0.1 Lineārie homogēnie augstākās kārtas DV

9.tēma

Lineāra homogēna augstākās kārtas DV atrisinājumu patvaļīgas lineāras kombinācijas īpašība. Funkciju lineārās atkarības un neatkarības jēdzieni. Vronska determinants un tā īpašības. Lineāra homogēna augstākās kārtas DV vispārīgā atrisinājuma struktūra. Atrisinājumu fundamentālās sistēmas jēdziens.

0.1.1 Lineāra augstākās kārtas DV definīcija un dažas īpašības

Starp visiem augstākās kārtas DV sevišķa loma ir lineāriem DV:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = g(x) \tag{0.1}$$

to plašās pielietojamības un vispilnīgāk izstrādātās teorijas dēļ. Šeit $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – koeficienti, $g(x)$ – brīvais loceklis ir dotās neatkarīgā mainīgā x funkcijas, definētas kaut kādā galīgā vai bezgalīgā reālo skaitļu intervalā I.

Kā redzams, nezināmā funkcija $y(x)$ un tās atvasinjumi DV (0.1) ieiet lineāri, t.i. pirmajā pakāpē un pa vienam katrā loceklī DV kreisajā pusē. No šejienes arī nosaukums – lineārs DV.

Ja $g(x \equiv 0$, visiem $x \in I$, tad doto DV sauc par *homogēnu lineāru* DV (parādās homogenitāte attiecībā pret nezināmo funkciju $y(x)$ un tās atvasinājumiem). Ja kaut vienai $x \in I$ vērtībai $g(x) \neq 0$, tad doto DV sauc par *nehomogēnu lineāru* DV.

Dalot DV (0.1) abas puses ar $a_0(x)$, to var pierrakstīt *normālformā:*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = q(x). \tag{0.2}$$

.

Pieraksts (0.2) ļauj lineāriem DV pielietot Košī uzdevuma atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmu (sk. ....), kura tika formulēta patvaļīgam augstākās kārtas DV ar izskatu:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}).$$

Tā kā DV (0.2) funkcija

$$f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \equiv q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_n(x)y$$

un tās parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -p_{n-k}(x), k = \overline{0, n-1},$$

ir nepārtrauktas savu argumentu funkcijas, ja nepārtraukti ir DV (0.2) koeficienti $p_i(x), i = \overline{1,n}$ un tā brīvais loceklis $q(x)$, tad izmantojot teorēmu ? var pierādīt, ka ir pareiza

Teorēma 9.1 Ja DV (0.2) koeficienti $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ un brīvais loceklis $q(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas kaut kādā intervalā $I \subseteq \mathbb{R}$, tad pie jebkuriem sākuma nosacījumiem:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{0.3}$$

$$x_0 \in I, \quad y, y', ..., y^{(n-1)} \in (-\infty, +\infty)$$

DV (0.2) visā intervalā I eksistē viens vienīgs atrisinjums, kas apmierina dotos sākuma nosacījumus (0.3).

Atzīmēsim vēl dažas lineāro DV raksturīgas īpašības.

Lineāro DV linearitāte un arī homogenitāte saglabājas pēc jebkuras neatkarīgā mainīgā x transformācijas

$$x = \varphi(t),$$

kur $\varphi(t)$ ir patvaļīga monotona,n reizes nepārtraukti diferencējama funkcija. Linearitāte saglabājas arī pēc jebkuras nezināmās funkcijas $y(x)$ lineāras transformācijas

$$y = v(x)z + u(x),$$

bet homogenitāte – pēc jebkuras lineāras homogēnas transformācijas $y = v(x)z$, kur $u(x)$ un $v(x)$ ir dotas n reizes nepārtraukti diferencējamas funkcijas. Parasti šādas transformācijas lieto, lai vienkāršotu doto DV. Piemēram, lai dažos gadījumos to reducētu uz DV ar konstantiem koeficientiem, vai arī lai reducētajam DV koeficients pie $z^{(n-1)}$ būtu vienāds ar nulli.

Tālāk tiks parādīts, ka augstākās kārtas lineāra nehomogēna DV vispārīgais atrisinājums tāpat kā pirmās kārtas lineāriem DV ir vienāds ar atbilstošā homogēnā DV vispārīgā atrisinājuma un nehomogēnā DV jebkura partikulārā atrisinājuma summu. Aplūkosim vispirms lineāro homogēno DV vispārīgo teoriju.

