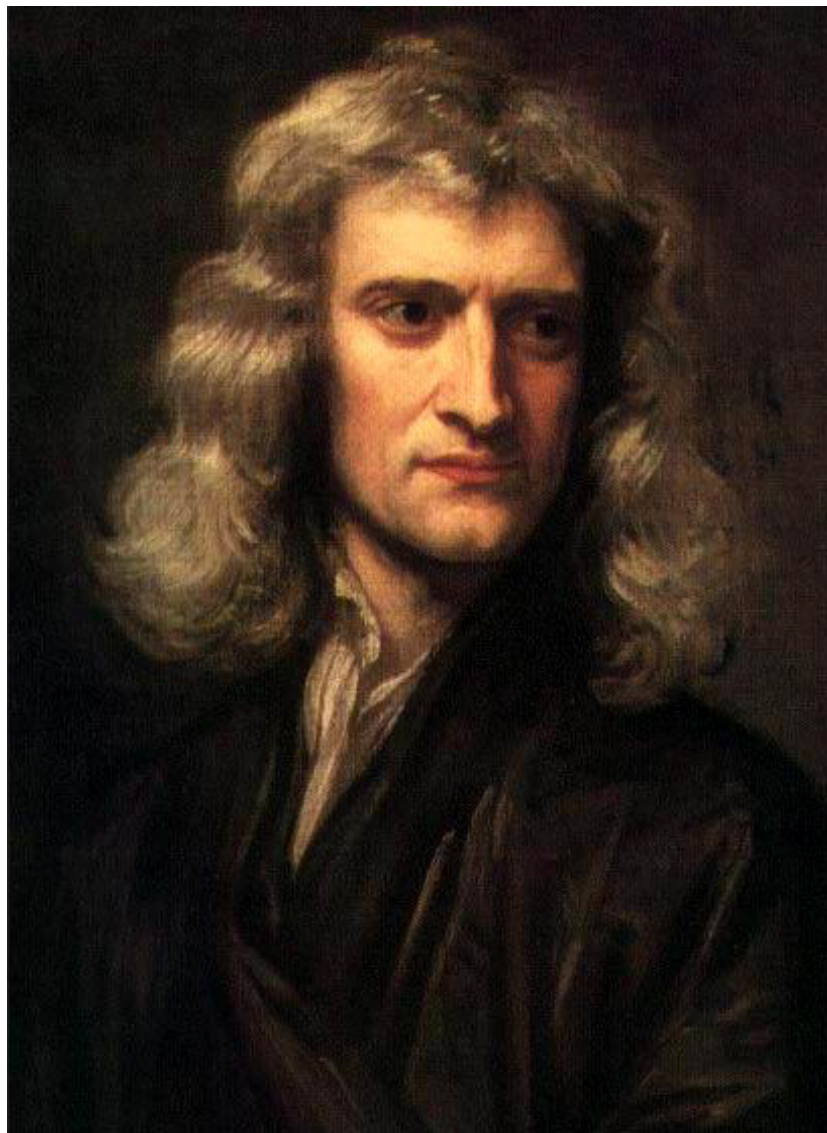


Saglabāšanās likumi

Ivars Driķis

2015. g. 25. septembrī

II Ņūtona likums



Inerciālā atskaites sistēmā ķermeņa pieliktais spēks rada ķermeņa paātrinājumu. Paātrinājums ir proporcionāls pieliktajam spēkam un apgriezti proporcionāls ķermeņa masai. Vispārīgā veidā

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$$

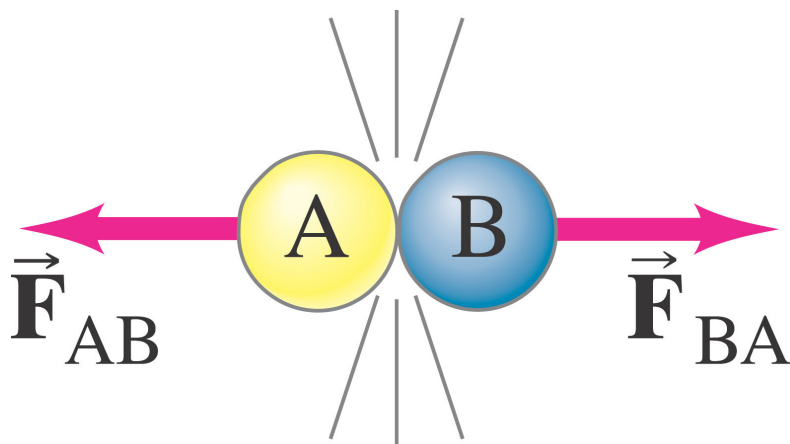
Ja uz ķermeni spēks nedarbojas, tad lielums $m\mathbf{v}$ saglabājas. Tāpēc definē *kustības daudzumu* jeb *impulsu*:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Tātad, ja

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{tad} \quad m\mathbf{v} = \text{const}$$

III Ņūtona likums



Divu ķermeņu mijiedarbības spēki vienmēr ir vienādi pēc moduļa, bet pretēji vērsti.

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

Divu daļiņu sadursme

$$\frac{d(m_A \mathbf{v}_A)}{dt} = \mathbf{F}_{AB}, \quad \frac{d(m_B \mathbf{v}_B)}{dt} = \mathbf{F}_{BA}$$

Saskaita abus vienādojumus kopā, iegūst impulsa saglabāšanās likumu sadursmes laikā

$$\frac{d}{dt} (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B) = 0$$

Tātad, ja uz daļiņām neiedarbojas kāds ārējs spēks, tad sistēmas kopējais impulss saglabājas

