0.1 Lineārie pirmās kārtas DV

6. temats

Lineārie pirmās kārtas DV. Definīcija. Atrisināšanas metodes: integrējošā reizinātāja metode, Lagranža konstantes variācijas metode. Piemēri. Košī uzdevums. Lineāra nehomogena DV vispārīgā atrisinājuma struktūra. Piemēri. Bernulli DV.

0.1.1 Lineāra pirmās kārtas DV definīcija

Definīcija 6.1. Pirmās kārtas DV sauc par lineāru DV, ja tas ir pierakstāms formā

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{0.1}$$

kur $p(x)$ un $q(x)$ ir dotas nepārtrauktas kaut kādā argumenta x maiņas intervalā $I \subseteq \mathbb{R}$ funkcijas.

Lineārā DV nezināmā funkcija y un tās atvasinājums y' vienmēr ieiet lineāri, t.i. locekļi, kas satur y un y', veido lineāru mainīgo y, y' formu.

Funkciju $p(x)$ sauc par DV (0.1) *koeficientu*, bet $q(x)$ – par *brīvo locekli*. Ja $q(x) \equiv 0$, tad DV (0.1) sauc par *lineāru homogēnu* DV, pretējā gadījumā par *lineāru nehomogēnu* DV.

Lineāro homogēno DV

$$Y' + p(x)Y = 0, \tag{0.2}$$

kura koeficients $p(x)$ sakrīt ar DV (0.1) koeficientu, sauc par *nehomogēnam DV* (0.1) *atbilstošo homogēno DV*. Vienādojumiem (0.1) un (0.2) nav kopīgu atrisinājumu. Katrs DV (0.2) atrisinājums Y pārvērš DV (0.1) kreiso pusi par 0, un tātad nevar būt tā atrisinājums. Savukārt katrs DV (0.1) atrisinājums y pārvērš DV (0.2) kreiso pusi par $q(x)$, un tātad nav tā atrisinājums.

Piezīme 6.1. Lineārie DV praksē bieži tiek lietoti, piemēram, lai aprakstītu dažādu populāciju lielumu izmaiņas laikā. Ja ar $x(t)$ apzīmē populācijas lielumu laika momentā t, tad lineārais homogēnais DV

$$x'(t) = -p(t)x(t)$$

apraksta situāciju, kurā populācijas maiņas ātrums mazā laika intervalā ir proporcionāls pašas populācijas lielumam ar proporcionalitātes koeficientu $-p(t)$, kas mainās laikā t. Ja $p(t) > 0$, tad populācija samazinās, ja $p(t) < 0$ – palielinās.

Nehomogēnam DV

$$x'(t) = -p(t)x(t) + q(t)$$

populācijas palielināšanos vai samazināšanos papildus ietekmē "kontroles" funkcija $q(t)$.

Aplūkosim vispirms lineāro homogēno DV (0.2).

0.1.2 Lineāra homogēna pirmās kārtas DV vispārīgais atrisinājums

DV (0.2) viegli integrējas ar mainīgo atdalīšanas metodi un tā vispārīgais atrisinājums ir iegūstams ar vienu kvadratūru.

▲ Tiešām, viens no DV (0.2) atrisinājumiem ir tā saucamais *triviālais* jeb *nulles atrisinājums* $Y(x) \equiv 0$. Ja $Y(x) \neq 0$, tad DV (0.2) var pārrakstīt formā

$$\frac{dY}{Y} = -p(x)dx,$$

no kurienes seko, ka

$$\ln|Y| = -\int p(x)dx + C_1,$$

kur C_1-patvaļīga integrācijas konstante. Ņemot $C = \pm e^{C_1}$, iegūstam, ka DV (0.2) vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

kur atrisinājumam $Y(x) \equiv 0$ atbilst vērtība $C = 0$. ▼

Piezīme 6.2. Kā redzams no formulas (0.3), DV (0.2) partikulārie atrisinājumi atšķiras viens no otra tikai ar konstantu reizinātāju. Tāpēc, ja ir zināms DV (0.2) kaut kāds partikulārais atrisinājums $Y_1(x) \neq 0$, tad tā vispārīgais atrisinājums ir iegūstams bez kvadratūras un tas ir

$$Y = CY_1(x), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

Piemērs 6.1. DV $Y' - 2\frac{Y}{x} = 0$ viens no atrisinājumiem, acīmredzot, ir $Y_1 = x^2$. Tātad tā vispārīgais atrisiājums ir $Y = Cx^2$.

