0.1 Lineārie nehomogēnie augstākās kārtas DV

11. temats

Lineāra nehomogēna augstākās kārtas DV vispārīgā atrisinājuma struktūra. Lineāra nehomogēna augstākās kārtas DV atrisināšana ar Lagranža konstanšu variāciju metodi. Piemēri. Lineāra nehomogēna DV ar konstantiem koeficientiem partikulārā atrisinājuma atrašana ar nenoteikto koeficientu metodi, kad dotā DV brīvais loceklis ir polinoms, eksponentfunkcija, sinusa vai kosinusa funkcija, kā arī šo funkciju dažādi reizinājumi vai reizinājumu summas. Piemēri. 6.mājas darbs: Lineāru nehomogēnu augstākās kārtas DV ar konstantiem koeficientiem integrēšana.

0.1.1 Lineāra nehomogēna DV atrisinājumu īpašības

Aplūkosim tagad lineāru nehomogēnu augstākās kārtas DV, dotu normālformā

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x), \tag{0.1}$$

vai īsākā pierakstā – ar diferenciāloperatora L palīdzību:

$$L[y](x) = q(x), \tag{0.2}$$

pieņemot, ka vienādojuma koeficienti $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ un brīvais loceklis $q(x)$ ir kaut kādā intervalā $x \in I \sqsubseteq \mathbb{R}$ nepārtrauktas funkcijas. Tad, kā mēs zinām (teorēma 9.1), DV (0.1) intervalā I eksistē viens vienīgs atrisinājums, kas apmierina jebkurus dotos sākuma nosacījumus

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_0',\ldots,\, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\, x_0 \in I.$$

Ja ir zināms kaut kāds DV (0.2) partikulārais atrisinājums y_1, t.i. $L[y_1](x) \equiv q(x)$, $x \in I$, tad izdarot DV (0.2) substitūciju

$$y = y_1 + Y,$$

kur Y – jaunā nezināmā funkcija, iegūsim

$$L[y_1 + Y](x) = L[y_1](x) + L[Y](x) = q(x) + L[Y](x) = q(x).$$

No šejienes seko, ka Y ir atrisinājums lineāram homogēnam DV

$$L[Y](x) \equiv Y^{(n)} + p_1(x)Y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)Y = 0, \tag{0.3}$$

ar tādu pašu kreiso pusi kā dotam nehomogēnam DV (0.1). Vienādojumu (0.3) sauc par *nehomogēnam DV* (0.1) *atbilstošo homogēno DV*.

Teorēma 11.1 Lineāra nehomogēna DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir vienāds ar jebkura tā partikulārā atrisinājuma un atbilstošā lineārā homogēnā DV (0.3) vispārīgā atrisnājuma summu:

$$y_{nehom.visp.} = Y_{hom.visp.} + y_{nehom.part.} \tag{0.4}$$

▲ Parādīsim, ka formula

$$y = y_1 + \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i, \tag{0.5}$$

kur

$$\sum_{i=1}^{n} C_i Y_i = Y \tag{0.6}$$

ir homogēnā DV (0.3) vispārīgais atrisinājums, satur visus nehomogēnā DV (0.1) atrisinājumus un tātad ir DV (0.1) vispārīgais atrisinājums.

Tiešām, ja y_2 ir vēl kaut kāds cits nehomogēnā DV (0.1) partikulārais atrisinājums, tad starpība $y_1 - y_2$ būs atbilstošā homogēnā DV (0.3) partikulārais atrisinājums

$$L[y_1 - y_2](x) = L[y_1](x) - L[y_2](x) = q(x) - q(x) = 0$$

un tātad atrisinājums $y_1 - y_2$ ir iegūstams no formulas (0.6), attiecīgi izvēloties konstanšu C_i, $i = \overline{1,n}$ vērtības. Apzīmējot šīs vērtības ar $\overline{C}_i$, $i = \overline{1,n}$, iegūstam

$$y_2 = y_1 + \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i Y_i. \quad ▼$$

Meklējot lineāram nehomogēnam DV (0.1) partikulāros atrisinājumus var būt noderīgs sekojošs:

