0.1 Eksaktie (pilnie jeb totālie) DV

5.temats

Eksakto DV definīcija. Eksaktības nepieciešamais nosacījums. Piemēri. Eksakto DV integrēšana. Piemēri. Integrējošais faktors. Piemēri. Uzdevumi patstāvīgam darbam.

0.1.1 Eksakta DV jēdziens (definīcija)

Katru pirmās kārtas DV ar atklāti izteiktu atvasinājumu

$$y' = f(x,y)$$

var pārrakstīt diferenciālā formā

$$dy - f(x,y)dx = 0,$$

vai, reizinot to ar patvaļīgu funkciju $Q(x,y)$ un ievedot apzīmējumu $P(x,y) = -Q(x,y)f(x,y)$, vispārīgākā izskatā

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{0.1}$$

ko sauc par pirmās kārtas DV simetriskā formā vai par DV diferenciāļos.

Speciālā gadījumā var gadīties, ka DV (0.1) kreisā puse ir kaut kādas funkcijas $U(x,y)$ pilns diferenciālis, t.i.

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{0.2}$$

Šajā gadījumā (0.1) sauc par eksaktu (pilnu vai totālu) DV. To īsi var pierakstīt formā

$$dU(x,y) = 0,$$

un tā vispārīgais integrālis ir

$$U(x,y) = C, \tag{0.3}$$

kur C – patvaļīga konstante.

Daži DV ir tik vienkārši, ka to eksaktība ir acīmredzama, jo viegli saskatāma funkcija $U(x,y)$, un līdz ar to tie viegli integrējas.

Piemērs 1.

$$\cos y dx - x \sin y dy = 0.$$

Šeit $U(x,y) = x\cos y$ un dotā DV vispārīgais integrālis ir $x\cos y = C$.

Piemērs 2.

$$-\frac{2y}{x^3}dx + \frac{1}{x^2}dy = 0.$$

Šeit

$$U(x,y) = \frac{y}{x^2}$$

un dotā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = Cx^2$.

Tālāk rodas divi jautājumi:

1) Kā noskaidrot, vai dotais DV (0.1) ir eksakts ?

2) Ja tas ir eksakts, kā atrast funkciju $U(x,y)$?

Aplūkojot šos jautājumus, pieņemsim, ka funkcijas $P(x,y)$ un $Q(x,y)$ plaknes apgabalā D, kur tiek aplūkots dotais DV (0.1),

a) ir nepārtraukti diferencējamas,

b) nav vienlaicīgi vienādas ar nulli, t.i. $P^2(x,y)+Q^2(x,y)\neq 0$.

Ja $P^2(x_0,y_0)+Q^2(x_0,y_0)=0$ kādā punktā $(x_0,y_0)\in D$, tad (x_0,y_0) sauc par DV (0.1) singulāro punktu. Singulārajā punktā ar DV (0.1) netiek definēts ne atvasinājums y'_x, ne arī x'_y.

0.1.2 Eksaktības nepieciešamais un pietiekamais nosacījums

Ja DV (0.1) ir eksakts, tad no vienādības (0.2) seko, ka

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=Q(x,y). \tag{0.4}$$

Saskaņā ar pieņēmumu a) funkcijas $U(x,y)$ otrās kārtas jauktie atvasinājumi

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

ir nepārtraukti un tātad vienādi. Esam ieguvuši ***eksaktības nepieciešamo nosacījumu***

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \tag{0.5}$$

kuram ir noteikti jāizpildās, lai DV (0.1) būtu eksakts. Ja apgabals D ir bez "caurumiem ", precīzāk – vienkārtsakarīgs, t.i., ja jebkura vienkārša slēgta līnija, kas atrodas šajā apgabalā, aptver tikai punktus, kas pieder šim apgabalam, tad nosacījums (0.5) ir arī pietiekams, lai DV (0.1) būtu eksakts.

Piezīme. (0.5) ir arī nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai vektoru lauks (P,Q) būtu potenciāls lauks, t.i., lai eksitētu tāda skalāra funkcija $U(x,y)$ – vektoru lauka (P,Q) potenciāls, ka $(P,Q)=(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y})=gradU$.

