

4. Izteikumu loģikas un predikātu rēķinu elementi

Nodaļas saturs

4.	Izteikumu loģikas un predikātu rēķinu elementi	4-1
4.1.	Formulas	4-1
4.1.1.	Interpretācija	4-1
4.1.2.	Loģiskās sekas un loģiskā ekvivalence	4-2
4.2.	Formālas teorijas	4-2
4.2.1.	Definīcija	4-2
4.2.2.	Tiešā izvedamība	4-2
4.2.3.	Izvedums	4-2
4.3.	Izteikumu loģika	4-3
4.3.1.	Definīcija	4-3
4.3.2.	Teorēmu pierādīšanas mehānisms	4-3
4.3.3.	Daži teorēmu pierādīšanas piemēri	4-4
4.4.	Predikātu rēķini	4-5
4.4.1.	Definīcija	4-5
4.4.2.	Izteikumu piemēri predikātu loģikā	4-6
4.4.3.	Teorijas piemērs uz predikātu rēķinu bāzes	4-7
4.4.4.	Rezolūciju metode un unifikācija	4-9
4.5.	Vingrinājumi	4-9

Nodaļā ievietotie attēli, programmu piemēri un tabulas

Att. 4-1.	Teorijas Φ speciālo aksiomu B_1 - B_5 grafiskā interpretācija	4-8
Tab. 4-1.	Izteikumu loģikas komponentes	4-3
Tab. 4-2.	Predikātu rēķinu komponentes	4-5
Tab. 4-3.	Teorijas Φ komponentes	4-8

Matemātiskā loģika ietver metodes, kā no noteikta izteikumu kopuma iegūt zināmus secinājumus. Šo metožu izprašana vai apgūšana palīdz saprast, kā programma loģiskās programmēšanas valodā nonāk pie rezultāta.

4.1. Formulas

Formula sastāv no izteikumiem, kuri ir sasaistīti ar loģiskajām operācijām: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Šo operāciju vērtību tabulas dotas iepriekšējā (3.) nodaļā.

4.1.1. Interpretācija

Par formulas $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **interpretāciju** sauc konkrētu vērtību kopumu, kas ir piesaistīts mainīgajiem $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pie dažām interpretācijām formulas vērtība var būt patiesa (T), bet pie citām aplama (F). Formulas P vērtību pie interpretācijas I apzīmēsim ar $I(P)$.

- Formulu, kas ir patiesa vismaz pie vienas no interpretācijām, sauc par **izpildāmu**.
- Formulu, kas ir patiesa pie visām interpretācijām, sauc par **tautoloģiju**.
- Formulu, kas nav patiesa ne pie vienas interpretācijām, sauc par **pretrunu**.

4.1.2. Loģiskās sekas un loģiskā ekvivalence

Ja formula Q ir patiesa pie visām interpretācijām, pie kurām ir patiesa formula P , tad saka, ka formula Q seko no formulas P ($P \Rightarrow Q$).

Ja formulas P un Q seko viena no otras, tad saka, ka tās ir loģiski ekvivalentas ($P \Leftrightarrow Q$ vai vienkārši $P = Q$).

4.2. Formālas teorijas

4.2.1. Definīcija

Lai formāli aprakstītu loģiku un pierādīšanas teoriju, tiek izmantots formālas teorijas jēdziens.

Formāla teorija T ietver šādas komponentes:

- simbolu kopa A (alfabēts) (piemēram, mainīgie, loģiskās operācijas),
- formulu kopa $F \subset A^*$,
- aksiomu kopa $B \subset F$ (to formulu kopa, kas jau sākotnēji tiek definētas kā patiesas),
- izveduma likumu kopa $\mathfrak{R} \subset F^{n+1}$.

4.2.2. Tiešā izvedamība

Ja teorijā T ir tāds izveduma likums R , $R \in \mathfrak{R}$, ka $(F_1, \dots, F_n, G) \in R$, tad saka, ka formula G ir **tieši izvedama** no formulām $F_1, \dots, F_n$ pēc izveduma likuma R , un to parasti pieraksta šādi:

$$\frac{F_1, \dots, F_n}{G} R,$$

kur formulas $F_1, \dots, F_n$ sauc par **premisu**, bet formulu G – par **secinājumu**.

