Andrejs Reinfelds

# Dinamiskās sistēmas

Latvijas Universitāte

# Saturs

# Nodaļa 1
# Košī problēmas atrisinājuma eksistence un unitāte

Šajā nodaļā apskatīsim parasto diferenciālvienādojumu teorijas vispārīgos jautājumus – jautājumu par Košī problēmas atrisinājumu eksistenci un atrisinājumu vispārinājumiem, par atrisinājumu turpināmību. Tālāk aplūkosim vairākus pietiekamos nosacījumus Košī problēmas atrisinājumu unitātei. Nodaļas beigās apskatīsim jautājumu par atrisinājumu nepārtrauktību pēc sākuma nosacījumiem un paramatriem.

## 1.1 Pamatjēdzieni

**Definīcija 1.1.** Vienādojumu[1], kur nezināmais lielums ir funkcija un kurš satur nezināmās funkcijas atvasinājumu, sauc par *diferenciālvienādojumu*. Ja nezināmā funkcija ir skalāra argumenta funkcija, tad iegūstam *parasto diferenciālvienādojumu*.

Neatkarīgo mainīgo apzīmēsim ar $t \in \mathbb{R}$ un nezināmo funkciju ar $x$ (ja ir $n$ nezināmās funkcijas, tad attiecīgi lietosim apzīmējumus $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Nezināmās funkcijas $x$ atvasinājuma pēc $t$ apzīmēsim ar simbolu (Ņutona ievestais apzīmējums fluksijām)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}.$$

Apskatām parasto diferenciālvienādojumu sistēmu, kura satur nezināmo funkciju augstākas kārtas atvasinājumus. Ievedot jaunas nezinā-

[1] Ar terminu *vienādojums* saprotam kā vienu vienādojumu, tā arī vienādojumu sistēmu. Pēdējā gadījumā ir vairākas nezināmās funkcijas

mās funkcijas vienmēr varam iegūt tādu diferenciālvienādojumu sistēmu, kura vairs nesatur nezināmo funkciju augstākās kārtas atvasinājumus.

Tālāk apskatām tādu $n$ parasto diferenciālvienādojumu sistēmu, kuru pēc ekvivalentiem pārveidojumiem, un ja nepieciešams izmantojot aizklātās funkcijas eksistences teorēmu, varam uzrakstīt tā saucamajā *normālajā formā*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \ldots & \\ \dot{x}_n &= f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \end{cases}$$

kur nepārtrauktie attēlojumi $f_k\colon G \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$ ir definēti apgabalā[2] $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Apzīmējam ar

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$n$ dimensiju vektorus kolonas. Tad doto diferenciālvienādojumu sistēmu izmantojot vektoriālo pierakstu var uzrakstīt kompaktākā formā

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.1}$$

kurš vizuāli atgādina skalāra diferenciālvienādojuma pierakstu un tādēļ turpmākā izklāstā lietosim terminu diferenciālvienādojums termina diferenciālvienādojumu sistēma vietā.

**Definīcija 1.2.** Nepārtraukti diferencējamu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ sauc par diferenciālvienādojuma (1.1) *atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja visiem $t \in I$:

(i) $(t, \varphi(t)) \in G$;

[2] Kopu Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$ sauc par *apgabalu*, ja tā ir vaļēja un sakarīga

(ii) $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t,\varphi(t))$.

Intervālu $I$ sauc par atrisinājuma *definīcijas intervālu*.

Kā likums diferenciālvienādojumam ir bezgala daudz atrisinājumu. Tādēļ diferenciālvienādojumam uzliek vēl papildus nosacījumus ar mērķi, lai dotai problēmai būtu viens vienīgs atrisinājums. Aplūkojam uzdevumu par tāda atrisinājuma eksistenci, kas iet caur fiksētu dotā apgabala $G$ punktu $(t_0,x_0) \in G$.

**Definīcija 1.3.** Diferenciālvienādojumu (1.1) kopā ar nosacījumu (*sākuma nosacījumu*)

$$x(t_0) = x_0,\ (t_0,x_0) \in G,$$

sauc par *Košī*[3] *problēmu*.

Šo uzdevumu apzīmē sekojoši:

$$\dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

**Definīcija 1.4.** Nepārtraukti diferencējamu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ sauc par *Košī problēmas* (1.2) *atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja visiem $t \in I$:

(i) $(t,\varphi(t)) \in G$;
(ii) $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t,\varphi(t))$;
(iii) $\varphi(t_0) = x_0$.

Tālāk pierādām lemmu, kurai ir fundamentāla loma parasto diferenciālvienādojumu teorijā, jo tā ļauj Košī problēmas atrisināmības izpēti reducēt uz atbilstoša integrālvienādojuma atrisināmības izpēti.

**Lemma 1.1.** *Ja $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts attēlojums, tad Košī problēmas* (1.2) *atrisināmība ir ekvivalenta integrālvienādojuma*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s \tag{1.3}$$

*atrisināmībai.*

---

[3] Augustin Louis Cauchy, ⋆1789.21.VIII, Parīze, Francija, †1857.23.V, Sceaux (Parīzes apkārtnē), Francija; viens no ievērojamākiem franču matemātiķiem, nozīmīgi darbi reālā un kompleksā mainīgā funkciju teorijā, diferenciālvienādojumos, mehānikā. 789 matemātisku publikāciju autors, viņa kopotie raksti izdoti 27 sējumos

*Pierādījums.* Pieņemam ka $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir Košī problēmas (1.2) atrisinājums. Integrējot vienādības (1.2) abas puses robežās no $t_0$ līdz $t$ un ievērojot sākuma nosacījumu iegūstam, ka Košī problēmas (1.2) atrisinājums $\varphi$ ir arī integrālvienādojuma (1.3) atrisinājums.

Otrādi. Pieņemam, ka $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts integrālvienādojuma (1.3) atrisinājums. Acīmredzot $\varphi(t_0) = x_0$. Zemintegrāļa izteiksmes nepārtrauktības dēļ integrālvienādojuma (1.3) labā puse ir diferencējama un tās atvasinājums ir nepārtraukts pēc $t$. Seko integrālvienādojuma (1.3) kreisā puse, t. i. atrisinājums $\varphi$ ir nepārtraukti diferencējams pēc $t$. Diferencējot integrālvienādojumu (1.3) abas puses pēc $t$ iegūstam, ka funkcija $\varphi$ ir arī Košī problēmas (1.2) atrisinājums. □

Integrālvienādojumam (1.3) eksistē nepārtraukts un gandrīz visur[4] diferencējams atrisinājums arī ja attēlojums $f$ nav nepārtraukts. Līdz ar to Lemma 1.1 par Košī problēmas atrisināmības ekvivalenci atbilstoša integrālvienādojuma atrisināmībai dod metodi diferenciālvienādojuma atrisinājuma jēdziena vispārināšanai. Tā ļauj samazināt nosacījumus attēlojuma $f$ gludumam izlietojot Lebega un Perona integrāļus.

## 1.2 Košī problēmas lokālā atrisinājuma eksistence

Vispirms pierādīsim Košī problēmas lokālā atrisinājuma eksistenci.

**Definīcija 1.5.** Diferenciālvienādojums (1.1) apmierina *atrisinājuma eksistences nosacījumus*, ja katram $(t_0, x_0) \in G$ eksistē pozitīvs skaitlis $\delta(t_0, x_0) > 0$ un nepārtraukti diferencējama funkcija $\varphi\colon I_\delta \to \mathbb{R}^n$, kur $I_\delta = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < \delta\}$ tāda, ka funkcija $\varphi$ ir Košī problēmas (1.2) atrisinājums.

**Teorēma 1.1 (Peano teorēma).** [5] *Ja $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts attēlojums, tad diferenciālvienādojums* (1.1) *apmierina atrisinājuma eksistences nosacījumus.*

---

[4] Nosacījums "izpildās gandrīz visiem" nozīmē, ka nosacījums neizpildās kopā ar Lebega mēru 0

[5] Giuseppe Peano, ⋆1858.27.VIII, Kuneo, Itālija, †1932.20.IV, Turina, Itālija; itāļu matemātiķis, viens no mūsdienu matemātiskās loģikas un kopu teorijas pamtlicējiem. Lielāko profesionālās dzīves daļu pavadīja mācot matemātiku Turinas universitātē

*Pierādījums.* Saskaņā ar Lemmu 1.1 atliek pierādīt ekvivalentā integrālvienādojuma atrisinājuma eksistenci.

Pierādījums balstās uz Šaudera nekustīgā punkta teorēmu. Citiem vārdiem jāatrod piemērota Banaha telpa[6] $\mathscr{B}$ un nepārtraukts attēlojums $\mathscr{L}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}$, kas slēgtu, ierobežotu un izliektu Banaha telpas $\mathscr{B}$ apakškopu[7] $\Omega \subset \mathscr{B}$ attēlo sevī, pie kam apakškopa $\mathscr{L}\Omega \subset \Omega$ ir prekompakts[8]. Tad attēļojumam $\mathscr{L}$ saskaņā ar Šaudera teorēmu eksistē nekustīgais punkts, t.i. $\mathscr{L}\varphi = \varphi$ un $\varphi \in \Omega$.

Ņemam patvaļīgu $(t_0, x_0) \in G$ un izvēlamies divus pozitīvus skatļus $a > 0$ un $b > 0$ tā, lai slēgtais ierobežotais apgabals[9] $D$ piederētu $G$, kur

$$D = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\} \subset G.$$

Saskaņā ar Veierštrāsa[10] teorēmu nepārtrauktam attēlojumam $f$ slēgtā ierobežotā apgabalā (mūsu gadījumā kompaktā) eksistē

$$M = \max_{(t,x)\in D} |f(t,x)|.$$

Apzīmējam ar

$$\alpha = \min(a, bM^{-1})$$

un tālāk aplūkojām lineāru telpu, kuras elementi ir nepārtrauktas skalāras funkcijas definētas slēgtā ierobežotā intervālā

$$\mathscr{B} = \{\varphi \mid \varphi\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n \text{ un } \varphi \text{ ir nepārtrauktas}\}.$$

Ievedot suprema normu

$$\|\varphi\| = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} |\varphi(t)|$$

lineārā telpa $\mathscr{B}$ kļūst par Banaha telpu. Līdz ar to esam atraduši atbilstošo Banaha telpu $\mathscr{B}$.

---

[6] Pilnu lineāru normētu telpu pār skalāru lauku (parasti $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$) sauc par *Banaha* telpu. Telpa ir pilna, ja katra fundamentāla virkne konverģē uz kādu dotās telpas elementu

[7] Kopa $\Omega$ ir ierobežota, ja eksistē tāds skaitlis $M \geq 0$, ka visiem $\varphi \in \Omega$ izpildās novērtējums $\|\varphi\| \leq M$. Kopa $\Omega$ ir izliekta, ja visiem $\varphi, \varphi' \in \Omega$ un $0 \leq \lambda \leq 1$ izpildās īpašība $\lambda\varphi + (1-\lambda)\varphi' \in \Omega$. Kopa ir slēgta ja tā satur visus savus akumulācijas punktus

[8] Kopu sauc par *prekompaktu*, ja tās slēgums ir kompakta kopa

[9] Ja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tad $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ ir Eiklida metrika

[10] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, ⋆1815.31.X, Ostenfelde, Vācija, †1897.19.II, Berlīne, Vācija; vācu matemātiķis, modernās funkciju teorijas izveidotājs

Pārbaudam, ka Banaha[11] telpas $\mathscr{B}$ apakškopa

$$\Omega = \{\varphi \in \mathscr{B} \mid |\varphi(t) - x_0| \leq b\}$$

ir slēgts, ierobežots un izliekts apgabals. Apgabals $\Omega$ ir slēgts un ierobežots, jo visiem $\varphi \in \Omega$ izpildās novērtējums

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t) - x_0 + x_0| \leq |\varphi(t) - x_0| + |x_0| \leq b + |x_0|,$$

Bez tam, ja $\varphi, \varphi' \in \Omega$ un $0 \leq \lambda \leq 1$, tad

$$|\lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi'(t) - x_0| = |\lambda(\varphi(t) - x_0) + (1-\lambda)(\varphi'(t) - x_0)|$$
$$\leq \lambda|\varphi(t) - x_0| + (1-\lambda)|\varphi'(t) - x_0| \leq b.$$

Līdz ar to apgabals $\Omega$ ir izliekts.

Definējam attēlojumu $\mathscr{L}$ kopā $\Omega$ ar vienādību

$$\mathscr{L}\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Acīmredzot

$$|\mathscr{L}\varphi(t) - x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq M\alpha \leq b.$$

Ievērojot, ka $\mathscr{L}\varphi\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukta $t$ funkcija, rezultatā iegūstam ka

$$\mathscr{L}\Omega \subset \Omega.$$

Pierādam, ka attēlojums $\mathscr{L}$ ir nepārtraukts slēgtā apgabalā $\Omega$. Attēlojuma $f$ vienmērīgās nepārtrauktības dēļ slēgtā apgabalā $D$ katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$ tāds, ka ja $|x - x'| < \delta$, tad $|f(t,x) - f(t,x')| < \varepsilon$. Pieņemam, ka $\varphi$, $\varphi' \in \Omega$ un $\|\varphi - \varphi'\| < \delta$ vai citiem vārdiem

$$|\varphi(t) - \varphi'(t)| \leq \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} |\varphi(t) - \varphi'(t)| = \|\varphi - \varphi'\| < \delta.$$

Tad visiem $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ir spēkā novērtējums

---

[11] Stefan Banach, ⋆1892.30.III, Krakova, Polija, † 1945.31.VIII, Ļvova, Ukraina, poļu matemātiķis modernās funkcionālanalīzes izveidotājs, Ļvovas universitātes profesors matemātikā

$$|\mathscr{L}\varphi(t) - \mathscr{L}\varphi'(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,\varphi(s)) - f(s,\varphi'(s)))\,\mathrm{d}s \right| < \varepsilon\alpha$$

vai

$$\|\mathscr{L}\varphi - \mathscr{L}\varphi'\| < \varepsilon\alpha.$$

Līdz ar to esam pierādījuši nelineārā attēlojuma $\mathscr{L}$ nepārtrauktību slēgtā, ierobežotā un izliektā apgabalā $\Omega$.

Pierādam, ka kopa $\mathscr{L}\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā $\mathscr{B}$. Ievērojam, ka visiem $\varphi \in \Omega$ ir spēkā novērtējumi

$$|\mathscr{L}\varphi(t') - \mathscr{L}\varphi(t)| \leq \left| \int_{t}^{t'} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq M|t'-t|$$

un

$$\|\mathscr{L}\varphi\| \leq b + |x_0|$$

vai citiem vārdiem funkcijas $\mathscr{L}\varphi \in \Omega$ ir vienādi nepārtrauktas (vēl vairāk – Lipšica nepārtrauktas t.i. apmierina Lipšica nosacījumus ar vienu un to pašu Lipšica konstanti) un vienmērīgi ierobežotas. Saskaņā ar Arceli-Askoli teorēmu[12] $\mathscr{L}\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā $\mathscr{B}$.

Saskaņā ar Šaudera[13] nekustīgā punkta teorēmu slēgta, ierobežota un izliektā kopa $\Omega$ satur attēlojuma $\mathscr{L}$ nekustīgo punktu. Savukārt attēlojuma $\mathscr{L}$ nekustīgais punkts ir integrālvienādojuma (1.3) un līdz ar to Košī problēmas (1.2) atrisinājums. $\square$

*Piezīme 1.1.* Peano teorēma tika pierādīta pirms funkcionālanalīzē atklāja un pierādīja Šaudera nekustīgā punkta teorēmu. Līdz ar to matemātiskajā literatūrā sastopamas dažādas Peano teorēmas pierādījuma versijas. Apskata integrālvienādojumu (1.3) un intervālā $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ atšķirīgos veidos konstruē vienādi nepārtrauktu un viemērīgi ierobežotu tuvināto atrisinājumu virkni. Pēc tam no tās saskaņā ar

---

[12] Banaha telpas $\mathscr{B}$ apakškopa $K$ ir prekompakts tad un tikai tad, ja to veido vienmērīgi ierobežotas un vienādi nepārtrauktas funkcijas

[13] Juliusz Pawel Schauder, ⋆1899.21.IX, Ļvova, Austroungārija (tagad Ukraina), † 1943.IX, Ļvova, Ukraina; ebreju izcelsmes poļu matemātiķis, Ļvovas universitātes privātdocents, profesors. Nozīmīgi darbi topoloģijā, parciālos diferenciālvienādojumos un matemātiskā fizikā. 1930. gadā viņš pierādīja tā saukto Šaudera nekustīgā punkta teorēmu. 1943.IX gestapo viņu nošāva, kad viņš mēģināja bēgt no nosūtīšanas uz koncentrācijas nometni

Arceli-Askoli teorēmu izdala apakšvirkni, kura vienmērīgi konverģē uz nepārtrauktu funkciju. Pārejot uz robežu tuvināto atrisinājumu definējošā integrālvienādībā, iegūstam integrālvienādojuma (1.3) un tātad arī Košī problēmas atrisinājumu.

*Piezīme 1.2.* Diferenciālvienādojuma (1.1) labās puses, t.i. attēlojuma $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ nepārtrauktība vēl negarantē Košī problēmas atrisinājuma unitāti. Apskatām piemēru, kad Košī problēmai ir bezgala daudz atrisinājumu. Pieņemam, ka $a \leq 0 \leq b$ un apskatam Košī problēmu skalāram diferenciālvienādojumam

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Viegli pārbaudīt, ka jebkura no diviem parametriem atkarīga funkcija $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3, \text{ ja } t < a, \\ 0, \qquad\quad \text{ ja } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3, \text{ ja } t > b, \end{cases}$$

ir nepārtraukti diferencējama, apmierina diferenciālvienādojumu un sākuma nosacījumu, t.i. tā ir Košī problēmas atrisinājums.

*Piezīme 1.3.* M. Lavrentjevs[14] 1925. gadā pirmais konstruēja tādu skalāro diferenciālvienādojumu[15]

$$\dot{x} = f(t,x)$$

ar nepārtrauktu labo pusi $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka katrai Košī problēmai ir vairāk kā viens atrisinājums.

## 1.3 Košī problēmas lokālā Karateodori atrisinājuma eksistence

Apskatām skalāru diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = H(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.4}$$

[14] Mikhail Alekseevich Lavrentev, ⋆1900.19.XI, Kazaņa, Krievija, † 1980.15.X, Maskava, Krievija, krievu matemātiķis, profesors Maskavas universitātē, Steklova matemātikas institūtā, ZA Sibirijas nodaļas vadītājs

[15] Skat. P.Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Bi khäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982

kur $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir Hevisaida[16] funkcija definēta ar sakarību

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{ja } t < 0, \\ 1/2, & \text{ja } t = 0, \\ 1, & \text{ja } t > 0. \end{cases}$$

Ievērojam, ka diferenciālvienādojumam (1.4) nevienā intervālā, kas satur punktu $t = 0$ neizpildās Peano atrisinājuma eksistences Teorēmas 1.1 nosacījumi, kaut gan diferenciālvienādojumam (1.4) eksistē nepārtraukts un diferencējams, izņemot punktu $t = 0$, atrisinājums

$$\varphi(t) = C + \begin{cases} 0, & \text{ja } t \le 0, \\ t, & \text{ja } t > 0, \end{cases}$$

kur $C \in \mathbb{R}$ ir patvaļīga konstante.

Ja $f$ ir nepārtraukts attēlojums, tad diferenciālvienādojuma (1.1) atrisinājums $\varphi$ ir nepārtraukti diferencējams. Ja pieprasam, lai diferenciālvienādojuma (1.1) atrisinājums $\varphi$ būtu tikai absolūti nepārtraukts, tad saskaņā ar Lemmu 1.1 par Košī problēmas (1.2) ekvivalenci integrālvienādojumam (1.3) varam samazināt prasības diferenciālvienādojuma (1.1) labajai pusei. Pietiek prasīt, lai diferenciālvienādojuma (1.1) labā puse būtu mērojama un integrējama Lebega nozīmē. Atzīmējam, ka absolūti nepārtraukta funkcija $g\colon I \to \mathbb{R}$ gandrīz visur ir diferencējama un tai izpildās Ņutona-Leibnica vienādība

$$g(t) = g(a) + (L)\int_a^t \frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s, \text{ ja } a, t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Simbols $(L)$ nozīmē, ka apskatītais integrālis ir Lebega integrālis.

**Definīcija 1.6.** Lokāli absolūti nepārtrauktu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ sauc par diferenciālvienādojuma (1.1) *Karateodori*[17] *atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja:

[16] Oliver Heaviside, ⋆1850.18.V Comden Town, Londona, Anglija, †1925.3.II Torquay, Devon, Anglija, autodidakts, angļu elektroinženieris, matemātiķis un fiziķs, strādāja telegrāfu kompānijā. Nozīmīgi darbi telegrāfa vienādojumu teorijā, operatoru rēķinos

[17] Constantin Caratheodory ⋆1873.13.IX Berlin. Vācija, †1950.2.II Minhene, Vācija, grieķu matemātiķis, kurš lielāko savas profesionālās dzīves daļu pavadīja Vācijā. Bijis profesors Hanoveras un Breslavas (tagad Vroclavas) Augstākajās tehniskajās skolās, profesors Getingā, Berlīnē, Smirnā (tagad Izmirā), Atenās un Minhenē. Nozīmīgi darbi variāciju rēķinos, mēru teorijā, termodinamikā u.c.

(i) $(t, \varphi(t)) \in G$ visiem $t \in I$;
(ii) $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ gandrīz visiem $t \in I$.

**Definīcija 1.7.** Lokāli absolūti nepārtrauktu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ sauc par *Košī problēmas* (1.2) *Karateodori atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja:

(i) $(t, \varphi(t)) \in G$ visiem $t \in I$;
(ii) $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ gandrīz visiem $t \in I$;
(iii) $\varphi(t_0) = x_0$.

**Definīcija 1.8.** Diferenciālvienādojums (1.1) apmierina *Karateodori atrisinājuma eksistences nosacījumus*, ja katram $(t_0, x_0) \in G$ eksistē pozitīvs skaitlis $\delta(t_0, x_0) > 0$ un nepārtraukta funkcija $\varphi\colon I_\delta \to \mathbb{R}^n$, kur $I_\delta = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < \delta\}$ tāda, ka funkcija $\varphi$ ir Košī problēmas (1.2) Karateodori atrisinājums.

**Definīcija 1.9.** Saka ka $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ir *Karateodori attēlojums*, ja

(i) funkcija $f(\cdot, x)$ ir mērojama visiem $x$;
(ii) attēlojums $f(t, \cdot)$ ir nepārtraukts gandrīz visiem $t$;
(iii) katram $(t_0, x_0) \in G$ eksistē apkārtne $U(t_0, x_0) \subset G$ un nenegatīva Lebega integrējama funkcija $m\colon I \to \mathbb{R}_+$ tāda, ka gandrīz visiem $t$, kur $(t, x) \in U(t_0, x_0)$, ir spēkā nevienādība

$$|f(t,x)| \leq m(t).$$

**Lemma 1.2.** *Ja funkcija $f(\cdot, x)$ ir mērojama, attēlojums $f(t, \cdot)$ ir nepārtraukts gandrīz visiem $t$ un $\varphi\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$, $(I_1, \varphi(I_1)) \subset G$ ir galīga mērojama funkcija, tad funkcija $f(\cdot, \varphi(\cdot))\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ ir mērojama.*

**Teorēma 1.2 (Karateodori teorēma).** *Ja $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ir Karateodori attēlojums, tad diferenciālvienādojums* (1.1) *apmierina Karateodori atrisinājuma eksistences nosacījumus.*

*Pierādījums.* Ņemam patvaļīgu $(t_0, x_0) \in G$ un izvēlamies divus pozitīvus skatļus $a > 0$ un $b > 0$ tā, lai

$$D = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\} \subset U(t_0, x_0) \subset G.$$

Apskatām funkciju $M\colon [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}$ definētu ar Lebega integrāļa palīdzību

$$M(t) = (L)\int_{t_0}^{t} m(s)\,\mathrm{d}s.$$

Funkcija $M$ ir nepārtraukta, monotoni augoša un $M(t_0) = 0$ un tātad eksistē tāds $\alpha$, kur $0 < \alpha \leq a$, ka visiem $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ izpildās novērtējums

$$|M(t)| \leq b.$$

Analogi Teorēmas 1.1 pierādījumam aplūkojām Banaha telpu $\mathscr{B}$, kuras elementi ir nepārtrauktas skalāra argumenta funkcijas definētas slēgtā ierobežotā intervālā

$$\mathscr{B} = \{\varphi \mid \varphi\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n \text{ un } \varphi \text{ ir nepārtrauktas}\}.$$

Tad Banaha telpas $\mathscr{B}$ apakškopa

$$\Omega = \{\varphi \in \mathscr{B} \mid |\varphi(t) - x_0| \leq b\}$$

ir slēgts, ierobežots un izliekts apgabals.

Ievērojot Lemmu 1.2 un Karateodori attēlojuma definīciju iegūstam, ka funkcija $f(\cdot, \varphi(\cdot))$ ir integrējama Lebega nozīmē. Aplūkojam attēlojumu $\mathscr{L}$, kuru definējam slēgtā, ierobežotā un izliektā apgabalā $\Omega$ ar vienādību

$$\mathscr{L}\varphi(t) = x_0 + (L)\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Līdz ar to attēlojums $\mathscr{L}$ ir korekti definēts, $\mathscr{L}\varphi\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukta $t$ funkcija. Bez tam

$$|\mathscr{L}\varphi(t) - x_0| \leq \left|(L)\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq |M(t)| \leq b.$$

Seko

$$\mathscr{L}\Omega \subset \Omega.$$

Pierādām, ka attēlojums $\mathscr{L}$ ir nepārtraukts slēgtā apgabalā $\Omega$. Izvēlamies patvaļīgu nepārtrauktu funkciju virkni $\{\varphi_n\} \in \Omega$, kura vienmērīgi konverğē uz nepārtrauktu robežfunkciju $\varphi$. Tā kā $f(t, \cdot)$ ir nepārtraukts gandrīz visiem $t$, tad gandrīz visiem $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

$$\lim_{n\to+\infty} f(t,\varphi_n(t)) = f(t,\varphi(t)).$$

Pēc Lebega teorēmas par robežpāreju integrālī seko

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{L}\varphi_n(t) = x_0 + \lim_{n\to+\infty} (L)\int_{t_0}^{t} (f(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s$$

$$= x_0 + (L)\int_{t_0}^{t} (f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\varphi(t).$$

Seko attēlojums $\mathscr{L}$ ir nepārtraukts.

Ievērojam, ka

$$|\mathscr{L}\varphi(t') - \mathscr{L}\varphi(t)| \le \left|(L)\int_{t}^{t'} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s\right| \le |M(t') - M(t)|.$$

No funkcijas $M\colon [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ nepārtrauktības izriet tās vienmērīgā nepārtrauktība. Tāpēc funkcijas $\mathscr{L}\varphi$ ir vienādi nepārtrauktas, ja $\varphi \in \Omega$. Bez tam

$$\|\mathscr{L}\varphi\| \le \max_{|t-t_0|\le\alpha} |M(t)| + |x_0| \le b + |x_0|.$$

Seko kopa $\mathscr{L}\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā $\mathscr{B}$.

No Šaudera teorēmas izriet, ka kopa $\Omega$ satur attēlojumma $\mathscr{L}$ nekustīgo punktu. Savukārt attēlojuma $\mathscr{L}$ nekustīgais punkts ir Košī problēmas (1.2) atrisinājums. $\square$

## 1.4 Košī problēmas lokālā vispārinātā atrisinājuma eksistence

Eksistē funkcijas, kuras gandrīz visur ir diferencējamas, tās atvasinājums nav integrējams Lebega nozīmē, bet ir integrējams Rīmana nozīmē. Apskatām nepārtrauktu skalāru funkciju

$$F(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t^2}, & \text{ja } t \ne 0 \\ 0, & \text{ja } t = 0. \end{cases}$$

Tās atvasinājums ir

$$f(t) = \dot{F}(t) = \begin{cases} 2t \sin\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\cos\frac{1}{t^2}, & \text{ja } t \neq 0 \\ 0, & \text{ja } t = 0. \end{cases}$$

Funkcija $f$ nav integrējama Lebega nozīmē nevienā intervālā, kas satur punktu $t = 0$ (kaut gan Lebega integrālis ir vispārīgāks par Rīmana integrāli, tas neeksistē ja funkcija ir integrējama, bet nav absolūti integrējama Rīmana nozīmē). Seko, atbilstošam diferenciālvienādojumam $\dot{x} = f(t)$ nevienā intervālā, kas satur punktu $t = 0$ neizpildās Karateodori atrisinājuma eksistences teorēmas nosacījumi, kaut gan diferenciālvienādojumam eksistē nepārtraukts un visur diferencējams atrisinājums $\varphi(t) = F(t) + C$, kur $C \in \mathbb{R}$ ir patvaļīga konstante. Šo pretrunu novērš Perona integrālis un vispārinātais atrisinājums.

**Definīcija 1.10.** Nepārtrauktu un gandrīz visur diferencējamu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$, kuras atvasinājums ir lokāli integrējams Perona nozīmē, sauc par diferenciālvienādojuma (1.1) *vispārināto atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja:

(i) $(t, \varphi(t)) \in G$ visiem $t \in I$;
(ii) $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ gandrīz visiem $t \in I$.

**Definīcija 1.11.** Nepārtrauktu un gandrīz visur diferencējamu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$, kuras atvasinājums ir lokāli integrējams Perona nozīmē, sauc par *Košī problēmas* (1.2) *vispārināto atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja:

(i) $(t, \varphi(t)) \in G$ visiem $t \in I$;
(ii) $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ gandrīz visiem $t \in I$;
(iii) $\varphi(t_0) = x_0$.

**Definīcija 1.12.** Diferenciālvienādojums (1.1) apmierina *vispārinātā atrisinājuma eksistences nosacījumus*, ja katram $(t_0, x_0) \in G$ eksistē pozitīvs skaitlis $\delta(t_0, x_0) > 0$ un nepārtraukta funkcija $\varphi\colon I_\delta \to \mathbb{R}^n$, kur $I_\delta = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < \delta\}$ tāda, ka $\varphi$ ir Košī problēmas (1.2) vispārinātais atrisinājums.

**Definīcija 1.13.** Saka ka $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ir *Perona attēlojums*[18], ja

$$f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t),$$

[18] Komentārus skat. monogrāfijā S.Schwabik. *Generalized Ordinary Differential Equations*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1992

kur

(i) funkcija $f_1(\cdot,x)$ ir mērojama visiem $x$;
(ii) attēlojums $f_1(t,\cdot)$ ir nepārtraukts gandrīz visiem $t$;
(iii) katram $(t_0,x_0)\in G$ eksistē apkārtne $U(t_0,x_0)\subset G$ un nenegatīva Lebega integrējama funkcija $m\colon I\to\mathbb{R}_+$ tāda, ka gandrīz visiem $t$, $(t,x)\in U(t_0,x_0)$, ir spēkā nevienādība

$$|f_1(t,x)|\le m(t).$$

(iv) funkcija $f_2$ ir lokāli integrējama Perona nozīmē.

Ievērojam, ka ja $f_2(t)\equiv 0$, tad Perona attēlojums ir arī Karateodori attēlojums.

**Teorēma 1.3.** *Ja $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ ir Perona attēlojums, tad diferenciālvienādojums* (1.1) *apmierina vispārinātā atrisinājuma eksistences nosacījumus.*

*Pierādījums.* Ņemam patvaļīgu $(t_0,x_0)\in G$ un izvēlamies $a>0$ un $b>0$ tā, lai

$$D=\{(t,x)\mid |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}\subset U(t_0,x_0)\subset G.$$

Apskatām funkcijas $M\colon [t_0-a,t_0+a]\to\mathbb{R}$ un $J\colon [t_0-a,t_0+a]\to\mathbb{R}$ definētas ar Lebega integrāļa

$$M(t)=(L)\int_{t_0}^{t} m(s)\,\mathrm{d}s$$

un Perona integrāļa

$$J(t)=(P)\int_{t_0}^{t} f_2(s)\,\mathrm{d}s$$

palīdzību. Simbols $(P)$ nozīmē, ka apskatītais integrālis ir Perona integrālis. Funkcijas $M$ un $J$ ir nepārtrauktas, $M(t_0)=0$ un $J(t_0)=0$. Funkciju $M$ un $J$ nepārtrauktību dēļ eksistē tāds $\alpha$, kur $0<\alpha\le a$, ka visiem $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ izpildās novērtējums

$$|M(t)|+|J(t)|\le b.$$

Analogi Teorēmas 1.1 pierādījumam aplūkojām Banaha telpu $\mathscr{B}$, kuras elementi ir nepārtrauktas skalāra argumenta funkcijas definētas slēgtā ierobežotā intervālā

$$\mathscr{B} = \{\varphi \mid \varphi\colon [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^n \text{ un } \varphi \text{ ir nepārtrauktas}\}.$$

Tad Banaha telpas $\mathscr{B}$ apakškopa

$$\Omega = \{\varphi \in \mathscr{B} \mid |\varphi(t) - x_0| \le b\}$$

ir slēgts, ierobežots un izliekts apgabals.

Tā kā $f_1(\cdot, x)$ ir mērojama funkcija, tad funkcija $f_1(\cdot, \varphi(\cdot))$ ir mērojama, ja $\varphi \in \Omega$. Ievērojot (iii) iegūstam, ka $f_1(\cdot, \varphi(\cdot))$ ir integrējama Lebega nozīmē un tātad arī integrējama Perona nozīmē. Seko funkcija $f(\cdot, \varphi(\cdot))$ ir integrējama Perona nozīmē.

Aplūkojam attēlojumu $\mathscr{L}$, kuru definējam kopā $\Omega$ ar vienādību

$$\mathscr{L}\varphi(t) = x_0 + (P)\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Līdz ar to attēlojums $\mathscr{L}$ ir korekti definēts, $\mathscr{L}\varphi$ ir nepārtraukta $t$ funkcija un $\mathscr{L}\varphi(t_0) = x_0$. Bez tam

$$|\mathscr{L}\varphi(t) - x_0| \le \left|(P)\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\right|$$

$$\le \left|(L)\int_{t_0}^{t} f_1(s, x)\,\mathrm{d}s\right| + \left|(P)\int_{t_0}^{t} f_2(s)\,\mathrm{d}s\right| \le |M(t)| + |J(t)| \le b.$$

Seko

$$\mathscr{L}\Omega \subset \Omega.$$

Pierādām, ka attēlojums $\mathscr{L}$ ir nepārtraukts slēgtā apgabalā $\Omega$. Izvēlamies patvaļīgu nepārtrauktu funkciju virkni $\{\varphi_n\} \in \Omega$, kura vienmērīgi konverğē uz robežfunkciju $\varphi$. Tā kā $f_1(t, \cdot)$ ir nepārtraukts gandrīz visiem $t$, tad gandrīz visiem $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

$$\lim_{n\to+\infty} f_1(t, \varphi_n(t)) = f_1(t, \varphi(t)).$$

Pēc Lebega teorēmas par robežpāreju integrālī seko

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{L}\varphi_n(t) = x_0 + \lim_{n\to+\infty} (L)\int_{t_0}^{t} f_1(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s + (P)\int_{t_0}^{t} f_2(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= x_0 + (L)\int_{t_0}^{t} f_1(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s + (P)\int_{t_0}^{t} f_2(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\varphi(t).$$

Seko attēlojums $\mathscr{L}$ ir nepārtraukts.