0.1.2 Lineāru homogēnu DV partikulāro atrisinājumu īpašības

Aplūkojot lineāru homogēnu DV:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0, \tag{0.4}$$

turpmāk pieņemsim, ka tā koeficienti $p_i(x), i = \overline{1,n}$ ir nepārtraukti kaut kādā intervalā $I \in \mathbb{R}$. Tas garantē (saskaņā ar teorēmu 9.1), ka pie jebkuriem sākuma nosacījumiem (0.3) DV (0.4) visā intervalā I eksistē viens vienīgs atrisinājums.

Viens no DV (0.4) atrisinājumiem, acīmredzot, ir nulles jeb triviālais atrisinjums

$$y(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

Tas atbilst nulles sākuma nosacījumiem

$$y(x_0) = y'(x_0) = ... = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in I$$

un saskaņā ar teorēmu 9.1 ir vienīgais DV (0.4) atrisinājums, kas apmierina šos nosacījumus.

Lai turpmākie pieraksti būtu īsāki apzīmēsim DV (0.2) un (0.4) kreiso pusi ar $L[y](x)$:

$$L[y](x) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \tag{0.5}$$

vai vienkārši ar $L[y]$, ja dotā DV (0.2) vai (0.4) koeficienti ir konstanti. L sauksim par *lineāru diferenciāloperatoru*. Operatora jēdziens ir funkcijas jēdziena vispārinājums. Operators L katrai n -reizes nepārtraukti diferencējamai intervalā I funkcijai y piekārto noteiktu nepārtrauktu intervalā I funkciju $L[y](x)$, kuru iegūst izpildot ar y norādītās darbības formulas (0.5) labajā pusē. Ar diferenciāloperatora L palīdzību DV (0.4) īsi var pierakstīt izskatā

$$L[y](x) = 0. \tag{0.6}$$

Operatoram L, kā tas seko no izteiksmes (0.5) un atvasinājumu īpašībām, ir spēkā sekojošas divas lineāru operatoru pamatīpašības:

1) *homogenitāte*

$$L[Cy](x) \equiv CL[y](x),$$

C – patvaļīga konstante,

2) *aditivitāte*

$$L[y_1 + y_2](x) \equiv L[y_1](x) + L[y_2](x).$$

No tiko minētajām operatora L īpašībām seko, ja $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_k(x)$ ir kaut kādi skaitā k DV (0.4) partikulārie atrisinājumi, tad jebkura to lineārā kombinācija, t.i. izteiksme

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x), \tag{0.7}$$

kur C_i –patvaļīgas konstantes, arī ir DV (0.4) atrisinājums.

Tiešām, ja $L[y_i](x) = 0$, $i = \overline{1,k}$, tad

$$L[\sum_{i=1}^{k} C_i y_i] = \sum_{i=1}^{k} C_i L[y_i] = 0,$$

jebkurām C_i vērtībām.

Kā zināms n -tās kārtas DV vispārīgais atrisinājums parasti satur n patvaļīgas konstantes. Rodas jautājums vai izteiksme (0.7) gadījumā, kad $k = n$, t.i. kad tā satur n patvaļīgas konstantes, kuru skaits sakrīt ar DV (0.4) kārtu, ir vai nav DV (0.4) vispārīgais atrisinājums? Izrādās dažreiz ir un dažreiz nav.

Definīcija 9.1 Saka, ka DV (0.4) partikulārie atrisinājumi

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

veido DV (0.4) *atrisinājumu fundamentālsistēmu*, ja jebkurš DV (0.4) atrisinājums var tikt izteikts kā to lineāra kombinācija. Citiem vārdiem, – ja izteiksme (0.7), kad $k = n$, ir DV (0.4) vispārīgais atrisinājums. Izrādās, ka DV (0.4) partikulārie atrisinājumi $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ veido atrisinājumu fundamentālsistēmu tad un tikai tad, ja tie ir lineāri neatkarīgi intervalā I.

Definīcja 9.2 Funkcijas

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{0.8}$$

sauc par lineāri atkarīgām intervalā I, ja var atrast tādas konstantes λ_i, $i = \overline{1,n}$, starp kurām vismaz viena nav nulle, ka

$$\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)+...+\lambda_n\varphi_n(x)\equiv 0, \quad x\in I. \tag{0.9}$$

Ja identitāte (0.9) ir pareiza tikai gadījumā, ja visas konstantes $\lambda_i=0, i=\overline{1,n}$, tad funkcijas (0.8) sauc par lineāri neatkarīgām intervalā I.

