0.1 Augstākās kārtas DV

8.temats

Augstākās kārtas DV vispārīgais veids. Normālforma. Košī uzdevums. Košī uzdevuma atrisinājuma eksistences un unitātes pietiekamie nosacījumi. Jēdziens par otrās kārtas DV robežproblēmu. Augstākās kārtas DV, kas integrējas kvadratūrās. Piemēri. Augstākās kārtas DV, kuriem var pazemināt vienādojuma kārtu. Piemēri.

0.1.1 Pamatjēdzieni un definīcijas

Augstākās kārtas DV vispārīgais izskats ir

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0, \tag{0.1}$$

kur $n \geq 2$, F ir dotā nepārtrauktā savu argumentu funkcija, pie kam DV (0.1) katrā ziņā ieiet $y^{(n)}$.

Definīcija 8.1 Par DV (0.1) atrisinājumu dotā intervalā $I \subseteq \mathbb{R}$ sauc jebkuru funkciju $y = \varphi(x)$, kas ir definēta un n reizes nepārtraukti diferencējama intervalā I un kas šajā intervalā pārvērš DV (0.1) par identitāti

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \qquad x \in I.$$

DV (0.1) atrisinājums var būt dots arī aizklātā veidā

$$\Phi(x,y) = 0$$

vai parametriskā formā

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau), \qquad \tau \in I_\tau \subseteq \mathbb{R}.$$

Ja kaut kādā $n+2$ dimensiju telpas punktā $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n)})$:

$$F(x_0,y_0,y_0',y_0'',\dots,y_0^{(n)}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0,y_0,y_0',y_0'',\dots,y_0^{(n-1)}) \neq 0,$$

tad šī punkta apkārtnē, saskaņā ar aizklātās funkcijas eksistences un unitātes nosa- cījumiem, DV (0.1) var atrisināt attiecībā pret atvasinājumu $y^{(n)}$un pierakstīt formā

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}). \tag{0.2}$$

Definīcija 8.2 DV (0.2) sauc par n-tās kārtas DV *normālformā* vai par DV, atrisinātu pret augstākās kārtas atvasinājumu.

Aplūkosim tuvāk DV (0.2). Skaidrs, ka DV (0.2), vispārīgi runājot, eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumi. Rodas jautājums, kādi papildus nosacījumi ir vajadzīgi, lai iegūtu kaut kādu vienu konkrētu atrisinājumu? Pirmās kārtas DV $y' = f(x,y)$, kā mēs redzējām, pietiek uzdot vērtību $y_0 = y(x_0)$ punktā x_0, t.i. punktu (x_0,y_0), caur kuru jāiet DV integrāllīknei. Augstākās kārtas DV tas ir par maz. Piemēram, DV $y'' = 0$ atrisinājumi ir funkcijas $y = C_1x + C_2$, kur C_1un C_2 – patvaļīgas konstantes (divparametru taišņu saime plaknē Oxy). Lai izdalītu vienu konkrētu atrisi- nājumu (taisni), ir par maz uzdot punktu (x_0, y_0), caur kuru jāiet taisnei. Jāuzdod vēl tās virziena koeficients y'_0 vai vēl kāds cits punkts (x_1, y_1), caur kuru arī iet šī taisne.

Izrādās, ka n-tās kārtas DV vispārīgais atrisinājums (t.i. visu dotā DV atrisinā- jumu saime) parasti ir funkcija, kas ir atkarīga no n patvaļīgām konstantēm (parametriem). Tāpēc, lai izdalītu vienu konkrētu atrisinājumu no dotā DV visiem atrisinā- jumiem ir jāuzdod n papildus nosacījumi. Šos nosacījumus var uzdot dažādā veidā.

Piemērs 1 DV $y'' = -1$ visi atrisinājumi ir ietverti formulā

$$y = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Lai noteiktu C_1un C_2(izdalītu vienu vienīgu atrisinājumu) var uzdot punktā x_0vērtības y_0 un y'_0. Šādu uzdevumu sauc par *Košī uzdevumu,* bet nosacījumus $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ – par *Košī jeb sākuma nosacījumiem.*