0.1.3 Lineāra nehomogēna pirmās kārtas DV integrēšanas metodes

Arī nehomogēnais lineārais DV (0.1) viegli integrējas, bet tā vispārīgais atrisinājums ir iegūstams jau ar divām kvadratūrām. Ir vairākas lineārā nehomogēnā DV (0.1) integrēšanas metodes. Aplūkosim dažas no tām.

0.1.3.1 Integrējošā reizinātāja (jeb Eilera) metode

Pārrakstīsim DV (0.1) diferenciālā formā

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0. \tag{0.5}$$

Piemērā 5.8. tika parādīts, ka vienādojumam (0.5), kas nav eksakts, eksistē integrējošais reizinātājs

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \tag{0.6}$$

Līdz ar to DV (0.1) vispārīgo atrisinājumu var iegūt reizinot šo DV ar funkciju (0.6) un atrisinot iegūto vienādojumu saskaņā ar iepriekšējā tēmā izklāstīto eksakto DV integrēšanas metodi.

Tomēr vienkāršāk DV (0.1) vispārīgo atrisinājumu var iegūt sekojošā veidā.

▲ Ar funkciju (0.6) reizina DV (0.1), iegūstot tam ekvivalentu DV

$$e^{\int p(x)dx}y' + p(x)e^{\int p(x)dx}y = e^{\int p(x)dx}q(x),$$

kuru, kā izrādās, īsāk var pierakstīt formā

$$\left(e^{\int p(x)dx}y\right)' = e^{\int p(x)dx}q(x). \tag{0.7}$$

Integrējot DV (0.7) abas puses pēc x un dalot integrācijas rezultātu ar $e^{\int p(x)dx}$, atrodam, ka DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right], \quad C \in \mathbb{R} \quad \blacktriangledown \tag{0.8}$$

Piezīme 6.3. No formulas (0.8) iegūšanas veida seko, ka tā satur pilnīgi visus DV (0.1) atrisinājumus. Tātad lineāriem DV singulārie atrisinājumi nav.

Piemērs 6.2. Atrisināt DV $y' - \frac{2}{x}y = x^4$.

$\blacktriangle$ Dotais DV ir lineārs nehomogēns DV. Tā koeficients un brīvais loceklis attiecīgi ir $p(x) = -\frac{2}{x}$ un $q(x) = x^4$. Atrodam dotā DV integrējošo reizinātāju $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$. Reizinot doto DV ar $\frac{1}{x^2}$, iegūstam $\left(\frac{1}{x^2}y\right)' = \frac{1}{x^2}x^4 = x^2$. Integrējot iegūtās vienādības abas puses pēc x, atrodam, ka $\frac{y}{x^2} = \int x^2dx + C = \frac{x^3}{3} + C$. Tādējādi dotā DV vispārīgais atrisinājms ir $y = \frac{x^5}{3} + Cx^2$. $\blacktriangledown$

Piezīme 6.4. Formulu (0.6) DV (0.1) integrējošā reizinātāja aprēķināšanai var iegūt arī šādu spriedumu rezultātā.

$\blacktriangle$ Lai varētu realizēt tiko aprakstīto DV (0.1) integrēšanas algoritmu, tiek meklēta funkcija $\mu(x)$, ar kuru reizinot šo DV (0.1) tā kreisā puse kļūst vienāda ar reizinājuma $\mu(x)y$ atvasinājumu:

$$\mu(x)\left[y' + p(x)y\right] = [\mu(x)y]' = \mu'(x)y + \mu(x)y'. \tag{0.9}$$

No vienādības (0.9) pēc saīsināšanas ar $\mu(x)y'$ un dalīšanas ar y iegūstam attiecībā pret nezināmo funkciju $\mu(x)$ lineāru homogēnu pirmās kārtas DV

$$\mu' - p(x)\mu = 0, \tag{0.10}$$

kura vispārīgais atrisinājums saskaņā ar formulu (0.3) ir

$$\mu(x) = Ce^{\int p(x)dx},$$

C -patvaļīga konstante, piemēram, $C = 1$. $\blacktriangledown$

0.1.3.2 Lagranža konstantes variācijas metode

Šajā metodē vispirms tiek atrasts lineāram nehomogēnam DV (0.1) atbilstošā homogenā DV (0.2) vispārīgais atrisinājums (0.3). Pēc tam nehomogēnā DV (0.1) atrisinājums tiek mekēts formā

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{0.11}$$

kas atšķiras no atbilstošā homogēnā DV vispārīgā atrisinājuma (0.3) vienīgi ar to, ka konstantes C vietā ir mainīgā x kaut kāda pagaidām nezināma funkcija $C(x)$ (konstante C tiek mainīta – variēta).