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}$$

Dalīņu sadursmes

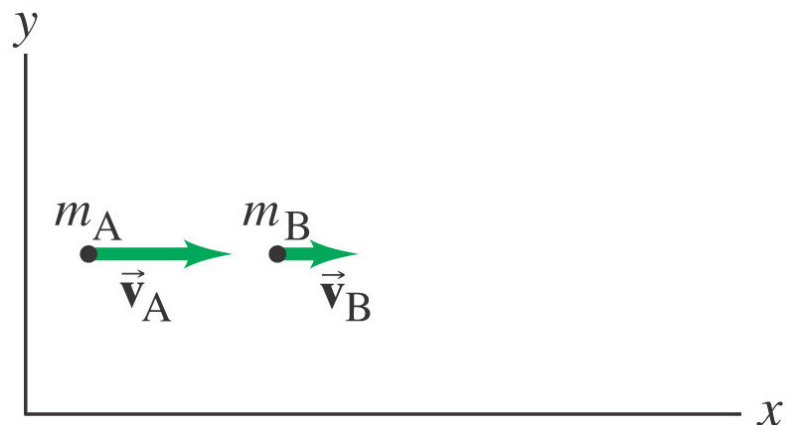
Absolūti elastīgas sadursmes

- spēkā impulsa saglabāšanās likums;
- spēkā *mehāniskas* enerģijas saglabāšanās likums;

Absolūti neelastīgas sadursmes

- spēkā impulsa saglabāšanās likums;
- *daļa* mehāniskas enerģijas pāriet siltuma enerģijā;

Absolūti elastīga sadursme vienā dimensijā



(a)

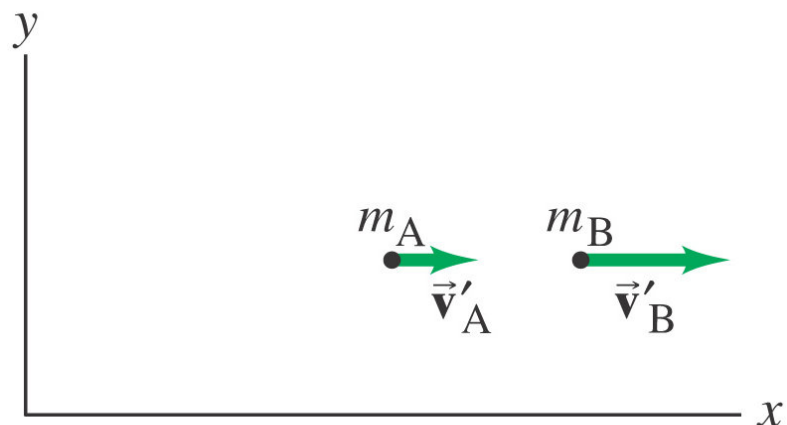
- Impulsa saglabāšanās likums

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_{11} + m_2 v_{12}$$

- Mehāniskās enerģijas saglabāšanās likums

$$m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2 = m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{12}^2$$

- Atrisinot iegūstam



(b)

$$v_{11} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{02}$$

$$v_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_{02} + \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_{01}$$

Absolūti elastīga sadursme vienā dimensijā



Disk 5: Chapter11: Demo 1

- Lodītes ar vienādām masām $m_1 = m_2$ jeb “gudrās” lodītes

$$v_{11} = v_{02}$$

$$v_{12} = v_{01}$$

- Viena lodīte ievērojami smagāka par otru, $m_1 \gg m_2$

$$v_{11} = v_{01}$$

$$v_{21} = -v_{02} + 2v_{01}$$



Disk 5: Chapter11: Demo 2

- Pievērst uzmanību *otrajai* sadursmei. Viegli piegādīt, ka pēc otrās sadursmes lodītes iegūst sākotnējos ātrumus

$$v_{21} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{11} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{12} = \dots = v_{01}$$

$$v_{22} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_{02} + \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_{01} = \dots = v_{02}$$

Absolūti neelastīga sadursme vienā dimensijā



Disk 5: Chapter 11: Demo 3

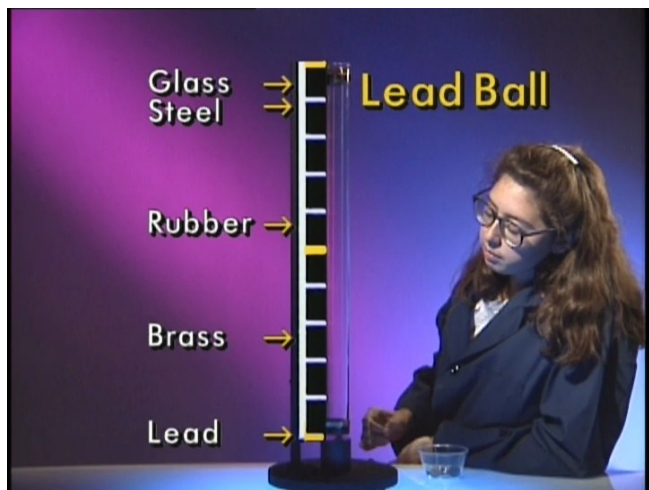
- Impulsa saglabāšanās likums nosaka daļiņu kopējo ātrumu pēc salipšanas

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v_1$$

- Enerģijas balansa vienādojums ļauj atrast *izdalīto* siltuma daudzumu Q

$$m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2 = (m_1 + m_2) v_1^2 + 2Q$$

- Ja masas ļoti dažādas, tad ...

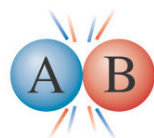


Disk 5: Chapter 11: Demo 4

Neelastīga sadursme vienā dimensijā



(a) Approach



(b) Collision



(c) If elastic



(d) If inelastic

- Ja daļiņas pēc neelastīgas sadursmes nesalīp kopā, tad to ātrumi ir mazāki nekā absolūti elastīgas sadursmes gadījumā