Piezīme 1. Acīmredzot divas funkcijas ir lineāri atkarīgas intervalā I tad un tikai tad, ja tās atšķiras viena no otras par konstantu reizinātāju.

Piemērs 1. Funkcijas $\varphi_1(x)=\sin x$ un $\varphi_2(x)=\cos x$ ir lineāri neatkarīgas jebkurā intervalā $I\in\mathbb{R}$, jo $\sin x\neq\lambda\cos x$, ja $x\in I$.

Piemērs 2. Funkcijas $\varphi_1(x)=\sin^2 x$, $\varphi_2(x)=\cos^2 x$ un $\varphi_3(x)\equiv 1$ ir lineāri atkarīgas jebkurā intervalā $I\in\mathbb{R}$, jo katram $x\in I$ ir pareiza formula $\sin^2 x+\cos^2 x-1=0$.

0.1.3 Vronska determinants

Praktiski noteikt ar definīcijas 9.2 palīdzību, vai dotā funkciju sistēma (0.8) ir lineāri atkarīga vai neatkarīga vispārīgā gadījum ir grūti. Parasti DV teorijā nosaka, vai dotie DV (0.4) partikulrie atrisinājumi $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ ir lineāri atkarīgi vai neatkarīgi intervalā I, pielietojot Vronska determinantu:

$$W(x)=W[y_1,y_2,\dots,y_n](x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{0.10}$$

(J.Vronskis - poļu matemātiķis un filizofs 1778-1853).

Teorēma 9.2 Ja DV (0.4) partikulārie atrisinājumi $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ ir lineāri atkarīgi intervalā I, tad $W(x)\equiv 0$ šajā intervalā.

Pierādījums. Ja $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ ir lineāri atkarīgas funkcijas intervalā I, tad eksistē tādas konstantes λ_i, $i=\overline{1,n}$ starp kurm vismaz viena nav nulle, ka $\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\ldots+\lambda_n y_n(x)\equiv 0$ intervalā I. Atvasinot $n-1$ reizi šo identitāti, iegūstam attiecībā pret λ_i, $i=\overline{i,n}$ lineāru homogēnu algebrisku vienādojumu sistēmu

$$\begin{array}{c} \lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+...+\lambda_n y_n(x)\equiv 0 \\ \lambda_1 y_1'(x)+\lambda_2 y_2'(x)+...+\lambda_n y_n'(x)\equiv 0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ \lambda_1^{(n-1)}y_1(x)+\lambda_2^{(n-1)}y_2(x)+...+\lambda_n^{(n-1)}y_n(x)\equiv 0, \end{array} \tag{0.11}$$

kuras determinants ir $W(x)$. Tā kā šai sistēmai eksistē nenulles atrisinājums katram $x\in I$, tad tas ir iespējams tikai tad, ja $W(x)\equiv 0$ intervalā I.

Piezīme 2. Kā redzams no pierādījuma, teorēma 9.2 ir pareiza jebkurām intervalā I $n-1$ reizi nepārtraukti diferencējamām funkcijām $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$. Tām nav jābūt lineāra homogēna DV atrisinājumiem.

Piezīme 3. Teorēmu 9.2 var formulēt arī tā: ja intervalā I $n-1$ reizi diferencējamu funkciju $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ Vronska determinants $W(x)\neq 0$ kaut kādā punktā $x\in I$, tad dotās funkcijas ir lineāri neatkarīgas intervalā I.

Piemērs 3. Tā kā funkciju $\varphi_1(x)=\sin x$, $\varphi_2(x)=\cos x$ Vronska determinants

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1, \quad x \in I,$$

tad tās ir lineāri neatkarīgas katrā intervalā $I \in R$.