Ievietojot izteiksmi (0.11) DV (0.1) un ņemot vērā, ka

$$y' = \left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

tiek iegūts, pēc vienādo locekļu saīsināšanas un reizināšanas ar $e^{\int p(x)dx}$, vienkāršs DV attiecībā pret jauno nezināmo funkciju $C(x)$:

$$C'(x) = e^{\int p(x)dx}q(x). \tag{0.12}$$

Integrējot DV (0.12) abas puses pēc x atrod tā vispārīgo atrisinājumu

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ievietojot atrasto $C(x)$ izteiksmi vienādībā (0.11), iegūst jau pazīstamo DV (0.1) vispārīgā atrisinājuma formulu (0.8).

Piemērs 6.3. Atrisināt piemērā 6.2 doto DV $y' - \frac{2}{x}y = x^4$ ar Lagranža konstantes variācijas metodi.

▲ Vispirms risinām dotam DV atbilstošo homoogēno DV $Y' - \frac{2}{x}Y = 0$. Tas ir DV ar atdalāmiem mainīgiem. Atdalot mainīgos, iegūstam $\frac{dY}{Y} = 2\frac{dx}{x}$, no kurienes atrodam, ka $Y = Cx^2$. Līdz ar to dotā DV atrisinājumu meklējam formā $y = C(x)x^2$. Ievietojot šo izteiksmi dotājā DV, iegūstam $C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x^4$ un pēc vienādo locekļu saīsināšanas $C'(x) = x^2$. Integrējot pēdējo vienādību, atrodam, ka $C(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Tādējādi dotā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)x^2$. ▼

0.1.3.3 Bernulli metode

Bernulli metodē lineārā nehomogēnā DV (0.1) atrisinājums tiek meklēts kā divu jaunu nezināmu funkciju reizinājums

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{0.13}$$

Ievietojot izteiksmi (0.13) DV (0.1), iegūstam

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

jeb

$$\left[u' + p(x)u\right]v + uv' = q(x). \tag{0.14}$$

Funkciju $u(x)$ tālāk izvēlas tā, lai būtu spēkā vienādība

$$u' + p(x)u = 0, \tag{0.15}$$

citiem vārdiem, par funkciju $u(x)$ ņem DV (0.1) atbilstošā homogēnā DV (0.15) jebkuru partikulāro atrisinājumu

$$u = C^{\star}e^{-\int p(x)dx}, \tag{0.16}$$

kur $C^{\star}$– patvaļīga fiksēta konstante. Parasti ņem $C^{\star}=1$, jo gala rezultāts nav atkarīgs no $C^{\star}$izvēles.

Ievietojot izteiksmi (0.16) vienādībā (0.14), iegūstam attiecībā pret nezināmo funkciju $v(x)$ DV ar atdalāmiem mainīgiem

$$C^{\star}v' = e^{\int p(x)dx}q(x), \tag{0.17}$$

kuru integrējot, atrodam, ka

$$C^{*}v = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C. \tag{0.18}$$

Gala rezultātā iegūstam, ka

$$y = uv = C^{\star}e^{-\int p(x)dx}\frac{\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right]}{C^{\star}} = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right],$$

t.i. atkal jau pazīstamo lineārā nehomogēnā DV (0.1) vispārīgā atrisinājuma formulu (0.8).

Piemērs 6.4. Atrisināt piemērā 6.2 doto DV $y' - \frac{2}{x}y = x^4$ ar Bernulli metodi.