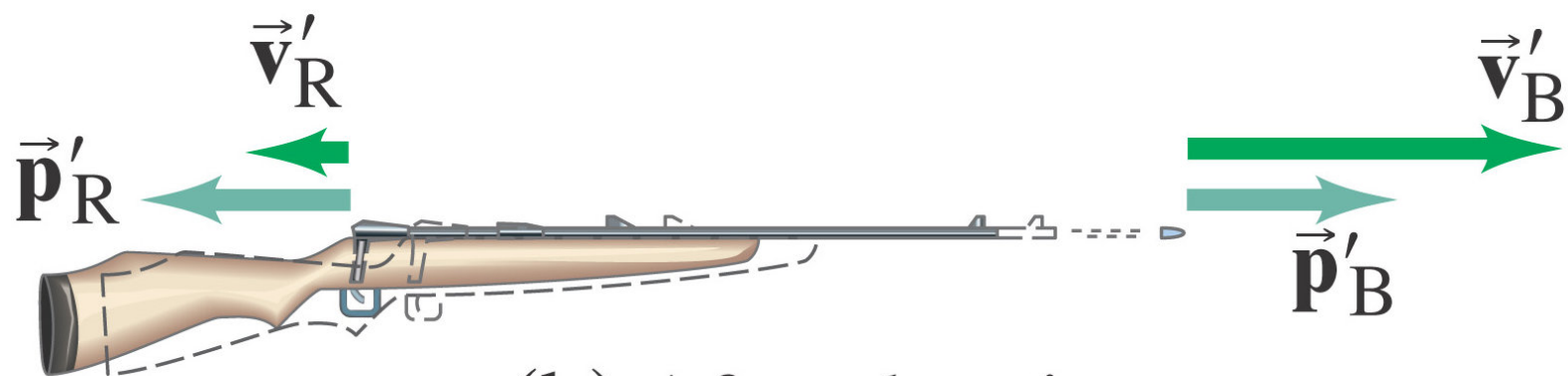
$$m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2 = m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{12}^2 + 2Q$$

- Svarīgs lodīšu materiāls

Sprādziena izraisīta kustība



(a) Before shooting (at rest)

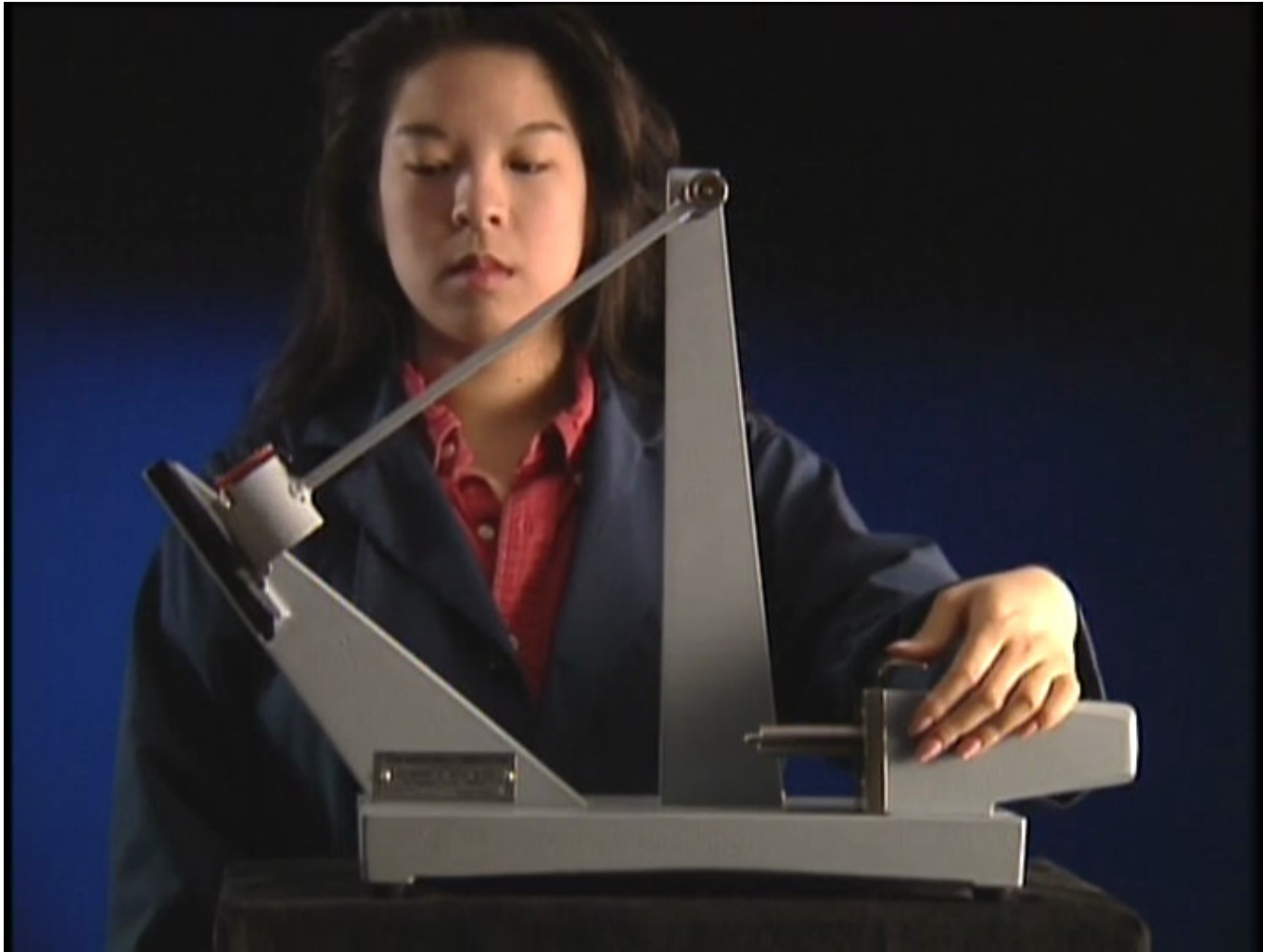


(b) After shooting

Lādiņa izdalītā enerģija ir E , tad

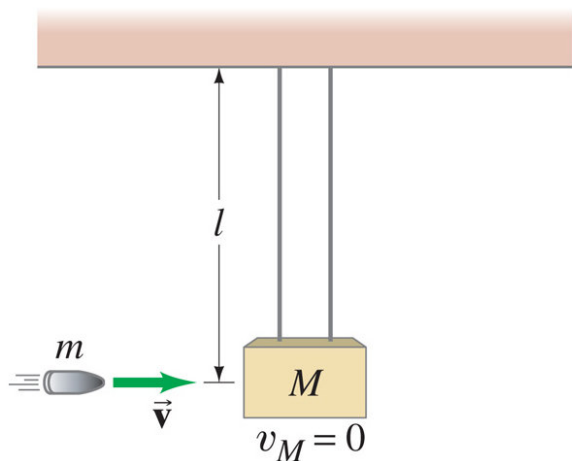
$$0 = -m_R v_R + m_B v_B, \quad 2E = m_R v_R^2 + m_B v_B^2$$

