0.1 Nenoteikto koeficientu metode lineāru otrās kārtas DV atrisināšanai

12.tēma

Nenoteikto koeficientu metodes matemātiskā būtība ir šāda. Pieņemsim, ka jāatrisina dotais funkcionālvienādojums: diferenciālvienādojums, integrālvienādojums, vai kāds cits vienādojums, kura atrisinājums ir funkcija. Šāda funkcija eksistē, ir viena vienīga un to var attīstīt noteikta veida rindā, piemēram, Teilora rindā. Izpildot atbilstošās darbības ar rindām, uzdevums reducējas uz rindas koeficientu atrašanu (nenoteikto koeficientu atrašanu). Mēs aplūkosim nenoteikto koeficientu metodi tikai otrās kārtas lineāriem homogēniem DV šādu iemeslu dēļ.

1.Pirmās kārtas lineāriem DV nav īpašas vajadzības lietot nenoteikto koeficientu metodi, jo tos pietiekami vienkārši var atrisināt ar citām metodēm.

2.Otrās kārtas lineāriem DV (tāpat kā jebkuras citas kārtas lineāriem DV) svarīgkais ir atrisināt atbilstošo homogēno DV, jo nehomogēnā DV partikulāro atrisinājumu, kas nepieciešams vispārīgā atrisinājuma izveidošanai, vienmēr var atrast ar konstanšu variāciju metodi vai arī ar kādu citu metodi (piemēram, vienkārši uzminot).

3.Augstākas nekā otrās kārtas DV neapskatām pirmkārt, laika trūkuma dēļ, otrkārt, lietojumos tomēr visbiežāk ir jāsastopas tieši ar otrās kārtas DV.

Tādējādi mūsu uzdevums ir: lietojot nenoteikto koeficientu metodi, atrisināt vienādojumu

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{0.1}$$

ja $p_1(x)$ un$p_2(x)$ ir dotās funkcijas.

0.1.1 Dažas otrās kārtas lineāra homogēna DV īpašības

Lai pilnīgāk varētu formulēt DV (0.1) atrisinājumu īpašības, lietderīgi tās aplūkot DV

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p_1(z)\frac{du}{dz} + p_2(z)u = 0, \tag{0.2}$$

kurš atsķiras no (0.1) ar to, ka reālā mainīgā x vietā ir kompleksais mainīgais $z = x + iy$. Protams, zinot DV (0.2) īpašības, vienkārši tās formulēt arī DV (0.1), bet ne otrādi, jo (0.1)ir DV (0.2) specilāgadījums, kad $z = x$, jeb $y = 0$ izteiksmē $z = x + iy$.

Minēsim piemēru. Virkne

$$1, -x^2, x^4, -x^6, \dots, (-1)^n x^{2n}, \dots$$

veido bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju ar kvocientu $q = -x^2$. Tās summa ir

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{0.3}$$

Rinda formulā (0.3)konverģē tikai tad, ja $|x| < 1$. Kāpēc? Rindas summai $\frac{1}{1+x^2}$ argumenta vērtības $x = \pm 1$ ne ar ko īpašu neatšķiras no citām x vērtibām. Šo faktu var vienkārši izskaidrot, ja (0.3) vietā aplūko līdzīgu rindu ar komplekso mainīgo z:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{2k} = \frac{1}{1+z^2}. \tag{0.4}$$

Šī rinda konverğē z-plaknes riņķī $|z| < r$, kur r ir attālums no punkta $z = 0$ līdz summas $S = \frac{1}{1+x^2}$ tuvākajm singulārajam punktam, t.i., punktam $\pm i$. Šis attālums ir 1. Tādēļ rinda (0.4) konverğē riņķī $|z| < 1$,bet rinda (0.3) – intervalā $-1 < x < 1$.

Definīcija 12.1 Kompleksā mainīgā z funkciju f(z) sauc par analītisku punktā z_0, ja eksistē tāda šī punkta apkārtne jeb vaļējs riņķis $|z - z_0| < r$, kurā funkciju f var attīstīt konverğentā Teilora rindā

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,\ |z-z_0| < r, \tag{0.5}$$

kur r ir attālums no punkta z_0līdz funkcijas f tuvākajam singulārajam punktam, t.i. punktam, kurā f nav analitiska.