▲ Dotā DV atrisinājumu meklējot formā $y = uv$, kur u un v pagaidām nezināmas funkcijas, iegūstam $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^4$ jeb $(u' - \frac{2}{x}u)v + uv' = x^4$. Funkciju u meklējam tā, lai $u' - \frac{2}{x}u = 0$. Attiecībā pret u pēdējā vienādība ir DV ar atdalāmiem mainīgiem – dotam DV atbilstošais lineārais homogēnais DV. Atdalot mainīgos, iegūstam $\frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}$. Integrējot šo vienādību, atrodam, ka $u = C^{\star}x^2$. Ņemot $C^{\star} = 1$, t.i. $u = x^2$, iegūstam attiecībā pret v DV $v' = \frac{x^4}{x^2} = x^2$. No šejienes seko, ka $v = \frac{x^3}{3} + C$. Līdz ar to dotā DV vispārīgais atrisinājums ir $y = uv = x^2(\frac{x^3}{3} + C)$. ▼

Piezīme 6.5. Kaut arī Lagranža konstantes variācijas un Bernulli metožu pamatā ir pilnīgi dažādas idejas, tomēr šo metožu praktiskā realizācija atšķiras tikai ar apzīmējumiem. Abās metodēs vispirms tiek atrasta funkcija $u = e^{-\int p(x)dx}$. Pēc tam funkcija $v = C(x)$. Rezultātā atrisinājums ir šo funkciju reizinājums.

0.1.4 Košī uzdevums

Aplūkosim Košī uzdevumu, kurā ir jāatrod lineārā DV (0.1) partikulārais atrisinājums, kas apmierina doto sākuma nosacījumu $y(x_0) = y_0$, kur x_0,y_0-dotie skaitļi.

Teorēma 6.1. Ja $p(x)$ un $q(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas kaut kādā intervālā $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, tad pie jebkuriem sākuma nosacījumiem $x_0 \in I$ un $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ Košī uzdevumam

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{0.19}$$

eksistē viens vienīgs atrisinājums. Tas ir definēts un nepārtraukti diferencējams `visā` intervālā I.

▲ Kā zināms, jebkurai intervālā I nepārtrauktai funkcijai eksistē šajā intervālā primitīvā funkcija (nenoteiktais integrālis), kas, protams, arī ir nepārtraukta funkcija intervālā I. Līdz ar to no DV (0.1) vispārīgā atrisinājuma formulas (0.8) seko, ka jebkurš DV (0.1) atrisinājums ir definēts un ir nepārtraukts visā intervalā I. Savukārt, no vienādības $y' = q(x) - p(x)y$ tad seko, ka jebkura atrisinājuma atvasinājums y' arī ir nepārtraukts visā intervalā I.

Tā kā jebkuras funkcijas divas primitīvās funkcijas atšķiras tikai par konstantu saskaitāmo, tad formulā (0.8) nenoteikto integrāli $\int p(x)dx$ var azvietot ar noteikto integrāli $\int_{x_0}^{x} p(x)dx$ ar mainīgu augšējo robežu (aditīvā konstante noīsinās). Arī otru integrāli formulā 0.8 var aizvietot ar noteikto integrāli robežās no x_0 līdz x. Citiem vārdiem, DV (0.1) vispārīgo atrisinājumu (0.8) vienmēr var pierakstīt tā saucamajā *Košī formā*

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \left[\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx} q(x)dx + y_0 \right], \tag{0.20}$$

kur x_0–fiksēts intervala I punkts, bet y_0–patvaļīga konstante. Ja šajā formulā fiksē arī y_0, tad iegūstam DV (0.1) atrisinājumu, kas apmierina doto sākuma nosacījumu $y(x_0) = y_0$, un tas, acīmredzot, ir vienīgais DV (0.1) atrisinājums, kas apmierina šo nosacījumu. ▼

Piezīme 6.6. Ģeometriski teorēmas 6.1. apgalvojums nozīmē, ka caur katru vertikālās bezgalīgās joslas $x \in I$, un $y \in (-\infty, +\infty)$ punktu (x_0, y_0) noteikti kāda DV (0.1) integrāllīkne, t.i. DV (0.1) integrāllīknes pilnībā aizpilda šo joslu. Visas integrāllīknes ir gludas (bez lauzumiem) un tās nekrustojas (jo caur katru punktu iet tikai viena integrāllīkne).

Piezīme 6.7. Košī uzdevuma (0.19) atrisinājuma lokālā eksistence un unitāte, t.i. punkta x_0 mazā apkārtnē, seko jau no attiecīgās teorēmas vispārīgam pirmās kārtas DV ar atklāti izteiktu atvasinājumu.