Piemērs 3. DV $(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0$ ir eksakts, jo $P(x,y)=2xy-1$, $Q(x,y)=3y^2+x^2$ un

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

Piemērs 4. DV $(y-x)dx+2ydy=0$ nav eksakts, jo $P(x,y)=y-x$, $Q(x,y)=2y$ un

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

0.1.3 Eksakta DV integrēšana

Kā integrēt eksaktu DV?

Ja dotais DV (0.1) ir eksakts, t.i. ja ir izpildīts nosacījums (0.5), tad kā zināms no augstākās matemātikas kursa, funkciju $U(x,y)$ var aprēķināt ar otrā veida līnijintegrāļa palīdzību

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

kur (x_0, y_0) ir fiksēts brīvi izvēlēts apgabala D punkts. Integrālis šeit nav atkarīgs no integrācijas ceļa formas. Par intergrēšanas ceļu izvēloties lauztu līniju, kuras posmi ir paraleli koordinātu asīm, iegūstam, ka eksakta DV vispārīgais integrālis (0.3) ir pierakstāms vienā no diviem sekojošiem veidiem

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C \tag{0.6}$$

vai

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \tag{0.7}$$

Aplūkosim citu eksakta DV integrēšanas metodi, kura tieši seko no eksaktības definīcijas (0.2)un no vienādībām (0.4) un kuru varbūt ir vieglāk atcerēties.

1) Integrējot pirmo no vienādībām (0.4) pēc x, iegūstam

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + c(y), \tag{0.8}$$

kur $c(y)$ ir mainīgā y pagaidām nezināma funkcija.

2) Atvasinot (0.8) pēc y un salīdzinot iegūto rezultātu ar otro no vienādībām (0.4) :

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + c'(y) = Q(x,y),$$

atrodam $c'(y)$.

3) Integrējot $c'(y)$pēc y, iegūstam $c(y)$ (integrācijas konstante šeit netiek ņemta vērā, jo tā faktiski tiek pievienota nākamā solī).

4) Ievietojot $c(y)$ izteiksmi vienādības (0.8) labajā pusē un pielīdzinot to patvaļīgai konstantei C, atrodam DV (0.1) vispārīgo integrāli.

Piezīme. Šajā metodē var vispirms integrēt otro no vienādībām (0.4) pēc y, ja tā ir vieglāk, iegūstot

$$U(x,y) = \int Q(x,y)dy + c(x),$$

kur $c(x)$ ir mainīgā x funkcija. Atvasinot $U(x,y)$ tagad pēc x un salīdzinot iegūto rezultātu ar pirmo no vienādībām (0.4), tiek atrasts $c'(x)$ un pēc tam integrējot pa x arī $c(x)$. Ievietojot $c(x)$ izteiksmi $U(x,y)$ izteiksmē, atkal iegūstam DV (0.1) vispārīgo integrāli.

Piemērs 5. DV $(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0$, kā tika parādīts piemērā 3, ir eksakts. Tātad eksistē funkcija $U(x,y)$, kuras parciālie atvasinājumi ir

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2xy-1, \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=3y^2+x^2.$$

1) Integrējot doto $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2xy-1$ izteiksmi pēc x, iegūstam $U(x,y)=x^2y-x+c(y)$.

2) Atvasinot $U(x,y)$ pēc y un salīdzinot ar doto $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ izteiksmi, iegūstam:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x^2+c'(y)=3y^2+x^2,$$

no kurienes seko, ka $c'(y)=3y^2$.

3) Integrējot $c'(y)$ pēc y, atrodam $c(y)=y^3$.

4) Ievietojot $c(y)$ funkcijas $U(x,y)$ izteiksmē un pielīdzinot to patvaļīgai konstantei C, atrodam dotā DV vispārīgo integrāli $x^2y-x+y^3=C$.

Alternatīvs variants:

1) Integrējot doto$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=3y^2+x^2$ pēc y, iegūstam $U(x,y)=y^3+x^2y+c(x)$.