Ballistiskais svārsts



Disk 5: Chapter11: Demo 11

Ballistiskais svārsts



(a)

- Impulsa saglabāšanās likums

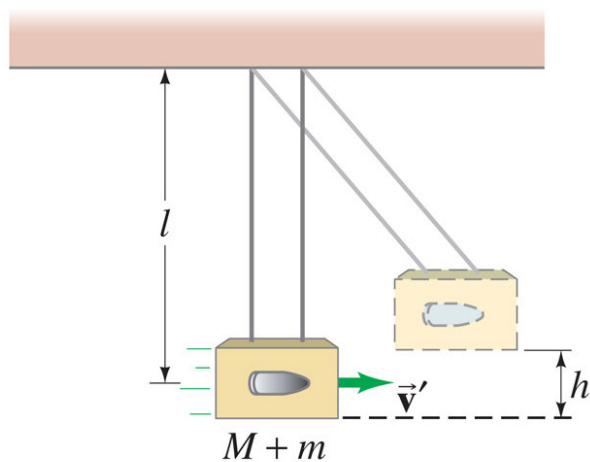
$$mv = (M + m)v'$$

- Enerģijas saglabāšanās likums un svārsta pacelšanās

$$(M + m)gh = \frac{(M + m)v'^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2(M + m)}$$

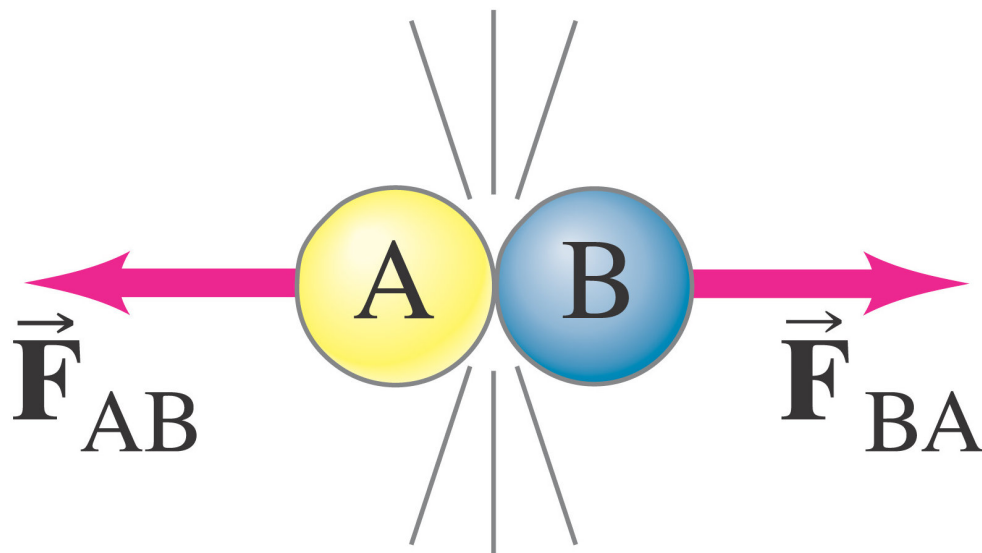
- Lodes ātrums

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$



(b)

Demo: Spēks sadursmes laikā



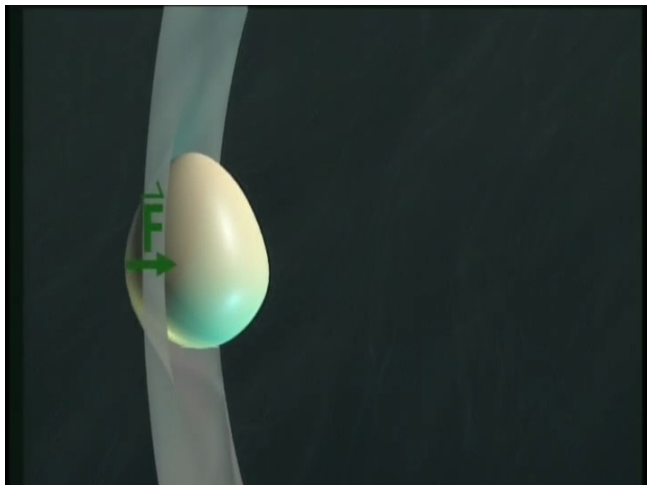
Spēka impulss

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} dt$$

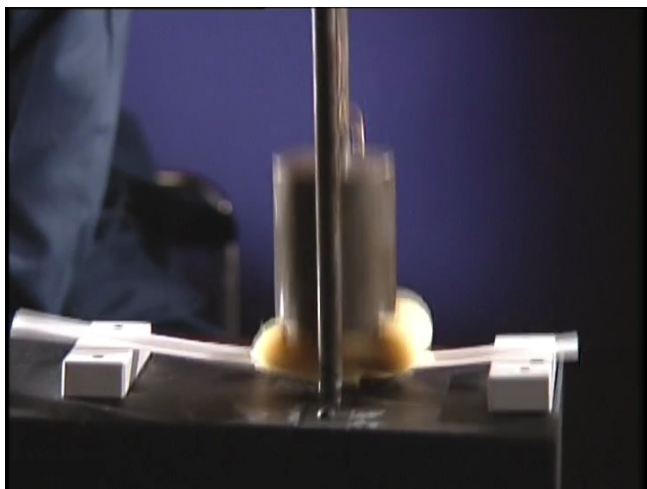
Ātruma izmaiņa sadursmes laikā

$$m \int_{v_0}^{v_1} dv = m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt$$