Teorēma 9.3 Ja DV (0.4) partikulārie atrisinājumi $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ ir lineāri neatkarīgi inetrvalā I, tad $W(x) \neq 0$ katram $x \in I$.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, t.i. ka eksistē tāds $x_0 \in I$, kuram $W(x_0) = 0$. Aplūkosim sistēmu (0.11) punktā x_0. Tā kā sistēmas determinants ir $W(x_0) = 0$, tad tai noteikti eksistē kaut kāds nenulles atrisinājums λ_i^0, $i = \overline{1,n}$. Izveidojam funkciju

$$y_0(x) \stackrel{def}{=} \lambda_1^0 y_1(x) + \lambda_2^0 y_2(x) + ... + \lambda_n^0 y_n(x).$$

Funkcija $y_0(x)$ kā partikulāro atrisinājumu $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ lineāra kombinācija ir DV (0.4) atrisinājums, pie kam, kā seko no sistēmas (0.11) vienādojumiem, tas punktā $x_0 \in I$ apmierina nulles sākuma nosacījumus

$$y_0(x_0) = y_0'(x_0) = ... = y_0^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Bet vienīgais DV (0.4) atrisinājums, kas apmierina nulles sākuma nosacījumus, ir triviālais atrisinājums $y(x) \equiv 0$. Tātad

$$y_0(x) = \lambda_1^0 y_1(x) + \lambda_2^0 y_2(x) + ... + \lambda_n^0 y_n(x) \equiv 0,$$

kur vismaz viena no konstantēm λ_i^0, $i = \overline{1,n}$ nav nulle. Tas nozīmē, ka atrisinājumi $y_1(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ir lineāri atkarīgi intervalā I, kas ir pretrunā ar doto.

Piezīme 4. Teorēma 9.3 atšķirībā no teorēmas 9.2 patvaļīgām intervalā I $n-1$ reizi nepārtraukti diferencējamām funkcijām $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ nav spēkā, jo eksistē lineāri neatkarīgas funkcijas, kās nav lineāra homogēna DV atrisinājumi, kurām $W(x) \equiv 0$.

No teorēmām 9.2 un 9.3 seko, ka DV (0.4) partikulāro atrisinājumu lineārās atkarības un neatkarības noskaidrošanai pietiek aprēķināt atbilstošā Vronska determinanta $W(x)$ vērtību brīvi izvēlētā punktā $x_0 \in I$. Ja $W(x_0) \neq 0$, tad dotie atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi visā intervalā I. Ja $W(x_0) = 0$, tad tie ir lineāri atkarīgi intervalā I.

0.1.4 Lineāra homogēna DV vispārīgais atrisinājums

Teorēma 9.4 (pamatteorēma) Ja DV (0.4) partikulārie atrisinājumi $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ ir lineāri neatkarīgi intervalā I, tad

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \tag{0.12}$$

ir DV (0.4) vispārīgais atrisinājums. Citiem vārdiem, $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ir DV (0.4) atrisinājumu fundamentālsistēma.

Pierādījums. Izteiksme (0.12) kā partikulāro atrisinājumu $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ lineāra kombinācija arī ir DV (0.4) atrisinājums jebkurām konstanšu C_i, $i = \overline{1,n}$ vērtībām. Jāpierāda, ka tā satur visus DV (0.4) atrisinājumus. Pieņemsim, ka z(x) ir patvaļīgs DV (0.4) atrisinājums un parādīsim, ka tas ir iegūstams no (0.12) attiecīgi piemeklējot C_i vērtības. Izvēlamies patvaļīgu $x_0 \in I$ un aprēķinam vērtības

$$z(x_0), z'(x_0), \ldots, z^{(n-1)}(x_0).$$

Sastādam lineāru nehomogēnu algebrisku vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{c} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = z(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = z(x_0) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1}(x_0) = z(x_0) \end{array} \tag{0.13}$$

Tā kā saskaņā ar teorēmu 9.3 sastādītās sistēmas determinants $W(x) \neq 0$, tad tai eksistē viens vienīgs atrisinājums C_i^z, $i = \overline{1,n}$. Ja tagad aplūkojam DV (0.4) atrisinājumu

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^z y_i(x),$$

kuru satur formula (0.12) ar $C_i = C_i^z$, $i = \overline{1,n}$, un doto atrisinājumu $z(x)$, tad kā redzams no sistēmas (0.13) vienādojumiem, tie punktā x_0 apmierina vienus un tos pašus sākuma nosacījumus. Tādēļ saskaņā ar teorēmu 9.1 tie sakrīt visā intervalā I:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^z y_i(x) \equiv z(z), \qquad x \in I.$$

Sekas. Maksimālais DV (0.4) lineāri neatkarīgo atrisinājumu skaits ir n, t.i. sakrīt ar DV kārtu, jo jebkuri $n+1$ DV (0.4) atrisinājumi, kā seko no formulas (0.12), veido jau lineāri atkarīgu atrisinājumu sistēmu.