Pierādam, ka kopa $\mathscr{L}\Omega$ ir Banaha telpas $\mathscr{B}$ prekompakts. Ievērojam, ka

$$|\mathscr{L}\varphi(t') - \mathscr{L}\varphi(t)| \le \left|(P)\int_{t}^{t'} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s\right|$$
$$\le |M(t') - M(t)| + |J(t') - J(t)|.$$

No funkciju $M, J\colon [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ nepārtrauktības izriet to vienmērīgā nepārtrauktība. Tāpēc funkcijas $\mathscr{L}\varphi$ ir vienādi nepārtrauktas, ja $\varphi \in \Omega$. Bez tam

$$\|\mathscr{L}\varphi\| \le \sup_{|t-t_0|\le\alpha} (|M(t)| + |J(t)|) + |x_0| \le b + |x_0|.$$

Saskaņā ar Arceli-Askoli teorēmu $\mathscr{L}\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā $\mathscr{B}$.

Saskaņā ar Šaudera nekustīgā punkta teorēmu slēgta, ierobežota un izliektā kopa $\Omega$ satur attēlojuma $\mathscr{L}$ nekustīgo punktu. Savukārt attēlojuma $\mathscr{L}$ nekustīgais punkts ir integrālvienādojuma (1.3) un līdz ar to Košī problēmas (1.2) atrisinājums. □

*Piezīme 1.4.* Apskatām Košī problēmu

$$\dot{x} = 0,\; x(0) = 0. \tag{1.5}$$

Ja vispārinātā atrisinājuma definīcijā atmetam prasību, ka atrisinājuma atvasinājums ir lokāli integrējams Perona nozīmē, tad Košī problēmai (1.5) nepastāv atrisinājuma unitāte, lai gan diferenciālvienādojuma labā puse apmierina Lipšica nosacījumus. Košī problēmu apmierina gan triviālais atrisinājums, gan arī Kantora funkcija (Kantora kāpnes)

$g\colon [0,1] \to [0,1]$, $g(0) = 0$ (nepārtraukta, monotoni augoša funkcija, kuras atvasinājums gandrīz visur ir vienāds ar nulli).

## 1.5 Atrisinājuma turpināmība.

Tālāk apskatām tādus diferenciālvienādojumus (1.1), kuri apmierina atrisinājuma eksistences teorēmu nosacījumus (attēlojums $f$ ir vai nu nepārtraukts vai Karateodori vai Perona attēlojums). Tad diferenciālvienādojuma atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un tādēļ lietosim terminu *nepārtraukts atrisinājums*.

**Definīcija 1.14.** Intervālu $I$ sauc par diferenciālvienādojuma (1.1) nepārtraukta atrisinājuma $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *maksimālo definīcijas intervālu*, ja neeksistē tāds diferenciālvienādojuma (1.1) nepārtraukts atrisinājums $\varphi_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$, ka $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, ja $t \in I \cup I_1$ un $I \cup I_1 \neq I$.

**Lemma 1.3.** *Pieņemam, ka* $(t_0, x_0) \in K$, *kur* $K$ *ir kompakts un* $K \subset G$. *Tad eksistē* $\alpha > 0$ *tāds, ka katrs Košī problēmas* (1.2) *nepārtraukts atrisinājums eksistē intervālā* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

*Pierādījums.* Apskatām vispārīgo gadījumu, t.i. Perona atrisinājumu. Izvēlamies $b > 0$ tādu, lai

$$\bigcup_{t_0, x_0 \in K} \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq 2b,\ |x - x_0| \leq 2b\} \subset G.$$

Tas ir iespējams, jo $K$ ir kompakts un $G$ vaļējs apgabals. Apzīmējam ar

$$K_b = \bigcup_{t_0, x_0 \in K} \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq b,\ |x - x_0| \leq b\}.$$

Tā kā $f_1$ ir Karateodori attēlojums, tad katram $(t_0, x_0) \in K_b$ eksistē apkārtne $U \subset G$ un integrējama funkcija $m\colon I \to \mathbb{R}_+$, ka

$$|f_1(t,x)| \leq m(t),$$

ja $(t,x) \in U$. Šīs apkārtnes pārklāj kompaktu $K_b$. No iegūtā kompakta pārklājuma izdalām galīgu pārklājumu $\{U_j\}$. Apzīmējam ar $I_K = \mathrm{pr}_t K_b$ un $K_x = \mathrm{pr}_x K_b$. Definējam funkciju $m_K\colon I_K \to \mathbb{R}_+$ ar formulas

$$m_K(t) = \sum_j m_j(t)$$

palīdzību, kur $m_j(t) = 0$, ja $t \notin I_j$. Tālāk apskatām jaunu funkciju $M_K\colon [0,b] \to \mathbb{R}_+$, kur

$$M_K(t) = \sup_{t_0 \in I_K, u \in [0,t]} \int_{t_0}^{t_0+u} m_K(s)\,\mathrm{d}s.$$

Tā kā $I_K$ ir kompakts un $m_K$ ir integrējama funkcija, tad $M_K$ ir nepārtraukta un monotoni augoša funkcija.

Apzīmējam ar $Z_b \subset K_x$ kopas $K_x$ $b$–tīklu. Apskatām jaunu funkciju $J_K\colon [0,b] \to \mathbb{R}_+$, kur

$$J_K(t) = \max_{x \in Z_b} \sup_{t_0 \in I_K, u \in [0,t]} \left| (P) \int_{t_0}^{t_0+u} f_2(s)\,\mathrm{d}s \right|.$$

Tā kā $I_K$ ir kompakts un $f_2$ ir integrējama Perona nozīmē, tad $J_K$ ir nepārtraukta un monotoni augoša funkcija. Funkciju $M_K$ un $J_K$ nepārtrauktības dēļ eksistē tāds $\alpha \in [0,b]$, ka visiem $t \in [0,\alpha)$ izpildās novērtējums

$$0 \le M_K(t) + J_K(t) < b.$$

un

$$0 \le M_K(\alpha) + J_K(\alpha) \le b.$$

No pēdējā novērtējuma izriet, ka

$$0 \le M_K(|t-t_0|) + J_K(|t-t_0|) < b$$

ja tikai $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Iegūtais novērtējums izpildās visiem pāriem $(t_0, x_0) \in K$. No lokālās vispārinātā atrisinājuma eksistences teorēmas izriet, ka Košī problēmai (1.2) eksistē vispārinātais atrisinājums $\varphi\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ un $|\varphi(t) - x_0| \le b$ ja tikai $(t_0, x_0) \in K$.
□

**Teorēma 1.4.** *Pieņemam, ka differenciālvienādojums* (1.1) *apmierina atrisinājuma eksistences teorēmu nosacījumus (attēlojums $f$ ir vai nu nepārtraukts vai Karateodori vai Perona attēlojums). Tad katrs diferenciālvienādojuma* (1.1) *atrisinājums $\varphi$ ir turpināms kā atrisinājums uz maksimālo definīcijas intervālu $(\omega_-, \omega_+)$, pie kam atrisinājums $\varphi$ tiecās uz apgabala $G$ robežu $\partial G$, ja $t \to \omega_- + 0$ vai $t \to \omega_+ - 0$.*

Apgalvojums "$\varphi$ tiecas uz $\partial G$, ja $t \to \omega_+ - 0$" nozīmē, ka jebkurai kompaktai kopai $K \subset G$ punkts $(t, \varphi(t)) \notin K$, ja $t$ pietiekami tuvs $\omega_+$.

*Pierādījums.* Pieņemam, ka $G_j$, $j \in \mathbb{N}$ ir tādas $G$ vaļējas apakškopas, ka $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$, $\overline{G}_j$ ir kompakts un $\overline{G}_j \subset G_{j+1}$. Piemēram,

$$G_j = \{(t,x) \in G \mid |t| < j, |x| < j \text{ un } \operatorname{dist}((t,x), \partial G) > 1/j\}.$$

Pieņemam, ka $(t_0,x_0) \in \overline{G}_j$. No Lemmas 1.3 izriet tāda $\alpha_j > 0$ eksistence, ka katrs Košī problēmas (1.2) nepārtraukts atrisinājums ir definēts intervālā $[t_0 - \alpha_j, t_0 + \alpha_j]$.

Apskatam patvaļīgu atrisinājumu $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$. Pieņemam, ka $I = (a, b_0)$ nav maksimālais definīcijas intervāls. Bez vispārīguma ierobežojuma var pieņemt, ka $b_0 < +\infty$ un atrisinājums $\varphi$ ir turpināms pa labi.

Pieņem, ka $j_1$ ir pietiekoši liels skaitlis un $(b_0, \varphi(b_0)) \in \overline{G}_{j_1}$. Tad nepārtraukto atrisinājumu $\varphi$ var turpināt uz intervālu $[b_0, b_0 + \alpha_{j_1}]$. Ja $(b_0 + \alpha_{j_1}, \varphi(b_0 + \alpha_{j_1})) \in \overline{G}_{j_1}$, tad $\varphi$ var turpināt uz intervālu $[b_0 + \alpha_{i_1}, b_0 + 2\alpha_{j_1}]$. Tā kā $\overline{G}_{j_1}$ ir kompakts, tad eksistē $n_1 \geq 1$, ka atrisinājumu $\varphi$ var turpināt uz intervālu $[a, b_1]$, kur $b_1 = b_0 + n_1\alpha_{j_1}$ un $(b_0 + n_1\alpha_{j_1}, \varphi(b_0 + n_1\alpha_{j_1})) \notin \overline{G}_{j_1}$.

Turpinot šos spriedumus iegūstam veselu skaitļu virkni $j_1 < j_2 < \ldots$ un skaitļus $b_0 < b_1 < \ldots$. Tā kā virkne $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ir monotoni augoša, tad eksistē vai nu galīga robeža $\omega_+ = \lim_{k\to+\infty} b_k$ vai $\omega_+ = +\infty$, t.i. atrisinājums $\varphi$ ir turpināms intervālā $(a, \omega_+)$, pie kam $(b_k, \varphi(b_k)) \notin \overline{G}_{j_k}$.

Lai pierādītu, ka $\varphi(t) \to \partial G$, ja $t \to \omega_+ - 0$ pietiek pārbaudīt, ka neviens virknes $(t_k, \varphi(t_k))$ robežpunkts nepieder $G$, ja $t_k \to \omega_+ - 0$.

Pieņemam pretējo, t.i., $(\omega_+, \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k)) \in G$. Tad eksistē tāda apkārtne $U$ un pietiekoši liels $N$, ka $(\omega_+, \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k)) \in U \subset G_N$. Līdz ar to, ja $k > N$, tad $(t_k, \varphi(t_k)) \in U \subset G_N$. No Lemmas 1.3 seko, ka katras Košī problēmas

$$\dot{x} = f(t,x),\ x(t_k) = \varphi(t_k)$$

atrisinājums ir turpināms intervālā $[t_k - \alpha_k, t_k + \alpha_k]$. Ja savukārt $k > N$, tad $t_k + \alpha_k > \omega_+$. Bet tādā gadījumā atrisinājuma maksimālā definīcijas intervāla galapunkts nav $\omega_+$. Iegūtā pretruna pierāda teorēmu. $\square$

*Piezīme 1.5.* Apskatām Košī problēmu skalāram diferenciālvienādojumam ar nepātrauktu labo pusi

$$\dot{x} = \begin{cases} 3x^{2/3}, & \text{ja } x \le 1, \\ 3x^2, & \text{ja } x > 1. \end{cases} \qquad x(0) = 0,$$

kuram neizpildās atrisinājuma unitātes nosacījumi. Tad funkcijas

$$\varphi_1(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

un

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{ja } t \le 0, \\ t^3, & \text{ja } 0 \le t \le 1, \\ (4-3t)^{-1}, & \text{ja } 1 \le t < 4/3 \end{cases}$$

ir divi atškirīgi nepārtraukti diferencējami vienas un tās pašas Košī problēmas atrisinājumi, pie kam ar atšķirīgiem maksimālās eksistences intervāliem,

## 1.6 Košī problēmas atrisinājuma unitāte, ja $f$ ir Lipšica attēlojums.

**Definīcija 1.15.** Diferenciālvienādojums (1.1) apmierina *atrisinājuma unitātes nosacījumus*, ja jebkuriem diviem atrisinājumiem $\varphi_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ un $\varphi_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ no vienādības $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ seko $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ visiem $t \in I_1 \bigcap I_2$ un $t_0 \in I_1 \bigcap I_2$.

**Definīcija 1.16.** Saka, ka $f(t,\cdot)$ ir *lokāli Lipšica*[19] *attēlojums*, ja visiem $(t_0,x_0) \in G$ eksistē apkārtne $U(t_0,x_0) \subset G$ un integrējama funkcija $L\colon I \to \mathbb{R}_+$, ka

$$|f(t,x) - f(t,x')| \le L(t)|x - x'|,$$

ja tikai $(t,x),(t,x') \in U$.

**Teorēma 1.5.** *Ja diferenciālvienādojumam* (1.1) *eksistē nepārtraukts atrisinājums un* $f(t,\cdot)$ *ir lokāli Lipšica attēlojums, tad diferenciālvienādojums* (1.1) *apmierina atrisinājuma unitātes nosacījumus.*

[19] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, ⋆1832.14.V, Königsberg, Prūsija, †1903.7.X, Bonna, Vācija, vācu matemātiķis, profesors Bonnas universitātē. Nozīmīgi darbi matemātiskajā analīzē, diferenciālvienādojumos, teorētiskajā mehānikā un algebrā

*Pierādījums.* Pieņemsim, pretējo, t.i., ka neizpildās atrisinājuma unitātes nosacījumi. No lokālām atrisinājuma eksistences teorēmām seko, ka eksistē nepārtraukti atrisinājumi $\varphi_1 : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^n$, ka $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, bet $\varphi_1(t) \not\equiv \varphi_2(t)$. Apzīmējam

$$M = \sup_{|t-t_0|\le\alpha} \left\{ |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \exp\left( -\left| \int_{t_0}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \right\} > 0.$$

Izlietojot lemmu 1.1 novērtējam divu integrālvienādojumu (1.3) atrisinājumu starpību

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s)))\,\mathrm{d}s \right|.$$

Tad

$$\begin{aligned}
&|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \exp\left( -\left| \int_{t_0}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))) \exp\left( -\left| \int_{t_0}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \mathrm{d}s \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} L(s)|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \exp\left( -\left| \int_{t_0}^{s} L(s)\,\mathrm{d}s \right| - \left| \int_{s}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \mathrm{d}s \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} ML(s) \exp\left( -\left| \int_{s}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \mathrm{d}s \right| = M \exp\left( -\left| \int_{s}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \Bigg|_{t_0}^{t} \\
&= M \left( 1 - \exp\left( -\left| \int_{t_0}^{t} L(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \right) \\
&\le M \left( 1 - \exp\left( -\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} L(s)\,\mathrm{d}s \right) \right).
\end{aligned}$$

Seko

$$M \le M\left(1-\exp\left(-\int\limits_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} L(s)\,\mathrm{d}s\right)\right).$$

Iegūstam $M = 0$, no kurienes izriet, ka visiem $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t).$$

□

*Piezīme 1.6.* Pikāra[20]-Lindelēfa [21] teorēma pierāda Košī problēmas (1.2) lokālā atrisinājuma eksistenci un unitāti, ja diferenciālvienādojuma labā puse ir nepārtraukta (vai arī Karateodori, Perona attēlojums) un apmierina lokālos Lipšica nosacījumus. Pierādījuma gaita ir līdzīga Peano teorēmas pierādījumam. Tā pati Banaha telpa $\mathscr{B}$ un tas pats attēlojums $\mathscr{L}\colon \Omega \to \Omega$. Izlietojot Lipšica nosacījumus, pierādam, ka $\mathscr{L}$ (vispārīgā gadījumā attēlojuma $\mathscr{L}$ $p$-tā iterācija, $p \ge 1$) ir saspiešanas attēlojums un no Banaha saspiešanas attēlojumu principa seko, ka attēlojumam $\mathscr{L}$ ir viens vienīgs nekustīgais punkts.

## 1.7 Adamara lemma

Ja nepārtraukta skalāra funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukti diferencējama vaļējā intervālā, tad ir spēkā vidējās vērtības teorēma, t.i. eksitē $c \in (a,b)$ tāds, ka

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Ja bez tam atvasinājums $f'$ ir ierobežots

$$\sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \le M,$$

tad

$$|f(b) - f(a)| \le M|b-a|,$$

[20] Charles Émile Picard, ⋆1856.24.VII, Parīze, Francija, †1941.11.XII, Parīze; franču matemātiķis, beidzis Augstāko Normālskolu, Parīzes universitātes profesors, nozīmīgi darbi analīzē, funkciju teorijā, diferenciālvienādojumos, analītiskā ģeometrijā. Viņš attīstīja pakāpenisko tuvinājumu metodi

[21] Ernst Leonard Lindelöf, ⋆1870.7.III, Helsinki, Somija, †1946.4.VI Helsinki; somu matemātiķis, profesors matemātikā, nozīmīgi darbi topoloģijā un diferenciālvienādojumos

t.i. funkcija $f$ apmierina Lipšica nosacījumus.

Daudzargumentu vektoru funkcijām var iegūt analogu novērtējumu. Adamāra[22] lemma dod pietiekamos nosacījumus, lai attēlojums apmierinātu Lipšica nosacījumus.

**Lemma 1.4.** *Pieņemam, ka attēlojums $f\colon G\times D\to\mathbb{R}^n$ ir nepārtraukti diferencējams pēc $x$ izliektā pēc $x\in G\subset\mathbb{R}^n$ apgabalā, $y\in D\subset\mathbb{R}^m$, un*

$$\sup_{x\in G}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| = L(y) < \infty.$$

*Tad spēkā novērtējums*

$$|f(x',y)-f(x,y)| \le L(y)|x'-x|.$$

Šeit

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial x_j}\right), \quad i,j=1,2,\dots,n$$

ir Jakobi matrica

*Pierādījums.* Apskatām funkciju $h\colon [0,1]\to\mathbb{R}^n$, kur $h(s)=f(x+s(x'-x),y)$. Atzīmējam, ka $x+s(x'-x\in G$, ja $0\le s\le 1$ apgabala G izliektības dēļ. Saskaņā ar Ņūtona-Leibnica formulu

$$h(1)-h(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ievērojam, ka $h(1)=f(x',y)$, $h(0)=f(x,y)$ un

$$\frac{\mathrm{d}h(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f(x+s(x'-x),y)}{\partial x}\cdot(x'-x).$$

Seko

$$\left|\frac{\mathrm{d}h(s)}{\mathrm{d}s}\right| \le L(y)|x'-x|$$

un

$$|f(x',y)-f(x,y)| \le L(y)|x'-x|,$$

kas bija jāpierāda. □

[22] Jacques Hadamard, ⋆1865.8.XII, Versaļa, Francija, †1963.17.X, Parīze, Francija; franču matemātiķis, beidzis Ecole Normale Superiore, profesors Bordo, Sorbonā, Ecole Polytechnique, Ecole Centrale Paris. Nozīmīgi darbi skaitļu teorijā, diferenciālvienādojumos, parciālos diferenciālvienādojumos, variāciju rēķinos. II pasaules kara laikā emigrēja uz ASV

## 1.8 Gronuola lemma.

Diferenciālvienādojumu teorijā liela loma ir Gronuola[23] tipa nevienādībām.

**Lemma 1.5.** *Pieņemam, ka nepārtrauktas funkcijas* $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *un* $L\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *visiem* $t \in [a,b]$ *apmierina nevienādību*

$$u(t) \le \alpha(t) + \int\limits_a^t L(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

*Tad visiem* $t \in [a,b]$

$$u(t) \le \alpha(t) + \int\limits_a^t L(s)\alpha(s)\exp\left(\int\limits_s^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s. \tag{1.6}$$

*Pierādījums.* Apskatām funkciju $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kur

$$v(t) = \int\limits_a^t L(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Tad $v(a) = 0$ un visiem $t \in [a,b]$

$$v'(t) = L(t)u(t) \le L(t)\alpha(t) + L(t)\int\limits_a^t L(s)u(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= L(t)\alpha(t) + L(t)v(t).$$

Pareizinot nevienādības abas puses ar

$$\exp\left(-\int\limits_a^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) > 0$$

[23] Thomas Hakon Gronwall, ⋆1877.16.I Dylta bruk, Zviedrija, †1932.9.V Ņujorka, ASV, studējis Stokholmas universitātē, no kuras disciplīnas pārkāpumu dēl izslēgts, beidzis Šarlotenberas Tehnisko institūtu Berlīnē. 1904. gadā emigrējis uz ASV, asociētais profesors Prinstonas, vēlāk Kolumijas universitātē Ņujorkā. Strādājis arī Amerikas Telefonu un Telegrāfa kompānijā. Nozīmīgi darbi diferemc- un integrālvienādojumos, kompleksā mainīgā funkciju teorijā, analītiskajā skaitļu teorijā

iegūstam

$$\frac{d}{dt}\left(v(t)\exp\left(-\int\limits_a^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right) \le \alpha(t)L(t)\exp\left(-\int\limits_a^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Integrējam robežās $[a,t]$. Tad

$$v(t)\exp\left(-\int\limits_a^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \le \int\limits_a^t \alpha(s)L(s)\exp\left(-\int\limits_a^s L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}s.$$

No šejienes visiem $t \in [a,b]$

$$v(t) \le \int\limits_a^t \alpha(s)L(s)\exp\left(\int\limits_s^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}s.$$

Tā kā $u(t) \le \alpha(t) + v(t)$, tad lemma ir pierādīta. $\square$

*Piezīme 1.7.* Gadījumā ja funkcija $\alpha$ ir nedilstoša, tad no nevienādības (1.6) seko

$$u(t) \le \alpha(t)\left(1 + \int\limits_a^t L(s)\exp\left(\int\limits_s^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}s\right)$$

$$= \alpha(t)\left(1 - \exp\int\limits_s^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big|_{s=a}^{s=t}\right) = \alpha(t)\exp\left(\int\limits_a^t L(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

## 1.9 Augšējais un apakšējais atrisinājums.

Ja $n = 1$, var pierādīt, ka Košī problēmas atrisinājumu var iekļaut starp diviem speciāliem atrisinājumiem – *augšējo* un *apakšējo*.

**Definīcija 1.17.** Košī problēmas atrisinājumu $\varphi_{\sup}\colon I \to \mathbb{R}$ sauc par *augšējo atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja jebkuram šīs pašas Košī problēmas atrisinājumam $\varphi\colon I_1 \to \mathbb{R}$ un visiem $t \in I \bigcap I_1$ izpildās nevienādība

$$\varphi(t) \leq \varphi_{\sup}(t).$$

**Definīcija 1.18.** Košī problēmas atrisinājumu $\varphi_{\inf}\colon I \to \mathbb{R}$ sauc par *apakšējo atrisinājumu* intervālā $I \subset \mathbb{R}$, ja jebkuram šīs pašas Košī problēmas atrisinājumam $\varphi\colon I_1 \to \mathbb{R}$ un visiem $t \in I \bigcap I_1$ izpildās nevienādība

$$\varphi_{\inf}(t) \leq \varphi(t).$$

**Teorēma 1.6.** *Ja $f$ ir Karateodori attēlojums, tad Košī problēmai* (1.2)*, kur $n = 1$, eksistē augšējais un apakšējais atrisinājums.*

*Pierādījums.* Apzīmējām ar $\Gamma$ visu Košī problēmas (1.2) atrisinājumu intervālā $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ kopu un ar

$$\Phi(t) = \sup_{\varphi \in \Gamma} \{\varphi(t)\}.$$

Tā kā $\Gamma$ ir vienādi nepārtrauktu, vienmērīgi ierobežotu funkciju kopa, tad funkcija $\Phi$ eksistē intervālā $I$ un ir nepārtraukta. Acīmredzot

$$\varphi(t) \leq \Phi(t).$$

Pierādīsim, ka

$$\Phi(t) = \varphi_{\sup}(t).$$

Tā kā funkcijas $\Phi$ un $\varphi$ ir vienmērīgi nepārtrauktas, tad katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka visiem $t, t' \in I$ un $|t - t'| < \delta$

$$|\Phi(t) - \Phi(t')| < \varepsilon$$

un

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < \varepsilon.$$

Sadalam intervālu $I$ mazākos intervālos ar punktiem $t_0 - \alpha = t_{-n} < t_{1-n} < \ldots < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + \alpha$ tā, lai

$$\max(t_{i+1} - t_i) < \delta.$$

katram $t_i$ eksistē tāds Košī problēmas atrisinājums $\varphi_i$, ka

$$0 \leq \Phi(t_i) - \varphi_i(t_i) < \varepsilon.$$

Apskatām funkciju $\varphi_\varepsilon\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}_n$, kur

$$\varphi_\varepsilon(t) = \max_{-n \leq i \leq n} \{\varphi_i(t)\}.$$

Absolūti nepārtraukta funkcija $\varphi_\varepsilon$ ir Košī problēmas (1.2) atrisinājums, jo gandrīz visur apmierina diferenciālvienādojumu. Izvēlamies patvaļīgu $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. Tad $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Iegūstam novērtējumu

$$|\Phi(t)-\varphi_\varepsilon(t)|$$

$$\leq |\Phi(t)-\Phi(t_i)|+|\Phi(t_i)-\varphi_\varepsilon(t_i)|+|\varphi_\varepsilon(t_i)-\varphi_\varepsilon(t)| < 3\varepsilon$$

vai

$$\|\Phi-\varphi_\varepsilon\| < 3\varepsilon.$$

Izvēlamies tādu pozitīvu skaitļu virkni $\{\varepsilon_k\}$, ka $\lim_{k\to+\infty}\varepsilon_k = 0$. Atbilstošā atrisinājumu virkne $\{\varphi_{\varepsilon_k}\}$ vienmērīgi konverģē uz robežfunkciju $\Phi$. Ievērojot, ka operatora $\mathscr{L}$ nekustīgo punktu kopa ir slēgta, seko, ka $\Phi$ ir augšējais atrisinājums. Analogi pierāda apakšējā atrisinājuma eksistenci.

Pieņemam, ka $\psi\colon [t_0-\alpha, t_0]\times[0,2b]\to\mathbb{R}_+$ ir Karateodori attēlojums un

$$\sup_{|t-t_0|\leq\alpha}|M(t)| \leq b.$$

Apskatām integrālnevienādību

$$\lambda(t_2) \leq \lambda(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\psi(s,\lambda(s))\,\mathrm{d}s,\ t_0-\alpha\leq t_1<t_2\leq t_0,\ \lambda(t_0)=b>0. \tag{1.7}$$

Ievērojam, ka Košī problēmas

$$\dot{x}=\psi(t,x),\ x(t_0)=b$$

Kararteodori atrisinājums $\varphi\colon [t_0-\alpha, t_0+\alpha]\to[0,2b]$ apmierina arī integrālnevienādību. Bez tam integrālnevienādības atrisinājums ir konstantā funkcija $\lambda$, kur $\lambda(t)=b$. Apzīmējām ar $\Lambda$ visu nenegatīvo nepārtraukto integrālnevienādības (1.7) atrisinājumu intervālā $[t_0-\alpha, t_0]$ kopu un ar

$$\theta(t)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda(t)\}.$$

No iepriekšteiktā izriet $\Lambda\neq 0$ un funkcijas $\theta\colon [t_0-\alpha, t_0]\to[0,b]$ eksistence.

Pieņemam ka $\lambda\in\Lambda$ un $\sigma\in(t_0-\alpha, t_0]$. Apskatām jaunu funkciju $\mu_\sigma\colon [t_0-\alpha, t_0]\to\mathbb{R}_+$, kur

$$\mu_\sigma(t) = \begin{cases} \lambda(\sigma), \text{ja } t \in [t_0 - \alpha, \sigma] \\ \lambda(t), \ \ \text{ja } t \in (\sigma, t_0]. \end{cases}$$

Acīmredzot $\mu_\sigma \in \Lambda$. Vispirms pierādam, ka $\theta$ ir nedilstoša funkcija, t.i., ka

$$\theta(t_1) \leq \theta(t_2),$$

ja $t_0 - \alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq t_0$. Pieņemsim pretējo, t.i. eksistē $t_1$ un $\sigma$, kur $t_0 - \alpha \leq t_1 < \sigma \leq t_0$, bet $\theta(t_1) > \theta(\sigma)$. Apzīmējam ar

$$\delta = \frac{\theta(t_1) - \theta(\sigma)}{2}.$$

No $\theta$ eksistences izriet, ka eksistē tāds integrālnevienādības atrisinājums $\lambda \in \Lambda$, ka $\lambda(\sigma) - \theta(\sigma) < \delta$. No otras puses funkcija $\mu_\sigma$ arī apmierina integrālnevienādību. Tā kā $\mu_\sigma(t_1) = \lambda(\sigma) < \theta(\sigma) + \delta < \theta(t_1)$, iegūstam pretrunu ar $\theta$ definīciju.

Tālāk pierādām, ka $\theta$ ir nepārtraukta funkcija. Tā kā funkcija $M$ ir nepārtraukta un tātad arī vienmērīgi nepārtraukta, tad katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka visiem $t, t' \in I$ un $|t - t'| < \delta$

$$|M(t) - M(t')| < \varepsilon.$$

Sadalam intervālu $[t_0 - \alpha, t_0]$ mazākos intervālos ar punktiem $t_0 - \alpha = t_{-n} < t_{1-n} < \ldots < t_0$ tā, lai

$$\max(t_{i+1} - t_i) < \delta.$$

katram $t_i$ eksistē tāds integrālnevienādības (1.7) atrisinājums $\lambda_i$, ka

$$0 \leq \lambda_i(t_i) - \theta(t_i) < \varepsilon.$$

Definējam funkciju $\lambda_\varepsilon \colon [t_0 - \alpha, t_0] \to [0, b]$. Vispirms definējam $\lambda_\varepsilon$ dalījuma punktos $t_j$, $j = 0, -1, \cdots, -n$

$$\lambda_\varepsilon(t_j) = \min_{-n \leq i \leq 0} \{\lambda_i(t_j)\}.$$

Tālāk definējam visā intervālā $[t_0 - \alpha, t_0]$. Apskatām apakšintervālu $[t_j, t_{j+1}]$. Iespējami divi gadījumi. Ja eksistē $k$, ka $\lambda_\varepsilon(t_j) = \lambda_k(t_j)$ un $\lambda_\varepsilon(t_{j+1}) = \lambda_k(t_{j+1})$, tad

$$\lambda_\varepsilon(t) = \lambda_k(t)$$

visiem $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Ja turpretī $\lambda_\varepsilon(t_j) = \lambda_k(t_j)$ un $\lambda_\varepsilon(t_{j+1}) = \lambda_l(t_{j+1})$, $l \neq k$, tad eksistē $\tau_j \in (t_j, t_{j+1})$ un $\lambda_k(\tau_j) = \lambda_l(\tau_j)$ un atbilstoši

$$\lambda_\varepsilon(t) = \begin{cases} \lambda_k(t), \text{ ja } t \in [t_j, \tau_j] \\ \lambda_l(t), \text{ ja } t \in (\tau_j, t_{j+1}]. \end{cases}$$

Nepārtrauktā funkcija $\lambda_\varepsilon$ ir integrālnevienādības (1.7) atrisinājums. Izvēlamies patvaļīgu $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$. Tad $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Iegūstam novērtējumus:

$$\lambda_\varepsilon(t) \leq \lambda_\varepsilon(t_i) + \varepsilon$$

un

$$0 \leq \lambda_\varepsilon(t) - \theta(t) \leq \lambda_\varepsilon(t_i) + \varepsilon - \theta(t_i) < 2\varepsilon.$$

vai

$$\|\lambda_\varepsilon - \theta\| < 2\varepsilon.$$

Izvēlamies tādu pozitīvu skaitļu virkni $\{\varepsilon_k\}$, ka $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$. Atbilstošā nepārtraukto atrisinājumu virkne $\{\lambda_{\varepsilon_k}\}$ vienmērīgi konverğē uz robežfunkciju $\theta$. Seko $\theta$ ir nepārtraukta funkcija. Pārejot uz robežu integrālvienādībā iegūstam, ka $\theta$ ir (1.7) atrisinājums. $\square$

## 1.10 Košī problēmas atrisinājuma unitāte. (Turpinājums).

**Teorēma 1.7 (Kamkes teorēma).** *Pieņemam, ka $\psi\colon (0,a] \times [0,2b] \to \mathbb{R}_+$ ir Karateodori funkcija un $\psi(t,0) = 0$. Pieņemam, ka katram $\alpha$, kur $0 < \alpha < a$, vienīgā lokāli absolūti nepārtrauktā funkcija, kura gandrīz visur intervālā $0 < t < a$ apmierina diferenciālvienādojumu*

$$\dot{\rho} = \psi(t, \rho(t))$$

*un nosacījumus:*

$$\rho(0) = 0$$

*un*

$$\lim_{t\to+0} \frac{\rho(t)}{t} = 0$$

*ir funkcija, kura ir identiski vienāda ar nulli. Ja $f(\cdot,x)$ ir integrējama Perona nozīmē un $f$, $t \neq t_0$ apmierina nevienādību*

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \psi(|t - t_0|, |x - x'|),$$

*tad izpildās vispārinātā atrisinājuma unitātes nosacījumi.*

**Sekas 1.1 (Nagumo teorēma).** *Funkcija* $\psi(t,r) = t^{-1}r$ *apmierina Kamkes teorēmas prasības.*

**Sekas 1.2 (Osguda teorēma).** *Funkcija* $\psi(t,r) = \phi(t)\omega(r)$*, kur funkcija* $\phi\colon (0,a] \to \mathbb{R}_+$*,* $\omega\colon [0,2b] \to \mathbb{R}_+$*,* $\omega(r) > 0$ *ja* $r > 0$*,*

$$\int\limits_{+0} \phi(t)dt < +\infty$$

*un*

$$\int\limits_{+0} \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty$$

*apmierina Kamkes teorēmas prasības.*

## 1.11 Atrisinājuma nepārtrauktība pēc parametra.

Apskatām Košī problēmu atkarīgu no parametra $\mu$

$$\dot{x} = f(t,x,\mu),\ x(t_0) = x_0, \tag{1.8}$$

kur $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, apgabals $G \subset R \times R^n \times M$ un $M$ ir topoloģiska telpa.