Partikulārā atrisinājuma superpozīcijas princips. Ja DV (0.1) labā puse $q(x)$ ir izsakāma formā

$$q(x) = \sum_{k=1}^{m} q_k(x),$$

un ja katram no DV

$$L[y](x) = q_k(x), \quad k = \overline{1,m},$$

ir atrasts kaut kāds partikulārais atrisinājums y_k, tad

$$y = \sum_{k=1}^{m} y_k$$

ir DV (0.1) partikulārais atrisinājums:

$$▲ \quad L[y[= L[\sum_{k=1}^{m} y_k] = \sum_{k=1}^{m} L[y_k] = \sum_{k=1}^{m} q_k(x) = q(x). \quad ▼$$

Piemērs 1 Atrisināt DV $y" + y = 2x + 3e^x$.

▲ Šeit $q(x) = 2x + 3e^x = q_1(x) + q_2(x)$, kur $q_1(x) = 2x$ un $q_2(x) = 3e^x$. DV $y" + y = 2x$ viegli ir saskatāms partikulārais atrisinājums $y_1 = 2x$, bet DV $y" + y = 3e^x$ – atrisinājums $y_2 = \frac{3}{2}e^x$. Tātad $y = y_1 + y_2 = 2x + \frac{3}{2}e^x$ ir dotā DV partikulārais atrisinājums. Atbilstošā homogēnā DV $Y" + Y = 0$ vispārīgais atrisinājums ir $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Tāpēc

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x + \frac{3}{2}e^x$$

ir dotā DV vipārīgais atrisinājums. ▼

0.1.2 Lineāra nehomogēna DV kārtas pazemināšana

Ja ir zināms lineāram nehomogēnam DV (0.1) atbilstošā homogēnā DV (0.3) partikulārais atrisinājums Y_1, tad ar substitūciju

$$y = Y_1 \int z dx$$

arī nehomogēnā DV (0.1) kārtu var pazemināt par vienu, tāpat, kā tas tika parādīts agrāk homogēnam DV.

Analoģiski, ja ir zināmi k, $2 \leq k < n$ lineāri neatkarīgi DV (0.1) atbilstošā homogēnā DV (0.3) partikulārie atrisinājumi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, tad nehomogēnā DV (0.1) kārtu var pazemināt par k vienībām.

Ja ir zināmi k, $2 \leq k \leq n$ lineāri neatkarīgi nehomogēnā DV (0.3) partikulārie atrisinājumi $y_1, y_2, \ldots, y_k$, tad starpības $y_k - y_1, y_{k-1} - y_1, \ldots, y_2 - y_1$ būs $k-1$ lineāri neatkarīgi atbilstošā homogēnā DV (0.3) partikulārie atrisinājumi un nehomogēnā DV (0.1) kārtu var pazemināt par $k-1$ vienībām.

0.1.3 Lagranža konstanšu variācijas metode

Ja ir zināms atbilstošā homogēnā DV (0.3) vispārīgais atrisinājums

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i, \tag{0.7}$$

t.i. ir zināma DV (0.3) kaut kāda partikulāro atrisinājumu fundamentālsistēma $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, tad nehomogēnā DV (0.1) vispārīgā atrisinājuma atrašanai var lietot ***Lagranža konstanšu variāciju metodi***. Šīs metodes vienkāršākais gadījums tika jau lietots, risinot pirmās kārtas lineāros nehomogēnos DV.

Lagranža konstanšu variācijas metodē lineārā nehomogēnā DV (0.1) vispārīgais atrisinājums tiek meklēts formā

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i, \tag{0.8}$$

kas tiek iegūta no atbilstošā homogēnā DV (0.3) vispārīgā atrisinājuma izteiksmes(0.7), aizvietojot tajā patvaļīgās konstantes C_i, $i = \overline{1,n}$ ar attiecīgām funkcijām $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, kuras tālāk ir jāatrod tā, lai (0.8) būtu DV (0.1)atrisinājums.