Rodas jautājums: vai DV (0.4) vispār eksistē n lineāri neatkarīgu atrisinājumu sistēmas. Citiem vārdiem – atrisinājumu fundamentālsistēmas?

Teorēma 9.5 Katram n-tās kārtas lineāram homogēnam DV eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu fundamentālsisēmas.

Pierādījums. Izvēlēsimies patvaļīgu nesingulāru n-tās kārtas kvadratisku matricu $A = (a_{ij})$, $\det(A) \neq 0$ un patvaļīgu punktu $x_0 \in I$. Ar $y_1(x)$ apzīmēsim DV (0.4) atrisinājumu, kas atbilst sākuma nosacījumiem

$$y(x_0) = a_{11}, y'(x_0) = a_{12}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_{1n},$$

ar $y_2(x)$ apzīmēsim atrisinājumu, kas atbilst sākuma nosacījumiem

$$y(x_0) = a_{21}, y'(x_0) = a_{22}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_{2n},$$

u.t.t. ar $y_n(x)$ apzīmēsim atrisinājumu, kas atbilst sākuma nosacījumiem

$$y(x_0) = a_{n1}, y'(x_0) = a_{n2}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_{nn}.$$

Atrisinājumu $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ Vronska determinants punktā x_0 ir $W(x_0) = \det(A) \neq 0$. Tātad tie ir lineāri neatkarīgi intervalā I un, saskaņā ar teormu 9.4, tie veido DV (0.4) atrisinājumu fundamentālsistēmu. Kaut arī katram n-tās kārtas lineāram homogēnam DV eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu fundamentālsistēmas, tomēr katra no tām viennozīmīgi nosaka pašu DV normālformā.

Teorēma 9.6 Ja diviem DV normālformā

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0,$$

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + ... + b_n(x)y = 0$$

ar nepārtrauktiem intervalā I koeficientiem ir kopīga kaut viena atrisinājumu fundamentālsistēma, tad tie sakrīt, t.i. $a_i(x) \equiv b_i(x), i = \overline{1,n}$.

Pierādījums. Atņemot otro DV no pirmā, iegūstam

$$[a_1(x) - b_1(x)]y^{(n)} + [a_2(x) - b_2(x)]y^{(n-1)} + ... + [a_n(x) - b_n(x)]y = 0.$$

Ja pieņemam, ka $a_1(x) \neq b_1(x)$ kaut kādā intervalā $I_1 \sqsubseteq I$, tad dalot intervalā I_1 šo starpību ar $a_1(x) - b_1(x)$, iegūsim $n-1$ kārtas lineāru homogēnu DV normālformā

$$y^{(n-1)} + d_2(x)y^{(n-2)} + ... + d_n(x)y = 0, \qquad d_i(x) = \frac{a_i(x) - b_i(x)}{a_1(x) - b_1(x)}, i = \overline{2,n},$$

kura atrisinājumi ir arī abu doto DV atrisinājumu fundamentālsisēmas. Esam ieguvuši pretrunu, jo $n-1$ kārtas lineāra homogēna DV maksimālais lineāri neatkarīgo atrisinājumu skaits ir $n-1$ nevis n. Tātad $a_1(x) \equiv b_1(x)$ intervalā I un doto DV starpība ir ar izskatu

$$[a_1(x) - b_1(x)]y^{(n-2)} + ... + [a_n(x) - b_n(x)]y = 0.$$

Pieņemot, ka $a_2(x) \neq b_2(x)$ kaut kādā intervlā $I_2 \in I$ un spriežot analoģiski kā iepriekš, iegūstam, ka arī $a_2(x) \equiv b_2(x)$ intervalā I, u.t.t., ka $a_i(x) \equiv b_i(x), i = \overline{1,n}$ intervalā I.

Zinot DV (0.4) kaut kādu atrisinājumu fundamentālsistēmu, mēs varam iegūt tā vispārīgo atrisinājumu (0.12). Savukārt, zinot kāda DV vispārīgo atrisinājumu, bieži viegli var restaurēt pašu DV. Ja $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ ir DV (0.4)atrisinājumu fundamentālsistēma, tad jebkurš cits DV (0.4) atrisinājums $y(x)$ ir izsakāms ar $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ (formula (0.12)). Tas nozīmē, ka DV (0.4) atrisinājumi $y(x), y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ir jau lineāri atkarīgi un to $n+1$ kārtas Vronska determinants

$$W[y, y, ..., y_n, y](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} \equiv 0$$

intervalā I. Izvirzot šo determinantu pēc pēdējās kolonas, iegūsim

$$W[y,y,...,y_n](x)y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} & y^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y = 0, \tag{0.14}$$

kas arī ir meklētais DV.