Piezīme 6.8. Atzīmēsim, ka nelineāriem DV atšķirībā no lineāriem DV Košī problemai ne vienmēr eksistē atrisinājums, ne vienmēr tas ir viens vienīgs, grūti ir novērtēt atrisinājuma eksistences intervala lielumu.

0.1.5 Lineāra nehomogēna DV vispārīgā atrisinājuma struktūra

Aplūkojot lineārā nehomogēnā DV (0.1) vispārīgā atrisinājuma izteiksmi (0.8) redzam, ka to veido divi saskaitāmie. Viens no tiem ir atbilstošā homogēnā DV (0.2) vispārīgais atrisinājums (0.3), bet otrs ir nehomogēnā DV (0.1) partikulārais atrisinājums, kas atbilst vērtībai $C = 0$ šajā izteiksmē.

Teorēma 6.2. Lineāra nehomogēna DV (0.1) vispārīgais atrisinājums y ir vienāds ar atbilstošā homogēnā DV (0.2) vispārīgā atrisinājuma Y un nehomogēnā DV (0.1) `jebkura` partikulārā atrisinājuma $y_1$summu

$$y = Y + y_1. \tag{0.21}$$

▲ Ievietojot izteiksmi (0.21) DV (0.1) redzam, ka tā ir DV (0.1) atrisinājums

$$(Y + y_1)' + p(x)(Y + y_1) = \big(Y' + p(x)Y\big) + \big(y_1' + p(x)y_1\big) = 0 + q(x) = 0.$$

Atliek parādīt, ka izteiksme (0.21) satur visus DV (0.1) atrisinājmus, t.i., ka jebkuram sākuma nosacījumam $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ atbilstošais DV (0.1) atrisinajums arī ieiet formulā (0.21).

Pierakstot homogēnā DV (0.2) vispārīgo atrisinājumu Y izteiksmē (0.21) formā

$$Y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx},$$

un mēģinot apmierināt sākuma nosacījumu $y(x_0) = y_0$, iegūstam vienādību

$$y(x_0) = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} p(x)dx} + y_1(x_0) = C + y_1(x_0) = y_0$$

jeb $C = y_0 - y_1(x_0)$. Līdz ar to meklējamais, sākuma nosacījumam $y(x_0) = y_0$ atbilstošais atrisinājums izteiksmē (0.21) ir

$$y(x) = [y_0 - y_1(x_0)]\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} + y_1(x). \quad \blacktriangledown$$

Piezīme 6.9. Nehomogēnā DV (0.1) vispārīgā atrisinājuma izteiksme satur divas kvadratūras. No tiko pierādītā seko, ja ir zināms minētā vienādojuma kaut kāds partikulārais atrisinājums, tad tā vispārīgais atrisinājums ir iegūstams tikai ar vienu kvadratūru.

Piezīme 6.10. Ja ir zināmi divi nehomogēnā DV (0.1) partikulārie atrisinājumi $y_1$un y_2, tad jebkurš cits tā atrisinājums izrādās ir šo atrisinājumu kaut kāda lineāra kombinācija un līdz ar to tā vispārīgais atrisinājums ir atrodams jau bez kvadratūrām. Tā ir raksturīga lineāro DV īpašība un tā nav spēkā nelineāriem DV.

▲ Tiešām, ja $y_1$un y_2 ir DV (0.1) atrisinājumi, t.i. ja $y_1' + p(x)y_1 = q(x)$ un $y_2' + p(x)y_2 = q(x)$, tad atņemot no pirmās vienādības otro, iegūsim, ka $(y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = 0$. Tātad starpība $y_1 - y_2$ ir atbilstošā homogēnā DV (0.2) partikulārais atrisinājums, bet izteiksme $C(y_1 - y_2)$, kur C-patvļīga konstante, vispārīgais atrisinājums (skat. piezīmi 6.2.). Līdz ar to nehomogēnā DV (0.1) vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C(y_1 - y_2) + y_1, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangledown \tag{0.22}$$

Piemērs 6.5. Atrisināt DV $y' + \frac{1}{1-x}y = \frac{1}{1-x}$.

▲ Nav grūti saskatīt, ka dotā DV partikulārie atrisinājumi ir $y_1 \equiv 1$ un $y_2 = x$. Līdz ar to tā vispārīgais atrisinājums ir $y = C(1-x) + 1$. ▼

Piezīme 6.11. Daži DV, kas nav lineāri attiecībā pret y un $\frac{dy}{dx}$, ir lineāri attiecībā pret x un $\frac{dx}{dy}$. Tādus DV risina kā lineārus DV, uzskatot x par nezināmo funkciju un y par tās argumentu.