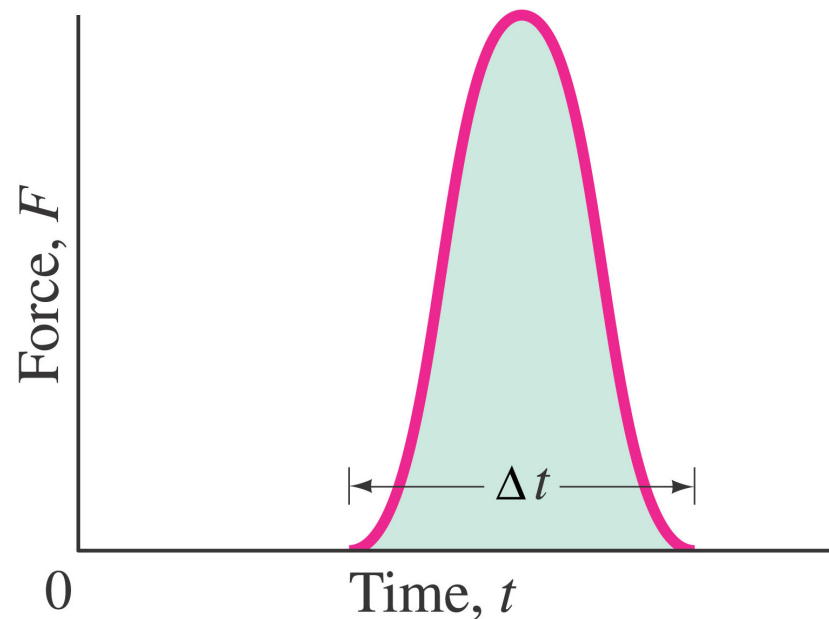
Demo: Spēks sadursmes laikā



Disk05:Chapter11:Demo09



Disk05:Chapter11:Demo10



Ātruma izmaiņa sadursmes laikā

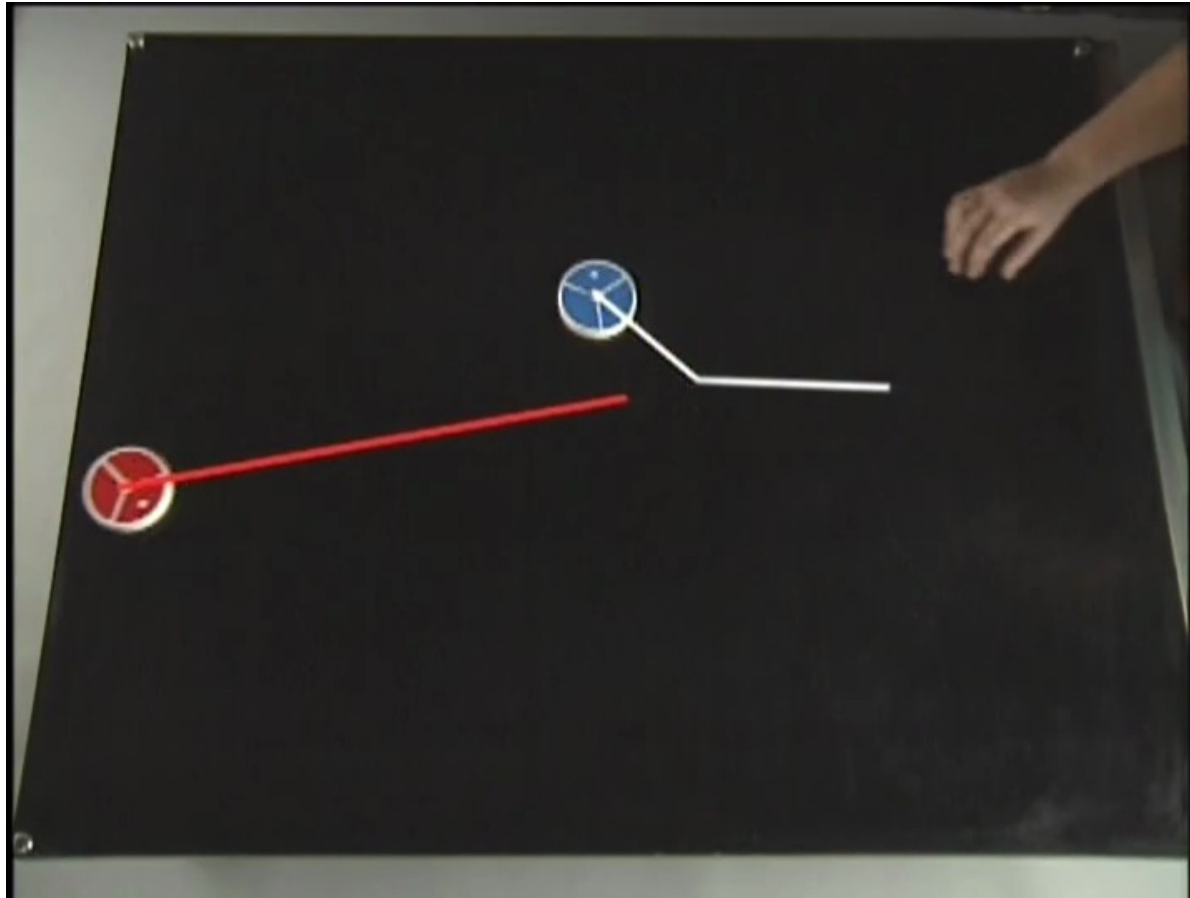
$$m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt$$

Lai ātrums mainītos no $\mathbf{v}_0$ uz $\mathbf{v}_1$, nepieciešams spēka impulss: laukums zem $\mathbf{F}(t)$ līnijas. Jo ilgāka sadursme, jo mazāks spēks nepieciešams.