Piemērs 4. Funkcijas $\sin x$ un $\cos x$, kā tika parādīts piemērā 1, ir lineāri neatkarīgas jebkurā intervalā $I \in \mathbb{R}$. Atbilstošais otrās kārtas lineārais homogēnais DV ir

$$W[\sin x, \cos x, y(x)] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

vai atklātā formā $y'' + y = 0$.

0.1.5 Ostrogradcka-Liuvila formula

DV (0.14) koeficients pie $y^{(n)}$ ir $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) \neq 0$ intervalā I. Dalot DV (0.14) abas puses ar to un salīdzinot iegūto rezultātu ar DV (0.4), atrodam, ka

$$p_1(x) = -\frac{\frac{d}{dx}W[y_1, y_2, ..., y_n](x)}{W[y_1, y_2, ..., y_n](x)} = -\frac{W'(x)}{W(x)}. \tag{0.15}$$

Piezīme 5. Determinanta atvasinājums pēc x, ja tā elementi ir funkcijas no x, ir vienāds ar n determinantu summu, kur pirmais atšķiras no dotā ar to, ka tam ir atvasināta pirmā rinda, otrajam – otrā, trešajam – trešā u.t.t. Pārējās rindas nemainās. Atvasinot Vronska determinantu, pirmie $n-1$ determinanti būs vienādi ar nulli, jo saturēs divas vienādas rindas, bet n-tais sakritīs ar koeficientu pie $y^{(n-1)}$ pirms dalīšanas ar $W(x)$ iegūtajā DV.

Vienādība (0.15) atiecībā pret $W(x)$ ir pirmās kārtas DV ar atdalāmiem mainīgiem. Integrējot šo DV, iegūstam tā saucamo *Ostrogradcka-Liuvila formulu*

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \tag{0.16}$$

kur C – patvaļīga konstante.

Ostrogradcka-Liuvila formula, kuru otrās kārtas DV gadījumā parasti sauc arī par *Ābela formulu,* ļauj viegli atrisināt jebkuru otrās kārtas lineāru homogēnu DV

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{0.17}$$

ja ir zināms viens tā partikulārais atrisinājums $y_1(x)$.

Tiešām, pieņemot, ka $y(x)$ ir vēl viens DV (0.17) atrisinājums lineāri neatkarīgs no $y_1(x)$, tad saskaņā ar Ostrogradcka-Liuvila formulu (0.16)

$$W[y_1,y](x)=\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=y_1y'-y_1'y=C_1e^{-\int p_1(x)dx},$$

iegūstam pirmās kārtas lineāru nehomogēnu DV attiecībā pret y. Šo vienādojumu viegli var atrisināt ar integrējošā reizinātāja $\frac{1}{y_1^2}$ palīdzību:

$$\frac{y_1y'-y_1'y}{y_1^2}=\left(\frac{y}{y_1}\right)'=\frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx},$$

iegūstot, ka

$$y(x)=y_1(x)\left[C_1\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx+C_2\right].$$

Piemērs 5. Atrisināsim DV $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, $x\in(-1,1)$.

Tā kā dotais DV ir homogēns attiecībā pret y, y' un y'', tad tā kārtu var pazemināt par vienu, lietojot standarta substitūciju $z=\frac{y'}{y}$. Tad $y'=zy$, $y''=(z'+z^2)y$ un attiecībā pret z iegūstam pirmās kārtas, bet diemžēl jau nelineāru DV

$$(1-x^2)(z'+z^2)-2xz+2=0,$$

kuru ir grūti atrisināt.