4.2.3. Izvedums

Par formulas G **izvedumu** no formulām $F_1, \dots, F_n$ teorijā T sauc tādu **formulu virkni** $E_1, \dots, E_k$, kur $E_k = G$, bet jebkura no pārējām formulām E_i atbilst vienam no 3 variantiem:

- aksioma ($E_i \in B$),
- izejas formula ($E_i \in \{F_1, \dots, F_n\}$),
- tieši izvedama no iepriekš iegūtajām formulām $E_1 \dots E_{i-1}$.

Ja teorijā T eksistē šāds izvedums, tad to pieraksta šādi:

$$F_1, \dots, F_n \vdash_T G,$$

kur formulas $F_1, \dots, F_n$ sauc par izveduma **hipotēzēm**. Ja ir skaidrs, par kuru teoriju ir runa, tad simbols T pie $\vdash$ tiek izlaists:

$$F_1, \dots, F_n \vdash G,$$

Ja $\vdash_T G$ (t.i., hipotēžu daļas nav), tad formulu G sauc par teorijas T **teorēmu** (t.i., tādu formulu, kas ir izvedama no teorijas T aksiomām, neizmantojot hipotēzes)

4.3. Izteikumu loģika

4.3.1. Definīcija

Klasiski izteikumu loģika tiek definēta kā formāla teorija L , kura satur šādas komponentes:

Tab. 4-1. Izteikumu loģikas komponentes.

Alfabēts:	operācijas $\neg$ un $\rightarrow$ dienesta simboli $(,)$ mainīgie $a, b, \dots$
Formulas:	(1) mainīgie (2) ja A un B ir formulas, formulas ir arī $(\neg A)$ un $(A \rightarrow B)$
Aksiomas:	$A_1: (A \rightarrow (B \rightarrow A))$ $A_2: ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ $A_3: ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$
Izveduma likums:	$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \text{Modus ponens (jeb MP)}$

Šeit A, B un C ir jebkādas formulas. Tādējādi teorijas L aksiomu skaits ir bezgalīgs, kaut arī definēts, izmantojot tikai 3 aksiomu shēmas. Tieši tāpat arī izveduma likumu skaits ir bezgalīgs.

Pirmā kļūda, mēģinot apgūt matemātiskās loģikas mehānismus, ir mēģināt visu (it sevišķi, aksiomas) interpretēt no racionālā un intuitīvā viedokļa. Daudzos gadījumos tas var palīdzēt, bet citos tieši otrādi – traucēt.

Citas operācijas šajā teorijā var tikt definētas, izmantojot pamatoperācijas:

$$A \& B := \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$A \vee B := \neg A \rightarrow B$$

Papildus operāciju lietošana būtu uzskatāma kā sintaktisks saīsinājums.

4.3.2. Teorēmu pierādīšanas mehānisms

Teorēma (sk. arī nodaļu 4.2.3) ir tāda formula (t.i. izteikums), kuru var noteiktā veidā izvest, izmantojot dotās teorijas līdzekļus.

Teorēmas pierādījums (jeb izvedums, sk. nodaļu 4.2.3) ir noteiktā veidā konstruēta formulu virkne (salīdzināt ar vārda izvedumu kādā gramatikā).

Izvedums (t.i. katra nākamā formula izvedumā) tiek konstruēts, izmantojot šādas izejas formulas un mehānismus:

- aksiomas (Tab. 4-1, 3. sadaļa),
- substitūcija,

- hipotēžu uzstādīšana,
- izveduma likumu (Tab. 4-1, 4. sadaļa) piemērošana.
- iepriekš izvestas teorēmas.

Tas, kādā secībā un kombinācijā tiek piemēroti mehānismi un formulas, ir visai radošs process, it sevišķi ieraudzīt esošu formulu saderību ar nepieciešamo rezultātu, izmantojot substitūciju, kā arī izdomāt hipotēzes.