Elastīga sadursme divās dimensijās



Demo: Elastīga sadursme divās dimensijās

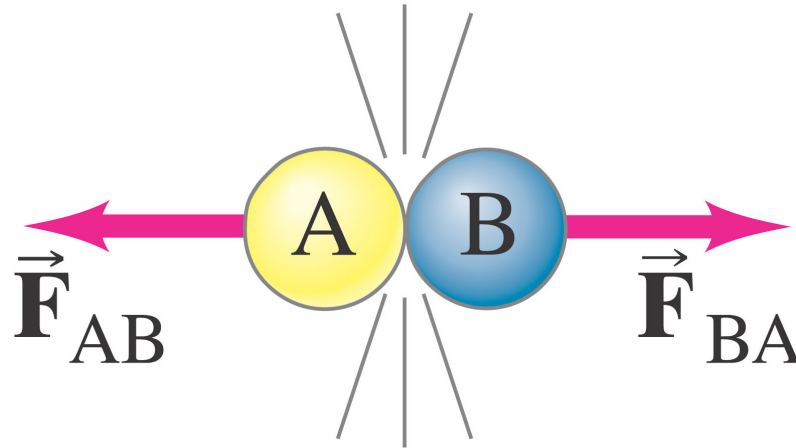


Disk 5: Chapter 11: Demo 6

Disk 5: Chapter 11: Demo 7

Disk 5: Chapter 11: Demo 8

Elastīga sadursme trijās dimensijās



- Parezi izvēlās koordinātes: sadursmes brīdī savieno lodīšu centrus;
- Tā kā $d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$, tad lodīšu ātrumu komponentes perpendikulāri izvēlētajai asij nemainās.
- Atrumu komponentem gar izvēlēto asi lieto 1D gadījuma formulas

Cieto sfēru dinamika

Cietās sfēras - viens no statistiskās fizikas modeļiem, kas pieļauj skaitlisko modelēšanu ar nelielu resursu patēriņu. Divu cietu sfēru savstarpējās mijiedarbības potenciāls atkarībā no attāluma starp to centriem ir

$$u(r) = \begin{cases} \infty, & r < \sigma \\ 0, & r \geq \sigma \end{cases}$$

Šeit σ ir sfēras diametrs. Tādas sfēras mijiedarbojas tikai absolūti elastīgas sadursmes brīdī. Laikā starp sadursmēm sfēras pārvietojas pa taisnām līnijām ar nemainīgu ātrumu. Tātad, cietu sfēru dinamikas atrašanai nav nepieciešams nepārtraukti risināt diferenciālvienādojumus, pietiek atrisināt algebrisku vienādojumu divu daļiņu nakamās sadursmes laika t_c noteikšanai no sfēru saskaršanās nosacījuma $|\mathbf{r}_1(t_c) - \mathbf{r}_2(t_c)| = \sigma$

$$t_c = t_0 + \frac{-\mathbf{v}_{12}\mathbf{r}_{12} \pm \sqrt{(\mathbf{v}_{12}\mathbf{r}_{12})^2 - v_{12}^2(r_{12}^2 - \sigma^2)}}{v_{12}^2}$$

Šeit $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1(t_0) - \mathbf{r}_2(t_0)$ un $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1(t_0) - \mathbf{v}_2(t_0)$. Sfēru ātrumus pēc kolīzijas $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ atrod atbilstoši impulsa un kinētiskās enerģijas saglabāšanās likumiem absolūti elastīgā sadursmē sfērām

ar vienādu masu: sfēras “apmainās” ar ātruma komponentēm sadursmes virzienā $\boldsymbol{\tau}_{12} = (\mathbf{r}_2(t_c) - \mathbf{r}_1(t_c))/\sigma$, bet abas pārējās ātrumu komponentes nemainās

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\boldsymbol{\tau}_{12}]\boldsymbol{\tau}_{12}$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 + [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\boldsymbol{\tau}_{12}]\boldsymbol{\tau}_{12}$$

Statistiskajā mehanikā spiedienu parasti atrod no klasiskās mehānikas viriāla teorēmas. Strādājot periodiskā aprēķinu šūnā, no molekulāri kinētiskās teorijas var iegūt sekojošu izteiksmi *saspiežamībai* Z

$$Z = \frac{PV}{NkT} = 1 + \frac{1}{3nkT} \left\langle \sum_{j>i} \mathbf{F}_{ij} \mathbf{r}_{ij} \right\rangle$$

Šeit N ir atomu skaits tilpumā V un temperatūra ir T . Savukāt $\langle \dots \rangle$ ir vidējošana laikā. Cietu sfēru gadījumā mijiedarbība notiek tikai sadursmes brīdī, kad $r_{ij} = \sigma$, pie kam $\mathbf{F}_{ij} dt = m d\mathbf{v}_{ij}$. Tātad

$$Z = 1 + \frac{1}{3nkT} \frac{1}{t} \sum_{c=1}^{N_c} m d\mathbf{v}_{ij}(t_c) \mathbf{r}_{ij}(t_c)$$

Vidējošana laikā tādējādi tiek aizvietota ar summu pa sadursmēm apskatāmajā laika intervālā t . Izolētā cietu sfēru sistēmā temperatūra ir konstanta un proporcionāla to kinētiskajai enerģijai