Tā kā $y' = -x + C_1$, tad $C_1 = y'_0 + x_0$, $C_2 = y_0 + \frac{x_0^2}{2} - (y'_0 + x_0)x_0$ un atbilstošais atrisinājums ir

$$y = -\frac{x^2 - x_0^2}{2} + (y'_0 + x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Var arī savādāk, uzdot atrisinājuma vērtības y_0 un y_1 intervala (x_0, x_1) galos, kura iekšienē mēs meklējam atrisinājumu. Tad

$$y_0 = -\frac{x_0^2}{2} + C_1 x_0 + C_2, \qquad y_1 = -\frac{x_1^2}{2} + C_1 x_1 + C_2,$$

no kurienes seko, ka

$$C_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_1 + x_0}{2}, \qquad C_2 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} - \frac{x_0 x_1}{2}.$$

Tādējādi šoreiz atrisinājums ir

$$y = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_1 + x_0}{2}\right)x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} - \frac{x_0 x_1}{2}.$$

Šādu uzdevumu sauc par *robežproblēmu,* bet nosacījumus $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ par *robežnosacījumiem.*

Atsevišķi ir jāpēta jautājums par Košī uzdevuma, robežproblēmas un citu problēmu for- mulējumiem, to atrisinājumu eksistenci un unitāti augstākās kārtas DV.

0.1.2 Košī uzdevums

Aplūkosim tuvāk Košī uzdevumu DV (0.2), t.i. jautājumu par DV (0.2) tāda atrisinājuma atrašanu, kurš dotajā punktā $x_0 \in I$ apmierina dotos *Košī jeb sākuma nosacījumus*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{0.3}$$

kur $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in (-\infty, +\infty)$ – dotie skaitļi.

Teorēma 8.1 (*Košī uzdevuma* (0.2) + (0.3) *atrisinājuma eksistences un unitātes pietiekamie nosacījumi*)

1) Ja DV (0.2) labā puse ir nepārtraukta savu argumentu $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$funkcija kaut kādā dotā punkta $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$apkārtnē D, tad vienmēr atradīsies tāds intervals $x_0 - h < x < x_0 + h$, kurā eksistē vismaz viens DV (0.2) atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumus (0.3),

2) Ja bez tam DV (0.2) labai pusei apkārtnē D eksistē ierobežoti parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}},$$

tad šāds atrisinājums ir viens vienīgs.

Piemērs 2. DV $y'' = e^{-x^2} y + \sin y'$ labā puse ir nepārtraukta mainīgo x, y, y' funkcija un tai eksistē visur ierobežoti parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'.$$

Tāpēc, kādi lai arī nebūtu sākuma nosacījumi $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, dotam DV eksistē viens vienīgs atrisinājums, definēts visām x vērtībām un kas apmierina šos nosacījumus.

Piezīme 1. No teorēmas 8.1 seko, ja f ir polinoms attiecībā pret saviem argumentiem y,y',...,$y^{(n-1)}$, tad sākuma datus Košī nosacījumos (0.3), kuriem Košī uzdevumam eksistē viens vienīgs atrisinājums, var izvēlēties patvaļīgi – vajag tikai, lai neatkarīgā mainīgā x sākuma vērtība x_0 piederētu polinoma koeficientu, kas šajā gadījumā ir mainīgā x funkcijas, nepārtrauktības kopīgam intervalam.

Piezīme 2. Nosacījumu 2) teorēmā 8.1, kas garantē Košī uzdevuma atrisinājuma unitāti, var pavājināt, prasot lai DV (0.2) labās puses funkcija f apmierina attiecībā pret argumentiem $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *Lipšica nosacījumu:* eksistē tāda $const = L > 0$, ka jebkuriem diviem punktiem $(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$ un $(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)})$ apkārtnē D ir spēkā nevienādība

$$\left| f(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)}) \right| \leq$$

$$\leq L \left(|y_1 - y_2| + |y'_1 - y'_2| + \ldots + \left| y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)} \right| \right).$$

Šeit netiek prasīta funkcijas f parciālo atvasinājumu eksistence. Diemžēl, praksē var gadīties, ka šo nosacījumu ir grūti pārbaudīt.

Definīcija 8.3 Par DV (0.2) singulāro atrisinājumu sauc atrisinājumu, kuram katrā tā punktā Košī uzdevumam nav atrisinājuma unitātes.

Ja DV (0.2) labā puse ir nepārtraukta un tai eksistē parciālie atvasinājumi pēc $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, tad singulārie atrisinājumi var būt tikai tie atrisinājumi, kuriem ir spēkā vismaz viena no vienādībām

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pm\infty, \ \frac{\partial f}{\partial y'} = \pm\infty, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = \pm\infty.$$

DV (0.1) Košī uzdevums tiek stādīts tāpat kā DV (0.2), t.i. tiek meklēts DV (0.1) atrisinājums, kurš dotajā punktā $x_0 \in I$ apmierina dotos sākuma nosacījumus (0.3), kur $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in (-\infty, +\infty)$– dotie skaitļi. Pie kam Košī uzdevuma unitāte šeit tiek saprasta analoģiski kā pirmās kārtas DV $F(x,y,y') = 0$.