2) Atvasinot $U(x,y)$ pēc x un salīdzinot ar doto$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ izteiksmi, iegūstam:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2xy+c'(x)=2xy-1,$$

no kurienes seko, ka $c'(x)=-1$.

3) Integrējot $c'(x)$ pēc x, atrodam $c(x)=-x$.

4) Ievietojot $c(x)$ funkcijas $U(x,y)$ izteiksmē un pielīdzinot to patvaļīgai konstantei C, atrodam dotā DV vispārīgo integrāli $y^3+x^2y-x=C$.

0.1.4 Košī uzdevums.

DV (0.1) ir bezgalīgi daudz atrisinājumi. Tie aizklātā formā visi ir ietverti vispārīgā integrāļa izteiksmē (0.3). Košī uzdevumā tiek meklēts atrisinājums, kurš apmierina dotos sākuma nosacījumus $(x_0,y_0)\in D$.

Ja punktā (x_0,y_0) ir izpildīts nosacījums b), t.i. ja $P^2(x_0,y_0)+Q^2(x_0,y_0)\neq 0$, tad Košī uzdevumam eksistē viens vienīgs atrisinājums. Punktam (x_0,y_0) atbilstošā C vērtība vispārīgā integrāļa izteiksmē (0.3) ir $C=U(x_0,y_0)$ un Košī uzdevuma atrisinājums tāpēc būs formā

$$U(x,y)=U(x_0,y_0). \tag{0.9}$$

Ja $\frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)\neq 0$, tad vienādojums (0.9) definē punkta (x_0,y_0) apkārtnē Košī uzdevuma atrisinājumu kā funkciju y no x, ja $\frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y_0)=P(x_0,y_0)\neq 0$ - tad kā funkciju x no y. Izņēmuma punkti ir singulārie punkti, kuros $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$. Tad atbilstošam Košī uzdevumam atrisinājums var neeksistēt.

No vienādojuma (0.9) un vispārīgā integrāļa izteiksmēm (0.6) un (0.7) seko, ka DV (0.1) Košī uzdevuma atrisinājums, kas atbilst dotiem sākuma nosacījumiem $(x_0, y_0) \in D$, ir pierakstāms ar vienu no sekojošām divām formulām:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = 0 \tag{0.10}$$

vai

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = 0. \tag{0.11}$$

Piemērs 6. Atrast DV $(2xy-1)dx + (3y^2+x^2)dy = 0$ atrisinājumu, kura atbilstošā integrāllīkne iet caur punktu $(0,0)$. Šeit $P(x,y) = (2xy-1)$ un $Q(x,y) = (3y^2+x^2)$. DV ir eksats, jo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Tā kā $Q(0,0) = 0$, bet $P(0,0) = -1 \neq 0$, tad dotā DV atrisinājums, kas apmierina dotos sākuma nosacījumus eksistē, ir viens vienīgs un nosakās saskaņā ar formulu (0.10) no vienādojuma

$$-\int_0^x dx + \int_0^y (3y^2+x^2)dy = -x + y^3 + yx^2 = 0$$

kā funkcija x no y:

$$x = \frac{1-\sqrt{1-4y^4}}{2y}, \quad x(0) = 0.$$

Piemērs 7. Atrast DV $x(y^2+1)dx + (x^2y+2y^3)dy = 0$ integrāllīkni, kas iet caur punktu $(0,0)$.

Šeit $P(x,y) = x(y^2+1)$ un $Q(x,y) = (x^2y+2y^3)$. DV ir eksakts, jo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$. Tā kā $P(0,0) = Q(0,0) = 0$, tad dotai Košī problēmai atrisinājums var neeksistēt. Tiešām, meklējot dotā uzdevuma atrisinājumu, atrodam lietojot, piemēram, formulu (0.11):

$$\int_0^x x(y^2+1)dx + \int_0^y 2y^3dy = \frac{1}{2}[x^2(y^2+1)+y^4] = 0.$$

Iegūtā vienādojuma vienīgais atrisinājums ir punkts $(0,0)$, nevis punktu kopa, kas veido līniju. Tātad dotam uzdevumam atrisinjuma nav.

