0.1 Lineārie homogēnie DV ar konstantiem koeficientiem

10.tēma

Eilera metode lineāra homogēna augstākās kārtas DV ar konstantiem koeficientiem partikulārā atrisinājuma atrašanai. Raksturīgais vienādojums. Lineāra homogēna augstākās kārtas DV ar konstantiem koeficientiem vispārīgais atrisinājums gadījumos, kad raksturīgam vienādojumam: a) visas saknes ir dažādas un reālas, b) ir arī vienkāršas kompleksas saknes, c) ir vairākākārtīgas saknes. Piemēri.

0.1.1 Eilera metode

Kā tika parādīts, lineāra homogēna DV integrācijas uzdevums faktiski reducējas uz dotā DV atrisinājumu fundamentālsistēmas atrašanas uzdevumu. Kaut arī katram lineāram homogēnam DV ir bezgalīgi daudz fundamentālsistēmas, tomēr vispārīgā gadījumā tas ir sarežģīts uzdevums un ne vienmēr izpildāms elementāro funkciju klasē. Izrādās, ka minētais uzdevums būtiski vienkāršojas, ja dotais vienādojums ir ar konstantiem koeficientiem. Šajā gadījumā atbilstošās atrisināju-mu fundamentālsistēmas atrašanas uzdevums reducējas uz algebriska vienādojuma risināšanu.

Vienkāršības dēļ aplūkosim vispirms otrās kārtas lineāru homogēnu DV ar konstantiem koeficientiem:

$$y" + p_1 y' + p_2 y = 0, \tag{0.1}$$

t.i. pieņemot, ka tā koeficienti p_1 un p_2 nav atkarīgi no x.

Tā kā DV (0.1) faktiski izsaka, ka nezināmās funkcijas un tās pirmā un otrā atvasinājuma lineārā kombinācija ar koeficientiem p_1,p_2 un 1 ir 0, tad ir pamats domāt, ka viens no dotā DV atrisinājumiem ir funkcija, kuras atvasinājumi atšķiras no tās ar konstantu reizinātāju. Šāda īpašība, kā zināms, piemīt eksponentfunkcijai.

Eilera metodē DV (0.1) partikulārie atrisinājumi tiek meklēti formā

$$y(x) = e^{sx}, \tag{0.2}$$

kur s-pagaidām nezināma konstante (parametrs).

Ievietojot funkciju (0.2) un tās atvasinājumus $y'(x) = se^{sx}$ un $y"(x) = s^2 e^{sx}$ DV (0.1), atrodam, ka

$$(s^2 + p_1 s + p_2)e^{sx} = 0.$$

Tā kā $e^{sx} \neq 0$, tad attiecībā pret s iegūstam kvadrātvienādojumu

$$s^2 + p_1 s + p_2 = 0, \tag{0.3}$$

ko sauc par lineārā homogēnā DV (0.1) *raksturīgo vienādojumu.* Atrisinot kvadrātvienādojumu, tiek iegūtas parametra s vērtības

$$s_1, s_2 = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 - p_2}, \tag{0.4}$$

ar kurām funkcija (0.2) apmierina doto DV (0.1).

Atkarībā no diskriminanta $D = \frac{p_1^2}{4} - p_2$ vērtības ir iespējami 3 gadījumi.

1.gadījums: D>0.

Tad raksturīgā vienādojuma 3 saknes s_1 un s_2 ir reālas un dažādas. Tām atbilst divi DV (0.1) partikulārie atrisinājumi

$$y_1(x) = e^{s_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{s_2 x}.$$

Tā kā to Vronska determinants

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{s_1 x} & e^{s_2 x} \\ s_1 e^{s_1 x} & s_2 e^{s_2 x} \end{vmatrix} = (s_2 - s_1) e^{(s_1 + s_2)x} \neq 0,$$

tad tie veido DV (0.1) atrisinājumu fundamentālsistēmu intervalā $(-\infty, +\infty)$ un līdz ar to DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.5}$$

Piemērs 1 Atrisināt DV: $y" - 3y' + 2y = 0$.

Sastādam dotā DV raksturīgo vienādojumu $s^2 - 3s + 2 = 0$. Tā saknes ir $s_1 = 1$ un $s_2 = 2$ un tātad dotā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2.gadījums: D=0.

Tad raksturīgam vienādojumam ir viena divkārša sakne $s_1 = s_2 = -\frac{p_1}{2}$, kurai atbilst DV (0.1) partikulārais atrisinjums

$$y_1(x) = e^{s_1 x}.$$

Izrādās, ka DV (0.1) atrisinājums šajā gadījumā ir arī funkcija

$$y_2(x) = x e^{s_1 x}.$$

Tiešām, ievietojot DV (0.1) kreisajā pusē $y_2(x)$ un tās atvasinājumus

$$y_2'(x) = e^{s_1 x} + s_1 x e^{s_1 x},$$

$$y_2"(x) = 2 s_1 e^{s_1 x} + s_1^2 x e^{s_1 x}$$

un ņemot vērā, ka $s_1^2 + p_1 s_1 + p_2 = 0$ un $s_1 = -\frac{p_1}{2}$, iegūstam