**Teorēma 1.8.** *Pieņemam, ka* $f(\cdot,\cdot,\mu)$ *ir Karateodori attēlojums un attēlojums* $f(t,\cdot,\cdot)$ *ir nepārtraukts punktā* $(x,\mu_0)$ *gandrīz visiem* $t$*, katram* $(t_0,x_0,\mu_0) \in G$ *eksistē apkārtne* $U \subset G$ *un summējama funkcija* $m\colon I \to \mathbb{R}_+$*, ka*

$$|f(t,x,\mu)| \le m(t),$$

*ja* $(t,x,\mu) \in U$ *un Košī problēma* (1.8) *apmierina atrisinājuma unitātes nosacījumus pie* $\mu = \mu_0$*. Tad Košī problēmas* (1.8) *atrisinājums ir nepārtraukts pēc* $\mu$ *pie* $\mu = \mu_0$*.*

# Nodaļa 2
# Lineārie diferenciālvienādojumi

Tikai atsevišķos gadījumos ir iespējams atrast diferenciālvienādojuma atrisinājumu analītiskā formā, piemēram, lineāriem diferenciālvienādojumiem ar konstantiem koeficientiem. Bez tam daudzos gadījumos izmantojot lineāru diferenciālvienādojumu atrisinājumus un to īpašības var izpētīt atbilstošos kvazilineārus diferenciālvienādojumus. Dotā nodaļa veltīta detalizētai lineāru diferenciālvienādojumu atrisinājumu struktūras izpētei.

## 2.1 Lineārs diferenciālvienādojums

Apskatām skalāru lineāru diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = a(t)x, \tag{2.1}$$

kur funkcija $a$ ir nepārtraukta (vispārīgā gadījumā sumējama un integrējama Lebega nozīmē). Izlietojot mainīgo atdalīšanas metodi var atrast diferenciālvienādojuma (2.1) vispārīgo atrisinājumu

$$x(t) = C \exp\left( \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s \right)$$

kur $C \in \mathbb{R}$ ir patvaļīga konstante un $t_0 \in I$. Citiem vārdiem skalārais lineārais diferenciālvienādojums ir atrisināms kvadratūrās.

Apskatām vispārīgāku gadījumu, $n$ diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n \\ \ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

kur funkcijas $a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ir nepārtrauktas (sumējamas un integrējamas Lebega nozīmē).

Apzīmējam ar

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$n \times n$ kvadratiska matricu un

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un $n$ dimensiju vektoru. Tad doto diferenciālvienādojumu sistēmu izmantojot matricas un vektorus var pierakstīt kompaktākā formā

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.2}$$

kura vizuāli atgādina skalāra diferenciālvienādojuma pierakstu un tādēļ turpmākā izklāstā lietosim terminu diferenciālvienādojums termina diferenciālvienādojumu sistēma vietā.

Vēl atzīmējam, ka saskaņā ar diferenciālvienādojumu vispārīgo teoriju katrai Košī problēmai

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$, kurš apmierina doto diferenciālvienādojumu un sākuma nosacījumus.

## 2.2 Lineāri neatkarīgi atrisinājumi

Tālāk apskatām lineāro diferenciālvienādojumu (2.2) un noskaidrosim vispārīgā atrisinājuma struktūru. Pieņemam, ka funkcijas $\varphi^1 \colon I \to \mathbb{R}^n$ un $\varphi^2 \colon I \to \mathbb{R}^n$ ir diferenciālvienādojuma (2.2) divi partikulāri atrisinājumi, $c_1 \in \mathbb{R}$ un $c_2 \in \mathbb{R}$ ir patvaļīgas konstantes. Diferenciālvienādojuma linearitātes dēļ, vektorfunkcija $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$, kur $\varphi = c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2$ arī ir diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājums. Līdzīgi vektorfunkcija $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$, kur

$$\varphi(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \ldots + c_k\varphi^k(t), \tag{2.3}$$

$\varphi^i \colon I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, k$ diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājumi, $c_i \in \mathbb{R}$ patvaļīgas konstantes, arī ir diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājums.

Nedaudz tuvāk apskatīsim formulu (2.3). Pieņemam, ka eksistē $t_0 \in I$, ka $\varphi(t_0) = 0$. Arī nulles funkcija $\psi \colon I \to \mathbb{R}^n$, kur $\psi(t) \equiv 0$ ir diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājums un to sauc par *triviālo atrisinājumu*. Acīmredzot $\psi(t_0) = 0$. Tā kā $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = 0$, no Košī problēmas atrisinājuma unitātes teorēmas seko ka visiem $t \in I$ izpildās identitāte

$$\psi(t) \equiv \varphi(t).$$

Līdz ar to principā iespējami tikai divi gadījumi, t.i. vai nu visiem $t \in I$

$$c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \ldots + c_k\varphi^k(t) \neq 0$$

vai arī

$$c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \ldots + c_k\varphi^k(t) \equiv 0.$$

**Definīcija 2.1.** Diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājumi $\varphi^i \colon I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ir *lineāri neatkarīgi*, ja identitāte

$$c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \ldots + c_k\varphi^k(t) \equiv 0$$

ir spēka tad un tikai tad, ja visi $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pretējā gadījumā atbilstošie atrisinājumi ir *lineāri atkarīgi*.

**Teorēma 2.1.** *Diferenciālvienādojuma* (2.2) *atrisinājumu kopa intervalā $I$ izveido $n$ dimensiju vektoru telpu.*

*Pierādījums.* Jāpierāda, ka eksistē $n$ lineāri neatkarīgi diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājumi un ka jebkurš diferenciālvienādojuma

(2.2) atrisinājums ir šo $n$ lineāri neatkarīgo atrisinājumu lineāra kombinācija.

Izvēlamies $n$ lineāri neatkarīgus vektorus $e^i$, piemēram, $e^i$ ir vektors, kura $i-$tā komponente ir 1, bet pārejās 0. No atrisinājuma eksistences teorēmas seko, ka eksistē atrisinājumi $\varphi^i \colon I \to \mathbb{R}^n$ tādi, ka $\varphi^i(t_0) = e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. No iepriekšējā seko, ka šie atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi.

Parādīsim, ka jebkurš diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājums ir konstruēto atrisinājumu lineāra kombinācija. Ņemam patvaļīgu atrisinājumu $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$. Apskatām vektoru $\varphi(t_0)$. Tad eksistē konstantes $c_i$ tādas, ka $\varphi(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i e^i$. No atrisinājuma unitātes teorēmas seko, ka jebkuru patvaļīgu atrisinājumu var izteikt formā

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi^i(t). \tag{2.4}$$

□

**Definīcija 2.2.** Diferenciālvienādojuma (2.2) lineāri neatkarīgu atrisinājumu $\varphi^i \colon I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ kopu sauc par *fundamentālo atrisinājumu kopu*.

**Sekas 2.1.** *Diferenciālvienādojumam* (2.2) *eksistē fundamantālā atrisinājumu kopa.*

## 2.3 Fundamentālā atrisinājumu matrica

**Definīcija 2.3.** Kvadratisku $n \times n$ matricu $\Phi$, kuras $n$ kolonas ir diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājumi sauc par *atrinājumu matricu*.

Acīmredzot atrisinājumu matrica apmierina matricu diferenciālvienādojumu

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t). \tag{2.5}$$

**Definīcija 2.4.** Kvadratisku matricu $\Phi$, kuras $n$ kolonas ir $n$ lineāri neatkarīgi atrisinājumi $\varphi^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sauc par *fundamentālo atrisinājumu matricu*.

Izmantojot formulu (2.4) un fundamentālo atrisinājumu matricu, jebkuru diferenciālvienādojuma (2.2) atrisinājumu var uzrakstīt formā

$$\varphi(t) = \Phi(t)c,$$

kur

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**Teorēma 2.2.** *Matrica-atrisinājums $\Phi(t)$ ir fundamentālā atrisinājumu matrica, tad un tikai tad, ja* $\det \Phi(t) \neq 0$ *visiem* $t \in I$.

*Pierādījums.* Pieņemam, ka eksistē $t_0 \in I$ tāds ka $\det \Phi(t_0) = 0$. Tad matricas kolonas ir lineāri atkarīgas, ja $t = t_0$. No Košī problēmas unitātes seko, ka kolonas ir lineāri atkarīgi atrisinājumi un tātad visiem $t \in I$ $\det \Phi(t) = 0$. Citiem vārdiem ir iespējami tikai 2 gadījumi: vai nu visiem $t \in I$ $\det \Phi(t) \neq 0$ vai visiem $t \in I$ $\det \Phi(t) = 0$. $\square$

**Teorēma 2.3.** *Ja $\Phi(t)$ ir diferenciālvienādojuma* (2.2) *fundamentālā atrisinājumu matrica un $C$ patvaļīga konstanta nesingulāra matrica, tad $\Phi(t)C$ arī ir fundamentālā atrisinājumu matrica. Katru fundamentālo matricu var uzrakstīt formā $\Phi(t)C$.*

*Pierādījums.* Tā kā $\Phi(t)$ ir fundamentālā atrisinājuma matrica, tad

$$\dot{\Phi}(t)C = A(t)\Phi(t)C, \quad t \in I$$

vai

$$\frac{d(\Phi(t)C)}{dt} = A(t)\left(\Phi(t)C\right).$$

Citiem vārdiem matrica $\Phi(t)C$ ir matrica–atrisinājums. Bez tam ievērojot, ka $\det(\Phi(t)C) = \det \Phi(t) \times \det C \neq 0$, seko, ka $\Phi(t)C$ ir fundamentālā atrisinājumu matrica.

Otrādi, pieņemam, ka $\Phi_1(t)$ un $\Phi_2(t)$ ir divas fundamentālās atrisinājumu matricas. Tā kā $\det \Phi_1(t) \neq 0$, tad eksistē inversā matrica $\Phi_1^{-1}(t)$. Apzīmējam ar $\Psi(t) = \Phi_1^{-1}(t)\Phi_2(t)$ vai $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)\Psi(t)$. Atvasinam pēdējo vienādību. Iegūstam

$$\dot{\Phi}_2(t) = \dot{\Phi}_1(t)\Psi(t) + \Phi_1(t)\dot{\Psi}(t).$$

Ievērojot fundamentālo matricu īpašības seko

$$A(t)\Phi_2(t) = A(t)\Phi_1(t)\Psi(t) + \Phi_1(t)\dot{\Psi}(t)$$

vai

$$\Phi_1(t)\dot{\Psi}(t) = 0.$$

No šejienes $\Psi(t) = C$. Tā kā $\Phi_1(t)$ un $\Phi_2(t)$ ir nesingulāras matricas, tad $\det C \neq 0$ un $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$. $\square$

**Teorēma 2.4 (Ostrogradska-Liuvilla).** *Matricas-atrisinājuma $\Phi(t)$ determinants apmierina skalāru diferenciālvienādojumu*

$$\frac{d(\det\Phi(t))}{dt} = \operatorname{tr}A(t)\det\Phi(t),$$

*kur* $\operatorname{tr}A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ *ir matricas* $A(t)$ *pēda.*

*Pierādījums.* Determinanta $\det\Phi(t)$ atvasinājums ir vienāds ar sekojošu $n$ determinantu summu

$$\frac{d(\det\Phi(t))}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1^1(t) & \dot{\varphi}_1^2(t) & \ldots & \dot{\varphi}_1^n(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \ldots & \varphi_2^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \ldots & \varphi_1^n(t) \\ \dot{\varphi}_2^1(t) & \dot{\varphi}_2^2(t) & \ldots & \dot{\varphi}_2^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \ldots & \varphi_1^n(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \ldots & \varphi_2^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{\varphi}_n^1(t) & \dot{\varphi}_n^2(t) & \ldots & \dot{\varphi}_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Ievērojam, ka

$$\dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)\varphi_k^i(t) \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.6}$$

Apskatām pirmo summas determinantu. Aizvietojam pirmo rindiņu ar izteiksmēm (2.6). Iegūstam

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\varphi_k^1(t) & \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\varphi_k^2(t) & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\varphi_k^n(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \ldots & \varphi_2^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

Determinants nemainās, ja no pirmās rindiņas atņemam otro rindiņu pareizinātu ar $a_{12}(t)$ utt. beidzot atņemot pēdējo rindiņu pareizinātu ar $a_{1n}(t)$. Rezultātā iegūstam, ka pirmais summas determinants ir

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t)\varphi_1^1(t) & a_{11}(t)\varphi_1^2(t) & \dots & a_{11}(t)\varphi_1^n(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \dots & \varphi_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)\det\Phi(t).$$

Rīkojoties analogi ar pārējiem determinantiem mēs rezultātā iegūstam

$$\frac{d(\det\Phi(t))}{dt} = \operatorname{tr}A(t)\det\Phi(t).$$

Nointegrējot pēdējo diferenciālvienādojumu iegūstam

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)\,\mathrm{d}s.$$

□

## 2.4 Lineāri diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem

Košī problēmai lineāram skalāram diferenciālvienādojumam

$$\dot{x} = ax, \quad x(t_0) = x_0$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur $\varphi(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$. Pie reizes atzīmējam, ka eksponentfunkcijas izvirzījums Teilora rindā ir

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{(at)^n}{n!} + \dots, \quad |t| < +\infty.$$

Ievērojot iepriekšteikto, tālāk apskatām Košī problēmu lineāram diferenciālvienādojumam

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0,$$

kur $x \in \mathbb{R}^n$ un $A$ ir $n \times n$ kvadrātiska matrica, kuras elementi ir reāli skaitļi. No parasto diferenciālvienādojumu teorijas izriet, ka arī šai Košī problēmai ir viens vienīgs atrisinājums. Rodas jautājums vai arī dotajā gadījumā atrisinājums ir uzrakstāms analoģiskā formā. Augstāk minētie apsvērumi pamato iespējamo matricas eksponentes definīciju.

**Definīcija 2.5.** Par matricas *eksponenti* saucam matricu rindas summu

$$e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Definīcija ir korekta, jo izmantojot Veierštrasa mažorantu kritēriju, matricu rinda absolūti konverģē jebkurai kvadrātiskai matricai $A$[1]. Reizē iegūstam novērtējumu

$$\|e^A\| \le \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} \le e^{\|A\|}.$$

*Īpašība 2.1.* Ja matricas $A$ un $B$ ir komutatīvas, t.i. $AB = BA$, tad

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Šī ir raksturīgā eksponentfunkcijas īpašība.

Atzīmējam, ka, ja matricas $A$ un $B$ ir komutatīvas, tad ir spēkā Ņutona binomiāla formula, t.i.

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} A^i B^{n-i}.$$

Tāpēc

$$e^A e^B = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^i B^j}{i! j!}.$$

Apzīmējam $i + j = s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Tad $j = s - i \ge 0$, seko $0 \le i \le s$. Tā kā rinda konverģē absolūti, varam mainīt summācijas kārtību un iegūstam

$$e^A e^B = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{s} \frac{A^i B^{s-i}}{i!(s-i)!} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i}$$

$$= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^s}{s!} = e^{A+B}.$$

*Īpašība 2.2.* Pieņemam, ka $A_1 = SAS^{-1}$, kur $\det S \ne 0$. Tad

---

[1] Kā vektora $x \in \mathbb{R}^n$ normu ņemam tā garumu $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ un matricas $A$ normu definējam ar vienādību $\|A\| = \sup_{|x| \le 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|$. Tad vienības matricas $E$ norma ir $\|E\| = \sup_{|x|=1} |Ex| = \sup_{|x|=1} |x| = 1$.

$$e^{A_1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(SAS^{-1})^i}{i!} = S\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}\right) S^{-1} = Se^A S^{-1}.$$

**Uzdevums 2.1.** Pierādīt, ka vienīgā nepārtrauktā funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, kura apmierina funkcionālvienādojumu

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

ir $f(x) = \exp(ax)$, $a \in \mathbb{R}$.

Apskatām attēlojumu $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, kur $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ un $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Atrodam attēlojuma atvasinājumu (pierādīt, ka atvasināšana ir korekta). Iegūstam

$$\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A^i}{(i-1)!}(t-t_0)^{i-1}x_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = e^{A(t-t_0)}Ax_0.$$

No pēdējās formulas izriet, ka attēlojums $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, kur $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, apmierina Košī problēmu lineāram diferenciālvienādojumam

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(t_0) = x_0.$$

No Košī problēmas atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmas izriet ka atrastais atrisinājums arī ir vienīgais Košī problēmas atrisinājums.

Tālāk izmantojot matricu teoriju precizēsim matricas $e^{At}$ struktūru un attiecīgās matricas normas novērtējumus. Kā zināms ar piemērotu lineāru nesingulāru transformāciju $S$, $\det S \neq 0$ matricu $A$ var novest uz Žordāna normālformu $J$

$$J = SAS^{-1}.$$

Žordana normālformā matricai ir kvazidiagonāla forma, t.i. matrica sastāv no šūnām, nediagonālo šūnu visi elementi ir nulles, bet diagonālās šūnas ir kvadratiskas un to elementus nosaka matricas $A$ īpašvērtības[2] (reāli vai kompleksi skaitļi) un atbilstošo īpašvērtību elementārie dalītāji. Matricas $A$ reālā Žordana normālforma ir

$$J = \mathrm{diag}[J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \ldots, J_m(\lambda_m)],$$

[2] Matricas $A$ īpašvērtības ir $n$-tās kārtas algebriska vienādojuma $\det(A - \lambda E) = 0$ saknes

kur $m \leq n$. Ievērosim, ka sareizinot divas matricas ar vienādu sadalījumu šūnās reizinājumā iegūstam matricu ar tādu pašu šūnu struktūru. Pieņemsim, ka mums ir divas šūnu matricas ar vienādu struktūru

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m), \text{ kur } A_i \text{ ir } n_i \times n_i \text{ šūna},$$

$$B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m), \text{ kur } B_i \text{ ir } n_i \times n_i \text{ šūna},$$

un $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Tad matricu $A$ un $B$ reizinājums ir

$$AB = \operatorname{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_mB_m).$$

Izlietojot matricas eksponentes definīciju var pārbaudīt, ka

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}[e^{J_1(\lambda_1)}, e^{J_2(\lambda_2)}, \dots, e^{J_m(\lambda_m)}],$$

un atbilstoši

$$e^{At} = S^{-1}e^{Jt}S = S^{-1}\operatorname{diag}[e^{tJ_1(\lambda_1)}, e^{tJ_2(\lambda_2)}, \dots, e^{tJ_m(\lambda_m)}]S.$$

Tālāk precizēsim šūnu $J_i(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ struktūru. Vispirms apskatām gadījumu, kad matricas $A$ īpašvērtība $\lambda_i$ ir reāls skaitlis un atbilstošā elementārā dalītāja kārta ir $n_i$. Šai īpašvērtībai atbilstošā $n_i \times n_i$ Žordāna šūna ir formā

$$J_i(\lambda_i) = \lambda_i E_i + Z_i,$$

kur $E_i$ – $n_i \times n_i$ vienības šūna, t.i. šūna, kuras diagonāle sastāv no vieniniekiem, bet pārējie elementi ir nulles, un $Z_i$ – $n_i \times n_i$ šūna, kuras augšējā blakus diagonāle sastāv no vieniniekiem, bet pārējie elementi ir nulles[3]. Var viegli pārbaudīt, ka $Z_i$ ir nilpotenta šūna, t.i. $Z_i^k = 0$, ja $k \geq n_i$. Bez tam šūna $Z_i$ komutē ar šūnu $\lambda_i E_i$. Līdz ar to ir iegūstam vienādības

$$e^{tJ_i(\lambda_i)} = e^{t(\lambda_i E_i + Z_i)} = e^{t\lambda_i E_i}e^{tZ_i} = e^{t\lambda_i}e^{tZ_i} = e^{t\lambda_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{t^j Z_i^j}{j!}.$$

Seko novērtējums šūnas normai

[3] Dažreiz pielietojumos ir ērtāk izmantot modificēto Žordāna šūnu. Ar attiecīgas lineāras nesingulāras transformācijas palīdzību var panākt, ka $J_i(\lambda_i) = \lambda_i E_i + \varepsilon Z_i$. kur $\varepsilon \neq 0$ var būt jebkurš skaitlis atšķirīgs no nulles

$$\|e^{tJ_i(\lambda_i)}\| = e^{t\lambda_i} \left\| \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j Z_i^j}{j!} \right\|.$$

Talāk apskatām gadījumu, kad $\lambda_i$ ir komplekss skaitlis. Tā kā matricas $A$ elementi ir reāli skaitļi un atbilstošais harakteristiskais vienādojums ir ar reāliem koeficientiem, tad kompleksās īpašvērtības ir pa pāriem saistītas un atbilstošo elementāro dalītāju kārtas ir vienādas. Katram komplekso īpašvērtību pārim ar elementāra dalītāja kārtu $n_i$ atbilst reāla $2n_i \times 2n_i$ Žordāna šūna formā

$$J_i(\lambda_i) = \operatorname{Re}\lambda_i E_i + \operatorname{Im}\lambda_i I_i + Z_i.$$

Šeit $I_i$ ir $2n_i \times 2n_i$ šūna sastāvoša no $2 \times 2$ apakšūnām. Diagonālās apakšūnas ir formā

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

bet nediagonālo apakšūnu visi elementi ir nulles. Atzīmējam, ka $I_i^2 = -E_i$. Savukārt $Z_i$ ir $2n_i \times 2n_i$ šūna, kuras otrā augšējā blakus diagonāle sastāv no vieniniekiem, bet pārējie šūnas elementi ir nulles. Atzīmējam, ka $Z_i^k = 0$ ja $k \geq n_i$ un šūnas $E_i$, $I_i$ un $Z_i$ savstarpēji pa pāriem komutē. Tāpēc

$$e^{tJ_i(\lambda_i)} = e^{t\operatorname{Re}\lambda_i} e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j Z_i^j}{j!}.$$

Ievērojot matricas eksponentes definīciju atrodam, ka matrica $e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i}$ ir formā

$$e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i} = \cos(t\operatorname{Im}\lambda_i)E_i + \sin(t\operatorname{Im}\lambda_i)I_i.$$

Bez tam atzīmējam, ka matrica $e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i}$ ir ortogonāla, tas ir matricas $e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i}$ transponētā matrica vienāda ar šīs pašas matricas inverso matricu. Atzīmējam ka ortogonāla transformācija neizmaina vektora garumu, mūsu gadījumā vektora normu, t.i.

$$|e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i}x| = |x|$$

un tātad

$$\left\|e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i}\right\| = 1$$

Iegūstam novērtējumu šūnas normai

$$\|e^{tJ_i(\lambda_i)}\| = e^{t\operatorname{Re}\lambda_i}\left\|e^{t\operatorname{Im}\lambda_i I_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{t^jZ_i^j}{j!}\right\| = e^{t\operatorname{Re}\lambda_i}\left\|\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{t^jZ_i^j}{j!}\right\|.$$

Tā kā $|Z_ix_i| \le |x_i|$, tad $\|Z_i\| \le 1$ un iegūstam novērtējumu

$$\left\|\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{t^jZ_i^j}{j!}\right\| \le \left(1+\frac{|t|}{1!}+\ldots+\frac{|t|^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\right) \le (1+|t|)^{n_i-1}.$$

Līdz ar to visiem $t\in\mathbb{R}$ ir spēkā precīzāks novērtējums

$$\begin{aligned}\|e^{At}\| &\le \|S^{-1}\|\max_i\|e^{tJ_i(\lambda_i)}\|\|S\|\\ &\le \|S^{-1}\|\|S\|\max_i\left(e^{t\operatorname{Re}\lambda_i}(1+|t|)^{n_i-1}\right).\end{aligned}$$

Ja $t\ge 0$, tad

$$\|e^{At}\| \le ce^{t\max_i(\operatorname{Re}\lambda_i)}(1+|t|)^{k-1}$$

un ja $t\le 0$, tad

$$\|e^{At}\| \le ce^{t\min_i(\operatorname{Re}\lambda_i)}(1+|t|)^{k-1},$$

kur $c\ge 1$ un $k$ elementārā dalītāja kārta atbilstošai (ar lielāko vai mazāko reālo daļu) īpašvērtībai.

Ievērojam, ka visiem $\varepsilon>0$ un $k$-tās kārtas polinomam $P_k(t)$ ir spēkā robeža

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{P_k(t)}{e^{\varepsilon t}}=0.$$

Iegūstam modificētu novērtējumu $t\ge 0$

$$\|e^{At}\| \le c_1e^{t\max_i(\operatorname{Re}\lambda_i+\varepsilon)}$$

kur $c_1\ge 1$. Ja īpašvērtībām ar lielāko reālo daļu ir tikai vienkārši elementārie dalītāji, tad iegūstam uzlabotu novērtējumu

$$\|e^{At}\| \le c_1e^{t\max_i(\operatorname{Re}\lambda_i)}.$$

Dažreiz ir nepieciešams novērtējums no apakšas. Tā kā $e^{-At}e^{At}=E$, tad $\|e^{-At}\|\|e^{At}\|\ge 1$. No šejienes $t\ge 0$

$$\|e^{At}\| \ge \|e^{-At}\|^{-1} \ge \frac{1}{c_1e^{-t\min_i(\operatorname{Re}\lambda_i-\varepsilon)}} = c_2e^{t\min_i(\operatorname{Re}\lambda_i-\varepsilon)},$$

kur $0 < c_2 \leq 1$.

**Uzdevums 2.2.** Pierādīt, ka, ja matricas $A(t)$ un $\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s$ savstarpēji komutē (Lapno-Daņilevska nosacījums), tad lineāra neautonoma diferenciālvienādojuma Košī problēmas

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

atrisinājums ir formā

$$\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s} x_0.$$

.

## 2.5 Lineāri diferenciālvienādojumi ar periodiskiem koeficientiem. Flokē teorija

Apskatām lineāru diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{2.7}$$

kur matrica $A$ ir periodiska ar periodu $\omega > 0$, t.i.

$$A(t+\omega) = A(t).$$

**Teorēma 2.5.** *Ja $\Phi(t)$ ir diferenciālvienādojuma* (2.7) *fundamentālā atrisinājumu matrica, tad $\Phi(t+\omega)$ ir arī tā paša diferenciālvienādojuma fundamentālā atrisinājumu matrica un*

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C, \tag{2.8}$$

*kur $C$ ir nesingulāra matrica un* $\det C > 0$.

*Pierādījums.* Pieņemam, ka $\Phi(t)$ ir lineārā diferenciālvienādojuma (2.7) fundamentālā atrisinājumu matrica, vai citiem vārdiem matrica $\Phi(t)$ apmierina matricu diferenciālvienādojumu

$$\dot{\Phi}(t) \equiv A(t)\Phi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Apzīmējam ar $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$. Tad, ievērojot ka $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(t+\omega)$,

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Psi(t),$$

seko, ka matrica $\Psi(t)$ ir diferenciālvienādojuma (2.7) fundamentālā atrisinājumu matrica. Saskaņā ar Teorēmu 2.3 eksistē nesingulāra matrica $C$, $\det C \neq 0$, ka izpildās vienādība

$$\Psi(t) = \Phi(t)C$$

vai

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C. \tag{2.9}$$

Tā kā $\Phi(t)$ ir fundamentālā matrica, tad $\det \Phi(t) \neq 0$ visiem $t \in \mathbb{R}$ un matricas nepārtrauktības dēļ $\det \Phi(t)$ saglabā zīmi. Seko, ka $\det C > 0$. □

Jebkurai citai diferenciālvienādojuma (2.7) fundamentālai atrisinājumu matricai $\Xi(t)$ eksistē nesingulāra matrica $S$, $\det S \neq 0$, ka $\Xi(t) = \Phi(t)S$. Seko

$$\Xi(t+\omega) = \Phi(t+\omega)S = \Phi(t)CS = \Xi(t)S^{-1}CS.$$

Pēdejā vienādība motivē sekojošu definīciju.

**Definīcija 2.6.** Matricu $C$ sauc par *monodromijas matricu* un tās īpašvērtības par *multiplikatoriem*.

Visas dotā diferenciālvienādojuma monodromijas matricas savā starpā ir līdzīgas un multiplikatori nav atkarīgi no konkrētas monodromijas matricas izvēles. Saskaņā ar Ostrogradska-Liuvilla formulu

$$\det \Phi(t+\omega) = \det \Phi(t) \exp \int_t^{t+\omega} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s.$$

Savukārt no (2.8) seko

$$\det \Phi(t+\omega) = \det \phi(t) \det C.$$

Iegūstam formulu monodromijas matricas determinanta aprēķināšanai

$$\det C = \exp \int_t^{t+\omega} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s = \exp \int_0^{\omega} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s.$$

Atzīmēsim, ka

$$\det C = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

kur $\lambda_i$ dotā diferenciālvienādojuma (2.7) multiplikatori.

Tālākā izklāstā mums būs nepieciešama sekojoša lemma

**Lemma 2.1.** *Ja matricu rinda* $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} X^p$ *konverğē, tad ir spēka identitāte*

$$\exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} X^p \equiv E + X.$$

*Pierādījums.* Ar

$$Y = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} X^p \tag{2.10}$$

apzīmējam matricu rindu un tālāk apskatām matricu $\exp Y$. Iegūstam

$$\exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} X^p \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} X^p \right]^q .$$

Izlietojot naturālā logaritma Teilora izvirzījumu,

$$\ln(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} z^p, \quad |z| < 1.$$

iegūstam identitāti

$$\exp(\ln(1+z)) = \exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} z^p \equiv 1 + z, \quad |z| < 1.$$

Izvirzot identitātes labo un kreiso pusi pēc $z$ pakāpēm, koeficienti pie $z$ vienādām pakāpēm sakritīs. Tā kā matrica $X$ komutē ar savām pakāpēm un rinda (2.10) konverğē, tad iegūstam vajadzīgo matricu identitāti

$$\exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} X^p \equiv E + X.$$

□

**Definīcija 2.7.** Pieņemam, ka $C$ ir kvadradratiska matrica. Matricu $B$, kura apmierina nosacījumu

$$\exp(B) = C$$

sauc par matricas $C$ *logaritmu* un apzīmē ar

$$B = \operatorname{Ln} C.$$

**Teorēma 2.6.** *Katrai nesingulārai matricai C eksistē logaritms.*

*Pierādījums.* Kā zināms ar piemērotu lineāru nesingulāru transformāciju $S$, $\det S \neq 0$ matricu $C$ var novest uz Žordāna normālformu $J$

$$J = SCS^{-1}.$$

Vispirms apskatām $n_i \times n_i$ Žordāna šūnu $J_i(\lambda_i)$, kura atbilst īpašvērtībai $\lambda_i$ un atbilstošā elementārā dalītāja kārta ir $n_i$. Pie reizes atzīmējam, ka $\lambda_i \neq 0$, jo matrica $C$ ir nesingulāra. Iegūstam

$$J_i(\lambda_i) = \lambda_i E_i + Z_i = \lambda_i \left( E_i + \frac{Z_i}{\lambda_i} \right),$$

kur $E_i$ – vienības šūna un $Z_i$ – šūna, kuras blakus diagonāle sastāv no vieniniekiem, bet pārējie šūnas elementi ir nulles. Atzīmējam, ka $Z_i$ ir nilpotenta šūna, t.i. $Z_i^m = 0$, ja $m \geq n_i$ un tā komutē ar vienības šūnu. Tālāk apskatām matricu

$$Y_i = E_i \operatorname{Ln} \lambda_i + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \left( \frac{Z_i}{\lambda_i} \right)^p,$$

kur

$$\operatorname{Ln} \lambda_i = \ln |\lambda_i| + i(\arg \lambda_i + 2k\pi)$$

un $k \in \mathbb{Z}$. Tā kā $Z_i^m = 0$, ja $m \geq n_i$, tad matricu rinda ir galīga un tātad konverğējoša un līdz ar to matrica $Y_i$ ir korekti definēta. No šejienes izmantojot eksponentmatricas īpašības, iegūstam

$$\exp(Y_i) = \exp(E_i \operatorname{Ln} \lambda_i) \exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \left( \frac{Z_i}{\lambda_i} \right)^p$$

$$= \lambda_i \left( E_i + \frac{Z_i}{\lambda_i} \right) = \lambda_i E_i + Z_i = J_i(\lambda_i).$$

No matricas logaritma definīcijas seko

$$Y_i = \operatorname{Ln} J_i(\lambda_i).$$

Tādā veidā galīgi iegūstam

$$\operatorname{Ln} J_i(\lambda_i) = E_i \operatorname{Ln} \lambda_i + \sum_{p=1}^{n_i-1} \frac{(-1)^{p-1}}{p\lambda_i^P} Z_i^p.$$

Apskatām vispārīgo gadījumu

$$C = S^{-1} J S = S^{-1} \operatorname{diag}[J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

kur $S$ nesingulāra matrica. Pieņemam, ka

$$\operatorname{Ln} C = S^{-1} \operatorname{diag}[\operatorname{Ln} J_1(\lambda_1), \operatorname{Ln} J_2(\lambda_2), \dots, \operatorname{Ln} J_m(\lambda_m)] S.$$

Patiešām

$$\begin{gathered} \exp(\operatorname{Ln} C) \\ = S^{-1} \operatorname{diag}[\exp(\operatorname{Ln} J_1(\lambda_1)), \exp(\operatorname{Ln} J_2(\lambda_2)), \dots, \exp(\operatorname{Ln} J_m(\lambda_m))] S \\ = S^{-1} \operatorname{diag}[J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_m(\lambda_m)] S = C. \end{gathered}$$

Līdz ar to katrai nesingulārai matricai eksistē logaritms, logaritms ir daudzvērtīga funkcija un atbilstošās logaritmiskās matricas elementi vispārīgā gadījumā ir kompleksi skaitļi. □

Tālāk detalizētāk apskatīsim gadījumus, kad eksistē logaritmiskā matrica, kuras visi elementi ir reāli skaitļi. No iepriekšējā redzams, ka tas iespējams, ja šūnai atbilstošā īpašvērtība ir pozitīva.