0.1.5 Integrējošais faktors (reizinātājs)

Aplūkosim DV $(y-x)dx + 2ydy = 0$. Tas, kā redzējām piemērā 4, nav eksakts. Reizinot vienādojuma abas puses ar $x+y$, iegūsim dotam DV ekvivalentu DV $(y^2-x^2)dx + 2y(x+y)dy = 0$, jo abiem DV ir vieni un tie paši atrisinājumi. Izrādās, ka šādi iegūtais DV ir jau eksakts: $P(x,y) = y^2-x^2$, $Q(x,y) = 2y(x+y)$ un $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$.

Definīcija. Funkciju $\mu(x,y)$, ar kuru reizinot doto neeksakto DV rezultātā tiek iegūts eksakts DV, sauc par dotā DV *integrējošo faktoru* jeb *reizinātāju.*

Teorētiski ir pierādīts, ka katram DV ar izskatu

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{0.12}$$

ja tas nav eksakts un ja tajā ieejošās funkcijas $P(x,y)$ un $Q(x,y)$ apmierina nosacījumus a) un b), eksistē integrējošais faktors (patiesībā to ir bezgalīgi daudz), bet, diemžēl, nav zināms, kā to vispārīgā gadījumā var atrast.

Ja kaut kāda nepārtraukti diferencējama funkcija $\mu(x,y)$ ir DV (0.12) integrējošais faktors, tad DV

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

ir eksakts un ir spēkā vienādība (eksaktības nepieciešamais un pietiekamais nosacījums)

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

vai izvērstā formā

$$P(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}-Q(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}=\mu(x,y)[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}]. \tag{0.13}$$

Attiecībā pret $\mu(x,y)$ vienādība 0.13 ir parciālais DV, kura integrēšanas uzdevums vispārīgā gadījumā nav vienkāršāks par dotā DV integrēšanas uzdevumu. Faktiski pietiek zināt tikai šī parcāilā DV kaut kādu partikulāro atrisinājumu. Dažkārt, ja dotais DV ir ar specifiskām īpašībām, piemēram, ja tam eksistē integrējošais faktors, kas ir atkarīgs tikai no viena argumenta x vai y, to var viegli atrast.

Piemērs 8. Aplūkosim DV:

$$[p(x)y-q(x)]dx+dy=0, \tag{0.14}$$

kur dotās funkcijas $p(x)$ un $q(x)$ ir nepārtrauktas kaut kādā intervalā $I\in\mathbb{R}$. Tā kā šeit $P(x,y)=p(x)y-q(x)$, $Q(x,y)=1$ un $\frac{\partial P}{\partial y}=p(x)\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, tad dotais DV nav eksakts. Vienādojums (0.13) attiecībā pret integrējošo faktoru $\mu(x,y)$ būs izskatā

$$[q(x)-p(x)y]\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial x}=p(x)\mu. \tag{0.15}$$

Vienādojumam (0.15) eksistē partikulārie atrisinājumi, kas nav atkarīgi no y. Tiešām, ja funkcija μ nav atkarīga no y, tad $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, un attiecībā pret μ, iegūstam parasto DV ar atdalāmiem mainīgiem

$$\frac{d\mu}{dx}=p(x)\mu.$$

Tā vispārīgais atrisinājums ir

$$\mu(x)=Ce^{\int p(x)dx}, \tag{0.16}$$

kur C – patvaļīga konstante.

Izvēloties, piemēram, $C=1$ un pareizinot doto DV ar $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$, iegūstam eksaktu DV

$$e^{\int p(x)dx}[p(x)y-q(x)]dx+e^{\int p(x)dx}dy=0, \tag{0.17}$$

jo šeit

$$P(x,y)=e^{\int p(x)dx}[p(x)y-q(x)],\quad Q(x,y)=e^{\int p(x)dx}$$

un

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = p(x)e^{\int p(x)dx}$$

.

