1 DV sistēmas

1.1 Pirmās kārtas DV sistēmas

14. temats

Pirmās kārtas DV sistēmas un to normālveids. Augstākās kārtas DV redukcija uz DV normālu sistēmu. DV normālās sistēmas vispārīgais un partikulārais atrisinājums, vektoriālais pieraksts. Košī problēma un tās atrisinājuma eksistences un unitātes pietiekamie nosacījumi. DV normlo sistēmu atrisināšanas pamatmetodes: izslēgšanas metode un integrējamo kombināciju metode. Piemēri.

1.1.1 DV sistēmas un to normālveids

Līdz šim mēs aplūkojām DV ar vienu nezināmo funkciju. Tomēr praksē nereti jāsastopās ar situāciju, kurā aplūkojamo parādību matemātiskais modelis ir DV sistēma ar vairākām nezināmām funkcijām.

Piemērs 14.1. Materiāla punkta M kustību trīs dimensiju telpā saskaņā ar otro Ņutona likumu nosaka vektoriāla vienādība

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z). \tag{1.1}$$

Spēks $\overrightarrow{F}$ vispārīgā gadījumā var būt mainīgo laika t, punkta M koordinātu x, y, z un ātruma $\overrightarrow{v}$ komponentu $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ funkcija, bet punkta M paātrinājums – $\overrightarrow{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$. Tādējādi vektoriālā vienādība (1.1) ir ekvivalenta ar DV sistēmu:

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}). \end{cases} \tag{1.2}$$

Piemērs 14.2. Lotka – Volterro modelī plēsoņu – upuru skaita dinamiku apraksta DV sistēma (u – upuru skaits, p – plēsoņu skaits):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (a - bp)u \\ \frac{dp}{dt} = (-\kappa + \gamma u)p, \end{cases} \tag{1.3}$$

kur a, b, κ, γ– konstantes.

Definīcija 14.1. DV sistēmu

$$y_i^{(n_i)} = F_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m-1)}), \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.4}$$

kur n_i– naturāli skaitļi, sauc par DV sistēmu kanoniskā formā.

Teorēma 14.1. Katru DV sistēmu kanoniskā formā, pielietojot jaunas nezināmās funkcijas, var pārveidot par DV sistēmu normālformā

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.5}$$

▲ Parādīsim, kā par DV sistēmu normālformā (1.5) var pārveidot vienu augstākās kārtas DV

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{1.6}$$

Ja pielieto substitūcijas $y^{(i-1)} = y_i$, $i = \overline{1,n}$, kur $y_1, y_2, ..., y_n$ ir jaunas nezinamās funkcijas, tad, ievērojot identitāti $y(x) \equiv y_1(x)$ un vienādības $\frac{dy^{(i-1)}}{dx} = \frac{dy_i}{dx}$, $i = \overline{1,n}$, iegūst DV sistēmu

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{1.7}$$

kas tikai ar apzimējumiem atšķiras no (1.5).

Vispārīgā gadījumā (1.4) reducējas uz (1.5) analogi. ▼

1.1.2 Košī problēma

Sistēmai (1.5), kuras atrisinājumam jeb vektorfunkcijai $\overrightarrow{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ vispārīgi nav unitātes, papildus uzdod sākuma nosacījumus

$$y_i|_{x=x_0} = y_i(x_0) = y_{i,0}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.8}$$

kur x_0 un y_{i0} - dotie skaitļi.

Uzdevumu atrast (1.5) atrisinājumu, kas apmierina sākuma nosacījumus (1.8), sauc par DV *sistēmas* (1.5) *Košī problēmu.*

Teorēma 14.2. Ja DV sistēmā funkcijas f_i un $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = \overline{1,n}$ ir nepārtrauktas $n+1$ dimensiju telpas punktā $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$, tad atradīsies tāda punkta x_0 apkārtne $(x_0 - h, x_0 + h)$, kurā Košī problēmai (1.5)+(1.8) eksistē viens vienīgs atrisinājums.

Piezīme 14.1. Teorēma 14.2 dod tikai pietiekamos nosacījumus Košī problēmas atrisinājuma lokālai eksistencei un unitātei, bet šie nosacījumi nav nepieciešami.