Piemērs 1. Pieņemsim, ka funkcija $f(z) = \frac{e^{-2z}}{(z^2+1)(z+1)}$ ir attīstīta Teilora rindā

$$\frac{e^{-2z}}{(z^2+1)(z+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-1)^k, \quad |z-1| < r. \tag{0.6}$$

Koeficientus $c_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}$ bez īpašām grūtībām atrod ar datorprogrammām, bet r ir mazākais attālums no punkta $z_0 = 1$līdz funkcijas $f$singulārajiem punktiem, t.i. punktiem $\pm i$ un -1. Šis mazākais attālums ir $r = |1 \mp i| = \sqrt{2}$.

Teorēma 12.1 Ja $p_1(z)$ un $p_2(z)$ vienādojumā (0.2) ir analītiskas funkcijas kompleksās z plaknes vaļējā apgabalā D (tas nozīmē, ka p_1 un p_2 ir analītiskas katrā apgabala D punktā), tad katrs DV (0.2) atrisinājums arī ir analītiska funkcija šajā apgabalā D.

Piemērs 2. Apskatīsim Matjē vienādojumu, kas nereti sastopams matemātiskajā fizikā

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (\lambda - 2q\cos 2z)u = 0, \tag{0.7}$$

λ un q – parametri. Pēc teorēmas 12.1 katrs (0.7) atrisinājums ir analītiska funkcija visā z plaknē, to var attīstīt Teilora rindā pēc $z - z_0$ pakāpēm ar brīvi izraudzītu $z_0$un iegūtā Teilora rinda konverğē visiem z, jo $r = +\infty$. Protams, nezināmo (nenoteikto) koeficientu atrašanai ir mērķtiecīgi pielietot datorprogrammas.

Definīcija 12.2 Punktu z_0 sauc par *DV* (0.2) *regulāru singulāru punktu*, ja funkcijas

$$\hat{p}_1(z) = (z-z_0)p_1(z), \qquad \hat{p}_2(z) = (z-z_0)^2 p_2(z) \tag{0.8}$$

ir analītiskas punktā $z = z_0$. Ja vismaz viena no funkcijām $\hat{p}_1(z)$ un $\hat{p}_2(z)$ formulās (0.8) nav analītiska, tad punktu $z_0$sauc par *irregulāru singulāro punktu*.

Definīcija 12.3 Punktu $z = \infty$ sauc par DV (0.2) regulāru singulāru punktu, ja DV (0.2) pēc substitūcijas $z = \frac{1}{t}$ punkts $t = 0$ ir regulārs singulārs punkts.

Sekas. Lai $z = \infty$ būtu regulārs singulārs punkts, ir pietiekami, ka DV (0.2) funkcijai $p_1(z)$ punktā $z = \infty$ ir vismaz pirmās kārtas nulle, bet funkcijai $p_2(z)$ – vismaz otrās kārtas nulle.

Piemērs 3. Ležandra vienādojumam

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0,$$

jeb vienādojumam

$$u'' - \frac{2x}{1-x^2}u' + \frac{\lambda}{1-x^2}u = 0 \tag{0.9}$$

ir trīs singulāri punkti $x = \pm 1$ un $x = \infty$(?). Tie visi ir regulāri singulāri punkti.

Piemērs 4. Besseļa vienādojumam

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0,$$

jeb vienādojumam

$$u'' + \frac{1}{x}u' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2}) = 0 \tag{0.10}$$

punkts $x = 0$ ir regulārs singulārs punkts, bet $x = \infty$ (+,- ?) – irregulārs singulārs punkts.

Piemērs 5. Ermita vienādojumam

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0 \tag{0.11}$$

ir tikai viens singulārs punkts $x = \infty$. (?) Tas ir irregulārs singulārs punkts.

Piemērs 6. Lagēra vienādojumam

$$xu'' + (1 + \alpha - x)u' + \lambda u = 0, \tag{0.12}$$

α un λ– parametri, punkts $x = 0$ ir regulārs singulārs punkts, bet $x = \infty$ (?)– irregulārs punkts.