4.3.3. Daži teorēmu pierādīšanas piemēri

Teorēma 1. $\vdash_L A \rightarrow A$

Pierādījums.

<i>Apgalvojums</i>	<i>Pamatojums</i>
1. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$	$A_1; \{A \rightarrow A // B\}$
2. $((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)))$	$A_2; \{A \rightarrow A // B, A // C\}$
3. $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$	MP; 1; 2
4. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$	$A_1; \{A // B\}$
5. $A \rightarrow A$	MP; 4; 3

Teorēma 2. $A \vdash_L B \rightarrow A$

Pierādījums.

<i>Apgalvojums</i>	<i>Pamatojums</i>
1. A	hipotēze (sk. teorēmas kreiso pusi)
2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	A_1
3. $B \rightarrow A$	MP; 1; 2

Ievērojiet, ka abās iepriekšējās teorēmās rezultāts (attiecīgi 5. un 3. apgalvojums) atbilst teorēmas labajai pusei (nevis visai teorēmai).

Teorēma 3. Ja $\Gamma, A \vdash_L B$, tad $\Gamma \vdash_L A \rightarrow B$

(Dedukcijas teorēma, DT)

Šeit netiks pierādīta.

Teorijā L jēdzieni implikācija ($\rightarrow$) un izvedamība ($\vdash$) ir cieši saistīti (ko arī parāda Dedukcijas teorēma), tomēr jāapzinās, ka šie jēdzieni ir divi dažādi.

Teorēma 4. (sekas no DT) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_L A \rightarrow C$

Pierādījums.

<i>Apgalvojums</i>	<i>Pamatojums</i>
1. $A \rightarrow B$	hipotēze (sk. teorēmas kreiso pusi)
2. $B \rightarrow C$	hipotēze (sk. teorēmas kreiso pusi)
3. A	hipotēze (nav teorēmas kreisajā pusē!)

4.	B	MP; 3; 1
5.	C	MP; 4; 2
6.	$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \mid \neg C$	1-5
7.	$A \rightarrow B, B \rightarrow C \mid \neg A \rightarrow C$	DT; 6

Teorēma 5. Ja $\Gamma, B \mid \neg A$ un $\Gamma, B \mid \neg \neg A$, tad $\Gamma \mid \neg B$

(*Reductio ad Absurdum, RAA*)

Pierādījums.

<i>Apgalvojums</i>	<i>Pamatojums</i>
1. $\Gamma, B \mid \neg A$	dots
2. $\Gamma, B \mid \neg \neg A$	dots
3. $\Gamma \mid \neg B \rightarrow \neg A$	DT; 2
4. $((B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow \neg B))$	$A_3; \{B // \neg B\}$
5. $\Gamma \mid \neg (B \rightarrow A) \rightarrow \neg B$	MP; 3; 4
6. $\Gamma \mid \neg B \rightarrow A$	DT; 1
7. $\Gamma, B \rightarrow A \mid \neg B$	DT; 5
7. $\Gamma \mid \neg \neg B$	6; 7

4.4. Predikātu rēķini

4.4.1. Definīcija

Izteikumu loģika operē ar (neatkarīgiem) izteikumiem, tomēr, analizējot vārdiskus apgalvojumus, rodas nepieciešamība raksturot arī objektu īpašības un attiecsmes starp tiem. Šim nolūkam tiek ieviests predikāta jēdziens.

Predikāts ir funkcija, kuras vērtība ir patiesums (paties vai aplams), bet argumenti ir objekti.

Predikātu izmantošana papildus izteikumiem (izteikums būtu uzskatāms kā predikāta apakšgadījums – bez argumentiem) nosaka predikātu rēķinu atšķirību no izteikumu loģikas.