$$2 s_1 e^{s_1 x} + s_1^2 x e^{s_1 x} + p_1 (e^{s_1 x} + s_1 x e^{s_1 x}) + p_2 x e^{s x} =$$

$$= (s_1^2 + p_1 s_1 + p_2) x e^{s_1 x} + (2 s_1 + p_1) e^{s_1 x} = 0.$$

Tā kā šo atrisinājumu Vronska determinants

$$W[y_1,y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{s_1x} & xe^{s_1x} \\ s_1e^{s_1x} & e^{s_1x}+s_1xe^{s_1x} \end{vmatrix} = e^{2s_1x} \neq 0,$$

tad tie veido DV (0.1) atrisinājumu fundamentālsistmu intervalā $(-\infty,+\infty)$ un DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1e^{s_1x} + C_2xe^{s_1x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Piemērs 2 Atrisināt DV: $y" + 2y' + y = 0$.

Dotā DV raksturīgā vienādojuma $s^2 + 2s + 1 = 0$ saknes ir $s_1 = s_2 = -1$. Tātad dotā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$.

3.gadījums: D<0. Tad raksturīgam vienādojumam (0.3) ir divas kompleksi saistītas saknes

$$s_1, s_1 = -\frac{p_1}{2} \pm i\sqrt{-D} = \alpha \pm i\beta,$$

$$\alpha = -\frac{p_1}{2}, \beta = \sqrt{-D} = \sqrt{p_2 - \frac{p_1^2}{4}}.$$

Tām atbilst divi reālā mainīgā x kompleksi atrisinājumi

$$z_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$z_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Tā kā lineāra homogēna DV jebkura partikulāro atrisinājumu lineāra kombinācija arī ir atrisinājums, tad reālās funkcijas

$$y_1(x) = \frac{z_1(x)+z_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2(x) = \frac{z_1(x)-z_2(x)}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

arī ir DV (0.1) atrisinājumi. Šo atrisinājumu Vronska determinants

$$W[y_1,y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0,$$

un tātad tie veido DV (0.1) atrisinājumu fundamentālsistēmu intervalā $(-\infty,+\infty)$. Līdz ar to DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x \in \mathbb{R}. \tag{0.7}$$

Piezīme. Vispārīgā atrisinājuma (0.7) izteiksmē nereti konstanšu C_1 un C_2 vietā tiek ievestas divas jaunas konstantes A un ar sakarībām $C_1 = A\sin\varphi$ un $C = A\cos\varphi$, pārveidojot to formā

$$y = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi). \tag{0.8}$$

Piemērs 3 Atrisināt DV: $y" + m^2 y = 0, \quad m = const.$

Dotā DV raksturīgā vienādojuma $s^2 + m^2 = 0$ saknes ir tīri imagināri saistīti skaitļi $s_1 = im$ un $s_2 = -im$. Saskaņā ar formulu (7) dotā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = C_1\cos mx + C_2\sin mx$ vai pārveidojot to formā (8) $y = A\sin(mx + \varphi)$.

Līdzīgi tiek integrēti arī augstākās kārtas lineārie homogēnie DV ar konstantiem koeficientiem

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0. \tag{0.9}$$

Meklējot tā atrisinājumu saskaņā ar Eilera metodi formā $y(x) = e^{sx}$, iegūstam attiecībā pret s n-tās pakāpes algebrisku vienādojumu

$$s^n + p_1 s^{n-1} + ... + p_n = 0, \tag{0.10}$$

ko sauc par DV (0.9) raksturīgo vienādojumu. Vienādojumam (0.10) vienmēr ir n saknes, reālas vai kompleksas, skaitot katru sakni tik reizes, kāda ir tās kārta. Pie kam, tā kā koeficienti $p_1, p_2, ..., p_n$ šeit ir reāli skaitļi, tad kompleksās saknes, ja tādas eksistē, vienmēr ir pa pāriem saistītas. Katrai raksturīgā vienādojuma k -kārtīgai reālai saknei s atbilst k DV (0.9) partikulārie atrisinājumi:

$$e^{sx}, xe^{sx}, ..., x^{k-1}e^{sx},$$

bet katram k -kārtīgam saistīto komplekso sakņu pārim $\alpha \pm i\beta$ atbilst $2k$ DV (0.9) partikulārie atrisinājumi:

$$e^{sx}\cos\beta x, xe^{sx}\cos\beta x, ..., x^{k-1}e^{sx}\cos\beta x,$$

$$e^{sx}\sin\beta x, xe^{sx}\sin\beta x, ..., x^{k-1}e^{sx}\sin\beta x.$$

Iegūtie atrisinājumi veido DV (0.9) atrisinājumu fundamentālsistēmu intervalā $x \in (-\infty, +\infty)$, jo to Vronska determinants nav nulle katram x, un tātad jebkurš cits dotā DV atrisinājums ir šo atrisinājumu kaut kāda lineāra kombinācija.

Piemērs 4 Atrisināt DV: $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y" = 0$.