Apskatām gadījumu, kad matricas $C$ īpašvērtība $\lambda_i$ ir komplekss skaitlis, $\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$. Tā kā matricas $C$ elementi ir reāli skaitļi, tad kompleksās īpašvērtības ir pa pāriem saistītas un atbilstošo elementāro dalītāju kārtas ir vienādas un katram komplekso īpašvērtību pārim ar elementāra dalītāja kārtu $n_i$ atbilst reāla $2n_i \times 2n_i$ Žordāna šūna formā

$$J_i(\lambda_i) = K_i(\lambda_i) + Z_i = K_i(\lambda_i)(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i) Z_i).$$

Šeit $K_i(\lambda_i)$ ir šūna sastāvoša no $2 \times 2$ apakšūnām. Diagonālās apakššūnas ir formā

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_i) & -\operatorname{Im}(\lambda_i) \\ \operatorname{Im}(\lambda_i) & \operatorname{Re}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

bet nediagonālo apakšūnu visi elementi ir nulles. Savukārt $Z_i$ ir šūna, kuras otrā augšējā blakus diagonāle sastāv no vieniniekiem, bet pārējie elementi ir nulles. Atzīmējam, ka $Z_i^k = 0$ ja $k \geq n_i$ un šūnas $K_i$ un $Z_i$ savstarpēji komutē. Vispirms ievērojam, ka visiem $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ un $\rho > 0$

$$\rho \exp \begin{pmatrix} 0 & -(q+2\pi n) \\ q+2\pi n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos q & -\rho \sin q \\ \rho \sin q & \rho \cos q \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Mūsu gadījumā $\rho = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\lambda_i) + \mathrm{Im}^2(\lambda_i)} = |\lambda_i|$, $\arg(\lambda_i) = q$, $\cos q = \frac{\mathrm{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}$ un $\sin q = \frac{\mathrm{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}$. Iegūstam

$$\mathrm{Ln} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_i) & -\mathrm{Im}(\lambda_i) \\ \mathrm{Im}(\lambda_i) & \mathrm{Re}(\lambda_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln|\lambda_i| & -(\arg(\lambda_i) + 2\pi n) \\ \arg(\lambda_i) + 2\pi n & \ln|\lambda_i| \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

No iepriekšējā seko, ka $\mathrm{Ln}\, K_i(\lambda_i)$ ir šūna sastāvoša no $2 \times 2$ apakššūnām. Diagonālās apakšūnas ir formā (2.12), bet nediagonālo apakšūnu visi elementi ir nulles. Savukārt

$$\mathrm{Ln}(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i)^p.$$

Tā kā šūna $Z_i$ komutē ar $K_i(\lambda_i)$, tad tā komutē arī ar $K_i^{-1}(\lambda_i)$. Seko

$$(K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i)^{n_i} = K_i^{-n_i}(\lambda_i)Z_i^{n_i} = 0.$$

Tātad šūna $K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i$ ir nilpotenta un atbilstošā matricu rinda konverģē. Tā kā šūna $\mathrm{Ln}\, K_i(\lambda_i)$ komutē ar $K_i^{-1}(\lambda_i)$ un $Z_i$, tad $\mathrm{Ln}\, K_i(\lambda_i)$ komutē ar šūnu $\mathrm{Ln}(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i)$. Pārbaudām vienādību

$$\mathrm{Ln}(K_i(\lambda_i) + Z_i) = \mathrm{Ln}(K_i(\lambda_i)) + \mathrm{Ln}(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i).$$

Patiešām

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{Ln}(K_i(\lambda_i) + Z_i)) &= K_i(\lambda_i)(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i) \\ &= \exp(\mathrm{Ln}(K_i(\lambda_i)))\exp(\mathrm{Ln}(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i)) \\ &= \exp(\mathrm{Ln}(K_i(\lambda_i)) + \mathrm{Ln}(E_i + K_i^{-1}(\lambda_i)Z_i)). \end{aligned}$$

Apskatam atlikušo gadījumu, tas ir kad $C$ īpašvērtība $\lambda_i < 0$. Ieliekam formulā (2.11) $q = \pi$. Iegūstam

$$\rho \exp \begin{pmatrix} 0 & -(\pi+2\pi n) \\ \pi+2\pi n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Iegūstam

$$\operatorname{Ln} \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\rho & -\pi(1+2n) \\ \pi(1+2n) & \ln\rho \end{pmatrix}.$$

**Sekas 2.2.** *Matricai $C$ ar reāliem elementiem eksistē logaritmiskā matrica ar reāliem elementiem, ja matricai $C$ nav negatīvas īpašvērtības un arī ja visas negatīvās īpašvērtības sakārtojamas pa vienādu īpašvērtību pāriem.*

**Teorēma 2.7.** *Jebkura diferenciālvienādojuma* (2.7) *fundamentālā atrisinājumu matrica ir formā*

$$\Phi(t) = P(t)\exp(tB_1),$$

*kur $P(t+w) = P(t)I_1$, $I_1^2 = E$ un $B_1$ ir konstanta matrica.*

*Pierādījums.* Atzīmējam, ka eksistē nesingulāra matrica $S$, tāda $C = S^{-1}JS$, kur $J$ matricas $C$ reālā Žordāna normālforma. Apzīmējam ar $I$ diagonālmatricu, kuras elementi ir -1, kas atbilst tām negatīvajām matricas $J$ īpašvērtībām. kuru skaita paritāte ir nepārskaitlis, bet pārejās vietās ir 1. Ievērojam, ka $I^2 = E$. No iepriekšējā seko, ka eksistē reāla matrica $B$, ka

$$\exp(\omega B) = IJ.$$

Saskaņā ar matricas $I$ definīciju matrica $I$ komutē ar matricu $\exp(tB)$. Apzīmējam ar $P(t) = \Phi(t)S^{-1}\exp(-tB)S$. Tad

$$\begin{aligned} P(t+\omega) &= \Phi(t+\omega)S^{-1}\exp(-(t+\omega)B)S \\ &= \Phi(t)S^{-1}JSS^{-1}\exp(-(t+\omega)B)S \\ &= \Phi(t)S^{-1}J\exp(-(t+\omega)B)S \\ &= \Phi(t)S^{-1}I\exp(-tB)S = \Phi(t)S^{-1}\exp(-tB)IS \\ &= \Phi(t)S^{-1}\exp(-tB)SS^{-1}IS = P(t)S^{-1}IS = P(t)I_1, \end{aligned}$$

kur $I_1 = S^{-1}IS$. Ievērojam, $(S^{-1}IS)^2 = E$. Citiem vārdiem matrica $P$ ir periodiska ar periodu $2\omega > 0$

$$P(t+2\omega) = P(t+\omega)I_1 = P(t)I_1^2 = P(t)$$

un tātad ierobežota

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|P(t)\| < +\infty$$

Iegūstam fundamentālās matricas veidu diferenciālvienādojumam ar periodiskiem koeficientiem

$$\Phi(t) = P(t)S^{-1}\exp(tB)S = P(t)\exp(tS^{-1}BS) = P(t)\exp(tB_1),$$

kur $B_1 = S^{-1}BS$. $\square$

## 2.6 Redukciju uz lineāru diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem

**Definīcija 2.8.** Matricu $L\colon [t_0, +\infty) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (vispārīgā gadījumā kompleksu) sauc par *Ļapunova matricu*, ja izpildās sekojoši nosacījumi:

(i) ja $t_0 \le t < +\infty$, tad matricas $L(t)$ un $\dot{L}(t)$ ir ierobežotas, t.i.

$$\sup_t \|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_t \|\dot{L}(t)\| < +\infty;$$

(ii) $|\det L(t)| \ge m > 0$, kur $m$ pozitīva konstante.

Tā kā $\sup_t \|L(t)\| < +\infty$, tad

$$|\det L(t)| \le M < +\infty.$$

No $|\det L(t)| \ge m > 0$ izriet inversās matricas $L^{-1}$ eksistence un novērtējums

$$\sup_t \|L^{-1}(t)\| < +\infty.$$

Bez tam

$$|\det L^{-1}(t)| = \frac{1}{|\det L(t)|} \ge \frac{1}{M} > 0.$$

No vienādības

$$\dot{L}^{-1}(t) = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)$$

seko ka

$$\sup_t \|\dot{L}^{-1}(t)\| < +\infty.$$

Rezultātā iegūstam, ka $L^{-1}$ arī ir Ļapunova matrica.

**Definīcija 2.9.** Lineāru transformāciju

$$y = L(t)x$$

ar Ļapunova matricu sauc par *Ļapunova* transformāciju.

**Definīcija 2.10.** Lineārs diferenciālvienādojums (2.2) ir *reducējams pēc Ļapunova*, ja eksistē tāda Ļapunova transformācija, kura doto diferenciālvienādojumu reducē uz diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem.

**Teorēma 2.8 (Jerugina teorēma).** *Lineārs diferenciālvienādojums ir reducējama tad un tikai tad, ja tā fundamentālā atrisinājumu matrica ir formā*

$$X(t) = L(t)\exp(Bt), \tag{2.13}$$

*kur $L(t)$ - Ļapunova matrica, $B$ - konstanta matrica.*

*Pierādījums. Nepieciešamība*. Pieņemam, ka diferenciālvienādojums (2.2) ir reducējams. Tad ar Ļapunova transformāciju

$$x = L(t)y$$

to var reducēt uz lineāru diferenciālvienādojumu

$$\dot{y} = By$$

ar konstantu matricu. Pēdējā diferenciālvienādojuma fundamentālā atrisinājumu matrica $Y(t) = \exp(Bt)C$, kur $C$ nesingulāra matrica. Iegūstam

$$X(t) = L(t)Y(t) = L(t)\exp(Bt)C$$

Izvēlamies $C = E$ un dabūjam ko vajadzēja pierādīt.

*Pietiekamība*. Pieņemam ka ir spēkā formula (2.13). Tad

$$L(t) = X(t)\exp(-tB).$$

Izdaram Ļapunova transformāciju

$$x = X(t)\exp(-tB)y.$$

Tad

$$\dot{x} = X(t)\exp(-tB)\dot{y} + \dot{X}(t)\exp(-tB)y - X(t)\exp(-tB)By$$

$$= A(t)X(t)\exp(-tB)y.$$

Tā kā

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

tad iepriekšējā formula saīsinās un iegūstam

$$X(t)\exp(-tB)\dot{y} = X(t)\exp(-tB)By$$

vai

$$\dot{y} = By,$$

kas arī bija jāpierāda. □

**Sekas 2.3.** *Lineārs diferenciālvienādojums* (2.5) *ar periodisku matricu saskaņā ar Teorēmu 2.7 ir reducējams pēc Ļapunova.*

*Ja monodromijas matricai $C$ nav negatīvi multiplikatori un arī ja visi negatīvie multiplikatori sakārtojami pa vienādu multiplikatoru pāriem, tad atbilsošā Ļapunova matrica $L(t)$ ir periodiska, t.i.*

$$L(t+\omega) = L(t).$$

*Ja monodromijas matricai $C$ negatīvie multiplikatori nav sakārtojami pa vienādu multiplikatoru pāriem, tad atbilsošā Ļapunova matrica $L(t)$ ir periodiska ar periodu $2\omega$, t.i.*

$$L(t+2\omega) = L(t).$$

# Nodaļa 3
# Autonomie diferenciālvienādojumi

## 3.1 Vispārīgā teorija

Apskatām diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = P(x), \tag{3.1}$$

kur attēlojums $P\colon G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un atbilstošajai Košī problēmai

$$\dot{x} = P(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in G \tag{3.2}$$

izpildās atrisinājuma unitātes nosacījumi. Tad Košī problēmas (3.2) atrisinājumi ir nepārtraukti pēc sākuma nosacījumiem.

**Definīcija 3.1.** Diferenciālvienādojumu (3.1) sauc par *autonomu*, ja diferenciālvienādojuma labā pusē nesatur neatkarīgo mainīgo $t$.

Vispirms pierādīsim svarīgu autonoma diferenciālvienādojuma atrisinājumu īpašību.

**Lemma 3.1 (Pārbīdes īpašība).** *Ja funkcija $t \mapsto \varphi(t)$ ir autonoma diferenciālvienādojuma* (3.1) *atrisinājums, tad arī funkcija $t \mapsto \varphi(t+\tau)$, kur $\tau \in \mathbb{R}$, ir šī diferenciālvienādojuma atrisinājums.*

*Pierādījums.* Tā kā funkcija $t \mapsto \varphi(t)$ ir autonoma diferenciālvienādojuma (3.1) atrisinājums, tad izpildās identitāte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) \equiv P(\varphi(t)), \quad t \in (\omega_-, \omega_+).$$

Pārejam uz jaunu neatkarīgo mainīgo $t = s+\tau$ un ievērojot, ka $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$, iegūstam

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s+\tau) \equiv P(\varphi(s+\tau)),$$

kas arī pierāda lemmu $\square$

*Piezīme 3.1.* Vispārīgā gadījumā neautonomam diferenciālvienādojumam Lemma 3.1 nav pareiza. Tomēr diferenciālvienādojumam ar periodisku labo pusi, t.i.

$$P(t,x) = P(t+T,x), \quad T>0,$$

var pierādīt, ka funkcija $t \mapsto \varphi(t+T)$ ir diferenciālvienādojuma atrisinājums, ja funkcija $t \mapsto \varphi(t)$ ir diferenciālvienādojuma atrisinājums.

Košī problēmas (3.2) atrisinājums ir funkcija $t \mapsto \varphi(t,x_0,t_0)$, kura apmierina sākuma nosacījumu $\varphi(t_0,x_0,t_0) = x_0$. Arī funkcija $t \mapsto \varphi_1(t) = \varphi(t-t_0,x_0,0)$ saskaņā ar Lemmu 3.1 ir Košī problēmas (3.2) atrisinājums, pie kam apmierina to pašu sākuma nosacījumu $\varphi_1(t_0) = x_0$. No Košī problēmas atrisinājumu unitātes izriet ka

$$\varphi_1(t) = \varphi(t-t_0,x_0,0) = \varphi(t,x_0,t_0).$$

Pēdejā vienādība ļauj autonoma diferenciālvienādojuma Košī problēmas atrisinājumus vienkārši apzīmēt ar $t \mapsto \varphi(t,x_0)$, kur $\varphi(0,x_0) = x_0$, t.i., bez vispārīguma ierobežošanas var pieņemt ka $t_0 = 0$.

Autonomam diferenciālvienādojumam un tā atrisinājumiem var dot kinemātisku un ğeometrisku interpretāciju. Parasti neatkarīgo mainīgo $t$ interpretē kā laiku, atrisinājumu $\varphi(\cdot,x_0)\colon (\omega_-(x_0),\omega_+(x_0)) \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(0,x_0) = x_0$ interpretē kā mainīga punkta $\varphi(\cdot,x_0)$ kustības likumu telpā $G \subset \mathbb{R}^n$, t.i. punkta koordināšu izmaiņas likumu mainoties laikam $t$. Atbilstošo telpu $G$ savukārt sauc par *fāzu telpu*. Mainīgais punkts $\varphi(\cdot,x_0)$ fāzu telpā $G$ apraksta līniju $\gamma = \varphi((\omega_-(x_0),\omega_+(x_0)),x_0)$, ko sauc par punkta $x_0$ *trajektoriju*. Tā kā izpildās identitāte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,x_0) \equiv P(\varphi(t,x_0))$, tad attēlojumu $P$ var interpretēt kā kustības ātruma vektoru un līdz ar to autonoms diferenciālvienādojums fāzu telpā definē vektoru lauku, tas ir katram punktam $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ fāzu telpā tiek piekārtots no laika neatkarīgs vektors $P(x)$. Šādu vektora lauku sauc par *stacionāru vektoru lauku*.

Pie reizes atzīmēsim vēl vienu autonoma diferenciālvienādojuma īpašību. Ja divām trajektorijām ir kopīgs punkts, tad šīs trajektorijas sakrīt un atbilstošie atrisinājumi atšķirās ar nobīdi pa laiku. Pieņemam, ka $\varphi(t_1,x_1) = \varphi(t_2,x_2)$, tad

$$\varphi(t,x_1) = \varphi(t+(t_2-t_1),x_2).$$

Vienādības kreisajā un labajā pusē ir atrisinājumi, pie kam pie $t = t_1$ abi atrisinājumi sakrīt. Saskaņā ar Košī problēmas atrisinājumu unitāti abi atrisinājumi sakrīt visiem $t \in \mathbb{R}$, kas arī bija jāpierāda.

Izdarīsim vēl vienu pieņemumu. Kā zināms gadījumā, ja pat $G = \mathbb{R}^n$, atrisinājuma maksimālais eksistences intervāls ne vienmēr ir $\mathbb{R}$, t.i. $(\omega_-(x_0), \omega_+(x_0)) \neq \mathbb{R}$. Piemēram, Košī problēmas

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

atrisinājuma

$$\varphi(t,x_0) = \begin{cases} \frac{x_0}{1-x_0 t}, & \text{ja } x_0 > 0 \text{ un } t \in \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right) \\ \frac{x_0}{1-x_0 t}, & \text{ja } x_0 < 0 \text{ un } t \in \left(\frac{1}{x_0}, +\infty\right) \\ 0, & \text{ja } x_0 = 0 \text{ un } t \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

maksimālais definīcijas intervāls ir atkarīgs no $x_0 \in G$.

Tālāk apskatām autonomu diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = P_1(x), \tag{3.3}$$

kur

$$P_1(x) = \begin{cases} \dfrac{P(x)}{1+|P(x)|}, & \text{ja } G = \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{P(x)}{1+|P(x)|}\dfrac{\rho(x,\partial G)}{1+\rho(x,\partial G)}, & \text{ja } G \neq \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ja $G \neq \mathbb{R}^n$, tad apgabala robeža $\partial G \neq \emptyset$ un ir slēgta. Līdz ar to eksistē galīgs attālums starp apgabala punktiem $x \in G$ un apgabala robežu $\partial G$, t.i. $\rho(x,\partial G) = \inf_{y\in\partial G} |x-y|$.

Var viegli pārliecināties, ka attēlojums $P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un vienmērīgi ierobežots telpā $\mathbb{R}^n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |P_1(x)| \leq 1.$$

Bez tam vektoru $P_1(x)$ un $P(x)$ virzieni apgabalā $G$ sakrīt un līdz ar to autonomu diferenciālvienādojumu (3.1) un (3.3) trajektorijas apgabalā $G$ sakrīt, citiem vārdiem ir viena un tā pati "fāzu aina". Savukārt vektora $P_1(x)$ vienmērīgā ierobežotība fāzu telpā $\mathbb{R}^n$ nozīmē, ka punkts galīgā laika periodā pārvietojoties pa trajektoriju nevar aiziet bezgalībā. No šejienes izriet, ka autonoma diferenciālvienādojuma (3.3) atrisinājumu maksimālais eksistences intervāls ir $\mathbb{R}$. Augstāk aprakstīto procesu sauc par trajektoriju reparametrizāciju. Līdz ar to mēs tālākā izklāstā bez vispārīguma ierobežojuma varam pieņemt, ka atrisinājumi ir definēti uz visas laika ass.

Līdz ar to mēs varam uzskatīt, ka attēlojums $\varphi\colon \mathbb{R}\times G \to \mathbb{R}^n$ ir definēts visiem $x \in G$ un visiem $t \in \mathbb{R}$. Katram fiksētam $x_0$ attēlojums $\varphi(\cdot, x_0)$ ir autonoma diferenciālvienādojuma atrisinājums. Atzīmēsim, ka attēlojumam $\varphi$ ir sekojošas īpašības:

(i) attēlojums $\varphi$ ir nepārtraukts;
(ii) $\varphi(0,x_0) = x_0$, visiem $x_0 \in G$;
(iii) $\varphi(t, \varphi(\tau, x_0)) = \varphi(t+\tau, x_0)$.

Pirmā īpašība izriet no atrisinājumu nepārtrauktības pēc sākuma nosacījumiem. Otrā īpašība no Košī problēmas atrisinājuma definīcijas. Beidzot trešo, tā saukto grupas īpašību, pierādīsim sekojoši. Saskaņā ar Lemmu 3.1 funkcija $\varphi_1$, kur $\varphi_1(t) = \varphi(t+\tau, x_0)$ ir autonoma diferenciālvienādojuma atrisinājums. Arī funkcija $\varphi_2$, kur $\varphi_2(t) = \varphi(t, \varphi(\tau, x_0))$ ir tā paša diferenciālvienādojuma atrisinājums. Pie $t = 0$ abi atrisinājumi pieņem vienu un to pašu vērtību

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi(\tau, x_0).$$

Saskaņā ar Koši problēmas atrisinājumu unitāti abi atrisinājumi sakrīt visiem $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t, \varphi(\tau, x_0)) = \varphi(t+\tau, x_0),$$

kas arī pierāda trešo īpašību. Trešā īpašība nozīmē, ka lai noskaidrotu, kur punkts $x_0$ atradīsies laika momentā $t+\tau$, vispirms jāapskatās, kur punkts $x_0$ pārvietojoties pa trajektoriju atradīsies laika momentā $\tau$ un pēc tam kur jaunais punkts $\varphi(\tau, x_0)$ atradīsies pēc laika $t$.

Atzīmēsim, ka attēlojums $\Phi^t = \varphi(t,\cdot)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ pie fiksēta $t$ ir homeomorfisms. Apskatām vēl attēlojumu $\Phi^{-t} = \varphi(-t, x)$. Tad superpozicija $\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t = id$. Pierādījums izriet no diferenciālvienādojuma (3.1) atrisinājuma īpašības (iii) un Teorēmas 5.1. Tiešām

$$\varphi(t, \varphi(-t, x)) = \varphi(0, x) = x.$$

Tātad attēlojumi $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ izveido komutatīvu grupu.

Autonomu diferenciālvienādojuma atrisinājumu īpašības (i) – (iii) ir tik būtiskas, ka bieži jēdziena "autonoms diferenciālvienādojums" vietā lieto terminu *dinamiska sistēma*. Savukārt pašu jēdzienu "dinamiska sistēma" var būtiski vispārināt, saprotot ar to tādu topoloģiskas telpas $\mathbb{X}$ attēlojumu saimi, kura attēlojās sevī un izpildās augstāk minētās īpašības. Tādēļ dosim vispārīgu dinamiskās sistēmas definīciju

**Definīcija 3.2.** Attēlojumu $\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ sauc par *dinamisku sistēmu* (arī *plūsmu*), ja izpildās sekojošas īpašības

(i) $\varphi$ ir nepārtraukts (nepārtrauktības aksioma);
(ii) $\varphi(0,x)=x$, visiem $x\in\mathbb{X}$ (identitātes aksioma);
(iii) $\varphi(t,\varphi(\tau,x))=\varphi(t+\tau,x)$, ja $t,\tau\in\mathbb{R}$ (grupas aksioma).

Ja $\mathbb{R}$ vietā ņemam $\mathbb{Z}$, tad iegūstam *diskrētas dinamiskās sistēmas* definīciju. Tālākie matemātiskā literaturā sastopamie dinamiskās sistēmas vispārinājumi ir ja $\mathbb{R}$ vietā aplūko komutatīvu grupu, grupu, monoīdu.

## 3.2 Autonomu diferenciālvienādojumu atrisinājumu tipi

**Teorēma 3.1.** *Autonomam diferenciālvienādojumam ir trīs tipu atrisinājumi:*

(i) *neperiodiski –* $\varphi(t)\neq\varphi(t')$*, ja* $t\neq t'$
(ii) *periodiski – eksitē* $T>0$*, ka* $\varphi(t+T)=\varphi(t)$ *un* $\varphi(t)\neq\varphi(t')$*, ja* $0\le t<t'<T$
(iii) *stacionāri –* $\varphi(t)=\varphi(0)$.

Atrisinājumiem atbilstošās trajektorijas sauc par neperiodiskām trajektorijām, slēgtām trajektorijām vai ciklu un stacionāro punktu.

*Pierādījums.* Apskatām patvaļīgu atrisinājumu $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. Pieņemam, ka tas nav pirmā tipa atrisinājums. Tātad eksistē $t_1\neq t_2$, ka $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Apzīmējam ar $\tau=t_2-t_1$. Atzīmējam, ka $\varphi_1$, kur $\varphi_1(t)=\varphi(t+\tau)$ ir arī tās paša autonomā diferenciālvienādojuma atrisinājums. Ievērojam, ka $\varphi(t_1)=\varphi_1(t_1)$. Saskaņā ar atrisinājuma unitātes teorēmu visiem $t\in\mathbb{R}$ izpildās vienādība

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) = \varphi(t+\tau).$$

Tālāk apskatām periodu kopu $K = \{\tau \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) = \varphi(t+\tau)\}$. Viegli pārbaudīt, ka ja $\tau \in K$, tad arī $-\tau \in K$, $0 \in K$ un ja $\tau_1 \in K$ un $\tau_2 \in K$, tad arī $\tau_1 + \tau_2 \in K$. Citiem vārdiem visu periodu kopa $K$ ir komutatīva grupa attiecībā pret saskaitīšanu. Iespējami divi gadījumi:

(i) grupa $K$ satur mazāko pozitīvo skaitli $T > 0$. Var viegli pārbaudīt, ka šajā gadījumā $K = \{nT\}$, kur $n \in \mathbb{Z}$. Seko $\varphi$ ir periodisks atrisinājums, t.i. $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ un $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, ja $0 \leq t_1 < t_2 < T$.

(ii) grupā $K$ nav mazākā pozitīvā skaitļa. Tad eksistē periodu virkne $\tau_k \to +0$, ja $k \to 0$. Ievērojam, ka jebkuram fiksētam $t$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(t - \left[\frac{t}{\tau_k}\right]\tau_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(t - \left(\frac{t}{\tau_k} - \theta\right)\tau_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\theta\tau_k = 0,$$

kur $0 \leq \theta < 1$. Tā kā atrisinājums ir periodisks, tad

$$\varphi(t) = \varphi\left(t - \left[\frac{t}{\tau_k}\right]\tau_k\right).$$

Ievērojot, ka atrisinājums ir nepārtraukts pēc $t$, un pārejot uz robežu, seko

$$\varphi(t) = \varphi\left(\lim_{k\to+\infty}\left(t - \left[\frac{t}{\tau_k}\right]\tau_k\right)\right) = \varphi(0).$$

Līdz ar to teorēma ir pierādīta. □

Ievērojam ka stacionāra atrisinājuma $\varphi$ kā konstantes atvasinājums $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) = 0$. Tātad, lai atrastu dotā autonomā diferenciālvienādojuma stacionāros punktus, jāatrod vienādojuma $P(x) = 0$ saknes. Ievērojami sarežģītāk ir pierādīt periodisku atrisinājumu eksistenci, nemaz nerunājot par to atrašanu. Kvalitatīvajā diferenciālvienādojumu teorijā ir izstrādātas daudzas metodes, kā pierādīt cikla eksistenci. Analītisku atrisinājumu var iegūt tikai īpašos gadījumos, tādēļ pielieto skaitliskās metodes. Tāpat pielietojumus rodas vajadzība pierādīt eksistenci atrisinājumiem ar speciālām īpašībām, piemēram, monotoni atrisinājumi, pozitīvi atrisinājumi, ierobežoti atrisinājumi, gandrīz periodiski atrisinājumi utt.

*Piemērs 3.1.* Aplūkojam autonomu diferenciālvienādojumu, kuram ir visu trīs tipu atrisinājumi un trajektorijas

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \tag{3.4}$$

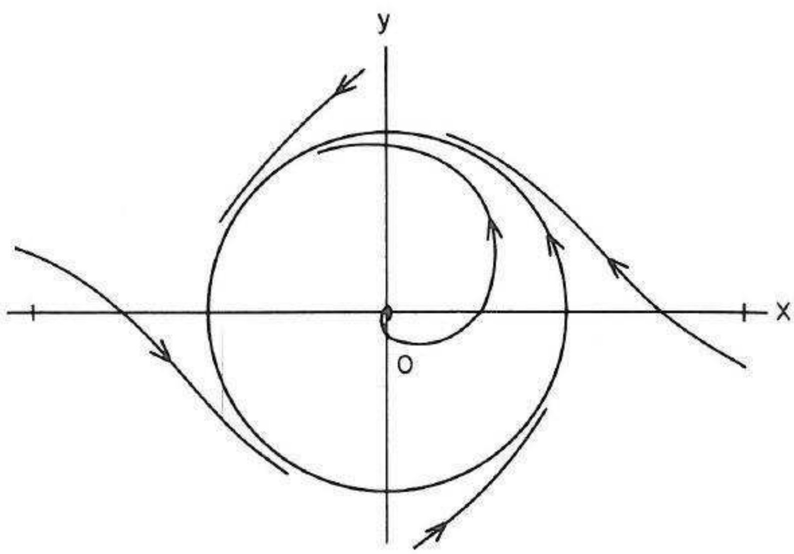
Pārejām uz polārajām koordinātēm $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Tad

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

vai

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \pmod{\pi}.$$

Atvasinot pēdējās vienādības iegūstam




**Zīm. 3.1** Autonoma diferenciālvienādojuma (3.4) fāzu aina

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Pārejot uz polārām koordinātēm (3.4) iegūstam jaunu autonomu diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Mūsu piemēra koordinātu sākuma punkts ir stacionārais punkts. Vienības riņķis ir slēgta trajektorija jeb cikls. Ja $0 < r < 1$, tad $\dot{r} > 0$ un trajektorijas ir spirāles, kuras iziet no koordinātu sākuma punkta un pretēji pulksteņa rādītāja virzienam tinās uz ciklu. Ja $r > 1$, tad $\dot{r} < 0$ un spirāles tai pašā virzienā tinās koordinātu sākuma punkta virzienā uz ciklu.

## 3.3 Robežkopas

Aplūkojam autonomu diferenciālvienādojumu. Neierobežojot vispārīgumu, pieņemam, ka visu atrisinājumu $\varphi(\cdot, x_0)\colon \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n$ maksimālais eksistences intervāls ir $\mathbb{R}$.

**Definīcija 3.3.** Punktu $q \in G$ sauc par atrisinājuma $\varphi(\cdot, x_0)$ *pozitīvo robežpunktu* pie $t \to +\infty$, ja eksistē tāda momentu virkne $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, ka $\lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, x_0) = q$.

**Definīcija 3.4.** Visu šādu pozitīvo robežpunktu $q \in G$ kopu $\Lambda^+(x_0)$ sauc par atrisinājuma $\varphi(\cdot, x_0)$ *pozitīvo robežkopu* (arī *$\omega$-robežkopu*).

Analogi definē negatīvo robežpunktu un negatīvo robežkopu.

**Definīcija 3.5.** Punktu $q \in G$ sauc par atrisinājuma $\varphi(\cdot, x_0)$ *negatīvo robežpunktu* pie $t \to -\infty$, ja eksistē tāda momentu virkne $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = -\infty$, ka $\lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, x_0) = q$.

**Definīcija 3.6.** Visu šādu negatīvo robežpunktu $q \in G$ kopu $\Lambda^-(x_0)$ sauc par atrisinājuma $\varphi(\cdot, x_0)$ *negatīvo robežkopu* (arī *$\alpha$-robežkopu*).

Tātad
$$\Lambda^+(x_0) = \{q \in G \mid \text{eksistē } \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty,\ \text{ka} \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, x_0) = q\}$$
un
$$\Lambda^-(x_0) = \{q \in G \mid \text{eksistē } \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lim_{k\to+\infty} t_k = -\infty,\ \text{ka} \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, x_0) = q\}.$$

*Piemērs 3.2.* Stacionārā atrisinājuma pozitīvā un negatīvā robežkopa ir pats nekustīgais punkts. Periodiska atrisinājuma pozitīvā un negatīvā robežkopa ir slēgta trajektorija. Diferenciālvienādojuma (3.4) visu spirālveida atrisinājumu pozitīvā robežkopa ir slēgtā trajektorija – vienības riņķis. Spirālveida atrisinājumu, kuri sākās vienības riņķa iekšienē negatīvā robežkopa ir koordinātu sākuma punkts, bet pārējo spirālveida atrisinājumu negatīvā robežkopa ir tukša.

Tora irracionālā aptinuma robežkopa ir pats tors.

Apskatām pozitīvas robežkopas īpašības. Analogas īpašības ir arī negatīvajai robežkopai $\Lambda^-(x_0)$.

**Teorēma 3.2.** *Pozitīvā robežkopa* $\Lambda^+(x_0)$ *ir tukša tad un tikai tad, ja* $\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t,x_0)| = +\infty$.

*Pierādījums.* Ja $\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t,x_0)| = +\infty$, tad saskaņā ar robežkopas definīciju atrisinājuma $\varphi(\cdot,x_0)$ pozitīvā robežkopa $\Lambda^+(x_0) = \emptyset$ ir tukša.

Ja nosacījums, nav izpildīts, tad eksistē tāda virkne $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, kur $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ un kompakts $D \subset \mathbb{R}^n$, ka $\varphi(t_k,x_0) \in D$. No ierobežotas virknes $\{\varphi(t_k,x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ var izdalīt konverģentu apakšvirkni. Pieņemam, ka virknē ir atstāti tikai konverģentās apakšvirknes locekļi. Tad virknes robeža pēc definīcijas ir pozitīvais robežpunkts. Iegūstam pretrunu ar pieņēmumu, kas arī pierāda Teorēmu. $\square$

**Teorēma 3.3.** *Pozitīvā robežkopa* $\Lambda^+(x_0)$ *sastāv no viena punkta tad un tikai tad, ja* $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,x_0) = q$.

*Pierādījums.* Ja $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,x_0) = q$, tad saskaņā ar robežkopas definīciju atrisinājuma $\varphi(\cdot,x_0)$ pozitīvā robežkopa $\Lambda^+(x_0) = \{q\}$ sastāv no viena punkta.

Pieņemam pretējo, t.i. ka $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,x_0) \neq q$. Tad eksistē tāds pozitīvs $\varepsilon > 0$ un tāda momentu virkne $\{t_k\}_{k\in\mathbb{R}}$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, ka $|\varphi(t_k,x_0) - q| \geq \varepsilon$. Savukārt no pozitīvā robežpunkta definīcijas seko, ka eksistē tāda momentu virkne $\{t'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to+\infty} t'_k = +\infty$, ka izpildās nevienādība $|\varphi(t'_k,x_0) - q| < \varepsilon$. Neierobežojot vispārīgumu var pieņemt, ka $t_k < t'_k$. Attēlojuma $\varphi(\cdot,x_0)$ nepārtrauktības dēļ eksistē virkne $\{t''_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $t_k \leq t''_k < t'_k$, ka $|\varphi(t''_k,x_0) - q| = \varepsilon$. Tā kā virkne $\{\varphi(t''_k,x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ir ierobežota, tad varam izdalīt konverģentu apakšvirkni. Pieņemam, ka virknē atstāti tikai konverģentās apakšvirnes locekļi. Pārejot uz robežu, atrodam, ka eksistē pozitīvs robežpunkts $q' \in \Lambda^+(x_0)$ un $|q' - q| = \varepsilon$. Iegūstam pretrunu ar pieņēmumu. $\square$

**Teorēma 3.4.** *Pozitīvā robežkopa* $\Lambda^+(x_0)$ *sastāv no veselām trajektorijām.*

*Pierādījums.* Jāpierāda, ka ja $q \in \Lambda^+(x_0)$, tad arī katram fiksētam $t \in \mathbb{R}$ punkts $\varphi(t,q) \in \Lambda^+(x_0)$. No robežkopas definīcijas izriet, ka eksistē virkne $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, ka $\lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k,x_0) = q$. Apskatām virkni $\{t_k+t\}_{k\in\mathbb{N}}$. Acīmredzot $\lim_{k\to+\infty}(t_k+t) = +\infty$ un vienādībā

$$\varphi(t_k+t,x_0) = \varphi(t,\varphi(t_k,x_0))$$

pārejot uz robežu, ievērojot ka atrisinājums ir nepārtraukts, iegūstam

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k+t,x_0) = \varphi(t, \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k,x_0)) = \varphi(t,q),$$

kas arī bija jāpierāda. □

**Teorēma 3.5.** *Ja pozitīvā robežkopa $\Lambda^+(x_0)$ nav tukša, tad tā ir slēgta kopa.*

*Pierādījums.* Pierādīsim, ka $\Lambda^+(x_0)$ ir slēgta kopa. Izvēlamis tādu pozitīvo robežpunktu virkni $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Lambda^+(x_0)$ ka $\lim_{m\to+\infty} q_m = q$. Pierādīsim, ka arī $q \in \Lambda^+(x_0)$ t.i. kopa $\Lambda^+(x_0)$ ir slēgta kopa. No pozitīvo robežpunktu definīcijas izriet, ka eksistēs virknes $\left\{t_k^m\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, ka $\lim_{k\to+\infty} t_k^m = +\infty$ un attiecīgi $\lim_{k\to+\infty} \varphi\left(t_k^m,x_0\right) = q_m$. Izvēlamies pozitīvu skaitļu virkni $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n > 0$, ka $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Katram $\varepsilon_n$ atrodam $m_n$, tādu ka $|q_{m_n} - q| \le \varepsilon_n/2$. Tālāk katram $m_n$ atrodam $k_n$ tādu, ka $\left|\varphi\left(t_{k_n}^{m_n},x_0\right) - q_{m_n}\right| \le \varepsilon_n/2$ un $t_{k_n}^{m_n} > n$. Izveidojam jaunu momentu virkni $\left\{t_{k_n}^{m_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to+\infty} t_{k_n}^{m_n} = +\infty$. Tad

$$\left|\varphi\left(t_{k_n}^{m_n},x_0\right) - q\right| < \left|\varphi\left(t_{k_n}^{m_n},x_0\right) - q_{m_n}\right| + |q_{m_n} - q| \le \varepsilon_n.$$

Seko, $q \in \Lambda^+(x_0)$, ko arī vajadzēja pierādīt. □

**Teorēma 3.6.** *Ja kopa $\varphi(\mathbb{R}_+,x_0)$ ir ierobežota, tad pozitīvā robežkopa $\Lambda^+(x_0)$ ir sakarīga.*

*Pierādījums.* Ja kopa $\varphi(\mathbb{R}_+,x_0)$ ir ierobežota, tad pozitīvā robežkopa $\Lambda^+(x_0) \neq \emptyset$ ir slēgta un tātad kompakta.