Funkciju $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ noteikšanai ir vajadzīgi n vienādojumi. Viens no tiem ir DV (0.1). Pārējos $n-1$ vienādojumus var izvēlēties patvaļīgi. Lagranža konstanšu variācijas metodē šos vienādojumus izvēlas tā, lai funkcijas (0.8) pirmo $n-1$ atvasinājumu izteiksmes būtu tādas pašas kā funkcijai (0.7), t.i., lai tās nesaturētu funkciju $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, atvasinājumus $C_i'(x)$.

Pakāpeniski $n-1$ reizi atvasinot izteiksmi (0.8) un katru reizi pielīdzinot nullei iegūtā rezultāta to daļu, kas satur funkcijas $C_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$, iegūsim $n-1$ vienādojumus

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i^{(k-1)} = 0, \quad ,k = \overline{1,n-1}. \tag{0.9}$$

Tādējādi funkcijas (0.8) pirmie $n-1$ atvasinājumui ir formā

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i^{(k)}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{0.10}$$

Savukārt n- tais atvasinājums $y^{(n)}$, kuru iegūst, atvasinot (0.10) ar $k = n-1$ – formā

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i^{(n)}. \tag{0.11}$$

Ievietojot tagad funkciju (0.8) un tās atvasinājumus (0.10) un (0.11) DV (0.1), iegūsim

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i^{(n-1)} + [\sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i] = q(x).$$

Šeit izteiksme kvadrātiekavās ir vienāda ar nulli

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) Y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) L[Y_i](x) = 0,$$

jo Y_i, $i = \overline{1,n}$ ir homogēnā DV (0.3) atrisinājumi.

Rezultātā funkciju $C_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$, noteikšanai ir iegūta lineāra nehomogēna algebrisku n vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i' = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i^{(n-2)} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) Y_i^{(n-1)} = q(x). \end{cases} \tag{0.12}$$

Sistēmas (0.12) determinants ir homogēnā DV (0.3) atrisinājumu fundamentālsistēmas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ Vronska determinants $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = W(x)$, un tātad tas nav vienāds ar nulli intervalā $x \in I$. Līdz ar to sistēma (0.12) vienmēr ir viennozīmīgi atrisināma attiecībā pret funkcijām $C_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$, un tās atrisinājums saskaņā ar Krāmera formulām ir

$$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{0.13}$$

kur determinanti $W_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ ir iegūstami no sistēmas determinanta $W(x)$, aizvietojot attiecīgi tā i -to kolonu ar sistēmas (0.12) labo pušu (t.i. brīvo locekļu) kolonu. Integrējot (0.13), atrodam

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + C_i, \, , i = \overline{1,n}, \tag{0.14}$$

kur C_i, $i = \overline{1,n}$ – patvaļīgas konstantes.

Ievietojot atrastās $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, vērtības formulā (0.8), iegūstam lineārā nehomogēnā DV (0.1) vispārīgo atrisinājumu

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx. \tag{0.15}$$

Piezīme. Pirmā summa formulas (0.15) labajā pusē ir DV (0.1) atbilstošā homogēnā DV (0.3) vispārīgais atrisinājums, bet otrā summa – nehomogēnā DV (0.1) partikulārais atrisinājums, ko iegūst no (0.15), kad $C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Piemērs 2. Atrisināt DV $y" + y = q(x)$, kur $q(x)$ ir kaut kāda intervālā $x \in I \in\sqsubseteq \mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija.

▲ Tā kā atbilstošā homogēnā DV $Y" + Y = 0$ vispārīgais atrisinājums ir $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, tad dotā DV vispārīgo atrisinājumu meklējam formā $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. No šejienes seko, ka sistēma (0.12) attiecībā pret funkciju $C_1(x)$ un $C_2(x)$ atvasinājumiem $C_1'(x)$ un $C_2'(x)$ ir

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = q(x). \end{cases}$$

Iegūtās sistēmas determinants

$$W(x) = W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

bet tad tās atrisinājums saskaņā ar Kramera formulām (0.13) ir

$$C_1'(x) = W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ q(x) & \cos x \end{vmatrix} = -q(x)\sin x,$$

$$C_2'(x) = W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & q(x) \end{vmatrix} = q(x)\cos x.$$