Dažkārt dotā DV integrējošo faktoru izdodas atrast arī tad, ja to meklē formā $\mu = \mu(\omega)$, kur $\omega = \omega(x,y)$ ir dotā funkcija no x un y, piemēram,

$$\omega = x, \omega = y, \omega = x+y, \omega = xy, \omega = \frac{y}{x}, \omega = x^2+y^2, \tag{0.18}$$

u.t.t.

Ievietojot funkciju $\mu = \mu(\omega)$ vienādojumā (0.13) un ņemot vērā, ka tagad

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

iegūsim

$$[P\frac{\partial \omega}{\partial y} - Q\frac{\partial \omega}{\partial x}]\frac{d\mu}{d\omega} = \mu[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}].$$

No šejienes redzams, ja attiecība

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial \omega}{\partial y} - Q\frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv g(\omega), \tag{0.19}$$

ir kaut kāda funkcija g no ω, tad dotam DV eksistē integrējošais faktors formā $\mu = \mu(\omega)$, kuru var atrast atrisinot DV ar atdalāmiem mainīgiem

$$\frac{d\mu}{d\omega} = g(\omega)\mu,$$

un kurš tātad ir izsakāms, piemēram, ar formulu

$$\mu(\omega) = Ce^{\int g(\omega)d\omega}, C = 1. \tag{0.20}$$

Praksē lietojot integrjošā faktora metodi, ir jāmēģina vispirms piemeklēt dotam DV funkciju $\omega = \omega(x,y)$ tā, lai būtu izpildīts nosacījums (0.19), sākot ar vienkāršākajām tās formām, tādām kā (0.18). Pēc tam integrējošo faktoru atrod saskaņā ar formulu (0.20).

Piemērs 9. Integrēt DV $(x^2+y^2+x)dx + ydy = 0$.

Dotais DV nav eksakts, jo šeit $P(x,y) = x^2+y^2+x$, $Q(x,y) = y$ un $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Integrējošo reizinātāju meklējam izskatā $\mu = \mu(\omega)$ kā salikto funkciju no funkcijas $\omega = \omega(x,y)$, kurai izpildās nosacījums (0.19). Aplūkojot attiecību

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+x)\frac{\partial \omega}{\partial y} - y\frac{\partial \omega}{\partial x}}$$

un ievietojot funkcijas $\omega(x,y)$ vietā izteiksmes(0.18) redzam, ka šī attiecība ir funkcija no ω, ja $\omega = x^2+y^2$:

$$\frac{-2y}{(x^2+y^2+x)\frac{\partial \omega}{\partial y} - y\frac{\partial \omega}{\partial x}} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+x)2y - y2x} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{\omega}.$$

Tātad dotā DV integrējošais faktors saskaņā ar formulu (0.20) ir

$$\mu(\omega) = e^{\int g(\omega)d\omega} = e^{-\int \frac{d\omega}{\omega}} = e^{-\ln\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Tiešām, reizinot doto DV ar $\frac{1}{x^2+y^2}$, iegūstam DV

$$dx + \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = d[x + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)] = 0,$$

kura eksaktība ir acīmredzama un kura vispārīgais integrālis ir

$$x + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = C,$$

C – patvaļīga konstante.

0.1.6 Uzdevumi pastāvīgai risināšanai

(1.tuvinājumā)