Pieņemam pretējo, t.i. ka pozitīvā robežkopa $\Lambda^+(x_0)$ nav sakarīga. Tas nozīmē, ka eksistē divas netukšas slēgtas ierobežotas kopas $M$ un $N$, ka $\Lambda^+(x_0) = M \cup N$ un $M \cap N = \emptyset$, kas atrodas pozitīvā attālumā $\delta = \inf_{x_1\in M, x_2\in N} |x_1 - x_2| > 0$ viena no otras. Ievērojam, ka $M$ un

$N$ ir robežkopas un tātad eksistē momentu virkne $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un neierobežojot vispārīgumu $t_{2n} < t_{2n+1}$, ka $\inf_{x_1\in M}|\varphi(t_{2n},x_0)-x_1| < \delta/2$ un $\inf_{x_2\in N}|\varphi(t_{2n+1},x_0)-x_2| < \delta/2$. Tā kā attālums ir nepārtraukta funkcija, tad eksistē tāda momentu virkne $\{t'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ka $t_{2n} < t'_n < t_{2n+1}$ un $\inf_{x_1\in M}|\varphi(t'_n,x_0)-x_1| = \delta/2$. Tā kā virkne $\{\varphi(t'_n,x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir ierobežota, tad tā satur konverģentu apakšvirkni. Pieņemam, ka virknē atstāti tikai konverģentās apakšvirknes locekļi. Seko virkne konverģē uz pozitīvu robežpunktu $q$. Acīmredzot, $q \in \Lambda^+(x_0)$ un $\inf_{x_1\in M}|q-x_1| = \delta/2$. Seko, $q \notin M$ un arī $N$, jo

$$\inf_{x_2\in N}|q-x_2| \geq \inf_{x_1\in M, x_2\in N}|x_1-x_2| - \inf_{x_1\in M}|q-x_1| = \delta/2.$$

Šī nevienādība ir pretrunā ar pieņēmumu, ka $\Lambda^+(x_0)$ nav sakarīga. Teorēma ir pierādīta □

*Piezīme 3.2.* Aplūkojam autonomu diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases} \tag{3.5}$$

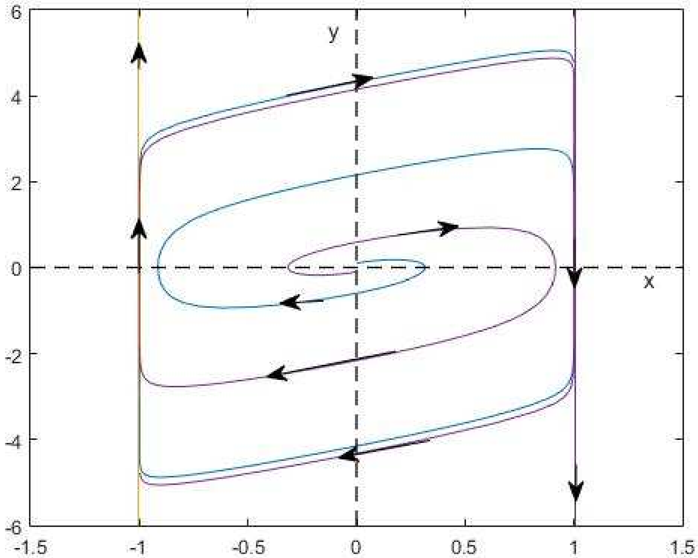
kur

$$f(x,y) = \begin{cases} (1-|x|)^2 y, & \text{ja } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{ja } |x| > 1. \end{cases}$$

un

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x < -1. \\ (1-|x|)^2 y - x, & \text{ja } |x| \leq 1, \\ -1, & \text{ja } x > 1. \end{cases}$$

Diferenciālvienādojuma (3.5) visu atrisinājumu, kuri sākās joslā $-1 < x < 1$, izņemot koordinātu sākuma punkta, pozitīvā robežkopa ir taisnes $x = \pm 1$. Piemērs ilustrē gadījumu, kad robežkopa nav kompakta un nav sakarīga.




**Zīm. 3.2** Autonoma diferenciālvienādojuma (3.5) fāzu aina

# Nodaļa 4
# Stabilitātes teorija

## 4.1 Stabilitātes teorijas pamatjēdzieni

Pieņemsim, ka kādu procesu apraksta diferenciālvienādojums

$$\dot{x} = P(t,x), \tag{4.1}$$

kur attēlojums $P\colon G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un tāds ka diferenciālvienādojums (4.1) apmierina atrisinājuma unitātes nosacījumus. Bez tam pieņemam, ka diferenciālvienādojumam (4.1) eksistē neierobežoti pa labi turpināms atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$, kur $I = (\omega_-, +\infty)$ ir atrisinājuma $\varphi$ maksimālais eksistences intervals. Šajā gadījumā attēlojums $P$ ir tāds, ka kopa $(I, \varphi(I)) \subset G$.

Ja diferenciālvienādojuma (4.1) labā puse ir nepārtraukta un apmierina atrisinājuma unitātes nosacījumus, tad arī izpildās *atrisinājumu integrālā nepārtrauktība*, citiem vārdiem, ja $\varphi\colon (\omega_-, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ ir diferenciālvienādojuma (4.1) atrisinājums, tad katram $\varepsilon > 0$ un katram galīgam slēgtam intervalam (kompaktam) $[\alpha, \beta] \subset (\omega_-, +\infty)$ var atrast tādu $\delta > 0$, ka jebkurš diferenciālvienādojuma (4.1) atrisinājums $\zeta$ maz atšķiras no $\varphi$, t.i. apmierina nevienādību $|\zeta(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ visiem $t \in [\alpha, \beta]$, ja tikai maz atšķiras sākuma nosacījumi $|\zeta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$, kur $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Atrisinājuma integrālā nepārtrauktība izriet no teorēmas par atrisinājuma nepārtrauktību no sākuma nosacījumiem un no tā, ka slēgtais intervals $[\alpha, \beta] \subset (\omega_-, +\infty)$ ir kompakts.

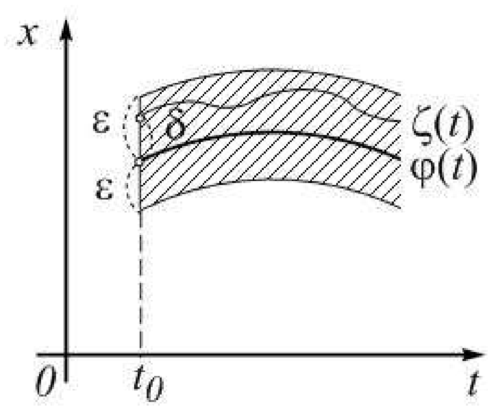
Ja turpretī $\beta = +\infty$, tad vispārīgā gadījumā nav spēkā atrisinājumu integrālā nepārtrauktība iepriekšējā nozīmē un jāveic papildus pētījumi par (4.1) atrisinājuma $\varphi$ tuvo atrisinājumu izturēšanos pie lielām

$t$ vērtībām. Tas ir arī diferenciālvienādojumu stabilitātes teorijas pamata uzdevums.

**Definīcija 4.1.** Diferenciālvienādojuma (4.1) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir *stabīls Ļapunova*[1] *nozīmē ja* $t \to +\infty$, ja katram $\varepsilon > 0$ un $t_0 \in I = (\omega_-, +\infty)$ eksistē tāds $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, ka

- visi (4.1) atrisinājumi $\zeta$, kuriem
$$|\zeta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$
ir definēti un turpināmi bezgalīgā intervalā $[t_0, +\infty)$;
- šiem atrisinājumiem visiem $t \in [t_0, +\infty)$ izpildās nevienādība
$$|\zeta(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Citiem vārdiem (4.1) atrisinājums $\varphi$ ir stabils, ja visi (4.1) atrisinājumi, kuri momentā $t = t_0$ sākās pietiekoši tuvu atrisinājumam $\varphi$, visiem $t \geq t_0$ atrodas pēc patikas mazā $\varepsilon$-cauruļveida atrisinājuma $\varphi$ apkārtnē. Jāatzīmē, ka vienmēr var izvēlēties $\delta \leq \varepsilon$.




**Zīm. 4.1** Diferenciālvienādojuma atrisinājuma stabilitāte

Atzīmēsim vēl, ka no atrisinājuma stabilitātes neseko tā ierobežotība. Arī apgrieztais apgalvojums vispār nav pareizs, no atrisinājuma ierobežotības vēl neseko tā stabilitāte.

[1] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, ⋆1857.6.VI Jaroslavļa, Krievija, †1918.3.XI Odesa, Ukraina

Ja skaitli $\delta > 0$ var izvēlēties neatkarīgu no sākuma momenta $t_0 \in T$, t.i. $\delta(\varepsilon)$, tad stabilitāti sauc par *vienmērīgu* apgabalā $T$.

**Definīcija 4.2.** Diferenciālvienādojuma (4.1) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir *nestabils Ļapunova nozīmē*, ja var atrast tādus $\varepsilon > 0$ un $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, ka katram $\delta > 0$ eksistē atrisinājums $\zeta$ un moments $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ tāds, ka

$$|\zeta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta,$$

bet

$$|\zeta(t_1) - \varphi(t_1)| \geq \varepsilon.$$

Par nestabīlu jāuzskata arī tāds (4.1) atrisinājums $\varphi$, kurš nav bezgalīgi turpināms pa labi, t.i. $\omega_+ \neq +\infty$ un arī tādi, kuriem jebkurā punkta $\varphi(t_0)$ apkārtnē ir punkts $\zeta_0$, ka atbilstošais atrisinājums $\zeta$ ar sākumu nosacījumu $\zeta(t_0) = \zeta_0$ nav bezgalīgi turpināms pa labi.

**Definīcija 4.3.** Diferenciālvienādojuma (4.1) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir *asimptotiski stabils Ļapunova nozīmē ja $t \to +\infty$*

- tas ir stabīls Ļapunova nozīmē;
- katram $t_0 \in I = (\omega_-, +\infty)$ eksistē $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ tāds, ka katram atrisinājumam $\zeta$, kuram

$$|\zeta(t_0) - \varphi(t_0)| < \Delta$$

eksistē robeža

$$\lim_{t \to +\infty} |\zeta(t) - \varphi(t)| = 0. \tag{4.2}$$

**Definīcija 4.4.** Ja diferenciālvienādojuma (4.1) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir asimptotiski stabils un visiem (4.1) atrisinājumiem ir pareiza vienādība (4.2), t.i. $\Delta = \infty$, tad atrisinājumu $\varphi$ sauc par *globāli asimptotiski stabilu*.

Citiem vārdiem globālās asimptotiskās stabilitātes gadījumā (4.1) atrisinājuma $\varphi$ *asimptotiskās stabilitātes apgabals* ir visa telpa $\mathbb{R}^n$.

*Piezīme 4.1.* Ja (4.1) atrisinājums $\varphi\colon (\omega_-, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ ir stabīls pie kāda fiksēta momenta $t_0 \in (\omega_-, +\infty)$, tad tas būs stabīls arī pie cita momenta $t_0' \in (\omega_-, +\infty)$, t.i. ir stabils Ļapunova atrisinājuma stabilitātes definīcijas nozīmē.

Tiešām, pieņemam, ka ja

$$|\zeta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta(\varepsilon, t_0) < \varepsilon$$

tad

$$|\zeta(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \text{ ja } t_0 \le t < \infty.$$

Saskaņā ar integrālās nepārtrauktības īpašību eksistē $\delta' = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tāds, ka ja

$$|\zeta(t_0') - \varphi(t_0')| < \delta', \tag{4.3}$$

tad

$$|\zeta(t) - \varphi(t)| < \delta(\varepsilon, t_0) = \delta, \text{ ja } t \in [t_0', t_0].$$

Tāpēc no nevienādības (4.3) seko nevienādība

$$|\zeta(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \text{ ja } t_0' \le t < \infty.$$

Tādā veidā var ierobežoties ar (4.1) atrisinājuma $\varphi$ stabilitātes un asimptotiskās stabilitātes pārbaudi kādam fiksētam sākuma momentam $t_0$.

No šejienes arī iegūstam, ka ja (4.1) atrisinājums $\varphi$ ir nestabils pie $t = t_0$, tad tas ir nestabils arī jebkuram citam sākuma momentam $t_0' \in (\omega_-, +\infty)$.

## 4.2 Redukcija uz triviāla atrisinājuma stabilitātes pētīšanu

Apskatām uzdevumu par diferenciālvienādojuma

$$\dot{y} = Q(t, y) \tag{4.4}$$

atrisinājuma $\varphi\colon (\omega_-, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ stabilitātes izpēti.

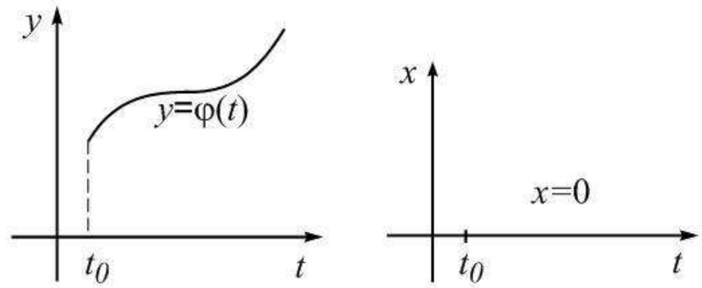
Parasti ir izdevīgi reducēt doto diferenciālvienādojumu uz jaunu diferenciālvienādojumu, kuram būtu jāizpēta triviālā atrisinājuma jeb nulles atrisinājuma stabilitāte. Ievērojam, ka

$$\dot{\varphi}(t) = Q(t, \varphi(t)).$$

Pārejam uz jaunu mainīgo $x = y - \varphi(t)$. Tad atvasinot iegūstam

$$\dot{x} = \dot{y} - \dot{\varphi}(t) = Q(t, x + \varphi(t)) - Q(t, \varphi(t)) = P(t, x),$$

kur $P(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Līdz ar to diferenciālvienādojuma (4.4) atrisinājuma $\varphi$ stabilitātes izpēti esam reducējuši uz diferenciālvienādojuma

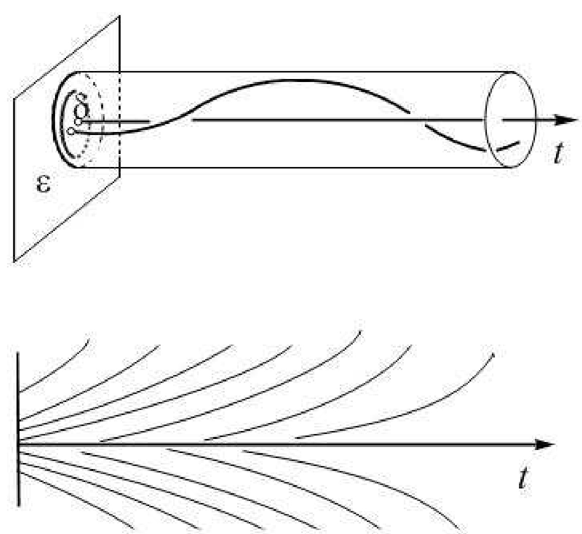



**Zīm. 4.2** Diferenciālvienādojuma (4.4) atrisinājuma redukcija uz diferenciālvienādojuma (4.5) triviālo atrisinājumu

$$\dot{x} = P(t,x), \tag{4.5}$$

triviālā jeb nulles atrisinājuma stabilitātes izpēti (skat. Zīm. 4.2).

Pie reizes pārformulēsim definīcijas par triviālā atrisinājuma stabilitāti, nestabilitāti un asimptotisko stabilitāti.




**Zīm. 4.3** Stabīls un nestabīls triviālais atrisinājums Ļapunova nozīmē

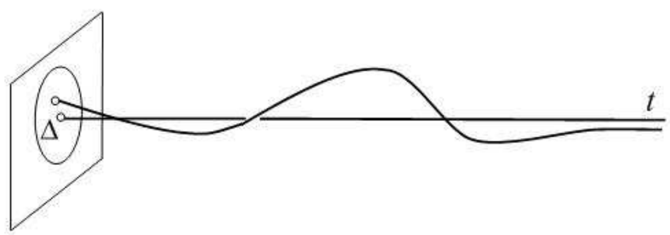
**Definīcija 4.5.** Diferenciālvienādojuma (4.5) triviālais (nulles) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir *stabīls Ļapunova nozīmē kad $t \to +\infty$*, ja katram $\varepsilon > 0$ un $t_0 \in I = (\omega_-, +\infty)$ var atrast tādu $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, ka katram atrisinājumam $\zeta$, kuram

$$|\zeta(t_0)| < \delta$$

pie visiem $t \in [t_0, \infty)$ izpildās nevienādība

$$|\zeta(t)| < \varepsilon.$$

**Definīcija 4.6.** Diferenciālvienādojuma (4.5) triviālais (nulles) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir *nestabils Ļapunova nozīmē*, ja eksistē $\varepsilon > 0$, ka katram $\delta > 0$ eksistē atrisinājums $\zeta$ un moments $t_1 > t_0$ tāds, ka $|\zeta(t_0)| < \delta$, bet $|\zeta(t_1)| \geq \varepsilon$.




**Zīm. 4.4** Asimptotiski stabils triviālais atrisinājums Ļapunova nozīmē

**Definīcija 4.7.** Diferenciālvienādojuma (4.5) triviālais (nulles) atrisinājums $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ir *asimptotiski stabils Ļapunova nozīmē kad $t \to +\infty$*, ja

- tas ir stabils Ļapunova nozīmē;
- katram $t_0 \in I = (\omega_-, +\infty)$ eksistē $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ tāds, ka katram atrisinājumam $\zeta$, kuram

  $$|\zeta(t_0)| < \Delta$$

  eksistē robeža

  $$\lim_{t \to +\infty} |\zeta(t)| = 0.$$

*Piezīme 4.2.* Lineāra diferenciālvienādojuma

$$\dot{x} = A(t)x$$

gadījumā reducētais diferenciālvienādojums sakrīt ar sākotnejo diferenciālvienādojumu. Tādēļ jebkura lineārā diferenciālvienādojuma atrisinājuma stabilitāte (nestabilitāte, asimptotiskā stabilitāte) sakrīt ar triviālā jeb nulles atrisinājuma stabilitāti (nestabilitāti, asimptotisko stabilitāti).

**Definīcija 4.8.** Nepārtrauktu skalāru funkciju $V\colon (b,+\infty)\times D \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{0} \in D \in \mathbb{R}^n$) sauc par *pozitīvi semidefinītu* funkciju, ja $V(t,x) \geq 0$. Ja $V(t,x) \leq 0$, tad funkciju $V$ sauc par *negatīvi semidefinitu* funkciju.

**Definīcija 4.9.** Skalāru funkciju $V\colon (b,+\infty)\times D \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{0} \in D \in \mathbb{R}^n$) sauc par *pozitīvi definītu* funkciju, ja eksistē nepārtraukta skalāra funkcija $W\colon D \to \mathbb{R}$ tāda, ka

$$V(t,x) \geq W(x) > 0, \text{ ja } x \neq \mathbf{0} \text{ un } V(t,\mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0.$$

Analoģiski, skalāru funkciju $V\colon (b,+\infty)\times D \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{0} \in D \in \mathbb{R}^n$) sauc par *negatīvi definitu* funkciju, ja eksistē nepārtraukta skalāra funkcija $W\colon D \to \mathbb{R}$ tāda, ka

$$V(t,x) \leq -W(x) < 0, \text{ ja } x \neq \mathbf{0} \text{ un } V(t,\mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0.$$

Dažreiz par funkciju $W$ varam ņemt

$$W(x) = \inf_t |V(t,x)|.$$

*Piemērs 4.1.* Funkcija $V\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kur $V(t,x) = (x_1)^2 + a^2(x_2)^2 - 2\alpha x_1 x_2 \cos t$ ir pozitīvi definita, ja $|\alpha| < |a|$. Tiešām,

$$V(t,x) \geq (x_1)^2 + a^2(x_2)^2 - 2|\alpha||x_1||x_2|$$
$$= (|x_1| - |\alpha x_2|)^2 + (a^2 - \alpha^2)(x_2)^2 = W(x) > 0,$$

ja $(x_1)^2 + (x_2)^2 > 0$ un $V(t,\mathbf{0}) = 0$.

Ja $|\alpha| = |a|$, tad $V$ ir tikai pozitīvi semidefinita funkcija.

**Definīcija 4.10.** Par funkcijas $V\colon (b,+\infty)\times D \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{0} \in D \in \mathbb{R}^n$) *atvasinājumu saskaņā ar diferenciālvienādojumu*

$$\dot{x} = P(t,x),$$

kur attēlojums $P\colon (a,+\infty)\times G \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0}\in G\subset\mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un apmierina atrisinājuma unitātes prasības, sauc funkciju $\dot V\colon (a,+\infty)\cap(b,+\infty)\times G\cap D\to\mathbb{R}$, kur[2]

$$\dot V(t,x) = \langle \operatorname{grad} V(t,x), P(t,x)\rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(t,x).$$

Ja funkcijas $V$ argumentu $(t,x)$ vietā liekam $(\tau,\varphi(\tau,x,t))$, kur $\varphi$ ir atrisinājums ar sākuma noscījumu $\varphi(t,x,t)=x$ diferenciālvienādojumam (4.5), tad iegūstam sekojošu funkciju $\tau\mapsto V(\tau,\varphi(\tau,x,t))$. Atvasinām iegūto izteiksmi pēc $\tau$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}V(\tau,\varphi(\tau,x,t))$$
$$= \langle \operatorname{grad} V(\tau,\varphi(\tau,x,t)), P(\tau,\varphi(\tau,x,t))\rangle + \frac{\partial V}{\partial \tau}(\tau,\varphi(\tau,x,t))$$

no kurienes seko

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}V(\tau,\varphi(\tau,x,t))\right|_{\tau=t}$$
$$= \langle \operatorname{grad} V(t,x,), P(t,x)\rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \dot V(t,x).$$

## 4.3 Ģeometriskā interpretācija

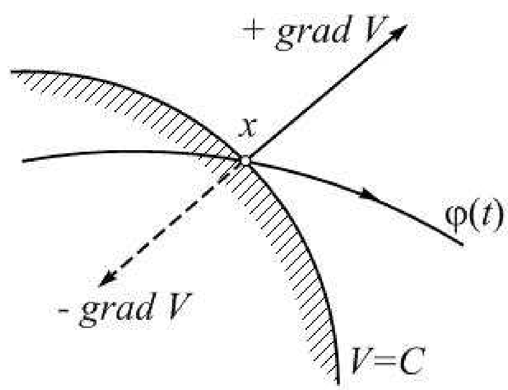
Apskatām autonomu diferenciālvienādojumu

$$\dot x = P(x), \quad P(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

kur attēlojums $P\colon (a,+\infty)\times G\to\mathbb{R}^n$, $\mathbf{0}\in G\subset\mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un apmierina atrisinājuma unitātes prasības un pieņemam, ka $V$ ir nepārtraukti diferencējama pozitīvi definitā funkcija. Tad šīs funkcijas atvasinājumam saskaņā ar diferenciālvienādojumu ir uzskatāma ģeometriska interpretācija fāzu telpā. Ja $\operatorname{grad} V(x)\neq\mathbf{0}$, $x\neq\mathbf{0}$, tad funkcijas $V$ līmeņvirsmas $V(x)=c$, $c\neq 0$ definē gludas $n-1$ dimensionālas varietātes un vektors $\operatorname{grad} V(x)$ ir līmeņvirsmas pieskarplaknes normālvektors punktā $x$, bet $P(x)$ ir atrisinājuma $\varphi$ trajektorijas

[2] Ar $\operatorname{grad} V(t,x)$ saprotam $n$-dimensionālu vektoru $\operatorname{grad} V(t,x) = \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right)$

pieskares vektors punktā $x$. Gadījumā ja $\langle \operatorname{grad} V(x), P(x) \rangle > 0$, tad trajektorija, kura iet caur punktu $x$ šķērso līmeņa virsmu gradienta augšanas virzienā, t.i. punkts uz trajektorijas pieaugot $t$ pārvietojās no līmeņa virsmas $V(x) = c$ uz uz apgabalu, kur $V(x) > c$. Ja turpretī $\langle \operatorname{grad} V(x), P(x) \rangle < 0$, tad pieaugot $t$ atbilstošais punkts uz trajektorijas pārvietojās uz apgabalu, kur $V(x) < c$.




**Zīm. 4.5** Ļapunova funkcijas ģeometriskā interpretācija

## 4.4 Ļapunova teorēma par atrisinājuma stabilitāti

Apskatam diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = P(t,x), \quad P(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{4.6}$$

kur attēlojums $P\colon (a,+\infty) \times G \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \in G \subset \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un apmierina atrisinājuma unitātes prasības, Tālāk dosim pietiekamos nosacījumus, lai diferenciālvienādojuma (4.6) triviālais atrisinājums būtu stabils, asimptotiski stabils vai nestabils Ļapunova nozīmē, kad $t \to +\infty$.

**Teorēma 4.1.** *Ja eksistē nepārtraukti diferencējama pozitīvi definīta funkcija $V\colon (b,+\infty) \times D \to \mathbb{R}$, $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, kuras atvasinājums saskaņā ar diferenciālvienādojumu* (4.6) *apgabalā* $(a,+\infty) \cap (b,+\infty) \times$

*$G \cap D$ ir negatīvi semidefinīta funkcija, tad diferenciālvienādojuma* (4.6) *triviālais atrisinājums ir stabils Ļapunova nozīmē, ja $t \to +\infty$.*

*Pierādījums.* Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem eksistē nepārtraukta, pozitīvi definita funkcija[3] $W: D \to \mathbb{R}$ tāda, ka

$$V(t,x) \geq W(x) > 0 \text{ ja } x \neq 0 \text{ un } V(t,0) = W(0) = 0.$$

Izvēlamies sfēru

$$\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

ar centru koordinātu sākuma punktā un rādiusu $\varepsilon > 0$ tā, lai $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \subset D \cap G$. Tā kā sfēra $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)$ ir kompakta kopa un funkcija $W$ ir nepārtraukta un pozitīvi definīta, tad saskaņā ar Veierštrāsa teorēmu eksistē $x^* \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)$ tāds ka

$$\inf_{x \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} W(x) = \min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} W(x) = W(x^*) = \alpha > 0.$$

Tālāk izvēlamies patvaļīgu $t_0 \in (a, +\infty) \cap (b, +\infty)$. Tā kā funkcija $V(t_0, \cdot): D \to \mathbb{R}$ ir nenegatīva, nepārtraukta punktā $x = 0$ un $V(t_0, 0) = 0$, tad eksistē tāds $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$), ka visiem $|x| < \delta$ izpildās novērtējums

$$0 \leq V(t_0, x) < \alpha.$$

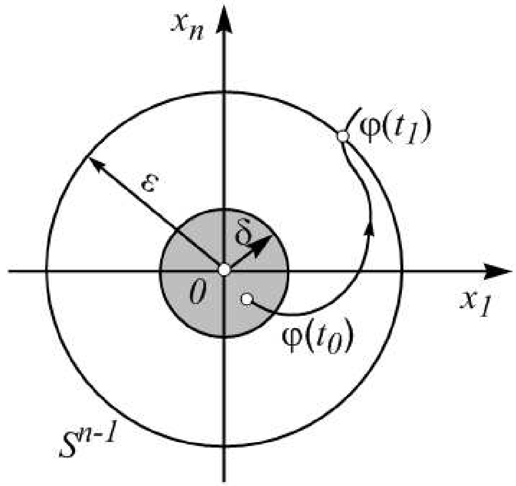
Apskatām patvaļīgu atrisinājumu $\varphi$ ar sākuma nosacījumu $|\varphi(t_0)| < \delta$. Pierādīsim, ka visiem $t \in [t_0, +\infty)$ izpildās nevienādība $|\varphi(t)| < \varepsilon$. Pieņemam pretējo, t.i. eksistē $t = t_1 > t_0$ tāds, ka $|\varphi(t)| < \varepsilon$, ja $t \in [t_0, t_1)$ un $|\varphi(t_1)| = \varepsilon$. Tālāk apskatām funkciju $v: [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, kur $v(t) = V(t, \varphi(t))$. Acīmredzot $v(t_0) = V(t_0, \varphi(t_0)) < \alpha$. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem

$$\dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}V(t, \varphi(t)}{\mathrm{d}t} \leq 0,$$

ja $t \in [t_0, t_1]$. Tātad $v$ ir dilstoša funkcija. Iegūstam

$$\alpha > v(t_0) = V(t_0, \varphi(t_0)) \geq V(t_1, \varphi(t_1)) \geq W(\varphi(t_1)) \geq \alpha$$

[3] Teorēmā nosacījumu $V(t,x) \geq W(x) > 0$ ja $x \neq 0$ un $V(t,0) = W(0) = 0$ var aizvietot ar nosacījumu: katram pietiekoši mazam $\varepsilon > 0$ un visiem $t \geq t_0$ ir spēkā sakarības $\inf_{x \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon),\, t \geq t_0} V(t,x) > 0$ un $V(t,0) = 0$




**Zīm. 4.6** Ļapunova teorēma par atrisinājuma stabilitāti

pretrunu. Citiem vārdiem tāds $t_1$ neeksistē. Seko atrisinājums $\varphi$ ir bezgalīgi turpināms pa labi pie kam, ja $|\varphi(t_0)| < \delta$ un $t \in [t_0, +\infty)$, tad

$$|\varphi(t)| < \varepsilon.$$

Teorēma ir pierādīta. $\square$

**Sekas 4.1.** *Ja izpildās Teorēmas 4.1 nosacījumi, tad visi diferenciālvienādojuma* (4.6) *atrisinājumi* $\varphi$ *ir bezgalīgi turpināmi pa labi un ierobežoti, ja tikai* $|\varphi(t_0)|$ *ir pietiekoši mazs.*

*Piemērs 4.2.* Apskatām Lienarda diferenciālvienādojumu

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Pieņemam, ka funkcijas $f\colon G \to \mathbb{R}$ un $g\colon G \to \mathbb{R}$, $0 \in G$ ir nepārtrauktas, $f(x) \geq 0$ un $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$. Apzīmējam $\dot{x} = y$. Iegūstam diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x). \end{cases} \tag{4.7}$$

Tad funkcija $V$, kur $V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$ ir pozitīvi definita. Attiecīgi $\operatorname{grad} V(x,y) = (g(x), y)$, un funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar diferenciālvienādojumu sistēmu (4.7) ir

$$\dot{V}(x,y) = yg(x) - f(x)y^2 - g(x)y = -f(x)y^2 \leq 0.$$

Tātad diferenciālvienādojumu sistēmas (4.7) triviālais atrisinājums ir stabīls Ļapunova nozīmē.

## 4.5 Ļapunova teorēma par atrisinājuma asimptotisko stabilitāti

**Teorēma 4.2.** *Ja eksistē nepārtraukti diferencējama pozitīvi definīta funkcija* $V\colon (b,+\infty) \times D \to \mathbb{R}$*,* $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$*, kura tiecās uz nulli vienmērīgi pret* $t \in (b,+\infty)$*, ja* $x \to 0$ *un kuras atvasinājums saskaņā ar diferenciālvienādojumu* (4.6) *apgabalā* $(a,+\infty) \cap (b,+\infty) \times G \cap D$ *ir negatīvi definīta funkcija, tad diferenciālvienādojuma* (4.6) *triviā-lais atrisinājums ir asimptotiski stabils Ļapunova nozīmē, ja* $t \to +\infty$*.*

*Pierādījums.* Saskaņā ar Teorēmu 4.1 diferenciālvienādojuma (4.6) triviālais atrisinājums ir stabils Ļapunova nozīmē. Tas nozīmē, ka netriviālie atrisinājumi $\varphi\colon [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, kuriem izpildās novērtējums $|\varphi(t_0)| < \delta$, apmierina nevienādību $|\varphi(t)| < \varepsilon$. Saskaņā ar asimptotiskās stabilitātes definīciju atliek pierādīt, ka šie netriviālie atrisinājumi tiecās uz koordinātu sākuma punktu

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

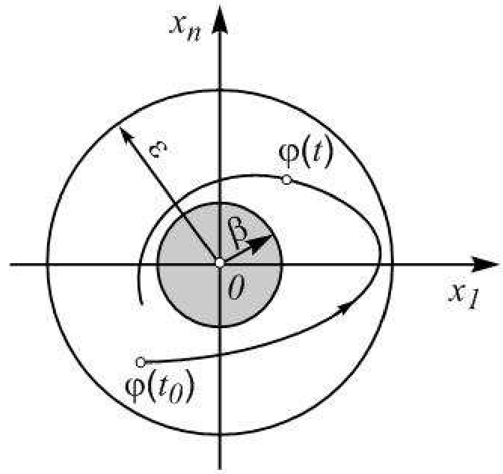
Analoģiski Teorēmas 4.1 pierādījumam apskatām Ļapunova funkciju $v\colon [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$, kur $v(t) = V(t,\varphi(t))$. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem

$$\dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}V(t,\varphi(t)}{\mathrm{d}t} < 0.$$

No šejienes funkcija $v$ ir monotoni dilstoša un ierobežota no apakšas, t.i. $v(t) \geq 0$. Seko eksistē robeža

$$\inf_t v(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} V(t,\varphi(t)) = \alpha \geq 0.$$

Pierādam, ka skaitlis $\alpha$ nevar būt pozitīvs. Pieņemam pretējo, t.i. $\alpha > 0$. Tādā gadījumā mūsu netriviālais atrisinājums $\varphi$ visiem $t \in [t_0,+\infty)$ apmierina nevienādību




**Zīm. 4.7** Ļapunova teorēma par atrisinājuma asimptotisko stabilitāti

$$\varepsilon > |\varphi(t)| \geq \beta > 0, \tag{4.8}$$

kur $0 < \beta \leq \delta$. Pretējā gadījumā eksistētu virkne $\{t_k\}$, kurai

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi(t_k) = 0,$$

ja $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. Bet tad ievērojot, ka $V(t,x) \to 0$, ja $x \to 0$ vienmērīgi pret $t \in (b, +\infty)$. Iegūstam

$$\lim_{k \to \infty} v(t_k) = \lim_{k \to +\infty} V(t_k, \varphi(t_k)) = 0,$$

Iegūstam pretrunu ar pieņēmumu, ka $\alpha > 0$. Tātad gadījumā, ja $\alpha > 0$, tad izpildās nevienādība (4.8).