$$E_k = \frac{m}{2} \sum_{i=1} N v_i^2 = \frac{3}{2} N k T$$

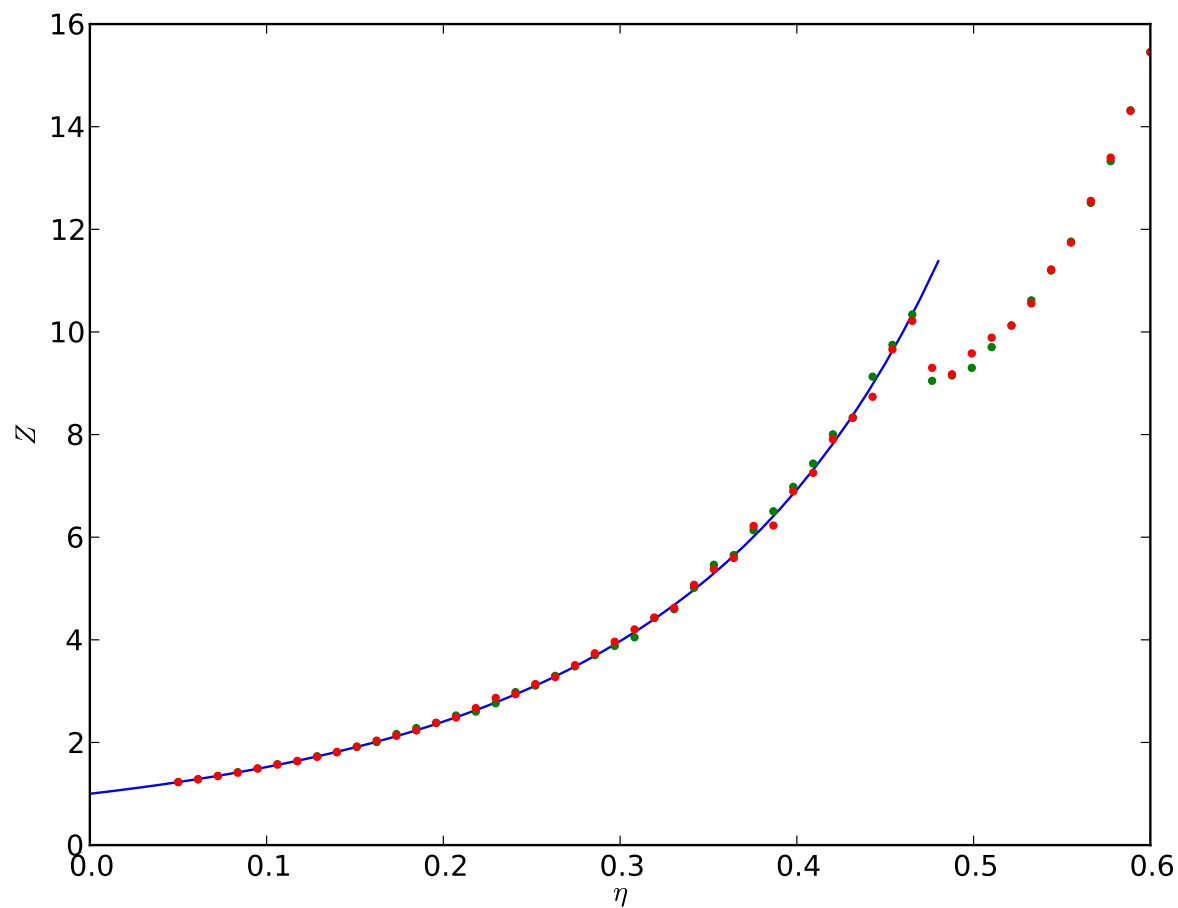
Savukārt daļiņu ātrums mainās tikai $\mathbf{r}_{ij}(t_c)$ virzienā, tāpēc $d\mathbf{v}_{ij} \mathbf{r}_{ij} = |d\mathbf{v}_{ij}|$. Tātad iegūstam sekojošu izteiksmi cietu sfēru sistēmas saspiežamībai.

$$Z = 1 + \frac{m\sigma}{2E_k} \frac{1}{t} \sum_{c=1}^{N_c} |d\mathbf{v}_{ij}|$$

Cieto sfēru sistēma ir vienkāršākā sistēma, kurai var novērot fāzu pāreju. Lieliem blīvumiem cieto sfēru sistēmai ir cietas vielas īpašības: tālā kārtība, mazs pašdifūzijas koeficients. Zemiem blīvumiem savukārt raksturīgas šķidrumu īpašības: nav novērojama tālā kārtība, vidējas pašdifūzijas koeficienta vērtības. Tā kā sistēmai nav pievilkšanās spēku, kristalizāciju nodrošina tas, ka fiksētā tilpumā tiek sakārtoti nedeformējami objekti. Šķidruma-gāzes fāzes pāreja šajā vienkāršajā sistēmā nav iespējama. Šķidruma fāzei ir spēkā stāvokļa vienādojums

$$Z = \frac{1 + \eta + \eta^2 - \eta^3}{(1 - \eta)^3}$$

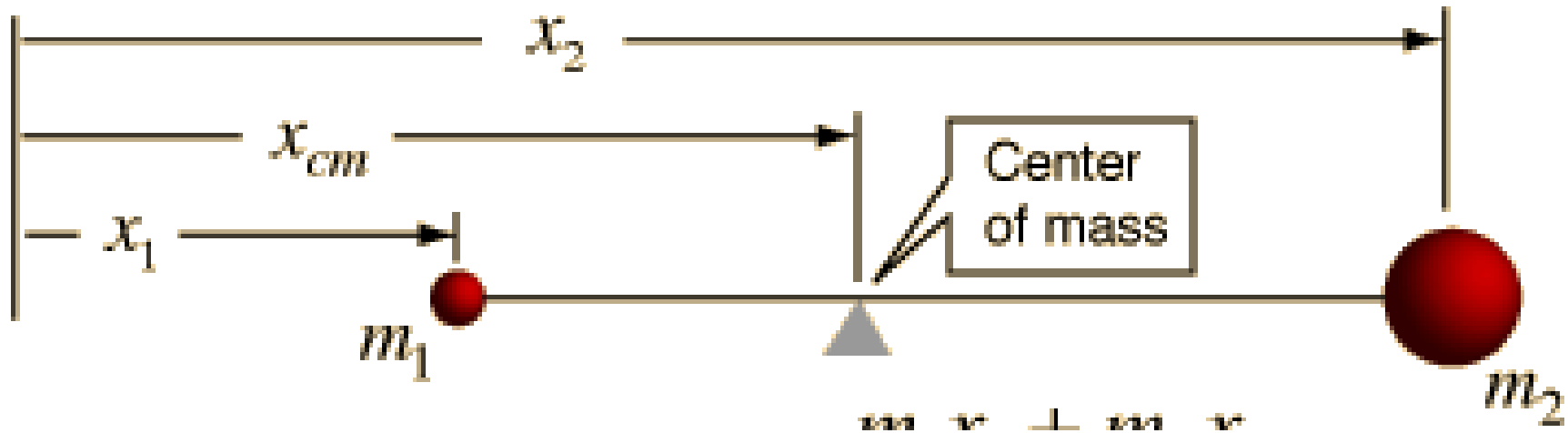
Šeit $\eta = \pi\sigma^3 N/6V$ ir šūnas aizpildījuma daļa. Jāpiezīmē, “many mathematicians believe, and all physicists know” ka $\eta = 0.7408\dots$ atbilst maksimāli iespējamam šūnas regulāram aizpildījumam.