Nemot vērā to, ka predikāta vērtība ir atkarīga no tam padodamajiem argumentiem, papildus predikātiem predikātu rēķinos tiek ieviesti arī **kvantori** – nosacījumi, kas nosaka predikātos izmantojamo mainīgo darbības apgabalu:

- $\forall$ – universālais kvantors. $\forall x$ nozīmē: “visiem x (ir spēkā, ka)”.
- $\exists$ – eksistences kvantors. $\exists x$ nozīmē: “eksistē tāds x , ka”.

Predikātu rēķini satur šādas komponentes:

Tab. 4-2. Predikātu rēķinu komponentes.

Alfabēts:	pamatoperācijas $\neg \rightarrow$ papildoperācijas $\& \vee$
-----------	--

	dienesta simboli (,)
	kvantori $\forall \exists$
	konstantes a, b, ...
	mainīgie x, y, ...
	predikāti P, Q, ...
	funktori f, g, ...
Formulas:	$\langle \text{formula} \rangle ::=$ $\langle \text{atoms} \rangle \mid$ $\neg \langle \text{formula} \rangle \mid$ $(\langle \text{formula} \rangle \rightarrow \langle \text{formula} \rangle) \mid$ $\forall \langle \text{mainīgais} \rangle \langle \text{formula} \rangle \mid$ $\exists \langle \text{mainīgais} \rangle \langle \text{formula} \rangle$ $\langle \text{atoms} \rangle ::= \langle \text{predikāts} \rangle (\langle \text{termu saraksts} \rangle)$ $\langle \text{termu saraksts} \rangle ::= \langle \text{terms} \rangle \mid \langle \text{terms} \rangle, \langle \text{termu saraksts} \rangle$ $\langle \text{terms} \rangle ::=$ $\langle \text{konstante} \rangle \mid$ $\langle \text{mainīgais} \rangle \mid$ $\langle \text{funktors} \rangle (\langle \text{termu saraksts} \rangle)$
Aksiomas:	Tās pašas, kas izteikumu loģikā $A_1: (A \rightarrow (B \rightarrow A))$ $A_2: ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ $A_3: ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$ un papildus: $P_1: \forall x A(x) \rightarrow A(t)$ $P_2: A(t) \rightarrow \exists x A(x)$ kur mainīgais x ir brīvs attiecībā pret termu t.
Izveduma likumi:	$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \text{Modus ponens}$ $\frac{B \rightarrow A(x)}{B \rightarrow \forall x A(x)} \forall^+$ $\frac{A(x) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B} \exists^+$ kur formula A iekļauj mainīgos x nesaistītā veidā, bet B – neiekļauj.

Loģiskajām operācijām tiek ievērota prioritāte šādā secībā: $\neg \forall \exists \& \vee \rightarrow$

Vispārīgā veida predikātiem $P(u, v, \dots)$ mainīgos $u, v, \dots$ sauc par **brīvajiem** mainīgajiem. Katrs no pievienotajiem kvantoriem, kas attiecas uz kādu no predikāta mainīgajiem, pārvērš brīvo mainīgo **saistītā** mainīgajā.

4.4.2. Izteikumu piemēri predikātu loģikā

Izteikums 1.

Visi Annas draugu draugi ir arī viņas draugi.

$\forall x \forall y (\text{Friend}(\text{Anna}, x) \& \text{Friend}(x, y) \rightarrow \text{Friend}(\text{Anna}, y))$

Izteikums 2.

Starp katra cilvēka draugu draugiem ir kāds, kas ir arī viņa paša draugs.

$\forall x \forall y \exists z (\text{Friend}(x, y) \& \text{Friend}(y, z) \rightarrow \text{Friend}(x, z))$

Izteikums 3.

x ir y vecvecāks, ja eksistē tāds z, kam x ir vecāks, bet pats z ir vecāks y.

$$\forall x \forall y (\exists z (\text{Parent}(x,z) \& \text{Parent}(z,y)) \rightarrow \text{Grandparent}(x,y))$$

Izteikums 4.