Teorēma 12.2 Regulāra singulāra punkta $z_0$apkārtnē vienādojumam (0.2) eksistē atrisinājums

$$u(z) = (z - z_0)^\mu \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r, \tag{0.13}$$

kur r ir mazākais attālums no punkta z_0līdz pārējiem funkciju $p_1(z)$ un $p_2(z)$singulārajiem punktiem. Skaitlis μir reāls vai komplekss.

Piezīme 1. Skaitļa μ atrašanai, lietojot nenoteikto koeficientu metodi, parasti iegūst kvadrātvienādojumu, kuram ir divas saknes $\mu_1$un μ_2.Tomēr vispārīgi iegūtie atrisinājumi ar $\mu_1$un μ_2 ***nav lineāri neatkarīgi.*** Tādēļ tām $\mu_1$un μ_2 vērtībām, kurām atbilstošie atrisinājumi ir lineāri atkarīgi un faktiski var atrast tikai vienu atrisinājumu, eksistē vairākas speciālas metodes, kā atrast otru atrisinājumu.

0.1.2 Vienādojuma (0.1) atrisināšana, ja $p_1(x)$ un $p_2(x)$ ir analītiskas funkcijas

Lai atrastu DV (0.1) vispārīgo atrisinājumu, viens no vienkāršākajiem paņēmieniem ir meklēt atsevišķi divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus $u_1(x)$ un $u_2(x)$, kas apmierina šo DV un atbilstošus sākuma nosacījumus

$$u_1(x_0) = 1,\, u_1'(x_0) = 0; \qquad u_2(x_0) = 0,\, u_2'(x_0) = 1. \tag{0.14}$$

Šajā gadījumā Vronska determinants

$$W[u_1, u_2](x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Tādēļ

1) $u_1(x)$ un $u_2(x)$ ir lineāri neatkarīgi;

2) katra no funkcijām $u_1(x)$ un $u_2(x)$ ir nosakāma vienā vienīgā veidā:

$$u_1(x) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad u_2(x) = x - x_0 + \sum_{k=2}^{+\infty} \tilde{c}_k (x - x_0)^k. \tag{0.15}$$

Koeficientus c_k vai $\tilde{c}_k$ nosaka ievietojot atbilstošās rindas DV (0.1), kurā funkcijas $p_1(x)$ un $p_2(x)$ arī ir attīstītas Teilora rindās pēc $x - x_0$ pakāpēm, izpilda visas darbības ar rindām un tad salīdzina koeficientus pie vienādām $x - x_0$pakāpēm.

DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x). \tag{0.16}$$

Kā piemēru apskatīsim vispārīgā atrisinājuma atrašanu Ermita DV

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0. \tag{0.17}$$

▲ Par x_0 izraudzīsimies 0. Ievietojot

$$u_1(x) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k x^k \tag{0.18}$$

vienādojumā (0.17), iegūst

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=2}^{+\infty} k c_k x^{k-1} + \lambda + \lambda \sum_{k=2}^{+\infty} c_k x = 0,$$

jeb

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} [2(k+2) - \lambda] c_{k+2} x^{k+2} + \lambda = 0. \tag{0.19}$$

Salīdzinot iegūtās vienādības (0.19) koeficientus pie vienādām x pakāpēm, atrodam

$$\begin{array}{rc} x^0: & 2.1.c_2 = -\lambda \\ x^1: & 3.2.c_3 = 0 \\ x^2: & 4.3.c_4 = (4-\lambda)c_2 \\ x^3: & 5.4.c_5 = (6-\lambda)c_3 \\ x^4: & 6.5.c_6 = (8-\lambda)c_4 \\ \vdots & \vdots \\ x^k: & (k+2)(k+1)c_{k+2} = (2k-\lambda)c_k \\ \vdots & \vdots \end{array} \tag{0.20}$$

No šejienes seko, ka rindas (0.18) visi koeficienti ar nepāra indeksiem ir vienādi ar nulli: $c_{2n+1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Sareizinot vienādības (0.20), kas atbilst x pāra pakāpēm, iegūstam, ka

$$(2n)!c_{2n} = \prod_{k=0}^{n-1}(4k - \lambda), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Tātad

$$u_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1}(4k - \lambda), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{0.21}$$