Integrējot iegūtās $C_1'(x)$ un $C_2'(x)$ izteiksmes atrodam, ka

$$C_1(x) = -\int q(x)\sin x dx + C_1,$$

$$C_2(x) = \int q(x)\cos x dx + C_2,$$

no kurienes seko, ka dotā DV vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \int q(x)\sin x dx + \sin x \int q(x)\cos x dx. \quad \blacktriangledown$$

0.1.4 Lineāra nehomogēna DV ar konstantiem koeficientiem partikularā atrisinājuma atrašana

Aplūkosim tagad lineāru nehomogēnu DV

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = q(x), \tag{0.16}$$

kura koeficienti p_i, $i = \overline{1,n}$, ir konstanti reāli skaitļi, bet labā puse $q(x)$ – kaut kāda intervalā $I \sqsubseteq \mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija. Kā iepriekš tika parādīts, DV (0.16) integrācijas uzdevums faktiski vispirms reducējas uz atbilstošā homogēnā DV

$$L[y] = 0 \tag{0.17}$$

integrācijas uzdevumu. Savukārt DV (0.17) integrācijas uzdevums reducējas uz tam atbilstošā raksturīgā vienādojuma

$$R(s) \equiv s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \tag{0.18}$$

atrisināšanu. Zinot raksturīgā vienādojuma (0.18) saknes un līdz ar to DV (0.17) atrisinājumu fundamentālsistēmu, DV (0.16) vienmēr var atrisināt ar Lagranža konstanšu variāciju metodi.

Dažos gadījumos DV (0.16) izdodas integrēt vienkāršāk, nelietojot Lagranža konstanšu metodi, bet tās vietā meklējot kaut kādā veidā DV (0.16) partikulāro atrisinājumu (teorēma 11.1). Dažiem DV, piemēram, ja to labās puses funkcija $q(x)$ ir polinoms, partikulāro atrisinājumu izdodas atrast ar *nenoteikto koeficientu metod*i, iepriekš jau zinot, kādā izskatā tie ir jāmeklē. Ir spēkā

Teorēma 11.2

Ja DV (0.16) labā puse (brīvais loceklis) ir ar izskatu

$$q(x) = e^{\alpha x}[Q_{1m_1}(x)\cos\beta x + Q_{2m_2}(x)\sin\beta x], \tag{0.19}$$

kur α un β –dotās konstantes, bet $Q_{1m_1}(x)$ un $Q_{2m_2}(x)$ ir dotie m_1 un m_2 pakāpes polinomi (viens no tiem var arī būt identiski vienāds ar nulli), tad DV (0.16) eksistē partikulārais atrisinājums ar izskatu

$$y = x^k e^{\alpha x}[P_{1m}(x)\cos\beta x + P_{2m}(x)\sin\beta x], \tag{0.20}$$

kur $P_{1m}(x)$un $P_{2m}(x)$ ir $m = \max(m_1, m_2)$ pakāpes polinomi, bet $k \geq 0$ ir raksturīgā vienādojuma (0.18) saknes $s = \alpha + i\beta$ kārta ($k = 0$, ja $\alpha + i\beta$nav raksturīgā vienādojuma (0.18) sakne).

Piezīme. Polinomu $P_{1m}(x)$un $P_{2m}(x)$ koeficienti šeit ir nezināmi skaitļi (nenoteiktie koeficienti). Tos atrod atrisinot lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu, kuru iegūst ievietojot izteiksmi (0.20) DV (0.12) un salīdzinot iegūtās identitātes abās pusēs atbilstošo izteiksmju koeficientus. Iegūtai sistēmai, kuras kārta ir $2m+2$, vienmēr eksistē viens vienīgs atrisinājums.

Piemērs 3. Atrisināt DV $y" + 2y' + y = \sin x$.