No otras puses, nav grūti saskatīt, ka viens no dotā DV atrisinājumiem ir $y(x)=x$. No Ostrogradcka-Liuvila formulas seko, ka

$$W[x,y](x)=\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix}=xy'-y=C_1e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=$$

$$=C_1e^{-\ln(1-x^2)}=\frac{C_1}{1-x^2}.$$

Pēc dalīšanas ar x^2 atrodam, ka

$$\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{C_1}{x^2(1-x^2)}.$$

Integrējot iegūto vienādību, atrodam dotā DV vispārīgo atrisinājumu

$$y=x\int\frac{C_1dx}{x^2(1-x^2)}=C_1x\int\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}\right]dx=$$

$$=C_1\left(\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-1\right)+C_2x.$$

0.1.6 Lineāra homogēna DV kārtas pazemināšana

Lai varētu atrast lineāra homogēna DV (0.4) vispārīgo atrisinājumu ir jāatrod kaut kāda tā atrisinājumu fundamentālsistēma $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$. Kaut arī to ir bezgalīgi daudz, to atrast vispārīgā gadījumā ir grūti, varbūt pat neiespējami. Dažreiz izdodas atrast tikai daļu no tās. Izrādās, ka katrs zināmais lineāri neatkarīgais dotā DV (0.4) atrisinājums ļauj DV kārtu pazemināt par vienu, pie kam saglabājot dotā DV linearitāti.

Vienkāršības dēļ aplūkosim trešās kārtas DV

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \tag{0.18}$$

pieņemot vispirms, ka ir zināms tikai viens tā partikulārais atrisinājums $y(x)$.

Izrādās, ka dotā DV kārtu vienmēr var pazemināt par vienu, pārejot uz jaunu nezināmo funkciju z ar substitūciju

$$y = y_1 \int z dx. \tag{0.19}$$

Tad

$$y' = y_1' \int z dx + y_1 z,$$

$$y'' = y_1'' \int z dx + 2y_1' z + y_1 z',$$

$$y''' = y_1''' \int z dx + 3y_1'' z + 3y_1' z' + y_1 z''$$

un ievietojot šīs izteiksmes DV (0.18), iegūsim

$$y_1''' \int z dx + 3y_1'' z + 3y_1' z' + y_1 z) + p_1(x)(y_1'' \int z dx + 2y_1' z + y_1 z') +$$

$$+ p_2(x)(y_1' \int z dx + y_1 z) + p_3(x) y_1 \int z dx = 0,$$

vai pārgrupējot locekļus:

$$[y_1''' + p_1(x)y_1'' + p_2(x)y_1' + p_3(x)y_1] \int z dx + y_1 z'' +$$

$$+ [3y_1' + p_1(x)y_1]z' + [3y_1'' + 2p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1]z = 0.$$

Tā kā $y_1(x)$ ir DV (0.18) atrisinājums, tad pirmais loceklis iegūtajā viendojumā ir vienāds ar nulli un gala rezultātā iegūstam lineāru homogēnu otrās kārtas DV attiecībā pret z

$$z'' + [3\frac{y_1'}{y_1} + p_1(x)]z' + [3\frac{y_1''}{y_1} + 2p_1(x)\frac{y_1'}{y_1} + p_2(x)]z = 0. \tag{0.20}$$

Ja mums sākumā būtu zināmi divi dotā DV (0.18) lineāri neatkarīgi partikulārie atrisinājumi, tad mums būtu zināms, kā tas seko no formulas (0.17), viens DV (0.20) partikulārais atrisinājums

$$z_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right).'$$

Ar tā palīdzību var tālāk pazemināt DV (0.20) kārtu par vienu. Vispār, ja ir zināmi $k < n$ lineāri neatkarīgi n-tās kārtas lineāra homogēna DV partikulārie atrisinājumi, tad šādā veidā var dotā DV kārtu pazemināt par k, iegūstot $n-k$ kārtas DV. Ja $k = n-1$, iegūstam pirmās kārtas lineāru homogēnu DV, kas kā zināms vienmēr integrējas kvadratūrās.

Piemērs 6. Atrisināt DV $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, kuram acīmredzot viens no atrisinājumiem ir $y(x) = x$.

Ar substitūciju $y = y\int zdx = x\int zdx$ definējam jaunu nezināmo funkciju z. Tad $y' = \int zdx + xz$, $y'' = 2z + xz'$, $y''' = 3z' + xz''$ un dotais DV būs izskatā

$$x^3(3z' + xz'') - 3x^2(2z + xz') + 6x(\int zdx + xz) - 6y\int zdx = 0.$$

Pēc vienkāršošanas $z'' = 0$. Divas reizes integrējot atrodam, ka $z = C_1x + C_2$, no kurienes seko, ka dotā DV vispārīgais atrisinājums ir

$$y = x\int zdx = x\int (C_1x + C_2)dx = C_1\frac{x^3}{2} + C_2x^2 + C_3x.$$

0.1.7 Uzdevumi patstāvīgai risināšanai