Pielietojot vektoru apzīmējumus

$$\begin{cases} \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, ..., y_n), \\ \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}) = (f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\ f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)), \\ \overrightarrow{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}), \end{cases} \tag{1.9}$$

Košī problēmu (1.5) + (1.8) var pārrakstīt vienkāršākā - vektoriālā formā,

$$\frac{d\overrightarrow{y}}{dx} = \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}), \quad \overrightarrow{y}|_{x=x_0} = \overrightarrow{y}_0, \tag{1.10}$$

kas ir līdzīga vienas funkcijas pirmās kārtas DV Košī problēmai. Mūsdienu matemātiskajā literatūrā Košī problēmai (1.5) + (1.8) lieto arī vēl vienkāršāku pierakstu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \tag{1.11}$$

kur $x \in I \subseteq \mathbb{R}$; $y, y_0 \in \mathbb{R}^n$; $f : I x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Pieraksta (1.11) līdzībai Košī problēmām vienam pirmās kārtas DV nav nejaušs raksturs. Uz šīs līdzības pamata var veidot DV sistēmu Košī problēmu tuvinātas skaitliskās atrisināšanas metodes. Galvenās atšķirības no vienas funkcijas pirmās kārtas DV skaitliskajām metodēm šeit ir sekojošas. Ja realizējot skaitlisko metodi vienam pirmās kārta DV darbības ir jāizpilda ar skaitļiem, tad DV sistēmām (1.5) attiecīgās darbības ir jāveic ar matricām (vai vektoriem).

1.1.3 DV sistēmu atrisināšanas analītiskās metodes

Aplūkosim divas DV sistēmas (1.5) analītiskās atrisināšanas metodes.

1.Izslēgšanas metode. Tā būtībā ir metode, kurā no sistēmas (1.5) atgriežas pie viena n-tās kārtas DV. No sistēmas (1.5) vienādojumiem un vienādojumiem, kas rodas atvasinot sistēmas (1.5) vienādojumus cenšas izslēgt visas nezināmās funkcijas, izņemot vienu, attiecībā pret kuru iegūst vienu augstākās kārtas DV – sistēmas (1.5) *rezolventi*. Ja iegūto augstākās kārtas DV izdodas atrisināt, tad pārējās dotās sistēmas nezināmās funkcijas var atrast ar darbībām, kas vairs nesatur integrēšanu. Aplūkosim dažus piemērus.

Piemērs 14.3. Atrisināt DV sistēmu

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

▲Atvasinot pirmo dotās sistēmas vienādojumu pēc t, iegūstam

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}.$$

No šejienes, ņemot vērā dotās sistēmas otro vienādojumu, iegūstam atiecībā pret nezināmo funkciju x otrās kārtas lineāru homogēnu DV ar konstantiem koeficientiem (dotās sistēmas rezolventi attiecībā pret x)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Tā vispārīgais atrisinājums ir $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. No dotās sistēmas pirmā vienādojuma seko, ka $y = \frac{dx}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Līdz ar to, kā viegli pārbaudīt, dotās sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \quad ▼ \end{cases}$$

Piemērs 14.4. Atrisināt DV sistēmu

$$\frac{dx}{dt} = y + x + t, \quad \frac{dy}{dt} = y + x.$$

▲ Mēģināsim šoreiz iegūt dotās sistēmas rezolventi, piemēram, attiecībā pret nezināmo funkciju y. Atvasinot tādēļ dotās sistēmas otro vienādojumu pēc t, iegūstam

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}.$$

Ievietojot šajā vienādojumā $\frac{dx}{dt}$ vietā izteiksmi no dotās sistēmas pirmā vienādojuma, atrodam

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + y + x + t.$$

Izsakot un ievietojot šeit $x = \frac{dy}{dt} - y$ no dotās sistēmas otrā vienādojuma, iegūstam attiecībā pret nezināmo funkciju y otrās kārtas lineāru nehomogēnu DV ar konstantiem koeficientiem (dotās sistēmas rezolventi attiecībā pret y)

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = t.$$

Iegūtā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = C_1e^{2t} + C_2 - \frac{t^2+t}{4}$. Līdz ar to dotās sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

$$\begin{cases} x = \frac{dy}{dt} - y = C_1e^{2t} - C_2 + \frac{t^2-t-1}{4} \\ y = C_1e^{2t} + C_2 - \frac{t^2+t}{4}. \end{cases} \quad ▼$$

Piezīme 14.2. Praktiski izslēgšanas metodi lieto tikai ļoti vienkāršām DV sistēmām tajā gadījumā, ja pēc izslēgšanas iegūtais DV viegli integrējas.