Līdzīgi no (0.15) atrod, ka

$$u_2(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1}(4k + 2 - \lambda), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{0.22}$$

Līdz ar to Ermita DV (0.17) vispārīgais atrisinājums ir

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x). \quad \blacktriangledown$$

0.1.3 Besseļa vienādojuma atrisināšana

Lineāra homogēna otrās kārtas DV atrisināšana regulāra singulārā punkta apkārtnē notiek pēc shēmas, kas šajā gadījumā ir līdzīga visiem šāda tipa vienādojumiem. Tādēļ sīkāk analizēsim Besseļa vienādojuma

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0 \tag{0.23}$$

atrisināšanu regulāra singulārā punkta $x = 0$ apkārtnē. Besseļa funkcijas jeb DV (0.23) atrisinājumi ir vienas no lietojumos vissvarīgākajām speciālajām funkcijām ar vairāk nekā 100 gadu vecu intensīvu pētīšanas vēsturi.

Pēc teorēmas 12.2 DV (0.23) atrisinājumu meklē kā rindas

$$u = x^{\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0 \tag{0.24}$$

summu. Vēl neatrodot μ un koeficientus c_k, jau varam apgalvot, ka rinda (0.24) konverģē visiem x, jo vienādojumam (0.23) ir tikai divi singulāri punkti $x = 0$ un $x = \infty$ (?±). Tādēļ attālums no punkta $x = 0$ līdz tuvākajam singulārajam punktam, t.i. $x = \infty$, ir $+\infty$. Ievietojot (0.24) DV (0.23) iegūst

$$x^2 u'' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k + \mu)(k + \mu - 1) c_k x^{k+\mu},$$

$$xu' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k + \mu) c_k x^{k+\mu},$$

$$(x^2 - \nu^2)u = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^2 - \nu^2) c_k x^{k+\mu}.$$

Iegūtās trīs vienādības saskaitām un pielīdzinām koeficientus pie vienādām x pakāpēm. Mazākā pakāpe ir x^{μ}. Koeficients pie tās ir

$$[\mu(\mu-1)+\mu-\nu^2]c_0=0.$$

Tā kā $c_0 \neq 0$, tad $\mu=\pm\nu$. Līdz ar to skaitlim μ var būt tikai divas vērtības $\mu_1=\nu$ un $\mu_2=-\nu$.

Pielīdzinot koeficientus pie nākamās $x^{\mu+1}$ pakāpes, iegūst

$$[(\mu+1)^2-\nu^2]c_1=0. \tag{0.25}$$

Tā kā $\mu=\pm\nu$ ir jau noteikts, tad $c_1=0$. Līdzīgi izsecinām, ka arī visi pārējie koeficienti c_k ar nepāra indeksiem ir vienādi ar nulli:

$$0=c_1=c_3=...=c_{2n+1}=... \tag{0.26}$$

Salīdzinot koeficientus pie $x^{\mu+2n}$, $n=1,2,...$, atrodam

$$c_{2n}=\frac{c_{2n-2}}{(\mu+2n-\nu)(\mu+2n-\nu)},\quad n=1,2,... \tag{0.27}$$

Ievietojot izteiksmē 0.27 $\mu=\nu$ iegūst vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} c_2=-\frac{c_0}{4.1.(\nu+1)} \\ c_4=-\frac{c_2}{4.2.(\nu+2)} \\ c_6=-\frac{c_4}{4.3.(\nu+2)} \\ \vdots \\ c_{2n}=-\frac{c_{2n-2}}{4n(\nu+n)}. \end{cases} \tag{0.28}$$

Sareizinot vienādības (0.28) un saīsinot vienādos reizinātājus iegūtās vienādības abās pusēs, atrod