Cieto sfēru molekulārās dinamikas aprēķinu algoritms

1. Uzdod sfēru sakuma koordinātes un attālumus;
2. Atrod katra daļiņu pāra savstarpējās sadursmes laiku;
3. Atrod daļiņu pāri, kuru sadursme notiks pirmā;
4. Pārvieto daļiņas pa taisnām trajektorijām līdz šai pirmajai sadursmei;
5. Atrod daļiņu pāra attārumus pēc sadursmes;
6. Atgriežas uz 2 soli

Masas centrs



Masas centra definīcija

$$x_{mc} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Masas centra ātrums

$$v_{mc} = \frac{dx_{mc}}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Masas centra ātrums sadursmju rezultātā nemainās

- Masas centra ātrums

$$v_{mc} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- Absolūti elastīga sadursme

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_{11} + m_2 v_{12}$$

- Absolūti neelastīga sadursme

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v_1$$

Masas centra kustība

Divu daļiņu sadursme, uz daļiņām darbojas gravitācijas spēks

$$\frac{d(m_A \mathbf{v}_A)}{dt} = \mathbf{F}_{AB} + m_A \mathbf{g}$$

$$\frac{d(m_B \mathbf{v}_B)}{dt} = \mathbf{F}_{BA} + m_B \mathbf{g}$$

Saskaita kopā un iegūst

$$\frac{d}{dt} (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B) = (m_A + m_B) \mathbf{g}$$

$$\frac{d}{dt} (m v_{mc}) = m \mathbf{g}$$

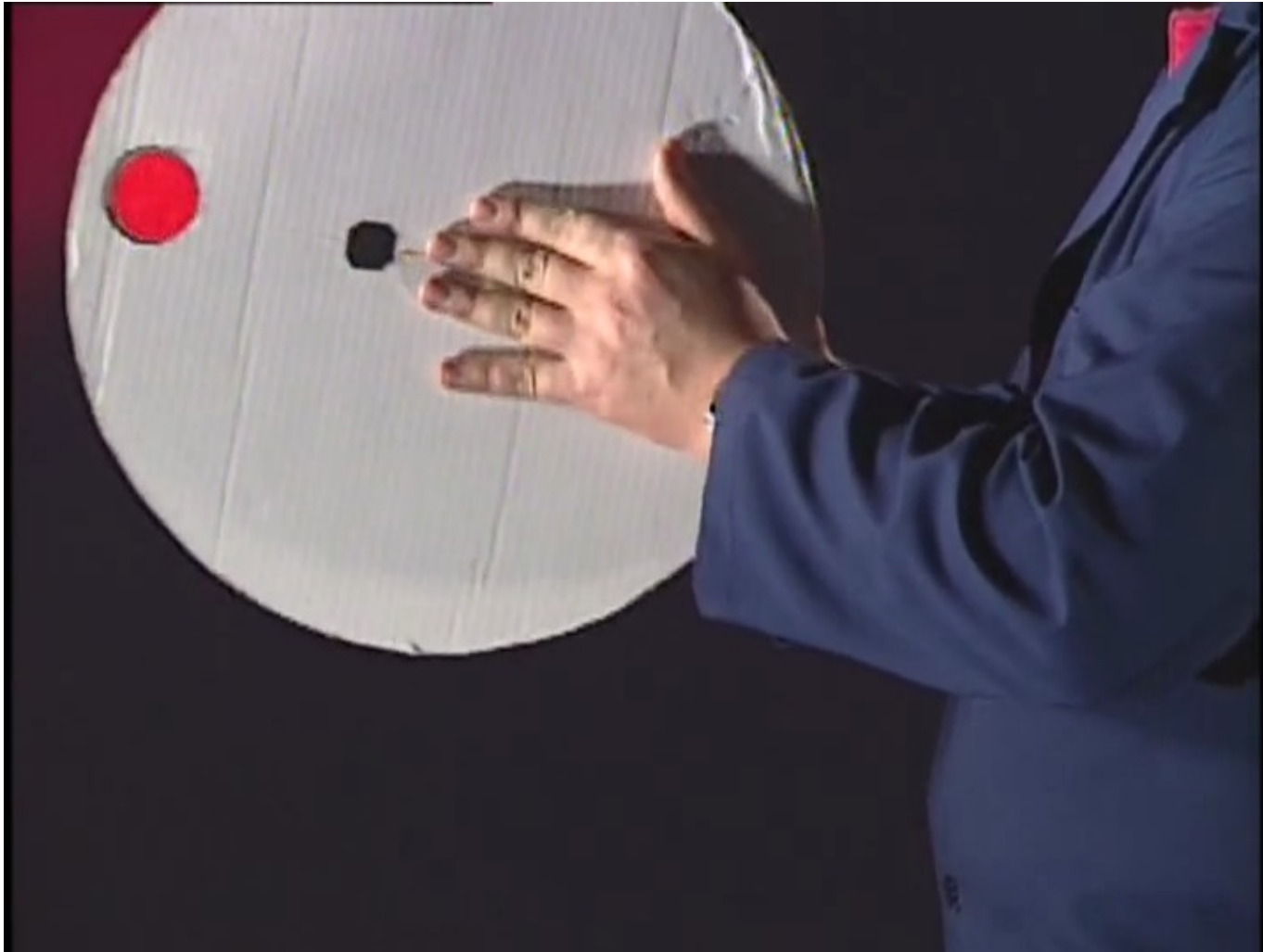
Kur $m = m_A + m_B$.

Masas centra kustība



<http://www.youtube.com/watch?v=DY3LYQv22qY>

Masas centra kustība



Disk 2: Chapter4: Demo 21