Iepriekšējo izteikumu var izmainīt, šajā gadījumā pēc būtības praktiski nemainot nozīmi: visiem x,y,z ir spēkā, ka, ja x ir z vecāks un z ir y vecāks, tad x ir y vecvecāks.

$$\forall x \forall y \forall z (\text{Parent}(x,z) \& \text{Parent}(z,y) \rightarrow \text{Grandparent}(x,y))$$

Izteikums 5.

x ir y vecmāmiņa, ja x ir y vecvecāks un x ir sieviete.

$$\forall x \forall y (\text{Grandparent}(x,y) \& \text{Female}(x) \rightarrow \text{Grandmother}(x,y))$$

Izteikums 6.

x ir y priekštecis (sencis), ja x ir y vecāks vai arī, ja eksistē tāds z, kuram x ir vecāks, bet kurš ir priekštecis y.

$$\forall x \forall y (\text{Parent}(x,z) \vee \exists z (\text{Parent}(x,z) \& \text{Ancestor}(z,y)) \rightarrow \text{Ancestor}(x,y))$$

Izteikums 7.

Šo pašu priekšteča problēmu var definēt, izmantojot tikai universālos kvantorus:

visiem x,y,z ir spēkā, ka, ja x ir y vecāks vai arī, ja x ir z vecāks un z ir y priekštecis, tad x ir y priekštecis.

$$\forall x \forall y \forall z (\text{Parent}(x,z) \vee \text{Parent}(x,z) \& \text{Ancestor}(z,y) \rightarrow \text{Ancestor}(x,y))$$

Izteikums 8.

x un y ir savstarpēji brāļi/māsas/brālis un māsa/māsa un brālis (“brāļu un māsu attiecībās”, siblings, Geschwister), ja tiem ir kopīgs vecāks un ja x un y nav viena un tā pati persona.

$$\forall x \forall y (\exists z (\text{Parent}(z,x) \& \text{Parent}(z,y)) \& \text{NotEqual}(x,y) \rightarrow \text{Siblings}(x,y))$$

Izteikums 9.

Brāļu un māsu problēmu var definēt, izmantojot tikai universālos kvantorus:

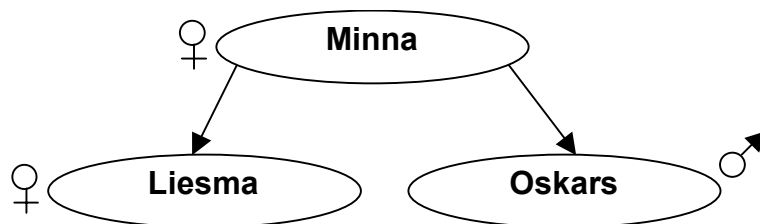
visiem x,y,z ir spēkā, ka, ja z ir vecāks gan x gan y, turklāt x un y nav viena un tā pati persona, tad x un y ir “brāļu un māsu” attiecībās.

$$\forall x \forall y \forall z (\text{Parent}(z,x) \& \text{Parent}(z,y) \& \text{NotEqual}(x,y) \rightarrow \text{Siblings}(x,y))$$

4.4.3. Teorijas piemērs uz predikātu rēķinu bāzes

Tiks apskatīta teorija Φ , kas reprezentē konkrētu dzimtas koka fragmentu.

Att. 4-1. Teorijas Φ speciālo aksiomu B_1 - B_5 grafiskā interpretācija.



Tab. 4-3. Teorijas Φ komponentes.

Alfabēts:	pamatoperācijas $\neg \rightarrow$ papildoperācijas $\& \vee$ dienesta simboli $(,)$ kvantori $\forall \exists$ konstantes: Minna, Liesma, Oskars mainīgie x, y predikāti (aiz slīpsvītras dots argumentu skaits): Parent/2, Female/1, Male/1, Son/2, Mother/1
Formulas:	tāpat kā Tab. 4-2
Aksiomas:	tās pašas, kas Tab. 4-2, kā arī speciālās aksiomas (sk. arī Att. 4-1): B_1 : Parent (Minna, Liesma) B_2 : Parent (Minna, Oskars) B_3 : Female (Minna) B_4 : Female (Liesma) B_5 : Male (Oskars) (tālāk tiek definēti jēdzieni “māte” un “dēls” (universālie kvantori formulu priekšā izlaisti)): B_6 : Parent (x,y) & Female (x) $\rightarrow$ Mother (x) B_7 : Parent (x,y) & Male (y) $\rightarrow$ Son (y,x)
Izveduma likumi:	tāpat kā Tab. 4-2