Teorēma 8.2 (*Košī uzdevuma* (0.1) + (0.3) *atrisinājuma eksistences un unitātes pietiekamie nosacījumi*)

Pieņemsim, ka $p = y_0^{(n)}$ ir algebriska vienādojuma

$$F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, p) = 0$$

viena no saknēm. Ja

1)DV (0.1) kreisā puse F ir nepārtraukta savu argumentu $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ funkcija punkta $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}$ apkārtnē D,

2) apkārtnē D eksistē ierobežoti parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial F}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}},$$

3) eksistē parciālais atvasinājums

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) \neq 0,$$

tad vienmēr atradīsies tāds intervals $x_0 - h < x < x_0 + h$, kurā eksistē viens vienīgs DV (0.1) atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumus (0.3) un kuram

$$y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}.$$

Piezīme 3. Arī šeit, analoģiski kā teorēmā 8.1, nosacījumu 2) var pavājināt, prasot lai funkcija F apmierina attiecībā pret argumentiem $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ Lipšica nosacījumu.

Piezīme 4. DV (0.2) nosacījums 3) nebija vajadzīgs, jo tas izpildās automātiski: $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 1$.

0.1.3 Daži augstākās kārtas DV, kas integrējas kvadratūrās

Pārsvarā augstākās kārtas DV neintegrējas kvadratūras. Aplūkosim trīs augstākās kārtas DV pamattipus (ir arī citi), kurus parasti izdodas integrēt kvadratūrās. Tie ir nepilnie DV

$$F(x, y^{(n)}) = 0, \quad F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \tag{0.4}$$

Visi šie vienādojumi ir formā $F(u,v) = 0$ un uzdod (u,v) plaknē kaut kādu līniju. DV (0.4) viegli integrējas, ja minēto līniju var atklāti uzdot parametriskā veidā:

$$u = \varphi(\tau), \quad v = \psi(\tau), \quad \tau \in I_\tau.$$

Tas vienmēr ir izdarāms, ja šie vienādojumi ir atrisināmi pret u vai v:

$$u = f(v) \quad \Rightarrow \quad v = \tau, u = f(\tau),$$

$$v = f(u) \quad \Rightarrow \quad u = \tau, v = f(\tau).$$

0.1.3.1 DV $F(x,y^{(n)})=0$

1) Speciālā gadījumā, kad aplūkojamais DV ir dots normālformā

$$y^{(n)} = f(x), \tag{0.5}$$

parametrizācija nav vajadzīga, jo tā vispārīgo atrisinājumu atrod to n reizes pakāpeniski integrējot.

Tā kā $y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x)$, tad

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Šo izteiksmi sauc par DV (0.5) *pirmo starpintegrāli.*

Analoģiski tiek iegūts dotā DV (0.5) *otrais* starpintegrālis

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

trešais starpintegrālis, u.t.t. un beidzot DV vispārīgais atrisinājums

$$y = \underbrace{\int \ldots \int f(x)dx \ldots dx}_{n\,reizes} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n =$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int f(x)dx \ldots dx}_{n\,reizes} + P_{n-1}(x),$$

kur $P_{n-1}(x)$ – $n-1$ pakāpes polinoms, kura koeficienti ir n patvaļīgas konstantes.

2) Vispārīgā gadījumā, kad DV

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{0.6}$$

nav atrisināts attiecībā pret $y^{(n)}$, to mēģina integrēt parametriskā veidā.

▲ Vispirms tiek meklētas funkcijas

$$x = \varphi(\tau), \quad y^{(n)} = \psi(\tau), \quad \tau \in I_\tau \tag{0.7}$$

tādas, ka

$$F(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \equiv 0, \quad \tau \in I_\tau.$$

Ja tas izdodas, tad DV (0.6) vispārīgais atrisinājums arī tiek iegūts parametriskā formā. Viens no vispārīgā atrisinājuma parametriskiem vienādojumiem tad ir $x = \varphi(\tau)$ un ir jāatrod y kā funkcija no τ un n patvaļīgām konstantēm C_i, $i = \overline{1,n}$.