0.1.6.1 Eksaktie DV Tenebaums 90.lpp:

1. $(2xy+x^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$, $3x^2y+x^3+y^3=C$;
2. $(x^2y+\cos x)dx+(y^3+\sin x)dy=0$; $4x^3+3y^4+12y\sin x=C$
4. $(x-2xy+e^y)dx+(y-x^2+xe^y)dy=0$;$x^2-2x^2y+y^2+2xe^y=C$
5. $(e^x+\sin y+e^{-y})dx-(xe^{-y}-e^x\cos y)dy=0$;$e^x\sin y+xe^{-y}=C$
9. $(arctgxy+\frac{xy-2xy^2}{1+x^2y^2})dx+\frac{x^2-2x^2y}{1+x^2y^2}dy=0$;$xarctgxy-\ln(1+x^2y^2)=C$
11. $\frac{xy+1}{y}dx+\frac{2y-x}{y^2}dy=0$;$x^2+\frac{2x}{y}+\ln y^4=C$
15. $(y^2+12x^2y)dx+(2xy+4x^3)dy=0$; $4x^3y+xy^2=C$
18. $2xydx+(x^2+y^2+a)dy=0$;$y^3+3x^2y+3ay=C$
19. $(2xy+x^2+b)dx+(y^2+x^2+a)dy=0$;$y^3+x^3+3(x^2y+ay+bx)=C$

Bronson 33.lpp:

4.24 $(y+2xy^3)dx+(1+3x^2y^2+x)dy=0$; $xy+x^2y^3+y=C$
4.26 $e^{x^3}(3x^2y-x^2)dx+e^{x^3}dy=0$; $y=Ce^{-x^3}+\frac{1}{3}$
4.27 $3x^2y^2dx+(2x^3y+4y^3)dy=0$; $x^3y^2+y^4=C$
4.28 $ydx+xdy=0$; $xy=C$
4.30 $(y\sin x+xy\cos x)dx+(x\sin x+1)dy=0$; $xy\sin x+y=C$
4.31 $-\frac{y^2}{t^2}dt+\frac{2y}{t}dy=0$; $y^2=Ct$
4.32 $-\frac{2y}{t^3}dt+\frac{1}{t^2}dy=0$; $y=Ct^2$
4.34 $(4t^3y^3-2ty)dt+(3t^4y^2-t^2)dy=0$; $t^4y^3-t^2y=C$
4.35 $\frac{ty-1}{t^2y}dt-\frac{1}{ty^2}dy=0$; $y=\frac{-1}{t\ln|Ct|}$
4.36 $(t^2-x)dt-tdx=0$; $x=\frac{1}{3}t^2-\frac{C}{t}$
4.37 $(t^2+x^2)dt+(2tx-x)dx=0$; $2t^3+6tx^2-3x^2=C$

4.38 $2xe^{2t}dt + (1+e^{2t})dx = 0$; $x = \frac{C}{1+e^{2t}}$
4.40 $(\cos x + x\cos t)dt + (\sin t - t\sin x)dx = 0$; $t\cos x + x\sin t = C$
Fiļipovs 22.lpp
186. $2xydx + (x^2-y^2)dy = 0$; $3x^2y - y^3 = C$
187. $(2-9xy^2)xdx + (4y^2-6x^2)ydy = 0$; $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$
188. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$; $xe^{-y} - y^2 = C$
189. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$; $4y\ln x + y^4 = C$
190. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0$; $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C$
191. $2x(1+(x^2-y))dx - (x^2-y)dy = 0$; $x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} = C$
192. $(1+y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$; $x - y^2\cos^2 x = C$
193. $3x^2(1+\ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy = 0$; $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$
194. $(\frac{x}{\sin y} + 2)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$; $x^2 + 1 = 2(C-2x)\sin y$

0.1.6.2 Koši uzdevums

Bronson 34.lpp (4.59-4.60, 4.62-4.65)
4.24 + y(1)=-5 $xy + x^2y^3 + y = -135$
4.26 + $y(0) = -1$, $y = -\frac{4}{3}e^{-x^3} + \frac{1}{3}$
4.31 + $y(2) = -2$, $y = -2t$
4.32 + $y(2) = -2$, $y = -\frac{1}{2}t^2$
4.36 + $x(1) = 5$, $x = \frac{1}{3}t^2 + \frac{14}{3t}$
4.38 + $x(1) = -2$, $x = \frac{-2(1+e^2)}{1+e^{2t}}$