▲ Dotam DV atbilstošā homogēnā DV $Y" + 2Y' + Y = 0$ raksturīgam vienādojumam $s^2 + 2s + 1 = 0$ ir divkārša sakne $s_1 = s_2 = -1$ un tā vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Salīdzinot dotā DV labo pusi ar izteiksmi (0.19) redzam, ka dotam DV $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $Q_{1m_1}(x) = 0$, $Q_{2m_2}(x) = 1$ un tātad $m_1 = m_2 = 0$ (konstante ir nulltās pakāpes polinoms). Skaitlis $\alpha + i\beta = i$ šeit nav raksturīgā vienādojuma sakne ($i \neq -1$). Bet tad, saskaņā ar formulu (0.16), dotam DV eksistē partikulārais atrisinājums formā

$$y = x^0 e^{0x}[P_{10}(x)\cos 1x + P_{20}(x)\sin 1x] = A\cos x + B\sin x,$$

kur A un B ir pagaidām nezināmas konstantes, kuras meklējam ar nenoteikto koeficientu metodi.

Ņemot vērā, ka

$$y' = -A\sin x + B\cos x, \qquad y" = -A\cos x - B\sin x = -y,$$

iegūsim, ievietojot atrasto y izteiksmi dotajā DV,

$$2(-A\sin x + B\cos x) = \sin x.$$

Salīdzinot iegūtās vienādības kreiso un labo pusi, atrodam $A = -\frac{1}{2}$ un $B = 0$.

Līdz ar to $y = -\frac{1}{2}\cos x$ ir dotā DV partikulārais atrisinājums, bet

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$$

ir dotā DV vispārīgais atrisinājums. ▼

Piemērs 4. Atrisināt DV $y" - y = e^x \cos^2 x$.

▲ Dotam DV atbilstošā homogēnā DV $Y" - Y = 0$ raksturīgā vienādojuma $s^2 - 1 = 0$ saknes ir reālas un dažādas $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ un homogēnā DV vispārīgais atrisinājums tāpēc ir

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Lai varētu sastādīt nehomogēnā DV vispārīgo atrisinājumu mekējam tā partikulāro atrisinājumu. Aplūkojot dotā DV labo pusi $e^x \cos^2 x$ un salīdzinot to ar (0.15), redzam, ka tā nav ar izskatu, kurai var pielietot teorēmu 11.2. Izrādās, ka dotam DV tomēr šo teorēmu var pielietot, ja dotā DV labo pusi pārveido formā $e^x \cos^2 x = \frac{1}{2}e^x(1 + \cos 2x)$ un izmanto superpozīcijas principu, t.i. dotā DV vietā aplūko divus DV $y" - y = \frac{1}{2}e^x$un $y" - y = \frac{1}{2}e^x \cos 2x$.

Salīdzinot pirmā DV $y" - y = \frac{1}{2}e^x$ labo pusi ar (0.19) redzam, ka šeit $m = \max(m_1, m_2) = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ un skaitlis $\alpha + i\beta = 1 = s_2$ ir vienkārtīga raksturīgā vienādojuma sakne, tāpēc $k = 1$ un DV eksistē partikulārais atrisinājums izskatā

$$y_1 = x^1 e^{1x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = Axe^x.$$

Ievietojot šo izteiksmi DV atrodam $y_1" - y_1 = 2Ae^x = \frac{1}{2}e^x$ un $A = \frac{1}{4}$. Līdz ar to $y_1 = \frac{1}{4}xe^x$.

Salīdzinot otrā DV $y" - y = \frac{1}{2}e^x \cos 2x$labo pusi ar (0.19) redzam, ka šeit $m = \max(m_1, m_2) = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ un skaitlis $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ nav raksturīgā vienādojuma sakne, tāpēc $k = 0$ un DV eksistē partikulārais atrisinājums izskatā

$$y_2 = x^0 e^{1x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Ievietojot šo izteiksmi DV atrodam $y_2" - y_2 = 4e^x[(B-A)\cos 2x - (A+B)\sin 2x] = \frac{1}{2}e^x \cos 2x$, no kurienes seko, ka $4(B-A) = \frac{1}{2}$, $A+B = 0$ un $B = -A = \frac{1}{16}$. Līdz ar to $y_2 = \frac{1}{16}e^x(\sin 2x - \cos 2x)$.