Tā kā $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(\tau)d\varphi(\tau)$, tad

$$y^{(n-1)} = \int \psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau + C_1.$$

Analoģiski

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int \psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau + C_1 \right) \varphi'(\tau)d\tau + C_2 =$$
$$= \int \left(\int \psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau \right) \varphi'(\tau)d\tau + C_1\varphi(\tau) + C_2,$$

u.t.t., līdz beidzot

$$y = \underbrace{\int \ldots \left(\int \psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau \right) \ldots \varphi'(\tau)d\tau}_{n\,reizes} +$$
$$+C_1 \frac{\varphi^{n-1}(\tau)}{(n-1)!} + C_2 \frac{\varphi^{n-2}(\tau)}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}\varphi(\tau) + C_n. \tag{0.8}$$

Izteiksme (0.8) kopā ar vienādojumu $x = \varphi(\tau)$ dod DV (0.6) vispārīgo atrisinājumu parametriskā formā.

3) Izklāstītā metode ir sevišķi ērta, ja DV (0.6) ir atrisināms attiecībā pret x:

$$x = f(y^{(n)}). \tag{0.9}$$

Tad formulās (0.7) $\varphi(\tau) \equiv f(\tau)$, $\psi(\tau) \equiv \tau$ un DV (0.9) atrisinājums parametriskā formā ir

$$\begin{cases} x = f(\tau), \\ y = \underbrace{\int \ldots \left(\int \tau f'(\tau)d\tau \right) \ldots f'(\tau)d\tau}_{n\,reizes} + C_1 \frac{f^{n-1}(\tau)}{(n-1)!} + C_2 \frac{f^{n-2}(\tau)}{(n-2)!} + \ldots + f(\tau) + C_n. \end{cases} \quad \blacktriangledown$$

Piemērs 3. Atrisināt DV $x = \ln y''$.

▲ Doto DV aizstājam ar vienādojumiem $x = \ln\tau$ un $y'' = \tau$. No otrā vienādojuma seko, ka $dy' = \tau dx = \tau d\ln\tau = d\tau$ un $y' = \tau + C_1$. No šejienes savukārt seko, ka $dy = y'dx = (\tau + C_1)d\ln\tau = \left(1 + \frac{C_1}{\tau}\right)d\tau$ un $y = \tau + C_1\ln\tau + C_2$, kas kopā ar $x = \ln\tau$ dod dotā DV vispārīgo atrisinājumu parametriskā formā. Parametru τ no atrisinājuma formulām šeit var viegli izslēgt . Tiešām no $x = \ln\tau$ seko, ka $\tau = e^x$, bet tad $y = e^x + C_1x + C_2$, kas jau ir dotā DV vispārīgais atrisinājums, kurā y ir atklāti izteikts ar x. ▼

Piezīme 5. Protams, šo vienādojumu var atrisināt arī tā: $x = \ln y'' \Rightarrow y'' = e^x \Rightarrow y = e^x + C_1x + C_2$.

0.1.3.2 DV $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

▲ Ar substitūciju $z = y^{(n-1)}$ dotais DV reducējas uz pirmās kārtas DV

$$F(z, z') = 0. \tag{0.10}$$

DV (0.10) integrējas kvadratūrās, ja to var aizstāt ar parametriskiem vienādojumiem

$$z = \varphi(\tau), \quad z' = \psi(\tau), \quad \tau \in I_\tau. \tag{0.11}$$

Tā kā $dx = \frac{dz}{z'} = \frac{d\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$, tad no (0.11) iegūsim dotā DV pirmo starpintegrāli parametriskā formā

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau + C_1 \\ y^{(n-1)} = z = \varphi(\tau). \end{cases} \tag{0.12}$$

No (0.12), analoģiski kā no vienādojumiem (0.7), atrod dotā DV vispārīgo atrisinājumu parametriskā formā. ▼

Piemērs 4. Atrisināt DV $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$.

▲ Apzīmejot $y'' = z$, iegūstam pirmās kārtas DV ar atdalāmiem mainīgiem $z' = \sqrt{1+z^2}$. Risināsim šo DV ar parametrizācijas metodi, ņemot $z = \varphi(\tau) = sh\tau$, $z' = \psi(\tau) = ch\tau$, jo $ch\tau \equiv \sqrt{1+sh^2\tau}$. Tā kā $dx = \frac{dz}{z'} = \frac{dsh\tau}{ch\tau} = \frac{ch\tau}{ch\tau} d\tau = d\tau$, tad vienādojumi (0.12) būs izskatā