Piemērs 6.6. Atrisināt DV $(2e^y - x)y' = 1$.

▲ Attiecībā pret nezināmo funkciju $y(x)$ dotais vienādojums ir nelineārs DV. Pārrakstot to formā $\frac{dx}{dy} + x = 2e^y$, iegūstam lineāru nehomogēnu DV attiecībā pret funkcijas $y(x)$ inverso funkciju $x(y)$. Acīmredzot, viens no iegūtā DV partikulāriem atrisinājumiem ir $x_1 = e^y$. Savukārt atbilstošā homogēnā DV $\frac{dX}{dy} + X = 0$ vispārīgais atrisinājums ir $X = Ce^{-\int dy} = Ce^{-y}$. Līdz ar to, saskaņā ar teorēmu 6.2, iegūstam $x = X + x_1 = Ce^{-y} + e^y$, t.i. dotā DV vispārīgo integrāli. ▼

Par lineāriem DV ir pārveidojami arī daži citi nelineārie DV, piemēram, Bernulli DV.

0.1.6 Bernulli DV

Par *Bernulli DV* sauc vienādojumu

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{0.23}$$

kur $p(x)$ un $q(x)$ ir nepārtrauktas argumenta $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ dotās funkcijas, bet n – jebkurš reāls skaitlis, izņemot 0 un 1 (ja $n = 1$, tad (0.23) ir lineārs homogēns DV, bet ja $n = 0$, – lineārs nehomogēns DV).

Ja $n > 0$, tad viens no DV (0.23) atrisinājumiem ir triviālais atrisinājums $y(x) \equiv 0$. Ja $n > 1$, tas ir partikulārais atrisinājums, ja $0 < n < 1$, tas ir singulārais atrisinājums.

Pieņemot, ka $y(x) \neq 0$, DV (0.23) vienmēr var pārveidot par lineāru DV, izdalot tā abas puses ar y^n:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{0.24}$$

un pārejot uz jaunu nezināmo funkciju

$$z = y^{1-n}. \tag{0.25}$$

Tiešām, tā kā $z' = (1-n)y^{-n}y'$, tad no (0.24) iegūstam, ka

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x),$$

un pēc reizināšanas ar $1-n$, ka

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x). \tag{0.26}$$

Iegūtais DV (0.26) attiecībā pret jauno nezināmo funkciju z ir lineārs DV un tā vispārīgais atrisinājums saskaņā ar formulu (0.8) ir

$$z = y^{1-n} = e^{-(1-n)\int p(x)dx}\left[(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + C\right]. \tag{0.27}$$

Piezīme 6.12. Lai atrisinātu Bernulli DV nav nepieciešams pāriet uz lineāru DV. Var uzreiz lietot Lagranža konstantes variācijas metodi vai tai analoģisko Bernulli metodi.

Piemērs 6.7. Atrisināt DV $y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$.

▲ Dotais DV ir Bernulli DV ar $n = 1$. Atrisināsim šo DV ar Lagranža konstantes variāciju metodi. Vispirms risinām dotam DV atbilstošo lineāro homogēno DV $Y' - \frac{Y}{x} = 0$. Tas ir DV ar atdalāmiem mainīgiem un tā vispārīgais atrisinājums ir $Y = Cx$. Tāpēc dotā DV atrisinājumu meklējam formā $y = C(x)x$. Ievietojot šo izteiksmi dotajā DV, iegūstam vienādību $C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = \frac{x}{C(x)x}$ jeb $C(x)C'(x) = \frac{1}{x}$. Attiecībā pret funkciju $C(x)$ pēdējā vienādība ir DV ar atdalāmiem mainīgiem. Atdalot mainīgos, iegūstam identitāti $C(x)dC(x) = \frac{dx}{x}$, kuru integrējot atrodam, ka $C^2(x) = \ln x^2 + C$, kur C – patvaļīga integrēšanas konstante. No šejienes un no vienādības $y = C(x)x$ seko, ka $y^2 = (\ln x^2 + C)x^2$. ▼

0.1.7 Uzdevumi pastāvīgai risināšanai