2.Integrējamo kombināciju metode. Šo metodi sauc arī par mainīgo atdalīšanas metodi.

Šajā metodē DV sistēmu (1.5) parasti pārraksta simetriskā formā

$$\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,...,y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x,y_1,...,y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x,y_1,...,y_n)} = \frac{dx}{1}. \tag{1.12}$$

Katru vienādību izteiksmē (1.12) var aplūkot kā proporciju starp četriem lielumiem un līdz ar to var izmantot proporciju īpašības, piemēram, no

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad = cb, \quad \frac{a}{b} = \frac{a+\lambda c}{b+\lambda d},$$

u.c. Izmantojot šīs proporciju īpašības, no vienādībām (1.12) var izveidot dažādas integrējamās kombinācijas, kas būtībā ir pirmās kārtas DV simetriskā formā attiecībā pret funkcijām, kuras noteiktā veidā ir saistītas ar $(x,y_1,...,y_n)$. Atrisinot šo pirmās kārtas DV un tā atrisinājumu pierakstot formā

$$\Phi_1(x,y_1,y_2,...y_n) = C_1, \tag{1.13}$$

viegli pārliecināties, ka (1.13) ir DV sistēmas (1.5) integrālis. To sauc par DV sistēmas (1.5) *pirmintegrāli.*

Ja ir atrasti n DV sistēmas (1.5) pirmintegrāļi

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.14}$$

tādi, ka to *Jakobi determinants*

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.15}$$

tad, kā zināms no matemātiskās analīzes kursa, algebrisko vienādojumu sistēmu (1.14) var atrisināt attiecībā pret nezināmiem y_1, y_2,...,y_n, atrodot tādā veidā DV sistēmas (1.5) vispārīgo atrisinājumu

$$y_i = \varphi_i(x, C_1 C_2, \ldots, C_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.16}$$

Diemžēl, arī šo metodi praksē izdodas pielietot tikai samērā reti galvenokārt sekojošu divu iemeslu dēļ

- ne vienmēr izdodas atrast n neatkarīgus pirmintegrāļus(1.14),t.i. dažreiz izdodas atrast tikai dažus DV sistēmas (1.5) pirmintegrāļus;
- zinot n pirmintegrāļus, ne vienmēr viegli var atrisināt sistēmu (1.14) attiecībā pret nezināmām funkcijām y_1, y_2,...,y_n.

Piemērs 14.5. Meklēsim pirmintegrāļus Lotka – Voltērra DV sistēmai (1.3).

Paārrakstot to simetriskā formā, iegūst

$$\frac{du}{(a-bp)u} = \frac{dp}{(-\kappa+\gamma u)p} = \frac{dt}{1} \tag{1.17}$$

No pirmās vienādības atrodam integrējamo kombināciju – pirmās kārtas DV simetriskā formā attiecībā pret mainīgiem u un p:

$$\frac{(-\kappa+\gamma u)du}{u} = \frac{(a-bp)dp}{p}, \tag{1.18}$$

kas viegli integrējas. Tiešām, integrējot (1.18), iegūstam

$$a \ln p + \kappa \ln u - \gamma u - bp = \ln C_1$$

jeb

$$p^a u^\kappa \exp(-\gamma u - bp) = C_1. \tag{1.19}$$

Esam ieguvuši dotās sistēmas vienu pirmintegrāli. Diemžēl otru pirmintegrāli, kas ir neatkarīgs ar (1.19) un kuram jāsatur arī t, analītiski atrast neizdodas (!?) . Tomēr no (1.19) var izdarīt dažus secinājumus par plēsoņu un upuru skaita dinamiku.

Piemērs 14.6. Lai atrastu spēka līnijas, ko rada strāva ar stiprumu I, plūstot pa taisnu vadu perpendikulāri z plaknei, jārisina nelineāra DV sistēma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda y}{x^2+y^2} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\lambda x}{x^2+y^2} \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

kur λ ir konstante.

Pārrakstot DV sistēmu (1.20) simetriskā formā

$$-\frac{(x^2+y^2)dx}{\lambda y} = \frac{(x^2+y^2)dy}{\lambda x} = \frac{dz}{0} = \frac{dt}{1}, \tag{1.21}$$

bez grūtībām atrodam sekojošas divas integrējamās kombinācijas un tām atbilstošos pirmintegrāļus

$$xdx + ydy = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C_1.$$

$$dz = 0 \quad \Rightarrow \quad z = C_2.$$