$$\begin{cases} x = \int d\tau = \tau + C_1, \\ y'' = z = sh\tau. \end{cases}$$

No šiem vienādojumiem var viegli izslēgt parametru τ, iegūstot DV $y'' = sh(x - C_1)$, kuru pakāpeniski integrējot atrodam vispirms $y' = ch(x - C_1) + C_2$ un pēc tam – dotā DV vispārīgo atrisinājumu

$$y = sh(x - C_1) + C_2 x + C_3. \quad ▼$$

0.1.3.3 DV $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

▲ Ar substitūciju $z = y^{(n-2)}$ dotais DV reducējas uz otrās kārtas DV

$$F(z, z'') = 0. \tag{0.13}$$

DV (0.13) integrējas kvadratūrās, ja to var aizstāt ar parametriskiem vienādojumiem

$$z = \varphi(\tau), \quad z'' = \psi(\tau), \quad \tau \in I_\tau. \tag{0.14}$$

Lai tālāk varētu, analoģiski kā iepriekš, pakāpeniski integrēt pirmo no vienādībām (0.14), ir jāatrod $dx = \frac{dz}{z'}$ kā funkcija no parametra τun līdz ar to – z' kā funkcija no τ.

Tā kā $z'' = \frac{dz'}{dx}$ un $z' = \frac{dz}{dx}$, tad izslēdzot no šīm divām vienādībām dx, iegūsim

$$z' dz' = z'' dz.$$

No šejienes seko, ka

$$d(z')^2 = 2z' dz' = 2z'' dz = 2\psi(\tau) d\varphi(\tau) = 2\psi(\tau)\varphi'(\tau) d\tau,$$

un

$$z' = \pm\sqrt{2\int \psi(\tau)\varphi'(\tau) d\tau + C_1} = g(\tau, C_1). \tag{0.15}$$

Tādējādi $dx = \frac{d\varphi(\tau)}{g(\tau,C_1)}$ un no (0.14) iegūsim dotā DV otro starpintegrāli parametriskā formā

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(\tau)}{g(\tau,C_1)} d\tau + C_2, \\ y^{(n-2)} = z = \varphi(\tau). \end{cases} \tag{0.16}$$

No (0.16), analoģiski kā no vienādojumiem (0.7), atrod dotā DV vispārīgo atrisinājumu parametriskā formā. ▼

Piezīme 6. Ja DV (0.13) ir formā $z'' = f(z)$, tad atbilstošo izteiksmi (0.15) var iegūt arī ar šādu paņēmienu. Dotā DV abas puses reizinot ar $2z'$, iegūst $2z'z'' = (z'^2)' = 2z'f(z)$, no kurienes

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}.$$

Šis vienādojums ir ar atdalāmiem mainīgiem un tā vispārīgo integrāli var atklāti uzrakstīt kvadratūrās:

$$\pm\int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = x + C_2.$$

Piemērs 5. Atrisināt DV $y^3y'' = 1$.

▲ Atrisinot doto DV attiecībā pret y'' un reizinot pēc tam abas tā puses ar $2y'$, iegūstam $2y'y'' = (y'^2)' = \frac{2y'}{y^3}$ (šeit, lai nepazaudētu atrisinājumu vai neiegūtu jaunus atrisinājumus, jāpārbauda, ka $y = 0$ un $y' = const$ nav dotā DV atrisinājumi). Integrējot iegūto vienādību, atrodam dotā DV pirmo starpintegrāli $y' = \pm\sqrt{2\int \frac{dy}{y^3} + C_1} = \pm\sqrt{-\frac{1}{y^2} + C_1}$. Tas ir pirmās kārtas DV ar atdalāmiem mainīgiem. Atdalot mainīgos, iegūstam $\frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2-1}} = \pm dx$, un līdz ar to dotā DVvispārīgais integrālis ir

$$\sqrt{C_1y^2 - 1} = \pm C_1x + C_2. \quad ▼$$

0.1.4 Daži augstākās kārtas DV, kuriem var pazemināt tā kārtu

Dažos gadījumos dotam augstākās kārtas DV (0.1) var pazemināt vienādojuma kārtu, t.i. reducēt šo vienādojumu, piemēram, ar mainīgā substitūcuju uz vienādojumu ar zemāku kārtu.

Aplūkosim dažus DV (0.1) veidus, kuriem viegli var pazemināt kārtu.

0.1.4.1 DV, kas atklāti nesatur nezināmo funkciju

Aplūkosim DV

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{0.17}$$

kas atklāti nesatur nezināmo funkciju y un varbūt arī pirmos tās atvasinājumus $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$, $1 \le k \le n-1$. Ar substitūciju

$$z = y^{(k)}. \tag{0.18}$$

DV (0.17) reducējas uz $(n-k)$-tās kārtas DV

$$F(x,z,z',\dots,z^{(n-k)})=0 \tag{0.19}$$

attiecībā pret jauno nezināmo funkciju z.