Saskaņā ar superpozīcijas principu $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{16}e^x(\sin 2x - \cos 2x)$ ir dotā DV partikulārais atrisinājums, bet tad

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{16}e^x(\sin 2x - \cos 2x)$$

ir dotā DV vispārīgais atrisinājums.

TedorsJa DV (0.15) labā puse (brīvais loceklis) ir formā

$$q(x) = e^{\alpha x}Q_m(x)\,(a\cos\beta x + b\sin\beta x)\,,$$

kur a, b, α, β– dotās konstantes, bet $Q_m(x)$ – dotais m -tās pakāpes polinoms, tad DV (0.16) eksistē partikulārais atrisinājums y ar izskatu

$$y = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + G_m(x)\sin\beta x],$$

kur $k = 0$, ja skaitlis $\alpha + i\beta$ nav raksturīgā vienādojuma (0.18) sakne, bet ja $\alpha + i\beta$ir raksturīgā vienādojuma (0.14) sakne, tad k ir šīs saknes kārta.

0.1.5 Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

Atrisināt dotos DV ar konstašu variāciju metodi vispirms atbilstošo homogēno DV reducējot uz DV ar konstantiem koeficientiem

Tenebaums (240.lpp)

16. $x^2y" - xy' + y = x$; $y = C_1x + C_2x\ln x + \frac{x}{2}\ln^2 x$;
17. $y" - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x\ln x$; $y = C_1x + C_2x^2 + \frac{1}{2}x^3\ln x - \frac{3}{4}x^3$;
18. $x^2y" + xy' - 4y = x^3$; $y = C_1x^2 + C_2x^{-2} + \frac{x^3}{5}$;
19. $x^2y" + xy' - y = x^2e^{-x}$; $y = C_1x + C_2\frac{1}{x} + e^{-x}(1 + \frac{1}{x})$;
20. $2x^2y" + 3xy' - y = \frac{1}{x}$; $y = C_1\sqrt{x} + C_2\frac{1}{x} - \frac{1}{3x}\ln x$;

Dotiem DV atrisināt atbilstošo homogēno DV un atrast dotā DV partikulāro atrisinājumu ar nenoteiktiem koeficientiem (koeficientu skaitliskās vērtības nemeklēt).

Fiļipovs (44.lpp)

558. $y" - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}\sin x$;
559. $y" + 2y' + y = x(e^{-x} - \cos x)$;
562. $y" - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$;
563. $y^{(4)} + y" = 7x - 3\cos x$;
565. $y^{(3)} - 4y" + 3y' = x(e^{2x} + x)$;
568. $y" - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$;

Autors nezināms:

4. $y^{(4)} + y" = x\cos x + 1$;
6. $y" - 6y' + 13y = e^{3x}(x^2 - 3\cos 2x)$;
9. $y^{(4)} + 3y^{(3)} + 2y" = 5x - e^{-x}\cos 2x$;

10. $y^{(3)} + 2y" + 5y' = 2x^2 - 5\cos x$;
11. $y^{(3)} - 4y" + 13y' = e^x(x + e^x \sin 3x)$;
12. $y" - 4y' + 4y = x(e^{2x} - \sin x)$;
13. $y^{(3)} - 3y" - 4y' = xe^{-x}(x + \cos 4x)$;
14. $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y" = 2x + e^x \sin x$;
15. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y" = 3xe^{-x} + \sin x$;
16. $y^{(3)} - 4y" + 5y' = 3x^2 - e^{2x} \cos x$;
17. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 4y" = xe^{2x}(3 + x \sin x)$;
18. $y^{(4)} + 2y" + y = x(2\cos x + 3xe^x)$;
19. $y^{(3)} - 4y" + 8y' = x(e^{2x} \sin x + 3x)$;
20. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 3y" = x(e^x \sin 3x + 2x)$;
21. $y^{(4)} + 4y" = 3xe^{2x} \cos x + 5\sin 2x$;
22. $y^{(4)} - 2y" + y = 2xe^x + 3e^{-x} \sin x$;
23. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 10y" = x(e^{-x} \cos 3x + 2x)$;