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n c_0}{4^n n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\nu+k}=\frac{(-1)^n\Gamma(\nu+1)c_0}{4^n n!\Gamma(\nu+n+1)}, \tag{0.29}$$

kur Γ ir Eilera gamma funkcija

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Ja x vietā ir kompleksais mainīgais z, tad $\Gamma(z)$ nozīmē $\Gamma(x)$ analītisko turpinājumu no $x>0$ kompleksā z plaknē. Konstante $c_0 \neq 0$ formulā (0.29) ir patvaļīga. Saskaņā ar vispasaules standartizāciju pieņem, ka

$$c_0=\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}.$$

Tādējādi DV (0.23) atrisinājums ir tā saucamā *Besseļa funkcija*

$$J_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{0.30}$$

Izraugoties formulā (0.27) $\mu = -\nu$ un atkārtojot spriedumus līdzīgi iepriekšējiem, iegūst

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{0.31}$$

Var parādīt, ka gadījumā, kad x un ν formulās (0.30) un (0.31) ir kompleksi lielumi, tad
1) abas rindas konverģē visiem x un ν;
2) ja ν nav vesels skaitlis, ar (0.30) un (0.31) ir definēti DV (0.23) lineāri neatkarīgi atrisinājumi;
3) ja $\nu = n$ ir vesels skailis, tad

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \tag{0.32}$$

Tātad $J_\nu(z)$ un $J_{-\nu}(z)$ ir lineāri neatkarīgi atrisinājumi tad un tikai tad, ja ν nav vesels skaitlis.

Lai varētu izveidot DV (0.23) vispārīgo atrisinājumu visiem ν (tai skaitā arī veseliem ν), definē *2.veida cilindrisko funkciju* jeb *Neimaņa funkciju*

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}, \tag{0.33}$$

ja νnav vesels, un

$$Y_n(z) := \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z), \tag{0.34}$$

ja $\nu = n$ ir vesels skaitlis.

Ja $\nu \neq n$ un $z = x$, ar (0.33) ir definēts DV (0.23) atrisinājums (kā divu atrisinājumu J_ν un $J_{-\nu}$ lineāra kombinācija). Ja $\nu = n$, robežu (0.34) atrod lietojot Lopitāla kārtulu. Lopitāla kārtulas lietošanu pamato tas, ka rindas (0.30) un (0.31) konverģē visiem ν un x. Neimaņa funkcijas Y_n izteiksmi atklāti neizrakstām, jo tā ir diezgan gara. Nav grūti pierādīt, ka:
1) $Y_n(x)$ ir DV (0.23) atrisinājums, ja $\nu = n$;
2) Y_n ir lineāri neatkarīgs ar J_n un J_{-n}.

Tādejādi

$$u(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \tag{0.35}$$

ir DV (0.23) vispārīgais atrisinājums visiem x un ν.

Piezīme 1. Neimaņa funkcijas definīcija nav vienīgā iespēja kā definēt DV (0.23) partikulāro atrisinājumu, kas ir lineāri neatkarīgs ar $J_n(x)$. Līdz pagājušā gadsimta vidum bija sastopamas līdzīgas, tomēr nedaudz atšķirīgas definīcijas. Tagad gan parasti lieto tikai (0.33), jo tika konstatēts, ka *3. veida cilindriskajām funkcijām* jeb *Hankeļa funkcijām*

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z), \tag{0.36}$$

kur $Y_\nu(z)$ definēta ar (0.33), īpašības ir ļoti līdzīgas ar Eilera formulām

$$\exp(\pm iz) = \cos z + i\sin z. \tag{0.37}$$

Tas dod iespēju $J_\nu(z)$ un $Y_\nu(z)$ vairākas svarīgas īpašības (piemēram, nuļļu sadalījumu) vienkāršāk iegūt no Hankeļa funkciju īpašībām.

Piezīme 2. Otru DV (0.23) partikulāro atrisinājumu $u_2(x)$, kas ir lineāri neatkarīgs ar $u_1(x) = J_n(x)$, var iegūt arī izmantojot to, ka Vronska determinants Besseļa DV ir

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{C}{x}.$$

Piezīme 3. Besseļa funkcija $J_\nu(x)$ ir viena no sarežģītākajām speciālajām funkcijām. Tā ir elementāra tad un tikai tad, ja $\nu = n + \frac{1}{2}$, kur n ir vesels skaitls. Besseļa funkciju grafiki katram $\nu \geq 0$ apraksta uz 0 dziestošas svārstības, kad $x \to +\infty$. Tieši ar šādām svārstībām visbiežāk jāsastopas praksē.