Tā kā funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar diferenciālvienādojumu (4.6) apgabalā $(a, +\infty) \cap (b, +\infty) \times G \cap D$ ir negatīvi definīta funkcija, tad eksistē nepārtraukta pozitīvi definita funkcija $W_1 \colon D \cap G \to \mathbb{R}$, kura apmierina nevienādību

$$\dot{V}(t,x) \leq -W_1(x).$$

Tad saskaņā ar Veierstrāsa teorēmu un ievērojot, ka gredzens $\beta \leq |x| \leq \varepsilon$ ir kompakta kopa, iegūstam

$$\gamma = \inf_{\beta \le |x| \le \varepsilon} W_1(x) = \min_{\beta \le |x| \le \varepsilon} W_1(x) = W_1(x^*) > 0. \tag{4.9}$$

Pēc Ņutona-Leibnica formulas

$$v(t) = V(t, \varphi(t)) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s \le v(t_0) - \int_{t_0}^{t} W_1(\varphi(s))\, \mathrm{d}s$$

ievērojot novērtējumus (4.6) un (4.9) visiem $t \ge t_0$ ir spēkā novērtējums

$$v(t) \le v(t_0) - \int_{t_0}^{t} \gamma \mathrm{d}s = v(t_0) - \gamma(t - t_0).$$

No pēdējās nevienādības seko, ka ja $t_1 > t_0 + \dfrac{v(t_0)}{\gamma}$, tad

$$v(t_1) = V(t_1, \varphi(t_1)) < 0,$$

kas ir pretrunā ar nosacījumu, ka funkcija $V$ ir pozitīvi definita.

Tātad

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} V(t, \varphi(t)) = 0.$$

Atliek pierādīt, ka $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$. Pieņemam pretējo, t.i. eksistē monotoni augoša virkne $\{t_k\}$ tāda, ka $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$, bet

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi(t_k) = x^* \ne 0.$$

Tā kā funkcija $V$ ir pozitīvi definita, tad

$$V(t, \varphi(t)) \ge W(\varphi(t)),$$

kur $W\colon D \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta pozitīvi definita funkcija. Tad pārejot uz robežu iegūstam

$$0 = \lim_{k \to +\infty} V(t_k, \varphi(t_k)) \ge \lim_{k \to +\infty} W(\varphi(t_k))$$

$$= W(\lim_{k \to +\infty} (\varphi(t_k))) = W(x^*) > 0,$$

jo $x^* \ne 0$. Iegūstam pretrunu.

Tātad

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0,$$

kas arī bija jāpierāda. $\square$

**Sekas 4.2.** *Ja izpildās Teorēmas 4.2 nosacījumi, tad kopa $|x| < \varepsilon$ pieder diferenciālvienādojuma* (4.6) *triviālā atrisinājuma asimptotiskās stabilitātes apgabalam.*

## 4.6 Četajeva teorēma par atrisinājuma nestabilitāti

Lai pierādītu diferenciālvienādojuma (4.6) triviālā atrisinājuma nestabilitāti, pietiek pierādīt, ka jebkurā triviālā atrisinājuma apkārtnē var atrast atrisinājumu, kurš sākās šai apkārtnē, bet pēc kāda laika iziet ārā no iepriekš fiksētas triviālā atrisinājuma apkārtnes.

**Teorēma 4.3.** *Pieņemam, ka eksistē nepārtraukti diferencējama funkcija $V\colon (b,+\infty) \times D \to \mathbb{R}$, $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ar īpašību $(b,+\infty) \times \{0\} \subset \partial\Pi$, kur $\Pi = \{(t,x) \in (b,+\infty) \times D \mid V(t,x) > 0\}$ un $V(t,x) = 0$, ja $(t,x) \in (b,+\infty) \times D \cap \partial\Pi$,*
*Ja*

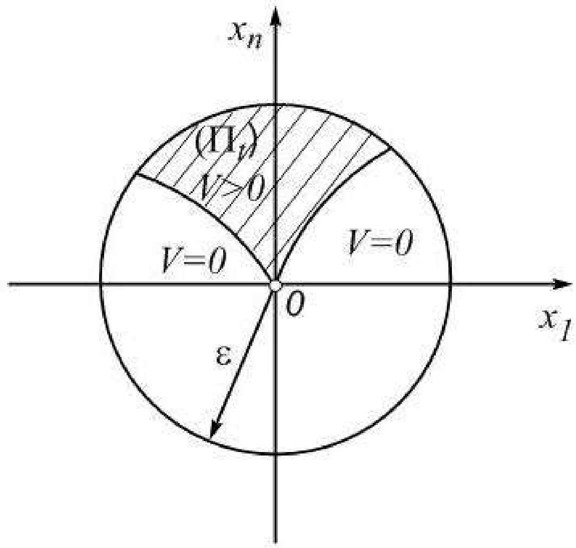
- *funkcija $V$ ir ierobežota apgabalā $\Pi$;*
- *funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar diferenciālvienādojumu* (4.6) *apgabalā $(a,+\infty) \times G \cap \Pi$ ir pozitīvs;*
- *katra apakšapgabalā $(a,+\infty) \times D \cap \Pi_\alpha$, kur*
$$\Pi_\alpha = \{(t,x) \in (b,+\infty) \times D \mid V(t,x) \geq \alpha > 0\}$$
*izpildās nevienādība*
$$\dot{V}(t,x) \geq \beta > 0$$
*un $\beta = \beta(\alpha)$ ir pozitīvs skaitlis, atkarīgs no skaitļa $\alpha$,*

*tad diferenciālvienādojuma* (4.6) *triviālais atrisinājums ir nestabils, ja $t \to +\infty$.*

*Pierādījums.* Fiksējam sfēru $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)$ ar centru koordinātu sākuma punktā un rādiusu $\varepsilon > 0$ tā, lai $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \subset D \cap G$. Izvēlamies $\delta > 0$ pēc patikas mazu ($\delta < \varepsilon$). Tad saskaņā ar teorēmas nosacījumiem eksistē tāds punkts $(t_0,x_0) \in \Pi$, ka $0 < |x_0| < \delta$. Apskatīsim atbilstošo atrisinājumu $\varphi$, kur $\varphi(t_0) = x_0$ un funkciju $v$, kur $v(t) = V(t,\varphi(t))$ un aprēķinām $V(t_0,x_0) = \alpha > 0$. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem, ja $V(t,\varphi(t)) > 0$, tad $\dot{V}(t,\varphi(t)) > 0$. No šejienes iegūstam, ka

$$V(t,\varphi(t)) \geq V(t_0,\varphi(t_0)) = \alpha, \tag{4.10}$$

kamēr punkts $(t,\varphi(t)) \in \Pi$.




**Zīm. 4.8** Četajeva teorēma par atrisinājuma nestabilitāti

Pieņemsim, ka $t = t_1 > t_0$ ir pirmā $t$ vērtība pie kuras punkts $(t_1,\varphi(t_1)) \in \partial\Pi$ un $(t,\varphi(t)) \in \Pi$, ja $t \in [t_0,t_1)$. Pārejam uz robežu nevienādībā (4.10), kad $t \to t_1 - 0$. Tad funkcijas $V$ nepārtrauktības dēļ $V(t_1,\varphi(t_1)) \geq \alpha > 0$, kas nav iespējams. Seko, $(t,\varphi(t)) \in \Pi_\alpha$ visiem $t \in [t_0,+\infty)$. Tad saskaņā ar teorēmas nosacījumiem

$$\dot{V}(t,\varphi(t)) \geq \beta > 0.$$

Izmantojot Ņutona-Leibnica formulu iegūstam

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s \geq \alpha + \beta(t - t_0).$$

Tā kā funkcija $V$ apgabalā $\Pi$ ir ierobežota, nonākam pie pretrunas. Tātad, eksistē tāds $t_2 > t_0$, ka $|\varphi(t_2)| = \varepsilon$.

Ievērojot, ka $\delta > 0$ ir pēc patikas mazs, seko, ka diferenciālvienādojumam (4.6) ir tāds atrisinājums, ka $|\varphi(t_0)| < \delta < \varepsilon$, bet $|\varphi(t_2)| \geq \varepsilon$. Tātad diferenciālvienādojuma (4.6) triviālais atrisinājums ir nestabils. Līdz ar to teorēma ir pierādīta. □

## 4.7 Ļapunova teorēma par asimptotisko stabilitāti pēc lineārā tuvinājuma

Tālāk apskatīsim kvazilineārus diferenciālvienādojumus, kuriem izmantojot Ļapunova un Četajeva teorēmas atradīsim pietiekamos nosacījumus triviālā atrisinājuma asimptotiskai stabilitātei un nestabilitātei Ļapunova nozīmē.

**Teorēma 4.4.** *Ja kvazilineāra diferenciālvienādojuma*

$$\dot{x} = Ax + f(t,x) \tag{4.11}$$

*labā puse ir nepārtraukta un apmierina atrisinājuma unitātes nosacījumus, visas matricas $A$ īpašvērtību reālās daļas ir negatīvas un attēlojums $f\colon (a,+\infty)\times G \to \mathbb{R}^n$, kur $G$ ir punkta $x = 0$ kāda apkārtne telpā $\mathbb{R}^n$, apmierina nevienādību $|f(t,x)| \leq \varepsilon|x|$ ar pietiekami mazu $\varepsilon > 0$, tad diferenciālvienādojuma* (4.11) *triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils pēc Ļapunova, ja $t \to +\infty$.*

*Pierādījums.* Konstruēsim tādu Ļapunova tipa funkciju $V$, lai izpildītos Ļapunova teorēmas 4.2 par atrisinājuma asimptotisko stabilitāti nosacījumi. Apskatām kvazilineāram diferenciālvienādojumam (4.11) atbilstošo lineāro diferenciālvienādojumu

$$\dot{x} = Ax. \tag{4.12}$$

Tad funkcija $\varphi$, kur $\varphi(t,x) = e^{At}x$ ir diferenciālvienādojuma (4.12) atrisinājums ar sākuma nosacījumu $\varphi(0,x) = x$. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem matricas $A$ visu īpašvērtību reālas daļas ir negatīvas un tātad visiem $t \geq 0$ ir spēkā novērtējums

$$\|e^{At}\| \leq c\exp(-\alpha t),$$

kur $\max_j \operatorname{Re}\lambda_j(A) < -\alpha < 0$ un $c \geq 1$.

Tālāk apskatām funkciju

$$V(x) = \int_0^{+\infty} |e^{As}x|^2 \,\mathrm{d}s.$$

Pateicoties eksponentmatricas $e^{At}$ novērtējumam integrālis konverğē pie tam vienmērīgi katrā ierobežotā telpas $\mathbb{R}^n$ apgabalā un tātad definē nepārtrauktu pozitīvi definitu funkciju $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Bez tam izmantojot vektoru skalārā reizinājuma īpašības parādam, ka funkcija $V$ ir kvadratiska forma

$$V(x) = \int_0^{+\infty} |e^{As}x|^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \langle e^{As}x, e^{As}x\rangle \,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{+\infty} \langle (e^{As})^T e^{As}x, x\rangle \,\mathrm{d}s = \langle Sx, x\rangle,$$

kur

$$S = \int_0^{+\infty} (e^{As})^T e^{As} \,\mathrm{d}s$$

un $(e^{As})^T$ ir matricas $e^{As}$ transponētā matrica. Atzīmējam, ka matrica $S$ ir simetriska jo

$$\Big((e^{As})^T e^{As}\Big)^T = (e^{As})^T \Big((e^{As})^T\Big)^T = (e^{As})^T e^{As}.$$

Tātad ar intgrali definētā funkcija $V$ ir pozitīvi definita kvadrātiskā forma.

Izmantojot eksponentmatricas $e^{At}$ īpašības, iegūstam

$$V(e^{At}x) = \int_0^{+\infty} |e^{As}e^{At}x|^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} |e^{A(s+t)}x|^2 \,\mathrm{d}s$$

$$= \int_t^{+\infty} |e^{As}x|^2 \,\mathrm{d}s.$$

Tālāk aprēķinam funkcijas $V$ atvasinājumu saskaņā ar lineāro diferenciālvienādojumu (4.12)

$$\dot{V}_1(x) = \dot{V}_1(e^{At}x)|_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty} |e^{As}x|^2\,\mathrm{d}s\right]_{t=0}$$

$$= -|e^{At}x|^2|_{t=0} = -|x|^2.$$

Ievērojot, ka

$$\dot{V}_1(x) = \langle \operatorname{grad} V(x), Ax\rangle,$$

rezultātā iegūstam

$$\dot{V}_1(x) = \langle \operatorname{grad} V(x), Ax\rangle = -|x|^2.$$

Aprēķinam funkcijas $V$ atvasinājumu saskaņā ar kvazilineāro diferenciālvienādojumu (4.11).

$$\dot{V}(x) = \langle \operatorname{grad} V(x), Ax + f(t,x)\rangle$$

$$= \langle \operatorname{grad} V(x), Ax\rangle + \langle \operatorname{grad} V(x), f(t,x)\rangle = -|x|^2 + \langle \operatorname{grad} V(x), f(t,x)\rangle.$$

Ievērojam, ka $\operatorname{grad} V(x) = 2Sx$ vai $|\operatorname{grad} V(x)| \leq 2\|S\||x|$. Līdz ar to

$$\dot{V}(x) \leq -|x|^2 + 2\|S\||x||f(x)| \leq -|x|^2(1 - 2\varepsilon\|S\|) < 0,$$

ja tikai $\varepsilon < (2\|S\|)^{-1}$. Teorēma pierādīta. $\square$

## 4.8 Ļapunova teorēma par nestabilitāti pēc lineārā tuvinājuma

**Teorēma 4.5.** *Ja kvazilineāra diferenciālvienādojuma*

$$\dot{x} = Ax + f(t,x) \tag{4.13}$$

*labā puse ir nepārtraukta un apmierina atrisinājuma unitātes nosacījumus, vismaz viena matricas $A$ īpašvērtība ir ar pozitīvu reālo daļu, attēlojums $f\colon (a,+\infty)\times G \to \mathbb{R}^n$, kur $G$ ir punkta $x = 0$ kāda apkārtne telpā $\mathbb{R}^n$, ir tāds ka daļa*

$$\frac{|f(t,x)|}{|x|} \to 0, \quad ja\ x \to 0 \tag{4.14}$$

*vienmērīgi pret $t \in [t_0, +\infty)$, $t_0 > a$, tad diferenciālvienādojuma* (4.13) *triviālais atrisinājums ir nestabils pēc Ļapunova, ja $t \to +\infty$.*

*Pierādījums.* Vispirms atzīmējam, ka izdarot patvaļīgu lineāru nesingulāru transformāciju $y = Sx$, kur $\det S \neq 0$, diferenciālvienādojums (4.13) reducējās uz formu

$$\dot{y} = SAS^{-1}y + Sf(t, S^{-1}y) = A_1 y + f_1(t, y),$$

kur $A_1 = SAS^{-1}$ un $f_1(t, y) = Sf(t, S^{-1}y)$. Attiecīgi izvēloties piemērotu lineāru nesingulāru transformāciju var panākt, ka matrica $A_1$ ir reālā kanoniskā formā, pie kam tie matricas nenulles elementi, kas atbilst nilpotentām šūnām ir pēc absolūtas vērtības mazāki par patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Bez tam katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu punkta $x = 0$ apkārtni $G_1$, ka izpildās nevienādība $|f(t, x)| \leq \varepsilon \|S\|^{-1} \|S^{-1}\|^{-1} |x|$. Bet tad izpildās nevienādība

$$|f_1(t, y)| \leq \|S\| |f(t, S^{-1}y)| \leq \varepsilon \|S\| \|S\|^{-1} \|S^{-1}\|^{-1} \|S^{-1}\| |y| = \varepsilon |y|,$$

ja tikai $y \in S(G)$.

Tātad bez vispārīguma ierobežojuma varam pieņemt, ka diferenciālvienādojumā (4.13) jau ir izdarīta piemērota lineāra nesingulāra transformācija $S$, t.i. matrica $A$ ir diagonālformā, $A = \mathrm{diag}(A_-, A_+)$, kur $A_-$ ir $k \times k$ šūna $(0 \leq k \leq n-1)$ un tās īpašvērtību reālās daļas ir nepozitīvas, bet $A_+$ ir $n-k \times n-k$ šūna un tās īpašvērtības ir ar pozitīvu reālo daļu un $|f(t, x)| \leq \varepsilon |x|$, ja tikai $|x|$ ir pietiekoši mazs. Apzīmē ar $x = (x_-, x_+)$, kur $\dim x_- = k$ un $\dim x_+ = n - k$. Attiecīgi sadalam diferenciālvienādojumu (4.13) divās daļās. Iegūstam

$$\begin{cases} \dot{x}_- = A_- x_- + f_-(t, x) \\ \dot{x}_+ = A_+ x_+ + f_+(t, x) \end{cases} \tag{4.15}$$

Izvēlamies $V(x) = -|x_-|^2 + |x_+|^2$. Tad $\mathrm{grad}\, V(x) = 2(-x_-, x_+)$,

$$\langle \mathrm{grad}\, V(x), Ax \rangle = -2\langle x_-, A_- x_- \rangle + 2\langle x_+, A_+ x_+ \rangle$$

un

$$|\langle \mathrm{grad}\, V(x), f(t, x) \rangle| \leq |\,\mathrm{grad}\, V(x)| |f(t, x)| \leq 2\varepsilon |x|^2.$$

Ja $\varepsilon > 0$ ir pietiekoši mazs, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis $\lambda > 3\varepsilon$, ka

$$\max\{\mathrm{Re}\, \lambda(A_-)\} < \lambda < \min\{\mathrm{Re}\, \lambda(A_+)\},$$

$\langle A_- x_-, x_- \rangle \le (\lambda - 3\varepsilon)|x_-|^2$ un $\langle A_+ x_+, x_+ \rangle \ge (\lambda - \varepsilon)|x_+|^2$.

Funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar diferenciālvienādojumu (4.15) ir sekojoši novērtējams

$$\begin{aligned} \dot V(x) &= \langle \operatorname{grad} V(x), Ax + f(x) \rangle \\ &\ge -2(\lambda - 3\varepsilon)|x_-|^2 + 2(\lambda - \varepsilon)|x_+|^2 - 2\varepsilon(|x_-|^2 + |x_+|^2) \\ &= 2(\lambda - 2\varepsilon)(|x_+|^2 - |x_-|^2) = 2(\lambda - 2\varepsilon)V(x). \end{aligned}$$

Atrastā funkcija $V$ apmierina Četājeva teorēmas nosacījumus un tātad diferenciālvienādojuma (4.13) triviālais atrisinājums ir nestabils. □

## 4.9 Kvazilineāri diferenciālvienādojumi

Apskatām Košī problēmu kvazilineāram diferenciālvienādojumam

$$\dot x = Ax + f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.16}$$

kur $(t_0, x_0) \in (a,b) \times G \subset \mathbb{R}^n$, attēlojums $f\colon (a,b) \times G \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un tāds, ka diferenciālvienādojuma (4.16) labā puse apmierina atrisinājuma unitātes prasības. Apzīmējam Košī problēmas atrisinājumu ar $\varphi\colon I(t_0,x_0) \to \mathbb{R}^n$, $I(t_0,x_0) \subset \mathbb{R}$. Meklējam diferenciālvienādojuma (4.16) atrisinājumu formā

$$\varphi(t,t_0,x_0) = e^{A(t-t_0)}C(t), \quad C(t_0) = x_0.$$

Ievietojam diferenciālvienādojumā

$$Ae^{A(t-t_0)}C(t) + e^{A(t-t_0)}\dot C(t) = Ae^{A(t-t_0)}C(t) + f(t, \varphi(t,t_0,x_0)).$$

No šejienes atrodam diferenciālvienādojumu nezināma attēlojuma $C$ aprēķināšanai

$$\dot C(t) = e^{A(t_0-t)} f(t, \varphi(t,t_0,x_0)).$$

Integrējot iegūstam

$$C(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-s)} f(s, \varphi(s,t_0,x_0))\,\mathrm{d}s.$$

Tātad Košī problēma (4.16) ir ekvivalenta integrālvienādojumam

$$\varphi(t,t_0,x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s,\varphi(s,t_0,x_0))\,\mathrm{d}s.$$

Šo formulu sauc arī par *konstantu variācijas formulu*.

## 4.10 Invariantās varietātes

Apskatām autonomu diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y), \\ \dot{y} = By + g(x,y), \end{cases} \tag{4.17}$$

kur $A$ ir $k \times k$ un $B$ ir $l \times l$ matricas, attēlojumi $f\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k$ un $g\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu Lipšica konstanti $\varepsilon > 0$

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$

$$|g(x,y) - g(x',y')| \leq \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|)$$

un $f(0,0) = 0$ un $g(0,0) = 0$. Tas nozīmē, ka koordinātu sākuma punkts ir diferenciālvienādojuma (4.17) nekustīgais punkts. Precizēsim nosacījumus attiecībā pret diferenciālvienādojuma (4.17) lineāro daļu. Pieņemsim, ka matricu $A$ un $B$ īpašvērtībam izpildās novērtējums

$$\min_i \operatorname{Re} \lambda_i(A) > \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(B).$$

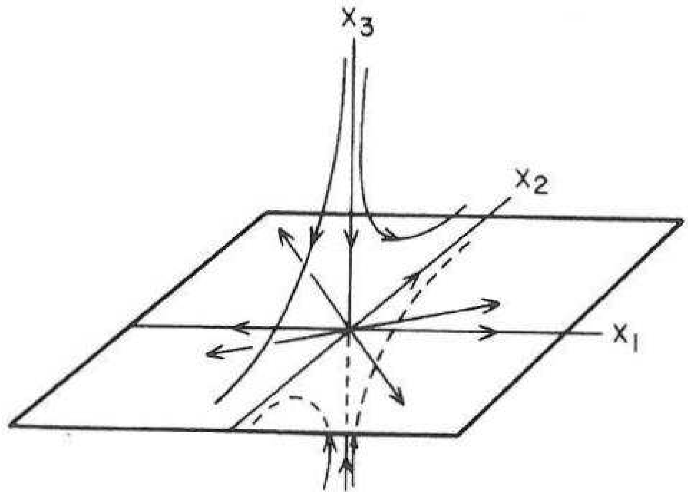
Dotais nosacījumi garantē integrāļa

$$\nu = \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bt}||e^{At}|\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} |e^{Bt}||e^{-At}|\,\mathrm{d}t$$

konverğenci.

Diferenciālvienādojuma (4.17) atrisinājumu $\varphi\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$, kurš pie $t = 0$ pieņem sākuma vērtību $(x,y)$, apzīmēsim ar

$$\varphi(t,x,y) = (x(t,x,y), y(t,x,y)).$$




**Zīm. 4.9** Lineāram diferenciālvienādojumam ar divām pozitīvām un vienu negatīvu īpašvērtību nestabilā invariantā varietāte ir $x_1x_2$ plakne un stabilā invariantā varietāte ir $x_3$ ass

**Definīcija 4.11.** Kopu $M \in \mathbb{R}^n$ sauc par *invariantu*, ja katram $x \in M$ ir spēkā sakarība $\varphi(t,x) \in M$ visiem $t \in I(x) \subset \mathbb{R}$.

Mūs interesēs invariantās kopas (invariantās varietātes), kuras ir attēlojuma $u\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ grafiki. Analītiski tas nozīmē, ka ja atrisinājums $\varphi$ pie $t = 0$ pieņem sākuma vērtību $(x, u(x))$, tad visiem $t \in \mathbb{R}$ izpildās vienādība

$$u(x(t,x,u(x))) = y(t,x,u(x)) \tag{4.18}$$

vai citiem vārdiem attēlojums $u$ ir funkcionālvienādojuma (4.18) atrisinājums.

Aplūkojam nepārtrauktu attēlojumu kopu

$$\mathbb{M} = \left\{ u\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \mid u(0) = 0 \text{ un } \sup_x \frac{|u(x)|}{|x|} < +\infty \right\},$$

kura ir Banaha telpa, ja normu definē ar vienādību

$$\|u\| = \sup_x \frac{|u(x)|}{|x|}.$$

Attiecīgi Banaha telpas $\mathbb{M}$ apakškopa

$$\mathbb{M}(p) = \left\{ u \in \mathbb{M} \mid |u(x) - u(x')| \leq p|x - x'| \right\}.$$

ir slēgta apakškopa.

Pieņemam, ka $u \in \mathbb{M}(p)$ un apskatām Košī problēmu

$$\dot{x} = Ax + f(x, u(x)), \quad x(0) = x. \tag{4.19}$$

Tā ir ekvivalenta integrālvienādojumam

$$x(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} f(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{4.20}$$

Atrodam divu integrālvienādojumu (4.20) atrisinājumu pie atšķirīgiem sākuma nosacījumiem un dažādiem attēlojumiem $u$ novērtējumu starpībai.

**Lemma 4.1.** *Pieņemam, ka* $u, u' \in \mathbb{M}(p)$ *un* $\varepsilon\nu(p+1) < 1$. *Tad ir spēkā novērtējumi*

$$\int_{-\infty}^{0} |\mathrm{e}^{-Bt}||x(t)|\,\mathrm{d}t \leq \nu(1 - \varepsilon\nu(p+1))^{-1}|x|$$

*un*

$$\int_{-\infty}^{0} |\mathrm{e}^{-Bt}||x(t) - x'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \nu(1 - \varepsilon\nu(p+1))^{-1} \left( |x - x'| + \varepsilon\nu(1 - \varepsilon\nu(p+1))^{-1} \|u - u'\| |x| \right).$$

*Pierādījums.* Vispirms novērtējam integrālvienādojuma (4.20) atrisinājumu, ja $t \leq 0$

$$|x(t)| \leq |\mathrm{e}^{At}||x| + \varepsilon \int_t^0 |\mathrm{e}^{A(t-s)}|(|x(s)| + |u(x(s))|)\,\mathrm{d}s$$

$$\leq |\mathrm{e}^{At}||x| + \varepsilon(p+1) \int_t^0 |\mathrm{e}^{A(t-s)}||x(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Pareizinam nevienādības abas puses ar $|\mathrm{e}^{-Bt}|$ un integrējam robežās $T \leq t \leq 0$. Iegūstam

$$\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||x(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||\mathrm{e}^{At}||x|\,\mathrm{d}t + \varepsilon(p+1)\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}|\,\mathrm{d}t \int_t^0 |\mathrm{e}^{A(t-s)}||x(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Ievērojam, ka $\mathrm{e}^{-Bt} = \mathrm{e}^{-B(t-s)}\mathrm{e}^{-Bs}$ un tātad $|\mathrm{e}^{-Bt}| \leq |\mathrm{e}^{-B(t-s)}||\mathrm{e}^{-Bs}|$. Mainam integrācijas kārtību divkāršajā integrālī. Seko

$$\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||x(t)|\,\mathrm{d}t \leq |x| \int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||\mathrm{e}^{At}|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)|\,\mathrm{d}s \int_T^s |\mathrm{e}^{-B(t-s)}||\mathrm{e}^{A(t-s)}|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \nu|x| + \varepsilon(p+1)\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)|\,\mathrm{d}s \int_{T-s}^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||\mathrm{e}^{At}|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \nu\left(|x| + \varepsilon(p+1)\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)|\,\mathrm{d}s\right).$$

No šejienes

$$\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||x(t)|\,\mathrm{d}t \leq \nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}|x|.$$

Pārējam uz robežu kad $T \to -\infty$ un iegūstam vajadzīgo novērtējumu.

Novērtējam starpību starp diviem integrālvienādojuma (4.20) atrisinājumiem, ja $t \leq 0$

$$|x(t) - x'(t)|$$

$$\leq |\mathrm{e}^{At}||x - x'| + \varepsilon \int_t^0 |\mathrm{e}^{A(t-s)}|(|x(s) - x'(s)| + |u(x(s)) - u'(x'(s))|)\,\mathrm{d}s$$

$$\le |e^{At}||x-x'| + \varepsilon(p+1)\int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)-x'(s)|\,ds$$

$$+\varepsilon\|u-u'\|\int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)|\,ds.$$

Pareizinam nevienādības abas puses ar $|e^{-Bt}|$ un integrējam robežās $T \le t \le 0$. Iegūstam

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x'(t)|\,dt \le \int_T^0 |e^{-Bt}||e^{At}||x-x'|\,dt$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bt}|\,dt \int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)-x'(s)|\,ds$$

$$+\varepsilon\|u-u'\|\int_T^0 |e^{-Bt}|\,dt \int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)|\,ds.$$

Mainām integrācijas kārtību divkāršajos integrāļos. Seko

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x'(t)|\,dt \le \nu|x-x'|$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x'(s)|\,ds \int_T^s |e^{-B(t-s)}||e^{A(t-s)}|\,dt$$

$$+\varepsilon\|u-u'\|\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)|\,ds \int_T^s |e^{-B(t-s)}||e^{A(t-s)}|\,dt$$

$$\le \nu|x-x'| + \varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x'(s)|\,ds \int_{T-s}^0 |e^{-Bt}||e^{At}|\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon\|u-u'\| \int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)|\,\mathrm{d}s \int_{T-s}^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||\mathrm{e}^{At}|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \nu \Bigg( |x-x'| + \varepsilon(p+1) \int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)-x'(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \varepsilon\nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}|x|\|u-u'\| \Big) .
\end{aligned}
$$

No šejienes

$$
\begin{aligned}
&\int_T^0 |\mathrm{e}^{-Bt}||x(t)-x'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \nu(1-\varepsilon(p+1)\nu)^{-1} \left( |x-x'| + \varepsilon\nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}|x|\|u-u'\| \right) .
\end{aligned}
$$

Parējam uz robežu kad $T \to -\infty$ un iegūstam vajadzīgo novērtējumu. Lemma ir pierādīta. □

Lai atrastu invarianto varietāti jārisina integrofunkcionālvienādojumu sistēma

$$
x(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} f(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s
$$

$$
u(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s.
$$

Tiešām, ievērojot, ka $x(t)$ ir autonoma diferenciālvienādojuma (4.19) atrisinājums, dabūjam

$$
\eta(t) = u(x(t)) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(x(s+t), u(x(s+t)))\,\mathrm{d}s
$$

$$
= e^{Bt} \int_{-\infty}^t e^{-Bs} g(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s
$$

$$= e^{Bt}u(x) + \int_0^t e^{B(t-s)} g(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s$$

$$= e^{Bt}u(x) + \int_0^t e^{B(t-s)} g(x(s), \eta(s))\,\mathrm{d}s.$$

Tātad $(x(t), \eta(t))$ ir diferenciālvienādojuma (4.17) atrisinājums, kurš apmierina sākuma nosacījumus $(x, u(x))$. Citiem vārdiem izpildās sakarība

$$u(x(t,x,u(x))) = y(t,x,u(x)).$$

Pēdējais nosacījums arī nozīmē, ka attēlojuma $u$ grafiks ir invarianta varietāte.

**Teorēma 4.6.** *Ja $4\nu\varepsilon < 1$, tad eksistē Lipšica attēlojums $u\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ kurš apmierina sekojošas īpašības:*

- $u(x(t,x,u(x))) = y(t,x,u(x))$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$*;*
- $|u(t,x) - u(t,x')| \le p|x-x'|$*;*
- $u(t,0) = 0$*,*

*kur*

$$p = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon\nu}}{1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu}} < 1.$$

*Pierādījums.* Ja $4\varepsilon\nu < 1$, tad eksistē $0 < p < 1$ tāds, ka

$$\varepsilon\nu(p+1)(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1} \le p.$$

Izvēlamies

$$p = (2\varepsilon\nu)^{-1}(1-2\varepsilon\nu-\sqrt{1-4\varepsilon\nu})$$
$$= 2\varepsilon\nu(1-2\varepsilon\nu+\sqrt{1-4\varepsilon\nu})^{-1} < 1.$$

Tad $2(1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu})^{-1} = p+1$ un $2\varepsilon\nu(p+1) \le 1$.

Definējam operatoru $\mathscr{T}: \mathbb{M}(p) \to \mathbb{M}$ ar vienādību palīdzību

$$\mathscr{T}u(x) = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-Bs} g(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s$$

kur

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} f(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Ņemam patvaļīgu $u \in \mathbb{M}(p)$. Iegūstam

$$|\mathscr{T}u(x)| \leq \varepsilon(p+1) \int\limits_{-\infty}^{0} |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)|\,\mathrm{d}s \leq \frac{\varepsilon\nu(p+1)}{1-\varepsilon\nu(p+1)}|x| = p|x|.$$

Tātad $\mathscr{T}u \in \mathbb{M}$. Izvēlamies $u' \in \mathbb{M}(p)$. Izlietojot Lemmu 4.1 iegūstam novērtējumu

$$\begin{aligned} &|(\mathscr{T}u)(x) - (\mathscr{T}u')(x')| \\ &\leq \varepsilon(p+1) \int\limits_{-\infty}^{0} |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s) - x'(s)|\,\mathrm{d}s + \varepsilon\|u - u'\| \int\limits_{-\infty}^{0} |\mathrm{e}^{-Bs}||x(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq p\left(|x - x'| + \frac{\varepsilon\nu}{1-\varepsilon\nu(p+1)}\|u - u'\||x|\right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon\nu}{1-\varepsilon\nu(p+1)}\|u - u'\||x| \\ &= p|x - x'| + p\|u - u'\||x|. \end{aligned}$$

Tātad $\mathscr{T}u \in \mathbb{M}(p)$ un $\mathscr{T}$ ir saspiešanas operators slēgtā Banaha telpas kopā $\mathbb{M}(p)$. Seko integrofuncionālvienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums $\mathbb{M}(p)$, kurš arī definē invarianto varietāti. □

*Piemērs 4.3.* Aplūkojam autonomu diferenciālvienādojumu

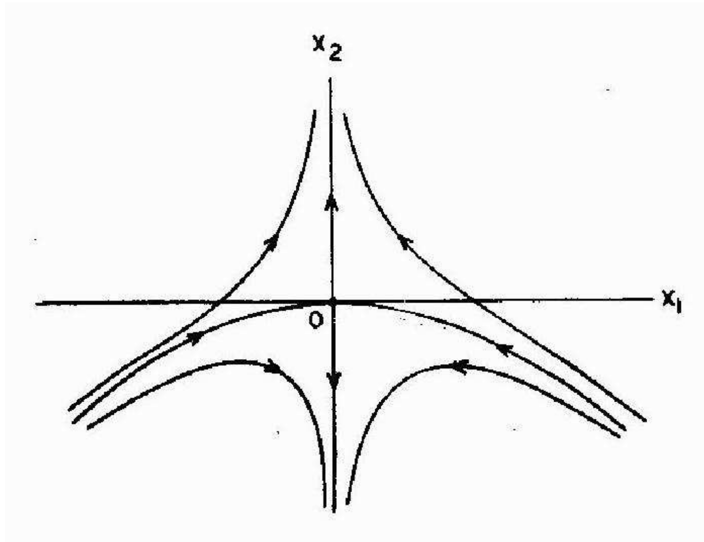
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Košī problēmas $x(0) = x$, $y(0) = y$ atrisinājums ir

$$\begin{aligned} x(t,x) &= xe^{-t} \\ y(t,x,y) &= ye^{t} + \tfrac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Pārliecināmies, ka kopa

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = u(x) = -x^2/3\}$$




**Zīm. 4.10** Diferenciālvienādojumam (4.21) ir nestabilā invariantā varietāte $y$ ass un stabilā invariantā varietāte $y = -x^2/3$

ir invarianta varietāte. Pārbaudām, ka ja atrisinājums sākās kopā $M$, tad tas arī visiem $t \in \mathbb{R}$ paliek šajā kopā. Ievērojam, ka

$$u(x(t,x)) = -\frac{x^2e^{-2t}}{3}.$$

Savukārt

$$y(t,x,u(x)) = -\frac{x^2e^t}{3} + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = u(x(t,x)).$$

**Lemma 4.2.** *Ja* $4\nu\varepsilon < 1$*, tad ir spēkā novērtējums*

$$\int_0^{+\infty} |\mathrm{e}^{-As}||y(s,x,y) - u(x(s,x,y))|\,\mathrm{d}s \le \nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}|y-u(x)|.$$

Tālāk pierādīsim asimptotiskās fāzes īpašību.