0.1.6.3 Integrējošais faktors

Tenebaums 90.lpp:
3. $(x^2+y^2+x)dx + xydy = 0$; $\mu = x$, $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$;
6. $(x^2-y^2-y)dx - (x^2-y^2-x)dy = 0$; $\mu = \frac{1}{x^2-y^2}$, $x - y + \ln\sqrt{x+y} - \ln\sqrt{x-y} = C$;
7. $(x^4y^2-y)dx + (x^2y^4-x)dy = 0$; $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$, $x^4y + xy^4 + 3 = Cxy$;
8. $y(2x+y^3)dx - x(2x-y^3)dy = 0$; $\mu = \frac{1}{y^3}$, $x^2 + xy^3 = Cy^2$;
10. $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$; $\mu = e^{-y}$, $2xe^{x-y} + y^2 = C$;
12. $(y^2-3xy-2x^2)dx + (xy-x^2)dy = 0$; $\mu = 2x$, $x^2y^2 - 2x^3y - x^4 = C$;
13. $y(y+2x+1)dx - x(2y+x-1)dy = 0$; $\mu = (xy)^{-\frac{4}{3}}$, $(y-x+1)^3 = Cxy$;
14. $y(2x-y-1)dx + x(2y-x-1)dy = 0$; $\mu = \frac{1}{xy(x+y+1)}$, $(x+y+1)^3 = Cxy$;
16. $3(y+x)^2dx + x(3y+2)dy = 0$; $\mu = x$, $6x^2y^2 + 8x^3y + 3x^4 = C$;
17. $ydx - (y^2+x^2+x)dy = 0$; $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$, $y + arctg(\frac{y}{x}) = C$;
Fiļipovs 22.lpp
195. $(x^2+y^2+x)dx + ydy = 0$; $2x + \ln(x^2+y^2) = C$;
196. $(x^2+y^2+y)dx - xdy = 0$; $x + arctg(\frac{x}{y}) = C$;
197. $ydy = (xdy + ydx)(1+y^2)$; $\sqrt{1+y^2} = xy + C$;

198. $xy^2(xy'+y)=1$; $2x^3y^3-3x^2=C$;
199. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$; $y^2=x^2(C-2y), x=0$;
200. $(y-\frac{1}{x})dx+\frac{dy}{y}=0$; $(x^2-C)y=2x$;
201. $(x^2+3\ln y)ydy=xdy$; $x^2+\ln y=Cx^3, x=0$;
202. $y^2dx+(xy+tgxy)dy=0$; $y\sin xy=C$;
203. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$; $\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C, y=0$;
204. $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0$; $-x+1=xy(arctgy+C), x=0, y=0$;
205. $(x^2+2x+y)dx=(x-3x^2y)dy$; $x+\ln x^2+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x}=C$;
206. $ydx-xdy=2x^3tg\frac{y}{x}dx$; $\sin\frac{y}{x}=Ce^{-x^2}$;
207. $y^2dx+(e^x-y)dy=0$; $\ln|y|-ye^{-x}=C$;
208. $xydx=(y^3+x^2y+x^2)dy$; $\ln(\frac{x^2}{y^2}+1)=2y+C$;
209. $x^2y(ydx+xdy)=2ydx+xdy$; $x^2y\ln Cxy=-1, x=0, y=0$;
210. $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0$; $x^2+y^2=y+Cx, x=0$;
211. $(2x^2y^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$; $x^2y+\ln|\frac{x}{y}|=C, x=0, y=0$;
212.$(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0$; $2xy^2+\frac{1}{xy}=C, x=0, y=0$;
213. $y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0$; $\ln|\frac{x+y}{y}|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C, y=0, y=-x$;
214. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0$;$\sin^2 y=Cx-x^2, x=0$;
215. $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2ydx$; $y=C\ln x^2y$;
216. $(x^2+1)(2xdx+\cos ydy)=2x\sin ydx$; $\sin y=-(x^2+1)\ln C(x^2+1)$;
217. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0$;$xy(C-x^2-y^2)=1, x=0, y=0$;
218. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0$; $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}$;
219. $(x^2-y)dx+x(y+1)dy=0$; $x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\ln(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}})=C, x=0$;
220. $y^2(ydx-2xdy)=x^3(xdy-2ydx)$;$x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy}, x=0, y=0$;