Teorēma $\Phi 1$. $\vdash_{\Phi}$ Mother (Minna)

(Pierādīt, ka Minna ir (kādam) māte)

Izvedumā izmantotas arī formulu ekvivalences (sk. nodaļu 3.3.2).

Apgalvojums	Pamatojums
1. $\neg \text{Parent}(x,y) \vee \neg \text{Female}(x) \vee \text{Mother}(x)$	B_6 ; $A \& B := \neg(\neg A \vee \neg B)$; $A \rightarrow B := \neg A \vee B$
2. $\neg \text{Parent}(\text{Minna}, \text{Oskars}) \vee \neg \text{Female}(\text{Minna}) \vee \text{Mother}(\text{Minna})$	1; $\{\text{Minna}/x, \text{Oskars}/y\}$
3. $\neg \text{Female}(\text{Minna}) \vee \text{Mother}(\text{Minna})$	2; B_2 ; $A \vee \text{false} = A$
4. Mother (Minna)	3; B_3 ; $A \vee \text{false} = A$

Ar to ir pierādīts, ka Minna ir (kādam) māte.

4.4.4. Rezolūciju metode un unifikācija

Rezolūciju metode ir loģiskā izveduma automatizācijas metode, uz kuras balstās valodas Prolog realizācija.

Rezolūciju metode balstās uz “**pierādījuma no pretējā**” principu.

Tā vietā, lai pierādītu, ka no formulu kopuma $\{F_1, \dots, F_n\}$ seko formula F :

$$\{F_1, \dots, F_n\} \Rightarrow F$$

(piemēram, pierādījums nodaļā 4.4.3), formulu kopai tiek pievienota formulas F negācija, un tiek mēģināts pierādīt šīs papildinātās formulu kopas pretrunīgums:

$$\{F_1, \dots, F_n, F\} \Rightarrow \text{false}$$

Kaut gan uz rezolūciju metodes balstās valodas Prolog realizācija, tomēr rezolūcijas metodes pilnīga apgūšana nav nepieciešama, lai rakstītu programmas valodā Prolog, tādēļ šeit nav dots dziļāks metodes izklāsts.

Ar rezolūciju metodi cieši saistīts jēdziens ir unifikācija. **Unifikācija** ir īpašs mainīgo aizvietošanas (substitūcijas) process rezolūcijas metodes ietvaros.

4.5. Vingrinājumi

Vingrinājums #1.

Pierādīt izteikumu loģikā $A \rightarrow B, \neg B \vdash_L \neg A$ (*Modus Tollens*)

(sk. piemērus nodaļā 4.3.3, mēģiniet izmantot aksiomas A_1 un A_3 (nodaļā 4.3.1)).

Vingrinājums #2.

Formulēt izteikumu predikātu loģikā:

nodefinēt predikātu Sister (māsa) (pēc līdzības ar piemēru #9 nodaļā 4.4.2).

Vingrinājums #3.

Formulēt izteikumu predikātu loģikā:

nodefinēt predikātu Cousin (brālēns vai māsīca).

Vingrinājums #4.

Formulēt izteikumu predikātu loģikā:

katram cilvēkam ir tieši viens tēvs.

Vingrinājums #5.

Formulēt izteikumu predikātu loģikā:

ja manai mātei ir tikai viens bērns, tad tas esmu es.

Vingrinājums #6.

Pierādīt teorijā Φ (nodaļa 4.4.3) teorēmu Φ_2 :

$\vdash_{\Phi} \text{Son}(\text{Oskars}, \text{Minna})$ (*Oskars ir Minnas dēls*)

Sk. arī Φ_1 pierādījumu.