**Teorēma 4.7.** *Ja* $4\nu\varepsilon < 1$*, tad katram diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.17) *atrisinājumam* $(x(\cdot),y(\cdot))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k+l}$ *eksistē tāds diferenciālvienādojuma* (4.19) *atrisinājums* $\zeta(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ *ka visiem* $t \in \mathbb{R}$ *izpildās novērtējums*

$$|\zeta(t) - x(t)| \leq l_1 |y(t) - u(t, x(t))|$$

*kur*

$$p_1 = \frac{\varepsilon\nu}{\sqrt{1 - 4\varepsilon\nu}}.$$

*Pierādījums.* Apskatām nepārtrauktu attēlojumu kopu

$$\mathbb{M}_1 = \left\{ q\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k \mid \sup_{x,y} \frac{|q(x,y)|}{|y - u(x)|} < +\infty \right\}.$$

Acīmredzot $\mathbb{M}_1$ ir Banaha telpa ar normu

$$\|q\| = \sup_{x,y} \frac{|q(x,y)|}{|y - u(x)|}$$

attiecigi.

Apskatām telpā $\mathbb{M}_1$ funkcionālvienādojumu

$$q(x,y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At}(f(x(t), y(t)) \tag{4.22}$$

$$- f(x(t) + q(x(t), y(t)), u(x(t) + q(x(t), y(t))))) \,\mathrm{d}t$$

un operatoru $\mathscr{L}\colon \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_1$, kuru definējam ar formulu

$$\mathscr{L}q(x,y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At}(f(x(t), y(t))$$

$$- f(x(t) + q(x(t), y(t)), u(x(t) + q(x(t), y(t))))) \,\mathrm{d}t.$$

Iegūstām novērtējumus

$$|\mathscr{L}q(x,y) - \mathscr{L}q'(x,y)|$$

$$\leq \varepsilon(p+1) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At} |q(x(t), y(t)) - q'(x(t), y(t))| \,\mathrm{d}t$$

$$\leq \varepsilon(p+1)\|q - q'\| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At} |u(x(t)) - y(t)| \,\mathrm{d}t \leq p\|q - q'\| \, |y - u(x)|$$

un

$$|\mathscr{L}q(x,y)| \le \varepsilon(p+1)\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At}|q(x(t),y(t))|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At}|y(t)-u(x(t))|\,\mathrm{d}t$$

$$\le \varepsilon((p+1)\|q\|+1)\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-At}|u(x(t))-y(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\le \left(p\|q\| + \frac{p}{p+1}\right)|y-u(x)| \le p_1|y-u(x)|,$$

kur

$$\|q\| \le \frac{p}{1-p^2} = p_1 = \frac{\varepsilon\nu}{\sqrt{1-4\varepsilon\nu}}.$$

Seko, iegūstam ka $\mathscr{L}q \in \mathbb{M}_1$ un $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators. Tātad ir viens vienīgs funkcionālvienādojuma (4.22) atrisinājums. Bez tam visiem $t \in \mathbb{R}$

$$q(x(t,x,y),y(t,x,y)) = \int\limits_t^{+\infty} \mathrm{e}^{A(t-s)}(f(x(s),y(s))$$

$$-f(x(s)+q(x(s),y(s)),u(x(s)+p(x(s),y(s)))))\,\mathrm{d}s$$

$$= \mathrm{e}^{At}q(x,y) - \int\limits_0^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)}\,(f(x(s),y(s))$$

$$-f(x(s)+q(x(s),y(s)),u(x(s)+q(x(s),y(s)))))\,\mathrm{d}s$$

$$= -x(t,x,y)+\mathrm{e}^{t}(x+p(x,y))$$

$$+\int\limits_0^{t} \mathrm{e}^{At}f(x(t)+q(x(t),y(t)),u(x(t)+q(x(t),y(t))))\,\mathrm{d}t.$$

Pieņemam

$$\zeta(t) = x(t,x,y)+q(x(t,x,y),y(t,x,y))$$

$$= \mathrm{e}^{At}\zeta + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} f(\zeta(t), u(\zeta(t)))\,\mathrm{d}t$$

kur $\xi = x + q(x,y)$.

Seko, ka $\zeta(\cdot)$ ir diferenciālvienādojuma (4.19) atrisinājums

$$|\zeta(t) - x(t,x,y)| = |q(x(t,x,y), y(t,x,y))|$$
$$\leq \frac{\varepsilon\nu}{\sqrt{1-4\varepsilon\nu}} |y(t,x,y) - u(x(t,x,y))|.$$

Teorēma ir pierādīta. □

## 4.11 Plisa redukcijas princips stabilitātes teorijā

Apskatām autonomu diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y), \\ \dot{y} = By + g(x,y). \end{cases} \tag{4.23}$$

Mēs detalizēti aplūkosim diferenciālvienādojuma stabilitātes īpašības (4.23). Tādēļ papildus pieņemsim, ka

$$\mu = \int\limits_{-\infty}^{0} |e^{-Bt}|\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{+\infty} |e^{Bt}|\,\mathrm{d}t,$$

kas atļauj pastiprināt Lemmas 4.2 nosacījumus.

**Lemma 4.3.** *Ja* $4\nu\varepsilon < 1$ *un* $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1-4\varepsilon\nu}$. *tad katram diferenciālvienādojuma* (4.23) *atrisinājumam* $(x(\cdot), y(\cdot))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k+l}$ *ir spēkā sekojošs novērtējums*

$$\int\limits_0^{+\infty} |y(s,x,y) - u(x(s,x,y))|\,\mathrm{d}s \leq \mu(1-\varepsilon\mu(p+1))^{-1}|y-u(x)|.$$

**Sekas 4.3.** *Seko,*

$$\lim_{t\to+\infty}(y(t) - u(x(t))) = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty}(\zeta(t) - x(t)) = 0.$$

**Teorēma 4.8.** *Pieņemam, ka* $4\nu\varepsilon < 1$ *un* $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu}$. *Diferenciālvienādojuma* (4.23) *triviālais atrisinājums ir stabils (asimptotiski stabils) tad un tikai tad, kad diferenciālvienādojuma*

$$\dot{x} = Ax + f(x, u(x)) \tag{4.24}$$

*triviālais atrisinājums ir stabils (asimptotiski stabils).*

*Pierādījums.* Pieņemam, ka diferenciālvienādojuma (4.24) atrisinājums ir stabils. Tad katram $\varepsilon_1 > 0$ eksistē $\delta_1 > 0$ tāds, ka visiem $|\zeta(s)| < \delta_1$ un $t \geq s$ iegūstam $|\zeta(t)| < \varepsilon_1/2$.

Pieņemam, ka $|x(s)| < \delta$ un $|y(s)| < \delta$, kur

$$\delta < \frac{1}{(1+p_1)(p+1)} \min\left(\frac{1-\varepsilon(p+1)\mu}{2\mu}\varepsilon_1, \delta_1\right).$$

Tad mēs visiem $t \geq s$ dabūjam

$$|\zeta(s)| \leq |x(s) + q(x(s), y(s))| \leq (1 + p_1(p+1))\delta < \delta_1$$

$$|\zeta(t) - x(t)| \leq p_1|y(t) - u(x(t))| \leq \frac{\mu p_1(p+1)}{1-\varepsilon(l+1)\mu}\delta < \varepsilon_1/2,$$

$$|y(t) - u(\zeta(t))| \leq |y(t) - u(x(t))| + |u(x(t)) - u(t, \zeta(t))|$$

$$\leq (1 + pp_1)|y(t) - u(x(t))| \leq \frac{\mu(1+pp_1)(p+1)}{1-\varepsilon(p+1)\mu}\delta < \varepsilon_1/2.$$

No šejienes

$$|x(t)| \leq |x(t) - \zeta(t)| + |\zeta(t)| < \varepsilon_1$$

$$|y(t)| \leq |y(t) - u(\zeta(t))| + |u(\zeta(t))| < (p+1)\varepsilon_1/2 < \varepsilon_1$$

Pieņem, ka diferenciālvienādojuma (4.24) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabīls. Tad

$$\lim_{t\to+\infty} \zeta(t) = 0.$$

Seko

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty}(x(t) - \zeta(t)) + \lim_{t\to+\infty} \zeta(t) = 0$$

un

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}(y(t) - u(x(t)) + \lim_{t\to+\infty} u(x(t)) = 0$$

ņemot vērā, ka

$$|u(x(t))| \leq p|x(t)|.$$

Ja diferenciālvienādojuma triviālais (4.24) atrisinājums ir nestabīls, tad diferenciālvienādojuma (4.23) triviālais atrisinājums ir nestabīls.

Ja diferenciālvienādojuma (4.23) triviālais atrisinājums ir stabīls vai asimptotiski satbīls, tad diferenciālvienādojuma (4.24) triviālais atrisinājums ir stabīls vai asimptotiski stabīls.

Ja diferenciālvienādojuma (4.23) triviālais atrisinājums ir nestabīls, tad diferenciālvienādojuma (4.24) triviālais atrisinājums ir nestabīls. Pretējā gadījumā diferenciālvienādojuma (4.23) triviālais atrisinājums ir stabīls. Iegūstam pretrunu. Teorēma ir pierādīta. □

# Nodaļa 5
# Dinamiskā ekvivalence

## 5.1 Homeomorfisms

**Definīcija 5.1.** Nepārtraukts attēlojums $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir *homeomorfisms*, ja tas ir bijektīvs (injektīvs un sirjektīvs) un tā inversais attēlojums ir nepārtraukts.

**Teorēma 5.1.** *Nepārtraukts attēlojums $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir homeomorfisms, ja eksistē tāds nepārtraukts attēlojums $H'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ka visiem $x \in \mathbb{R}^n$ izpildās vienādība*

$$H \circ H'(x) = H' \circ H(x) = x. \tag{5.1}$$

*Pierādījums.* Pierādām, ka $H$ ir injektīvs, t.i. no $x \neq x'$ seko $H(x) \neq H(x')$. Pieņemam pretējo eksistē $x \neq x'$, ka $H(x) = H(x')$ un tātad $H' \circ H(x) = H' \circ H(x')$. No vienādības (5.1) seko $x = x'$. Iegūstam pretrunu ar pieņēmumu.

No vienādības $H \circ H'(x) = x$ seko, ka attēlojuma $H$ vērtību kopa ir $\mathbb{R}^n$, tātad tas ir arī sirjektīvs. Tātad attēlojums $H$ ir bijektīvs un tam eksistē inversais attēlojums $H^{-1} = H'$. Pēc teorēmas nosacījumiem attēlojums $H'$ ir nepārtraukts un tātad $H$ ir homeomorfisms. $\square$

*Piezīme 5.1.* Teorēma ir spēkā vispārīgā topoloģiskā telpā.

*Piezīme 5.2.* Izmantojot algebriskās topoloģijas metodes var pierādīt, ka nepārtraukts, injektīvs attēlojums telpā $\mathbb{R}^n$ ir vaļējs, t.i. vaļēju kopu attēlo par vaļēju kopu. Bet savukārt nepārtraukta, vaļēja bijekcija ir homeomorfisms.

## 5.2 Dinamiskās ekvivalences definīcija

Apskatām divus autonomus diferenciālvienādojumus

$$\dot{x} = P_1(x) \tag{5.2}$$

un

$$\dot{y} = P_2(y), \tag{5.3}$$

kur nepārtrauktie attēlojumi $P_1 \colon D_1 \to \mathbb{R}^n$, $P_2 \colon D_2 \to \mathbb{R}^n$ apmierina atrisinājuma unitātes teorēmas nosacījumus un $D_1$, $D_2$ ir apgabali telpā $\mathbb{R}^n$. Apzīmēsim ar $\varphi_1(\cdot,x) \colon I(x) \to \mathbb{R}^n$ un $\varphi_2(\cdot,y) \colon J(y) \to \mathbb{R}^n$ attiecīgi augstāk minēto diferenciālvienādojumu atrisinājumus.

**Definīcija 5.2.** Divi autonomi diferenciālvienādojumi (5.2) un (5.3) ir *dinamiski ekvivalenti*, ja eksistē homeomorfisms $H \colon D_1 \subset \mathbb{R}^n \to D_2 \subset \mathbb{R}^n$, kur $D_2 = H(D_1)$, tāds, ka visiem $t \in I(x) \subset \mathbb{R}$ izpildās saistības vienādība

$$H(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t,H(x)). \tag{5.4}$$

Ja $D_1 = D_2 = \mathbb{R}^n$, tad autonomie diferenciālvienādojumi (5.2) un (5.3) ir *globāli dinamiski ekvivalenti*.

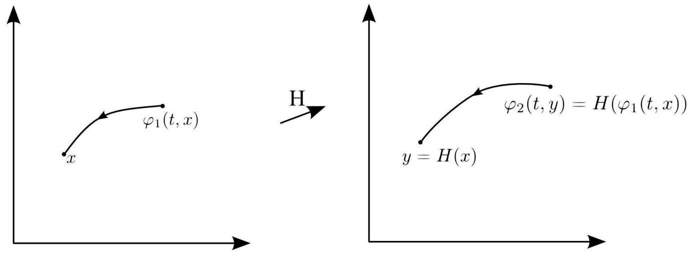
Tātad, lai pierādītu divu diferenciālvienādojumu dinamisko ekvivalenci, ir jāpierāda, ka funkcionālvienādojumam (5.4) eksistē nepārtraukts atrisinājums $H$ un šis atrisinājums ir homeomorfisms. Pie reizes atzīmēsim, ka no dinamiskās ekvivalences definīcijas izriet, ka $I(x) = J(H(x))$.

Saistības vienādība (5.4) ir ekvivalenta apgalvojumam, ka diagramma

$$\begin{tikzcd}
D_1 \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_1(t,\cdot)"] \arrow[d, "H"'] & D_1 \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "H"] \\
D_2 \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_2(t,\cdot)"] & D_2 \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

ir komutīva visiem $t \in I(x) \subset \mathbb{R}$.

**Lemma 5.1.** *Diferenciālvienādojumu dinamiskā ekvivalence ir ekvivalences attiecība.*




**Zīm. 5.1** Dinamiskās ekvivalences definīcija

*Pierādījums.* Pārbaudam, ka diferenciālvienādojumu dinamiskās ekvivalences definīcija apmierina visas trīs ekvivalences prasības, t.i. refleksivitāti, simetriskumu un transivitāti. Refleksivitāte seko, ja par $H$ ņemam identisko attēlojumu. Attiecīgi simetriskums izriet, ja homeomorfisma $H$ vietā ņemam inverso homeomorfismu $H^{-1}$.

Pierādām transivitāti. Pieņemam, ka mums ir trīs diferenciālvienādojumi, kur pirmais un otrais diferenciālvienādojumi ir dinamiski ekvivalenti un attiecīgi otrais un trešais diferenciālvienādojums ir dinamiski ekvivalenti. Tas nozīmē, ka eksistē homeomorfismi $H_1\colon D_1 \to D_2$, $H_2\colon D_2 \to D_3$, $H_1(D_1) = D_2$, $H_2(D_2) = D_3$ tādi, ka

$$H_1(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t, H_1(x))$$

un

$$H_2(\varphi_2(t,x)) = \varphi_3(t, H_2(x)).$$

Iegūstam, ka $H_2 \circ H_1\colon D_1 \to D_3$ ir homeomorfisms, kur $H_2 \circ H_1(D_1) = D_3$ un

$$H_2 \circ H_1(\varphi_1(t,x)) = H_2(\varphi_2(t, H_1(x))) = \varphi_3(t, H_2 \circ H_1(x)).$$

□

*Piezīme 5.3.* Pieņemam papildus, ka $H \in \mathbb{C}^1$. Atvasinām vienādības (5.4) abas puses pēc $t$. Iegūstam

$$DH(\varphi_1(t,x))P_1(\varphi_1(t,x)) = P_2(\varphi_2(t, H(x)).$$

Ja $t = 0$, seko

$$DH(x)P_1(x) = P_2(H(x)),$$

kur $DH(x)$ ir difeomorfisma $H$ Jakobi matrica. No otras puses pieņemam, ka vienādojumu (5.2) ar difeomorfismu $y = H(x)$ var pārveidot uz vienādojumu

$$\dot{y} = P_2(y).$$

Atvasinot iegūstam

$$\dot{y} = DH(x)P_1(x).$$

Seko

$$DH(x)P_1(x) = P_2(H(x)).$$

Tātad funkcionālvienādība (5.4) ir analogs nosacījumam par tāda jauna mainīgā ievešanu, kurš diferenciālvienādojumu (5.2) pārveido par diferenciālvienādojumu (5.3) atsakoties no prasības, ka attēlojums $H$ ir nepārtraukti diferencējams.

## 5.3 Vaisborda teorēma

**Teorēma 5.2.** *Lineārs autonoms diferenciālvienādojums*

$$\dot{x} = Ax, \tag{5.5}$$

*kur* $\max_i(\operatorname{Re}\lambda_i(A)) < 0$*, ir globāli dinamiski ekvivalents diferenciālvienādojumam*

$$\dot{x} = -x. \tag{5.6}$$

*Pierādījums.* Definējam funkciju $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ ar neīstā integrāļa

$$V(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{As}x\|^2 \, \mathrm{d}s$$

palīdzību. No teorēmas nosacījumiem izriet tāda skaitļa $\alpha > 0$ eksistence, ka $\max_i(\operatorname{Re}\lambda_i(A)) < -\alpha < 0$, un tātad visiem $t \geq 0$ ir spēkā novērtējums

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\alpha t}.$$

Seko integrālis konverğē pie kam vienmērīgi katrā ierobežotā telpas $\mathbb{R}^n$ apgabalā, $V(x) > 0$, ja $x \neq 0$, $V(0) = 0$ un $\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$. Tātad ar neīstā integrāļa palīdzību tiek definēta nepārtraukta funkcija vai precīzāk pozitīvi definīta kvadratiska forma. Apzīmējam ar

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) = 1\}$$

funkcijas $V$ fiksētu līmeņa virsmu. Mūsu gadījumā $M$ ir $n-1$ dimensionāls elipsoīds ar centru koordinātu sākuma punktā.

Vispirms pārbaudām, ka jebkura diferenciālvienādojuma (5.5) trajektorija, kas laika momentā $t=0$ sākās patvaļīgā punktā $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, šķērso elipsoidu $M \subset \mathbb{R}^n$ vienu vienīgu reizi momentā $\tau(x) \in \mathbb{R}$. Aprēķinam

$$V(e^{At}x) = \int\limits_0^{+\infty} \|e^{As}e^{At}x\|^2 \, \mathrm{d}s = \int\limits_0^{+\infty} \|e^{A(s+t)}x\|^2 \, \mathrm{d}s = \int\limits_t^{+\infty} \|e^{As}x\|^2 \, \mathrm{d}s.$$

Atvasinot iegūto izteiksmi pēc $t$, $x \neq 0$, iegūstam

$$\frac{dV(e^{At}x)}{dt} = -\|e^{At}x\|^2 < 0. \tag{5.7}$$

Ievērojot, ka $\lim_{t\to+\infty} \|e^{At}x\| = 0$, $\lim_{t\to-\infty} \|e^{At}x\| = +\infty$, $x \neq 0$, un attiecīgi $\lim_{t\to+\infty} V(e^{At}x) = 0$, $\lim_{t\to-\infty} V(e^{At}x) = +\infty$, $x \neq 0$ un ņemot vērā atvasinājuma (5.7) zīmi, iegūstam, ka eksistē viens vienīgs $\tau(x) \in \mathbb{R}$, ka $V(e^{A\tau(x)}) = 1$. Tas savukārt nozīmē, ka katra diferenciālvienādojuma (5.5) trajektorija ($x \neq 0$) šķērso elipsoīdu $M \subset \mathbb{R}^n$ vienu vienīgu reizi.

Analogi pierādām, ka jebkura diferenciālvienādojuma (5.6) trajektorija šķērso iepriekšējo elipsoīdu $M \subset \mathbb{R}^n$, ja $x \neq 0$, vienu vienīgu reizi. Iegūstam

$$V(e^{-t}x) = \int\limits_0^{+\infty} \|e^{As}e^{-t}x\|^2 \, \mathrm{d}s = e^{-2t} \int\limits_0^{+\infty} \|e^{As}\|^2 \, \mathrm{d}s = e^{-2t}V(x)$$

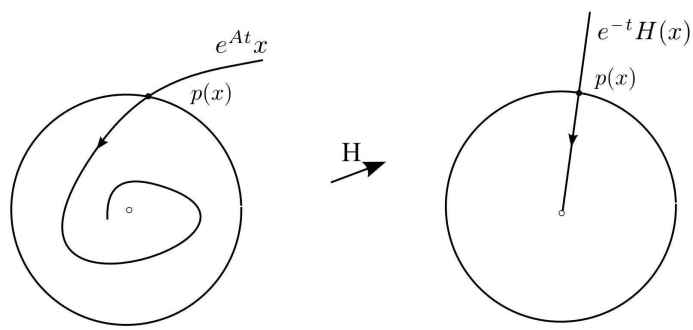
un atvasinājums attiecīgi ir

$$\frac{dV(e^{-t}x)}{dt} = -2e^{-2t}V(x) < 0.$$

Definējam attēlojumu $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sekojoši

$$H(x) = \begin{cases} e^{\tau(x)}p(x), & \text{ja } x \neq 0, \\ 0, & \text{ja } x = 0, \end{cases}$$

kur $p(x) = e^{A\tau(x)}x \in M$ ir atbilstošais diferenciālvienādojuma (5.5) trajektorijas krustpunkts ar elipsoīdu $M$, t.i. $V(p(x)) = 1$. No atrisinājuma nepārtrauktības pēc laika $t$ un sākuma nosacījumiem izriet funkciju $\tau\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ un $p\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to M$ nepārtrauktība un tātad arī attēlojuma $H$ nepārtrauktība. Atliek pierādīt attēlojuma $H$ nepārtrauktību punktā $x = 0$. Ievērojam, ka ja $x \to 0$, tad $\tau(x) \to -\infty$. Novērtējām $|H(x)| \le e^{\tau(x)}|p(x)| \le e^{\tau(x)} \sup_{V(x)=1} |x|$ un tātad $H(x) \to 0$, ja $x \to 0$. No attēlojuma $H$ konstrukcijas izriet, ka tas ir bijektivs attēlojums, tā inversais attēlojums ir nepārtraukts un tātad $H$ ir homeomorfisms.




**Zīm. 5.2** Vaisborda teorēma

Lai pierādītu diferenciālvienādojumu (5.5) un (5.6) dinamisko ekvivalenci, atliek pierādīt saistības vienādojumu. Ievērojam sakarības $\tau(e^{At}x) = \tau(x) - t$ un $p(e^{At}x) = p(x)$. Tāpēc

$$H(e^{At}x) = e^{\tau(e^{At}x)}p(e^{At}x) = e^{\tau(x)-t}p(x) = e^{-t}H(x).$$

□

*Piezīme 5.4.* No pierādījuma redzams, ka attēlojums $H$ kopā $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ir analītisks diffeomorfisms un vispārīga gadījumā tikai nepārtraukts punktā $x = 0$.

Analogi var pierādīt teorēmu

**Teorēma 5.3.** *Lineārs diferenciālvienādojums*

$$\dot{x} = Ax,$$

*kur* $\min_i(\operatorname{Re}\lambda_i(A)) > 0$*, ir globāli dinamiski ekvivalents diferenciālvienādojumam*

$$\dot{x} = x.$$

Rezultatā apvienojot iepriekšējos rezultātus iegūstam

**Teorēma 5.4.** *Lineārs diferenciālvienādojums*

$$\dot{x} = Ax,$$

*kur* $\operatorname{Re}\lambda_i(A) \neq 0$*, ir globāli dinamiski ekvivalents diferenciālvienādojumam*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases}$$

*kur* $\dim x_1 + \dim x_2 = \dim x = n$*.*

**Uzdevums 5.1.** Pierādīt Teorēmu 5.3 un Teorēmu 5.4.

## 5.4 Grīna tipa attēlojums

**Definīcija 5.3.** Attēlojumu $G\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)$ sauc par *Grīna attēlojumu*, ja

(i) attēlojums $G$ ir nepārtraukti diferencējams un apmierina diferenciālvienādojumu (5.5);
(ii) $G(+0) - G(-0) = E$;
(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Viegli pārliecināties, ka attēlojums ar jebkuru matricu $P$

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{At}P, & \text{ja } t > 0 \\ -e^{At}(E-P), & \text{ja } t < 0 \end{cases}$$

apmierina nosacījumus (i) un (ii). Pārbaudām, ka ja attēlojums $\varphi$ ar matricu $P$ apmierina nosacījumu (iii), tad arī attēlojums $\varphi_1$ ar matricu $P^2$ apmierina nosacījumu (iii). No nosacījuma (iii) izriet novērtējums

$$\max\left(\int_{-\infty}^{0} |e^{At}(E-P)|\,\mathrm{d}t, \int_{+\infty}^{0} |e^{At}P|\,\mathrm{d}t\right) < +\infty.$$

Tad

$$\max\left(\int_{-\infty}^{0} |e^{At}(E-P^2)|\,\mathrm{d}t, \int_{+\infty}^{0} |e^{At}P^2)|\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\leq \max\left(\int_{-\infty}^{0} |e^{At}(E-P)||E+P|\,\mathrm{d}t, \int_{+\infty}^{0} |e^{At}P||P|\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\leq \max\left(\int_{-\infty}^{0} |e^{At}(E-P)|\,\mathrm{d}t, \int_{+\infty}^{0} |e^{At}P|\,\mathrm{d}t\right) \times \max(|P|,|E+P|) < +\infty.$$

Ja nosacījums (iii) garantē Grīna attēlojuma unitāti, tad $P = P^2$, vai citiem vārdiem $P$ ir projektors.

**Uzdevums 5.2.** Pierādīt, ja nosacījums (iii) garantē Grīna funkcijas unitāti, tad

$$e^{At}P = Pe^{At}.$$

**Teorēma 5.5.** *Ja* $\operatorname{Re}\lambda_i(A) \neq 0$*, tad eksistē viens vienīgs Grīna attēlojums.*

*Pierādījums.* Vispirms pierādām matricas $G$ eksistenci. Eksistē tāda nesingulāra matrica $S$, $\det S \neq 0$, ka

$$J = SAS^{-1}, \quad J = \operatorname{diag}[A_+, A_-],$$

kur $\operatorname{Re}\lambda_i(A_+) > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_i(A_-) < 0$ un $E = E_- + E_+$. Tad

$$G(t) = \begin{cases} S^{-1}e^{A_-t}S, & \text{ja } t > 0 \\ -S^{-1}e^{A_+t}S, & \text{ja } t < 0 \end{cases}$$

Pārbaudām īpašības. Īpašība (i) ir acīmredzama. Pierādām īpašību (ii).

$$G(+0) - G(-0) = S^{-1}E_+S + S^{-1}E_-S = S^{-1}ES = E.$$

Tālāk pārbaudām īpašību (iii). No teorēmas nosacījumiem izriet tāda $\alpha > 0$ eksistence, ka $|\operatorname{Re}\lambda_i(A)| > \alpha > 0$ un tātad iegūstam novērtējumu

$$|G(t)| \leq ce^{-\alpha|t|}.$$

Acīmredzot integrālis konverğē. Pierādām unitāti. Divu Grīnu attēlojumu starpība ir lineāra diferenciālvienādojuma atrisinājums ja $t \in$

$\mathbb{R}^n$ un vienīgais atrisinājums, kuram integrālis konverğē ir nulles attēlojums. Seko Grīna funkcijas unitāte. $\square$

Ievērojam, ka

$$S^{-1}e^{A_-t}S = S^{-1}e^{JE_-t}S = S^{-1}e^{Jt}E_-S = S^{-1}e^{Jt}SS^{-1}E_-S = e^{At}P,$$

kur $P = S^{-1}E_-S$. Tātad Grīna attēlojums ir formā

$$G(t) = \begin{cases} e^{At}P, & \text{ja } t > 0 \\ -e^{At}(E-P), & \text{ja } t < 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

## 5.5 Grobmana–Hartmana teorēma

Aplūkojam divus diferenciālvienādojumus

$$\dot{x} = Ax + f_1(x) \tag{5.9}$$

un

$$\dot{x} = Ax + f_2(x), \tag{5.10}$$

kur attēlojumi $f_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un $f_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$|f_i(x) - f_i(x')| \le \varepsilon|x - x'|, \quad i = 1,2$$

un to starpība ir ierobežota

$$\sup_x |f_1(x) - f_2(x)| < +\infty.$$

**Teorēma 5.6 (Grobmana – Hartmana teorēma).** *Diferenciālvienādojumi* (5.9) *un* (5.10) *ir globāli dinamiski ekvivalenti, ja eksistē tāds Grīna attēlojums $G$ ka*

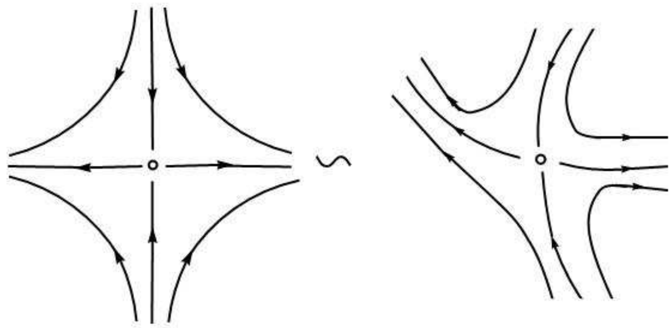
$$\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(s)|\,\mathrm{d}s < 1.$$

*Pierādījums.* Aplūkojam nepārtrauktu un ierobežotu attēlojumu kopu

$$\mathcal{B} = \{h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \sup_x |h(x)| < +\infty\}.$$

$\mathcal{B}$ ir Banaha telpa, ja normu definē ar vienādību

$$\|h\| = \sup_x |h(x)|.$$



**Zīm. 5.3** Grobmana – Hartmana teorēma

Apskatām operatoru $\mathscr{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, kuru definējam ar formulas

$$\mathscr{F}h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(-s)(f_2(\varphi_1(s,x) + h(\varphi_1(s,x))) - f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

palīdzību. Ņemam patvaļīgu $h \in \mathcal{B}$. Tā kā attēlojumi $f_1$ un $f_2$ apmierina Lipšica nosacījumus, to starpība ir ierobežota un attēlojums $G$ konverğē absolūti, tad tiešām $\mathscr{F}h \in \mathcal{B}$. Bez tam

$$|\mathscr{F}h(x) - \mathscr{F}h'(x)| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |G(-s)||h(\varphi_1(s,x))) - h'(\varphi_1(s,x)))|\,ds$$

$$\leq \varepsilon \|h - h'\| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(-s)|\,\mathrm{d}s.$$

Seko

$$\|\mathscr{F}h - \mathscr{F}h'\| \leq \varepsilon \|h - h'\| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(s)| \, \mathrm{d}s$$

t.i. operators $\mathscr{F}$ ir saspiešanas operators Banaha telpā $\mathcal{B}$. Seko funkcionālvienādojumam eksistē viens vienīgs atrisinājums

$$\mathscr{F}h(x) = h(x).$$

Aprēķinam $h(\varphi_1(t,x))$

$$h(\varphi_1(t,x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(-s)(f_2(\varphi_1(s,\varphi_1(t,x)) + h(\varphi_1(s,\varphi_1(t,x))))$$

$$-f_1(\varphi_1(s,\varphi_1(t,x)))) \, \mathrm{d}s.$$

Ievērojot, ka autonoma diferenciālvienādojuma (5.9) atrisinājumiem izpildās sakarība $\varphi_1(s,\varphi_1(t,x)) = \varphi_1(s+t,x)$, iegūstam

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(-s)(f_2(\varphi_1(s+t,x) + h(\varphi_1(s+t,x))) - f_1(\varphi_1(s+t,x))) \, \mathrm{d}s.$$

Pārejot uz jaunu integrācijas mainīgo $s+t \to s$ iegūstam

$$h(\varphi_1(t,x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)(f_2(\varphi_1(s,x) + h(\varphi_1(s,x))) - f_1(\varphi_1(s,x))) \, \mathrm{d}s.$$

Izmantojot Grīna attēlojuma izteiksmi (5.8), iegūstam

$$h(\varphi_1(t,x)) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} P(f_2(\varphi_1(s,x) + h(\varphi_1(s,x))) - f_1(\varphi_1(s,x))) \, \mathrm{d}s$$

$$- \int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)} (E-P)(f_2(\varphi_1(s,x) + h(\varphi_1(s,x))) - f_1(\varphi_1(s,x))) \, \mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{A(t-s)} P(f_2(\varphi_1(s,x) + h(\varphi_1(s,x))) - f_1(\varphi_1(s,x))) \, \mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}P(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}(E-P)(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

$$-\int_0^{+\infty} e^{A(t-s)}(E-P)(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s.$$

Apvienojam pirmo un ceturto, kā arī otro un trešo integrāli un vēl reizi izmantojot Grīna attēlojuma izteiksmi (5.8). Seko

$$h(\varphi_1(t,x))$$

$$=e^{At}\int_{-\infty}^{+\infty} G(-s)(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

$$=e^{At}h(x)+\int_0^t e^{A(t-s)}(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s.$$

Apskatām attēlojumu $z\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, kur $z(t)=\varphi_1(t,x)+h(\varphi_1(t,x))$ un diferenciālvienādojuma (5.9) atrisinājums $\varphi_1$ ir uzrakstīts formā izmantojot konstantu variācijas formulu. Iegūstam

$$z(t)=\varphi_1(t,x)+h(\varphi_1(t,x))=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-s)}f_1(\varphi_1(s,x))\,\mathrm{d}s$$

$$+e^{At}h(x)+\int_0^t e^{A(t-s)}(f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))-f_1(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

$$=e^{At}(x+h(x))+\int_0^t e^{A(t-s)}f_2(\varphi_1(s,x)+h(\varphi_1(s,x)))\,\mathrm{d}s$$

$$= e^{At}z(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)} f_2(z(s))\,\mathrm{d}s.$$

Tātad attēlojums $z$ ir diferenciālvienādojuma (5.10) atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumu $z(0) = x + h(x)$. Seko

$$\varphi_2(t, x + h(x)) = \varphi_1(t, x) + h(\varphi_1(t, x)).$$

Apzīmējam ar $H(x) = x + h(x)$. Seko

$$\varphi_2(t, H(x)) = H(\varphi_1(t, x)).$$

Mainot vietām $f_1$ un $f_2$ tādā pašā veidā pierādām attēlojuma $H'$ eksistenci, kur $H'(x) = x + h'(x)$ un $h' \in \mathcal{B}$, ka spēkā vienādība

$$\varphi_1(t, H'(x)) = H'(\varphi_2(t, x)).$$

Līdz ar to iegūstam

$$\psi_2(t, H \circ H'(x)) = H(\psi_1(t, H'(x)) = H \circ H'(\psi_2(t, x)).$$

Ja $f_2 = f_1$, tad viegli pārbaudīt, ka integrālvienādojumu apmierina attēlojums $h(x) \equiv 0$. No attēlojuma $h$ unitātes telpā $\mathcal{B}$, seko, ka

$$H \circ H'(x) = x.$$

Analoģiski iegūstam

$$H' \circ H(x) = x$$

un tātad $H$ ir homeomorfisms, kurš pierāda diferenciālvienādojumu (5.9) un (5.10) globālo dinamisko ekvivalenci. Teorēma ir pierādīta. $\square$

## 5.6 Invariantās varietātes

**Definīcija 5.4.** Kopu $M \in \mathbb{R}^n$ sauc par *invariantu*, ja no $x \in M$ seko, ka visiem $t \in \mathbb{R}$ ir spēkā sakarība $\varphi(t, x) \in M$.