Ja DV (0.19) var atrast tā vispārīgo integrāli

$$\Phi_{n-k}(x,z,C_1,C_2,\dots,C_{n-k})=0,$$

tad, atgriežoties pie nezināmās funkcijas y, iegūsim DV (0.17) $(n-k)$-to starpintegrāli

$$\Phi_{n-k}(x,y^{(k)},C_1,C_2,\dots,C_{n-k})=0,$$

kas ir k -tās kārtas DV attiecībā pret y.

Piemērs 6. Atrisināt DV $y'''=2(y''-1)ctg\,x$.

▲ Dotais trešās kārtas DV nesatur nezināmo funkciju y un tās pirmo atvasinājumu y'. Zemākais funkcijas y atvasinājums, kas ieiet dotajā DV ir y''. Tāpēc lietojam substitūciju $z=y''$. Iegūstam pirmās kārtas DV $z'=2(z-1)ctg\,x$ attiecībā pret jauno nezināmo funkciju z. Tas ir DV ar atdalāmiem mainīgiem un tā vispārīgais atrisinājums ir $z=C_1\sin^2x+1$. Atgriežoties pie nezināmās funkcijas y, iegūstam otrās kārtas DV $y''=C_1\sin^2x+1$ – dotā DV pirmo starpintegrāli. Iegūtais DV ir formā (0.5) un tā vispārīgo atrisinājumu atrodam šo DV divas reizes pakāpeniski integrējot $y'=\int(C_1\sin^2x+1)dx+C_2=C_1(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4})+x+C_2$ un

$$y=C_1(\frac{x^2}{4}+\frac{\cos 2x}{8})+\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3. \quad ▼$$

0.1.4.2 DV, kas atklāti nesatur neatkarīgo mainīgo

Aplūkosim DV

$$F(y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0, \tag{0.20}$$

kas atklāti nesatur neatkarīgo mainīgo x.

DV (0.20) kārtu var pazemināt par vienu ar substitūciju

$$y'=z(y), \tag{0.21}$$

kur jaunā nezināmā funkcija z ir funkcija tikai no y.

▲ Tiešām,

$$\begin{aligned} y''&=\tfrac{dy'}{dx}=\tfrac{dz(y)}{dx}=\tfrac{dz(y)}{dy}\tfrac{dy}{dx}=z\tfrac{dz}{dy},\\ y'''&=\tfrac{dy''}{dx}=\tfrac{d\left(z\frac{dz}{dy}\right)}{dy}\tfrac{dy}{dx}=z\left[\left(\tfrac{dz}{dy}\right)^2+z\tfrac{d^2z}{dy^2}\right],\\ &\dots\\ y^{(n)}&=P(z,\tfrac{dz}{dy},\tfrac{d^2z}{dy^2},\dots,\tfrac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}) \end{aligned} \tag{0.22}$$

un, ievietojot izteiksmes (0.22) DV (0.20), iegūsim $n-1$ kārtas DV

$$F(y,z,z\frac{dz}{dy},\dots,P(z,\frac{dz}{dy},\frac{d^2z}{dy^2},\dots,\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}))=0 \tag{0.23}$$

attiecībā pret nezināmo funkciju $z(y)$. ▼

Ja var atrast DV (0.23) vispārīgo integrāli

$$\Phi(y,z,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})=0,$$

tad izteiksme

$$\Phi(y,y',C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})=0,$$

kas ir pirmās kārtas DV attiecībā pret y, būs dotā DV (0.20) $(n-1)$- ais starpintegrālis.

Piemērs 7. Atrisināt DV $2yy''=y'^2$.