Dotā DV raksturīgam vienādojumam $s^6 + 8s^4 + 16s^2 = s^2(s^2 + 4) = 0$ ir sešas saknes: divkārša reāla sakne $s = 0$ un divkāršs tīri imagināru saistītu sakņu pāris $s = \pm 2i$. Atbilstošie DV partikulārie atrisinājumi ir $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$ un $y_3 = \cos 2x$, $y_4 = \sin 2x$, $y_5 = x\cos 2x$, $y_6 = x\sin 2x$. Tātad dotā DV vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4\sin x + C_5 x\cos x + C_6 x\sin x.$$

0.1.2 Daži lineāri homogēni DV ar mainīgiem koeficientiem, kas ir pārveidojami par DV ar konstantiem koeficientiem

Ja lineāru homogēnu DV ar mainīgiem koeficientiem var ar kādas transformācijas palīdzību pārveidot par DV ar konstantiem koeficientiem, tad pēc tā atrisināšanas ar inversās transformācijas palīdzību tiks iegūts sākotnējā DV atrisinājums. Viens no paņēmieniem, kā var to mēģināt izdarīt, ir neatkarīgā mainīgā x vietā ievest jaunu neatkarīgo mainīgo

$$t = C \int \sqrt[n]{p_n(x)}dx, \quad C = const. \tag{0.11}$$

Aplūkosim sekojošus divus piemērus.

1.piemērs. ***Čebiševa vienādojums:***

$$(1-x^2)y" - xy' + m^2y = 0, \, m = const, |x| < 1.$$

Saskaņā ar formulu (0.11)ievedīsim jaunu neatkarīgo mainīgo

$$t = C \int \sqrt{\frac{m^2}{1-x^2}}dx = Cm \int \frac{dx}{\sqrt{1-m^2}} = Cm \arcsin x.$$

Izvēloties $C = \frac{1}{m}$, iegūsim $t = \arcsin x$ un $x = \sin t$. Izsakot atvasinājumus y' un $y"$ ar atvasinājumiem y_t' un $y_{tt}"$ pēc jaunā neatkarīgā mainīgā t:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{y_t'}{\cos t},$$

$$y" = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\cos t}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{\cos t}\right) = \frac{1}{\cos t}\frac{y_{tt}"\cos t + y_t' \sin t}{\cos^2 t}.$$

Ievietojot atrastās izteiksmes dotajā DV:

$$(1-\sin^2 t)\frac{1}{\cos t}\frac{y_{tt}"\cos t + y_t'\sin t}{\cos^2 t} - \sin t \frac{y_t'}{\cos t} + m^2 y = 0,$$

pēc vienkāršošanas iegūstam vienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$y_{tt}" + m^2 y = 0.$$

Iegūtā DV vispārīgais atrisinājums, kā tika parādīts 3.piemērā, ir

$$y = C_1 \cos mt + C_2 \sin mt.$$

Atgriežoties pie mainīgā x, atrodam Čebiševa vienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$y = C_1 \cos(m \arcsin x) + C_2 \sin(m \arcsin x).$$

2.piemērs. ***Eilera vienādojums***

$$x^2y" + xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

Saskaņā ar formulu (0.11) ievedam jaunu neatkarīgo mainīgo

$$t = C\int \sqrt{\frac{1}{x^2}}dx = C\ln x,$$

ņemot $C = 1$. Tad $x = e^t$, $x^2 = e^{2t}$ un

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t},$$

$$y" = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(y'_t e^{-t}\right) = (y_{tt}" - y'_t)e^{-2t}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes dotajā DV:

$$e^{2t}(y_{tt}" - y'_t)e^{-2t} + e^t y'_t e^{-t} + y = 0,$$

iegūstam DV ar konstantiem koeficientiem

$$y_{tt}" + y = 0,$$

kura vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

Atgriežoties pie mainīgā x, atrodam Eilera vienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x).$$

Dažreiz izdodas lineāru homogēnu DV ar mainīgiem koeficientiem pārveidot par vienādojumu ar konstantiem koeficientiem, ievedot jaunu nezināmo funkciju.

3.piemērs. ***Besseļa vienādojums:***

$$x^2y" + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,\ \nu = const, x > 0.$$

Speciālā gadījumā, kad $\nu = \frac{1}{2}$, ievedot ar substitūciju

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}z$$

jaunu nezināmo funkciju z, atrodam

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}z + x^{-\frac{1}{2}}z',$$

$$y" = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}z - x^{-\frac{3}{2}}z' + x^{-\frac{1}{2}}z".$$

Ievietojot to visu dotajā vienādojumā

$$x^2(\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}z - x^{-\frac{3}{2}}z' + x^{-\frac{1}{2}}z") + x(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}z + x^{-\frac{1}{2}}z') + (x^2 - \frac{1}{4})x^{-\frac{1}{2}}z = 0,$$

pēc vienkāršošanas iegūstam attiecībā pret z lineāru homogēnu DV ar konstantiem koeficientiem

$$z" + z = 0.$$

Tā vispārīgais atrisinājums, kā redzējām, ir

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Tā kā $z = y\sqrt{x}$, tad *Besseļa vienādojuma* ar $\nu = \frac{1}{2}$ vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$