▲ Dotais otrās kārtas DV atklāti nesatur neatkarīgo mainīgo x. Tāpēc, lai pazeminātu tā kārtu, lietojam substitūciju $y'=z(y)$. Tad $y''=z\frac{dz}{dy}$ un dotā DV vietā iegūstam pirmās kārtas DV $2yz\frac{dz}{dy}=z^2$. Viens no tā atrisinājumiem ir $z=y'=0$ un tātad dotam DV eksistē partikulāro atrisinājumu saime $y=C$. Ja $z\neq 0$, tad $2y\frac{dz}{dy}=z$, no kurienes seko, ka $z^2=C_1y$ un $y'^2=C_1y$. Iegūto pirmās kārtas DV integrēsim ar parametrizācijas metodi, aizstājot to ar vienādojumiem $y'=\tau$ un $y=\frac{\tau^2}{C_1}$. Ir jāatrod x kā funkcija no τ. Tā kā $\frac{dy}{dx}=y'=\tau$, tad $dx=\frac{dy}{\tau}=\frac{2\tau d\tau}{C_1\tau}=\frac{2}{C_1}d\tau$, no kurienes seko, ka $x=\frac{2}{C_1}\tau+C_2$. Iegūtās x un y izteiksmes dod dotā DV vispārīgo atrisinājumu parametriskā formā. Parametru τ no atrisinājuma formulām šeit var viegli izslēgt, iegūstot tādā veidā dotā DV vispārīgo atrisinājumu. Tiešām, tā kā $\tau=(x-C_2)\frac{C_1}{2}$, tad

$$y=\frac{1}{C_1}(x-C_2)^2\frac{C_1^2}{4}=\frac{C_1}{4}(x-C_2)^2. \quad ▼$$

Piezīme 7. DV $y'^2=C_1y$ var integrēt arī ar mainīgo atdalīšanas metodi un iegūt $y=\frac{1}{4}(C_2\pm\sqrt{C_1}x)^2$, kas tikai ar patvaļīgo konstanšu apzīmējumiem atšķiras no iepriekšējā.

0.1.4.3 DV, kas ir homogēni attiecībā pret nezināmo funkciju un tās atvasinājumiem

Aplūkosim DV

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0, \tag{0.24}$$

kur F ir homogēna funkcija ar pakāpes rādītāju α attiecībā pret mainīgiem y, y', y'',..., $y^{(n)}$, t.i.

$$F(x,ky,ky',ky'',\ldots,ky^{(n)})=k^{\alpha}F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}). \tag{0.25}$$

DV (0.24) kārtu var pazemināt par vienu ar substitūciju

$$z=\frac{y'}{y}. \tag{0.26}$$

▲ Tiešām,

$$\begin{gathered} y'=yz,\\ y''=y'z+yz'=y(z^2+z'),\\ y'''=yz(z^2+z')+y(2zz'+z'')=y(z^3+3zz'+z'')\\ \cdots\\ y^{(n)}=yP(z,z',...,z^{(n-1)}). \end{gathered} \tag{0.27}$$

Ievietojot izteiksmes (0.27) DV (0.24) un ņemot vērā, ka

$$F(x,y,yz,y(z^2+z'),...,yP(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)})) =$$

$$= y^{\alpha}F(x,1,z,z^2+z',...,P(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)})),$$

iegūsim $(n-1)$ kārtas DV

$$F(x,1,z,z^2+z',...,P(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)})) = 0 \tag{0.28}$$

attiecībā pret jauno nezināmo funkciju z.

Ja izdodas atrast DV (0.28) vispārīgo integrāli

$$\Phi(x,z,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}) = 0, \tag{0.29}$$

tad, ievietojot tajā z izteiksmi (0.26), iegūsim pirmās kārtas DV

$$\Phi(x,\frac{y'}{y},C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}) = 0$$

attiecībā pret nezināmo funkciju y. ▼

Speciālā gadījumā, ja vispārīgā integrāļa (0.29) vietā izdodas atrast DV (0.28) vispārīgo atrisinājumu

$$z = \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}),$$

tad ievietojot tajā z izteiksmi (0.26), iegūsim, ka

$$y = C_n \exp\int \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx. \tag{0.30}$$

Piemērs 8. Atrisināt DV $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

▲ Tā kā $x(ky)(ky'')+x(ky')^2-(ky)(ky') = k^2(xyy''+xy'^2-yy')$, tad dotais otrās kārtas DV ir homogēns DV attiecībā pret y,y' un y''. Tāpēc tā kārtu var pazemināt par vienu ar substitūciju $y'=yz$. Tad $y''=y(z^2+z')$ un dotā DV vietā iegūsim vienādību $xy^2(z^2+z')+xy^2z^2-y^2z = y^2(xz'+2xz^2-z)=0$, no kurienes attiecībā pret jauno nezināmo funkciju iegūst pirmās kāras DV $z'-\frac{1}{x}z=-2z^2$. Tas ir Bernulli DV un tā vispārīgais atrisinājums ir $z=\frac{x}{x^2+C_1}$ (pārbaudiet !). Tādējādi dotā DV vispārīgais atrisinājums, saskaņā ar formulu (0.30), ir

$$y = C_2\exp\int\frac{xdx}{x^2+C_1} = C_2e^{\frac{1}{2}\ln|x^2+C_1|} = C_2\sqrt{x^2+C_1}. \quad ▼$$

Piezīme 8. Ja dotais DV ir lineārs, tad tā kārtu ne vienmēr ir mērķtiecīgi pazemināt par vienu ar substitūciju (0.26). Piemēram, Beseļa DV $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, $\nu = const$ ir homogēns DV attiecībā pret y,y',y'' un ar substitūciju (0.26) tā kārtu var pazemināt par vienu. Rezultātā iegūst Rikati DV $x^2z'+x^2z^2+xz+(x^2-\nu^2)=0$, kas gan ir pirmās kārtas DV, bet nav vairs lineārs.

0.1.4.4 DV, kuru kreisā puse ir kaut kādas funkcijas atvasinājums

Aplūkosim DV

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0, \tag{0.31}$$

kura kreisā puse ir kaut kādas funkcijas $\Phi(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ atvasinājums (vai pilns diferenciālis), t.i.

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = \frac{d\Phi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})}{dx}. \tag{0.32}$$

No (0.32) seko, ka izteiksme

$$\Phi(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}) = C_1$$

ir DV (0.31) pirmais starpintegrālis, t.i. jau $n-1$ kārtas DV attiecībā pret nezināmo funkciju y.

Piemērs 9. Atrisināt trešās kārtas DV $yy''' + 3y'y'' = 0$.

▲ Pārrakstot doto DV formā $(yy''' + y'y'') + 2y'y'' = 0$ redzam, ka tā kreisā puse ir funkcijas $yy'' + (y')^2$ atvasinājums. Tātad otrās kārtas DV $yy'' + (y')^2 = C_1$ir dotā DV pirmais starpintegrālis. Tā kā $yy'' + (y')^2 = (yy')'$, tad no DV $(yy')' = C_1$ seko, ka $yy' = C_1x + C_2$, kas ir dotā DV otrais starpintegrālis. No šejienes, ievērojot, ka $yy' = \frac{1}{2}(y^2)'$, iegūstam dotā DV vispārīgo integrāli

$$\frac{y^2}{2} = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3. \quad ▼$$

Ja DV (0.31) kreisā puse nav kādas funkcijas atvasinājums (vai pilns diferenciālis), tad dažreiz izdodas atrast tādu funkciju $\mu = \mu(x,y,y',\dots,y^{(n)})$ (integrējošo reizinātāju), ka pēc pareizināšanas ar šo funkciju DV (0.31) kreisā puse kļūst par kaut kādas funkcijas atvasinājumu (vai pilnu diferenciāli). Jāievēro tikai, ka šajā gadījumā DV (0.31) var parādīties liekie atrisinājumi – vienādojuma $\mu(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ atrisinājumi.

Nobeigumā atzīmēsim, ka risinot Košī uzdevumu augstākās kārtas DV, patvaļīgās konstantes bieži ir izdevīgi noteikt pēc katras integrēšanas.

Piemērs 10. Atrisināt Košī uzdevumu

$$\begin{cases} y'' = 2y^3, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

▲Dotā DV labā puse ir polinoms attiecībā pret saviem argumentiem. Tātad dotam uzdevumam atrisinājums eksistē un ir viens vienīgs punkta $x_0 = 0$ pietiekami mazā apkārtnē. Dotais DV ir formā $y'' = f(y)$. Tāpēc, lai iegūtu tā pirmo starpintegrāli, reizinam tā abas puses ar $2y'$(skat. piezīmi 5). Tad $2y'y'' = (y'^2)' = 4y'y^3$ un $y' = \pm\sqrt{4\int y^3dy + C_1} = \pm\sqrt{y^4 + C_1}$. Lai atvieglotu tālāko integrēšanu, ņemam vērā dotos sākuma nosacījumus, no kurienes seko, ka $y'(0) = \pm\sqrt{y^4(0) + C_1} = \pm\sqrt{1 + C_1} = 1$. Iegūtā vienādība izpildās tikai tad, ja $y' = \sqrt{y^4} = y^2$. Esam ieguvuši pirmās kārtas DV ar atdalāmiem mainīgiem. Tā vispārīgais atrisinājums ir $y = \frac{-1}{x+C_2}$. No sākuma nosacījumiem seko, ka $C_2 = -1$. Tātad dotā Košī uzdevuma atrisinājums ir

$$y = \frac{1}{1-x}. \quad ▼$$

0.1.5 Uzdevumi patstāvīgam darbam