Apskatām diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y), \\ \dot{y} = By + g(x,y), \end{cases} \tag{5.11}$$

kur $\dim x = k$ un $\dim y = l$. Diferenciālvienādojuma (5.11) atrisinājumu $\varphi\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ kurš pie $t = 0$ sākās punktā $(x,y)$ apzīmēsim ar $\varphi(t,x,y) = (x(t,x,y), y(t,x,y))$. Mūs interesēs invariantās kopas (invariantās varietātes), kuras ir attēlojuma $u\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ grafiki. Analītiski tas nozīmē, ka visiem $t \in \mathbb{R}$ attēlojums $u$ apmierina funkcionālvienādojumu

$$u(x(t,x,u(x))) = y(t,x,u(x)).$$

Par matricu $A$ un $B$ īpašvērtībām pieņemsim, ka $\min_i \operatorname{Re}\lambda_i(A) > \max_i \operatorname{Re}\lambda_i(B)$ un $\max_i \operatorname{Re}\lambda_i(B) < 0$. Dotie nosacījumi garantē integrāļu

$$\mu = \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bt}|\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} |e^{Bt}|\,\mathrm{d}t$$

un

$$\nu = \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bt}||e^{At}|\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} |e^{Bt}||e^{-At}|\,\mathrm{d}t$$

konverğenci. Bez tam pieņemam, ka attēlojumi $f$ un $g$ apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu Lipšica konstanti $\varepsilon > 0$, t.i.

$$|f(x,y) - f(x',y')| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$

$$|g(x,y) - g(x',y')| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|).$$

Aplūkojam nepārtrauktu un ierobežotu attēlojumu kopu

$$\mathcal{B} = \{u\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \mid \sup_x |u(x)| < +\infty\}.$$

$\mathcal{B}$ ir Banaha telpa, ja normu definē ar vienādību

$$\|u\| = \sup_x |u(x)|.$$

Apskatām Banaha telpas $\mathcal{B}$ apakškopu

$$\mathcal{B}(p) = \left\{u \in \mathcal{B} \mid |u(x) - u(x')| \le p|x-x'|\right\}.$$

Šī kopa ir Banaha telpas slēgta apakškopa.

Pieņemam, ka $u \in \mathcal{B}$. Apskatām Košī problēmu.

$$\dot{x} = Ax + f(x, u(x)), \quad x(0) = x.$$

Tā ir ekvivalenta integrālvienādojumam

$$x(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} f(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s.$$

**Lemma 5.2.** *Pieņemam, ka* $u, u' \in \mathcal{B}$ *un* $\varepsilon(1+l)\nu < 1$. *Tad ir spēkā novērtējums*

$$\int_{-\infty}^0 |e^{-Bt}||x(t) - x'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \nu(1 - \varepsilon(p+1)\nu)^{-1}\left(|x - x'| + \varepsilon\mu\|u - u'\|\right).$$

*Pierādījums.* Novērtējam starpību starp diviem atrisinājumiem, ja $t \leq 0$

$$|x(t) - x'(t)|$$

$$\leq |e^{At}||x - x'| + \varepsilon \int_t^0 |e^{A(t-s)}|(|x(s) - x'(s)| + |u(x(s)) - u'(x'(s))|)\,\mathrm{d}s$$

$$\leq |e^{At}||x - x'| + \varepsilon(p+1)\int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s) - x'(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$+\varepsilon\|u - u'\|\int_t^0 |e^{A(t-s)}|\,\mathrm{d}s.$$

Pareizinām nevienādības abas puses ar $|e^{-Bt}|$ un integrējam no $T$ līdz 0. Iegūstam

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t) - x'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_T^0 |e^{-Bt}||e^{At}||x - x'|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bt}|\,\mathrm{d}t\int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)-x'(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$+\varepsilon\|u-u'\|\int_T^0 |e^{-Bt}|dt\int_t^0 |e^{A(t-s)}|\,\mathrm{d}s.$$

Ievērojam, ka $e^{-Bt}=e^{-B(t-s)}e^{-Bs}$ un tātad $|e^{-Bt}|\le|e^{-B(t-s)}||e^{-Bs}|$. Mainam integrācijas kārtību divkāršajos integrāļos. Seko

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\le |x-x'|\int_T^0 |e^{-Bt}||e^{At}|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x'(s)|\,\mathrm{d}s\int_T^s |e^{-B(t-s)}||e^{A(t-s)}|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon\|u-u'\|\int_T^0 |e^{-Bs}|\,\mathrm{d}s\int_T^s |e^{-B(t-s)}||e^{A(t-s)}|\,\mathrm{d}t$$

$$=|x-x'|\int_T^0 |e^{-Bt}||e^{At}|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x'(s)|\,\mathrm{d}s\int_{T-s}^0 |e^{-Bt}||e^{At}|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon\|u-u'\|\int_T^0 |e^{-Bs}|\,\mathrm{d}s\int_{T-s}^0 |e^{-Bt}||e^{At}|\,\mathrm{d}t$$

$$\le \nu\left(|x-x'|+\varepsilon(p+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x'(s)|\,\mathrm{d}s+\varepsilon\mu\|u-u'\|\right).$$

No šejienes

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \nu(1-\varepsilon(p+1)\nu)^{-1}\left(|x-x'|+\varepsilon\mu\|u-u'\|\right).$$

Parējam uz robežu kad $T\to-\infty$ un iegūstam vajadzīgo novērtējumu. Lemma ir pierādīta. □

Lai atrastu invarianto varietāti jārisina integrofunkcionālvienādojumu sistēma

$$x(t)=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-s)}f(x(s),u(x(s)))\,\mathrm{d}s$$
$$u(x)=\int_{-\infty}^0 e^{-Bs}g(x(s),u(x(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{5.12}$$

Tiešām, ievērojot, ka $x(t)$ ir autonoma vienādojuma atrisinājums, dabūjam

$$\eta(t)=u(x(t))=\int_{-\infty}^0 e^{-Bs}g(x(s+t),u(x(s+t)))\,\mathrm{d}s$$
$$=e^{Bt}\int_{-\infty}^t e^{-Bs}g(x(s),u(x(s)))\,\mathrm{d}s$$
$$=e^{Bt}u(x)+\int_0^t e^{B(t-s)}g(x(s),u(x(s)))\,\mathrm{d}s$$
$$=e^{Bt}u(x)+\int_0^t e^{B(t-s)}g(x(s),\eta(s))\,\mathrm{d}s.$$

Tātad $(x(t),\eta(t))$ ir diferenciālvienādojuma (5.11) atrisinājums, kurš apmierina sākuma nosacījumus $(x,u(x))$. Citiem vārdiem izpildās sakarība

$$u(x(t,x,u(x)))=y(t,x,u(x)).$$

Pēdējais nosacījums arī nozīmē, ka attēlojuma $u$ grafiks ir invarianta varietāte.

**Teorēma 5.7.** *Pieņemam, ka* $4\varepsilon\nu < 1$ *un* $2\varepsilon\mu < 1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu}$. *Ja* $\sup_x |g(x,0)| < +\infty$, *tad integrofunkcionālvienādojumu sistēmai* (5.12) *ir atrisinājums* $u \in \mathcal{B}(p)$ *un*

$$\int_0^{+\infty} |e^{-As}||y(s,x,y) - u(x(s,x,y))|\,\mathrm{d}s \le \nu(1-\varepsilon(p+1)\nu)^{-1}|y-u(x)|. \tag{5.13}$$

Ja $4\varepsilon\nu < 1$, tad existē $p$, $0 < p < 1$, ka

$$\varepsilon\nu(p+1)(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1} \le p.$$

Izvēlamies

$$\begin{aligned} p &= (2\varepsilon\nu)^{-1}(1-2\varepsilon\nu-\sqrt{1-4\varepsilon\nu}) \\ &= 2\varepsilon\nu(1-2\varepsilon\nu+\sqrt{1-4\varepsilon\nu})^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Tad $2(1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu})^{-1} = p+1$ un $2\varepsilon\nu(p+1) \le 1$. Definējam operatoru $T\colon \mathcal{B}(p) \to \mathcal{B}$ ar vienādību palīdzību

$$x(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} f(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s$$

$$Tu(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(x(s), u(x(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Ņemam patvaļīgu $u \in \mathcal{B}(p)$. Iegūstam

$$\|\mathscr{T}u\| \le \mu(\varepsilon\|u\| + \sup_x |g(x,0)|).$$

Tātad $\mathscr{T}u \in \mathcal{B}$. Izvēlamies $u' \in \mathcal{B}(p)$. Izlietojot Lemmu 1 iegūstam

$$\begin{aligned} &|(\mathscr{T}u)(x) - (\mathscr{T}u')(x')| \\ &\le \varepsilon(p+1)\int_{-\infty}^0 |e^{-Bs}||x(s) - x'(s)|\,\mathrm{d}s + \varepsilon\mu\|u-u'\| \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon(p+1)\nu(1-\varepsilon(p+1)\nu)^{-1}\left(|x-x'|+\varepsilon\mu\|u-u'\|\right)+\varepsilon\mu\|u-u'\|$$
$$\leq p|x-x'|+\varepsilon\mu(p+1)\|u-u'\|.$$

Tātad $\mathscr{T}u \in \mathcal{B}(p)$. Ja $2\varepsilon\mu < 1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu}$, tad $\varepsilon\mu(p+1) < 1$. Tādēļ $\mathscr{T}$ ir saspiešanas operators slēgtā Banaha telpas kopā $\mathcal{B}(p)$, un seko $\mathcal{B}(p)$ ir viens vienīgs integrofuncionālvienādojuma atrisinājums, kurš arī definē invarianto varietāti. $\square$

## 5.7 Redukcijas princips

Tālāk apskatām reducētu diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,u(x)), \\ \dot{y} = By. \end{cases} \tag{5.14}$$

Pēdējais diferenciālvienādojums sadalās divās daļās. Pirmā no tām nesatur mainīgo $y$, kamēr otrā ir lineāra pret $y$ un nesatur $x$. Diferenciālvienādojuma (5.14) atrisinājumu $\psi\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$, kurš pie $t = 0$ sākās punktā $(x,y)$ apzīmēsim ar $\psi(t,x,y) = (x_0(t,x), y_0(t,y))$. Lai vienkāršotu apzīmējumus ievedīsim atrisinājuma saīsināto apzīmējumu $\psi(t) = (x_0(t), y_0(t))$.

**Teorēma 5.8.** *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$, $2\varepsilon\mu_1 < 1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu_1}$, $\sup_{x,y}|g(x,y)| < +\infty$, *attēlojums* $u\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *apmierina* (5.13), *tad diferenciālvienādojumi* (5.11) *un* (5.14) *ir globāli dinamiski ekvivalenti.*

*Pierādījums.* Teorēmas pierādījums sastāv no vairākiem soļiem.

*1. solis.* Nepārtrauktu attēlojumu kopa

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \kappa\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k \;\middle|\; \sup_{x,y} \frac{|\kappa(x,y)|}{|y-u(x)|} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{x,y} \frac{|\kappa(x,y)|}{|y-u(x)|}$$

ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\kappa_1(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s)) - f(x(s)$$

$$+\kappa_1(\varphi(s)), u(x(s)+\kappa_1(\varphi(s))))) \, \mathrm{d}s$$

atrisinājums telpā $\mathcal{B}_1$.

Definējam operatoru $\mathscr{L}\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1$ ar vienādības

$$\mathscr{L}\kappa_1(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s))$$

$$-f(x(s)+\kappa_1(\varphi(s)), u(x(s)+\kappa_1(\varphi(s))))) \, \mathrm{d}s$$

palīdzību. Pārliecināmies, ka $\mathscr{L}\kappa_1 \in \mathcal{B}_1$.

$$|\mathscr{L}\kappa_1(x,y)| \le \varepsilon \int_0^{+\infty} |e^{-As}|(|\kappa_1(\varphi(s))| + |y(s) - u(x(s)+\kappa_1(\varphi(s)))|) \, \mathrm{d}s$$

$$\le \varepsilon(p+1) \int_0^{+\infty} |e^{-As}||\kappa_1(\varphi(s))| \, \mathrm{d}s + \varepsilon \int_0^{+\infty} |e^{-As}||y(s) - u(x(s))| \, \mathrm{d}s$$

$$\le \varepsilon(p+1)\nu(1-\varepsilon(p+1)\nu)^{-1}\|\kappa_1\||y-u(x)|$$

$$+\varepsilon\nu(1-\varepsilon(p+1)\nu)^{-1}|y-u(x)|.$$

Seko

$$\|\mathscr{L}\kappa_1\| \le p\|\kappa_1\| + p(p+1)^{-1}.$$

Novērtējam

$$|\mathscr{L}\kappa_1(x,y) - \mathscr{L}\kappa_1'(x,y)|$$

$$\le \varepsilon(p+1) \int_0^{+\infty} |e^{-As}||\kappa_1(\varphi(s)) - \kappa_1'(\varphi(s)))| \, \mathrm{d}s$$

$$\le \varepsilon(p+1)\|\kappa_1 - \kappa_1'\| \int_0^{+\infty} |e^{-As}||y(s) - u(x(s))| \, \mathrm{d}s$$

$$\le \varepsilon\nu(p+1)(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}\|\kappa_1 - \kappa_1'\||y-u(x)|.$$

Seko

$$\|\mathscr{L}\kappa_1 - \mathscr{L}\kappa_1'\| \le p\|\kappa_1 - \kappa_1'\|.$$

Tātad $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators Banaha telpā $\mathcal{B}_1$.

Bez tam

$$
\begin{aligned}
&\kappa_1(\varphi(t)) \\
&= \int\limits_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s+t)) - f(x(s+t) \\
&\quad + \kappa_1(\varphi(s+t)), u(x(s+t) + \kappa_1(\varphi(s+t))))) \,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-s)}(f(\varphi(s)) - f(x(s) + \kappa_1(\varphi(s)), u(x(s) + \kappa_1(\varphi(s))))) \,\mathrm{d}s \\
&= e^{At} \int\limits_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s)) - f(x(s) + \kappa_1(\varphi(s)), u(x(s) + \kappa_1(\varphi(s))))) \,\mathrm{d}s \\
&\quad - \int\limits_0^{t} e^{A(t-s)}(f(\varphi(s)) - f(x(s) + \kappa_1(\varphi(s)), u(x(s) + \kappa_1(\varphi(s))))) \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Seko

$$
\begin{aligned}
x(t) + \kappa_1(\varphi(t)) &= e^{At}(x + \kappa_1(x,y)) \\
&+ \int\limits_0^{t} e^{A(t-s)} f(x(s) + \kappa_1(\varphi(s)), u(x(s) + \kappa_1(\varphi(s)))) \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

*2. solis.* Nepārtrauktu attēlojumu kopa

$$
\mathcal{B}_2 = \left\{ \lambda : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l \;\middle|\; \sup_{x,y} |\lambda(x,y)| < +\infty \right\}
$$

ar normu

$$
\|\lambda\| = \sup_{x,y} |\lambda(x,y)|
$$

ir Banaha telpa. Attēlojums $\lambda_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, kur

$$
\lambda_1(x,y) = -\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(\varphi(s)) \,\mathrm{d}s
$$

pieder telpai $\mathcal{B}_2$, jo $\|\lambda_1\| \le \mu \sup_{x,y} |g(x,y)|$.

Aprēķinam

$$\lambda_1(\psi(t)) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(\varphi(s+t))\,\mathrm{d}s$$

$$= -\int_{-\infty}^{t} e^{B(t-s)} g(\varphi(s))\,\mathrm{d}s = -e^{Bt}\int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(\varphi(s))\,\mathrm{d}s$$

$$-\int_{0}^{t} e^{B(t-s)} g(\varphi(s))\,\mathrm{d}s$$

Seko

$$y(t) + \lambda_1(\varphi(t)) = e^{Bt}(y + \lambda(x,y)). \tag{5.16}$$

Apzīmēsim ar $H_1(x,y) = (x + \kappa_1(x,y),\, y + \lambda_1(x,y))$. No vienādojumiem (5.15) un (5.16) visiem $t \in \mathbb{R}$ iegūstam

$$H_1(\varphi(t,x,y)) = \psi(t, H_1(x,y)).$$

Tālāk pierādīsim, ka attēlojums $H_1$ ir homeomorfisms.

*3. solis.* Nepārtrauktu attēlojumu kopa

$$\mathcal{B}_1(p) = \left\{ \kappa \in \mathcal{B}_1 \mid |\kappa(x,y) - \kappa(x,y')| \le p|y - y'| \right\}$$

ir Banaha telpas $\mathcal{B}_1$ slēgta apakškopa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienadojuma

$$\kappa_2(x,w)$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-As}(f(x_0(s), u(x_0(s))) - f(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s), \eta(s)), \eta(s)))\,\mathrm{d}s$$

$$\eta(t) = e^{Bt}w + \int_{0}^{t} e^{B(t-s)} g(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s), \eta(s)), \eta(s))\,\mathrm{d}s$$

atrisinājums telpā $\mathcal{B}_1(p)$.

Ievērojam,ka

$$u(x_0(t)) = e^{Bt}u(x_0) + \int_{0}^{t} e^{B(t-s)} g(x_0(s)$$

$$+\kappa_2(x_0(s),u(x_0(t))),u(x_0(t)))\,\mathrm{d}s$$

Novērtējam starpību visiem $t \geq 0$

$$|\eta(t)-u(x_0(t))| \leq |e^{Bt}||w-u(x_0)|$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t |e^{B(t-s)}|(|\kappa_2(x_0(s),\eta(s))-\kappa_2(x_0(s),u(x_0(s)))|$$

$$+|\eta(s)-u(x_0(s))|)\,\mathrm{d}s$$

$$\leq |e^{Bt}||w-u(x_0)|+\varepsilon(p+1)\int\limits_0^t |e^{B(t-s)}||\eta(s)-u(x_0(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Pareizinam nevienādības abas puses ar $|e^{-At}|$ un integrējam no 0 līdz $T$. Iegūstam

$$\int\limits_0^T |e^{-At}||\eta(t)-u(x_0(t))|\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_0^T |e^{-At}||e^{Bt}||w-u(x_0)|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon(p+1)\int\limits_0^T |e^{-At}|\,\mathrm{d}t\int\limits_0^t |e^{B(t-s)}||\eta(s)-u(x_0(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \nu|w-u(x_0)|+\varepsilon\nu(p+1)\int\limits_0^T |e^{-As}||\eta(s)-u(x_0(s))|\,\mathrm{d}s.$$

Parējam uz robežu kad $T \to +\infty$ un iegūstam novērtējumu

$$\int\limits_0^{+\infty} |e^{-At}||\eta(t)-u(x_0(t))|\,\mathrm{d}t \leq \nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}|w-u(x_0)|.$$

Tālāk novērtējam starpību visiem $t \geq 0$

$$|\eta(t)-\eta'(t)| \leq |e^{Bt}||w-w'|$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t |e^{B(t-s)}|(|\kappa_2(x_0(s),\eta(s))-\kappa_2'(x_0(s),\eta'(s))|+|\eta(s)-\eta'(s)|)\,\mathrm{d}s$$

$$\le |e^{Bt}||w-w'| + \varepsilon\|\kappa_2 - \kappa_2'\| \int_0^t |e^{B(t-s)}|(\eta(s) - u(x_0(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_0^t |e^{B(t-s)}||\eta(s) - \eta'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Pareizinam nevienādības abas puses ar $|e^{-At}|$ un integrējam no 0 līdz $T$. Iegūstam

$$\int_0^T |e^{-At}||\eta(t) - \eta'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^T |e^{-At}||e^{Bt}||w-w'|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon\|\kappa_2 - \kappa_2'\| \int_0^T |e^{-At}|\,\mathrm{d}t \int_0^t |e^{B(t-s)}||\eta(s) - u(x_0(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_0^T |e^{-At}|\,\mathrm{d}t \int_0^t |e^{B(t-s)}||\eta(s) - \eta'(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$\le \nu|w-w'| + \varepsilon\nu\|\kappa_2 - \kappa_2'\| \int_0^{+\infty} |e^{-At}||\eta(t) - u(x_0(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon\nu(p+1)\int_0^T |e^{-At}||\eta(t) - \eta'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Seko

$$\int_0^{+\infty} |e^{-At}||\eta(t) - \eta'(t)|\,\mathrm{d}t \le \nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}(|w-w'|$$

$$+\varepsilon\|\kappa_2 - \kappa_2'\| \int_0^{+\infty} |e^{-At}||\eta(t) - u(x_0(t)|\,\mathrm{d}t)$$

$$\le \nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}(|w-w'|$$
$$+\varepsilon\nu\|\kappa_2 - \kappa_2'\|(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}|w-u(x_0)|)$$

Definējam operatoru $\mathscr{L}: \mathcal{B}_1(p) \to \mathcal{B}_1(p)$ ar vienādības

$$\mathscr{L}\kappa_2(x,w)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(x_0(s),u(x_0(s))) - f(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),\eta(s)),\eta(s)))\,\mathrm{d}s$$

$$\eta(t) = e^{Bt}w + \int_0^t e^{B(t-s)}g(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),\eta(s)),\eta(s))\,\mathrm{d}s$$

palīdzību.

$$|\mathscr{L}\kappa_2(x,w)|$$

$$\leq \varepsilon \int_0^{+\infty} |e^{-As}|\,(|\kappa_2(x_0(s),\eta(s))| + |\eta(s) - u(x_0(s))|)\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \varepsilon(\|\kappa_2\|+1)\int_0^{+\infty} |e^{-As}||\eta(s) - u(x_0(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \varepsilon\nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}(\|\kappa_2\|+1)|w-u(x_0)|.$$

Tātad

$$\|\mathscr{L}\kappa_2\| \leq \frac{p}{p+1}(\|\kappa_2\|+1).$$

Iegūstam, ka $\mathscr{L}\kappa_2 \in \mathcal{B}_1$. Novērtējam starpību

$$|\mathscr{L}\kappa_2(x,w) - \mathscr{L}\kappa_2'(x,w')|$$

$$\leq \varepsilon \int_0^{+\infty} |e^{-As}|(|\kappa_2(x_0(s),\eta(s)) - \kappa_2'(x_0(s),\eta'(s))| + |\eta(s)-\eta'(s)|)\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \varepsilon\|\kappa_2 - \kappa_2'\| \int_0^{+\infty} |e^{-As}||\eta(s) - u(x_0(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$+\varepsilon(p+1)\int_0^{+\infty} |e^{-As}||\eta(s)-\eta'(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$\le \varepsilon\nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}\|\kappa_2-\kappa_2'\||w-u(x_0)|$$
$$+\varepsilon\nu(p+1)(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}\big(|w-w'|$$
$$+\varepsilon\nu(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}\|\kappa_2-\kappa_2'\||w-u(x_0)|\big)$$
$$\le p|w-w'|+p\|\kappa_2-\kappa_2'\||w-u(x_0)|.$$

Seko, $\mathscr{L}\kappa_2 \in \mathcal{B}_1(p)$ un

$$\|\mathscr{L}\kappa_2-\mathscr{L}\kappa_2'\| \le p\|\kappa_2-\kappa_2'\|.$$

Iegūstam, ka $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators Banaha telpas slēgtā apgabalā $\mathcal{B}_1(p)$.

Bez tam

$$\kappa_2(x_0(t),\eta(t))$$
$$=\int_t^{+\infty} e^{-A(s-t)}(f(x_0(s),u(x_0(s)))-f(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),\eta(s)),\eta(s)))\,\mathrm{d}s$$
$$=e^{At}\int_0^{+\infty} e^{-As}(f(x_0(s),u(x_0(s)))-f(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),\eta(s)),\eta(s)))\,\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^{t} e^{A(t-s)}(f(x_0(s),u(x_0(s)))-f(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),\eta(s)),\eta(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Seko

$$x_0(t)+\kappa_2(x_0(t),\eta(t))$$
$$=e^{At}(x+\kappa_2(x,w))+\int_0^{t} e^{A(t-s)}f(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),\eta(s)),\eta(s))\,\mathrm{d}s.$$

*4. solis.* Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_2(x,y)$$
$$=\int_{-\infty}^{0} e^{-Bs}g(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s))),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s$$

atrisinājums telpā $\mathcal{B}_2$.

Definējam operatoru $\mathscr{L}\colon \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$ ar vienādības

$$\mathscr{L}\lambda_2(x,y)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s))), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s$$

palīdzību. Novērtējam

$$|\mathscr{L}\lambda_2(x,y)| \le \mu \sup_{x,y} |g(x,y)|.$$

Iegūstam, ka $\mathscr{L}\lambda_2 \in \mathcal{B}_2$. Novērtējam starpību

$$|\mathscr{L}\lambda_2(x,y) - \mathscr{L}\lambda_2'(x,y)|$$

$$\le \varepsilon(p+1) \int\limits_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}||\lambda_2(\psi(s)) - \lambda_2'(\psi(s))|\,\mathrm{d}s \le \varepsilon\mu(p+1)\|\lambda_2 - \lambda_2'\|.$$

Tātad $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators Banaha telpā $\mathcal{B}_2$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_2(\psi(t)) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-B(s-t)} g(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s), y_0(s) \\
&\quad + \lambda_2(\psi(s))), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s \\
&= e^{Bt} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s), y_0(s) \\
&\quad + \lambda_2(\psi(s))), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int\limits_{0}^{t} e^{B(t-s)} g(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s), y_0(s) \\
&\quad + \lambda_2(\psi(s))), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Seko

$$y_0(t) + \lambda_2(\psi(t)) = e^{Bt}(y + \lambda_2(x,y))$$

$$+\int_0^t e^{B(t-s)} g(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),y_0(s)$$
$$+\lambda_2(\psi(s))),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Ja $y+\lambda_2(x,y)=w$, tad $\eta(t)=y_0(t)+\lambda_2(\psi(t))$. Iegūstam

$$x_0(t)+\kappa_2(x_0(t),y_0(t)+\lambda_2(\psi(t)))=e^{At}(x+\kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y)))$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)} f(x_0(s)+\kappa_2(x_0(s),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s)),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Definējam attēlojumu $H_2$ ar vienādību

$$H_2(x,y)=(x+\kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y)),y+\lambda_2(x,y)).$$

Tad attēlojums $H_2$ visiem $t\in\mathbb{R}$ apmierina funkcionālvienādojumu

$$H_2(\psi(t,x,y))=\varphi(t,H_2(x,y)).$$

*5. solis.* Nepārtrauktu attēlojumu kopa

$$\mathcal{B}_3=\left\{\kappa\colon \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^k \;\middle|\; \sup_{x,y}\frac{|\kappa(x,y)|}{|y+\lambda_2(x,y)-u(x)|}<+\infty\right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\|=\sup_{x,y}\frac{|\kappa(x,y)|}{|y+\lambda_2(x,y)-u(x)|}$$

ir Banaha telpa. Triviālais atrisinājums ir vienīgais funkcionālvienādojuma

$$\kappa_3(x,y)=\int_0^{+\infty} e^{-As}(f(x_0(s),u(x_0(s)))$$
$$-f(x_0(s)+\kappa_3(\psi(s)),u(x_0(s)+\kappa_3(\psi(s)))))\,\mathrm{d}s$$

atrisinājums telpā $\mathcal{B}_3$. Pierādām triviālā atrisinājuma unitāti telpā $\mathcal{B}_3$. Novērtējam

$$|\kappa_3(x,y)|\le\varepsilon(p+1)\int_0^{+\infty}|e^{-As}||\kappa_3(\psi(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \varepsilon(p+1)\|\kappa_3\| \int_0^{+\infty} |e^{-As}||y_0(s)+\lambda_2(\psi(s))-u(x_0(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \varepsilon\nu(p+1)(1-\varepsilon\nu(p+1))^{-1}\|\kappa_3\||y+\lambda_2(x,y)-u(x)|.$$

Iegūstam

$$\|\kappa_3\| \leq p\|\kappa_3\|,$$

no kurienes arī izriet triviālā atrisinājuma unitāte.

*6. solis.* Atzīmējam, ka attēlojums $\alpha_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$, kurš definēts ar vienādību

$$\alpha_1(x,y) = \kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y)) + \kappa_1(H_2(x,y))$$

apmierina soļa 5 funkcionālvienādojumu. Ievērojam, ka

$$\kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y))$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(x_0(s),u(x_0(s))) - f(H_2(\psi(s))))\,\mathrm{d}s$$

un

$$\kappa_1(H_2(x,y))$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s,H_2(x,y))) - f(x(s,H_2(x,y)) + \kappa_1(\varphi(s,H_2(x,y))),$$

$$u(x(s,H_2(x,y)) + \kappa_1(\varphi(s,H_2(x,y))))))\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(H_2(\psi(s)) - f(x_0(s) + \kappa_2(x_0(s),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s)))$$

$$+\kappa_1(\varphi(s,H_2(x,y))),u(x_0(s)$$

$$+\kappa_2(x_0(s),y_0(s)+\lambda_2(\psi(s)))$$

$$+\kappa_1(\varphi(s,H_2(x,y))))))\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(H_2(\psi(s)) - f(x_0(s)+\alpha(\psi(s)),u(x_0(s)+\alpha(\psi(s)))))\,\mathrm{d}s.$$

Seko

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(x,y) &= \kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y))+\kappa_1(H_2(x,y))\\
&= \int\limits_0^{+\infty} e^{-As}(f(x_0(s),u(x_0(s)))\\
&\quad -f(x_0(s)+\alpha_1(\psi(s)),u(x_0(s)+\alpha_1(\psi(s))))) \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Tātad $\alpha_1$ apmierina 5. soļa integrofunkcionālvienādojumu. Bez tam

$$
\begin{aligned}
|\alpha_1(x,y)| &\le |\kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y))|+|\kappa_1(H_2(x,y))|\\
&\le \|\kappa_2\||y+\lambda_2(x,y)-u(x)|\\
&\quad +\|\kappa_1\||y+\lambda_2(x,y)-u(x+\kappa_2(x,y+\lambda_2(x,y)))|\\
&\le (\|\kappa_2\|+\|\kappa_1\|+p\|\kappa_1\|\|\kappa_2\|)|y+\lambda_2(x,y)-u(x)|
\end{aligned}
$$

Iegūstam. ka $\alpha_1 \in \mathcal{B}_3$. No šejienes $\alpha_1(x,y)=0$.

*7. solis.* Pārbaudām vienādību

$$
\lambda_2(x,y)+\lambda_1(H_2(x,y))=0.
$$

Ievērojam, ka

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(H_2(x,y)) &= -\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-Bs}g(\varphi(s,H_2(x,y)))\,\mathrm{d}s\\
&= -\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-Bs}g(H_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

un

$$
\lambda_2(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-Bs}g(H_2(\psi(s)))\,\mathrm{d}s
$$

Seko, spēkā vienādība un arī identitāte

$$
H_1(H_2(x,y))=(x,y).
$$

*8. solis.* Attēlojumu kopa

$$
\mathcal{B}_4=\Big\{\kappa\colon \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^k|
$$

$$\left.\sup_{x,y,w} \frac{|\kappa(x,y,w)|}{\max\{|y-u(x)|,|y-w|\}} < +\infty\right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{x,y,w} \frac{|\kappa(x,y,w)|}{\max\{|y-u(x)|,|y-w|\}}$$

ir Banaha telpa. Kopa

$$\mathcal{B}_4(p) = \{\kappa \in \mathcal{B}_4 \mid |\kappa(x,y,w) - \kappa(x,y,w')| \le p|w-w'|\}$$

ir $\mathcal{B}_3$ slēgta apakškopa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\kappa_4(x,y,w)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s)) - f(x(s) + \kappa_4(\varphi(s), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s)), \eta(s)))\,\mathrm{d}s$$

$$\eta(s) = e^{Bt}w + \int_0^{+\infty} e^{B(t-s)} g(x(s) + \kappa_4(\varphi(s), \eta(s)), \eta(s))\,\mathrm{d}s$$

atrisinājums telpā $\mathcal{B}_4(p)$.

Definējam operatoru $\mathscr{L} : \mathcal{B}_4(p) \to \mathcal{B}_4(p)$ ar vienādību

$$\mathscr{L}\kappa_4(x,y,w)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-As}(f(\varphi(s)) - f(x(s) + \kappa_4(\varphi(s), y_0(s) + \lambda_2(\psi(s)), \eta(s)))\,\mathrm{d}s$$

$$\eta(s) = e^{Bt}w + \int_0^{+\infty} e^{B(t-s)} g(x(s) + \kappa_4(\varphi(s), \eta(s)), \eta(s))\,\mathrm{d}s$$

palīdzību.

*9. solis.* Triviālais atrisinājums ir vienīgais funkcionālvienādojuma

$$\lambda_4(x,y) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-Bs}(g(\varphi(s))$$

$$-g(x(s) + \kappa_4(\varphi(s), y(s) + \lambda_4(\varphi(s))), y(s) + \lambda_4(\varphi(s))))\,\mathrm{d}s$$

atrisinājums telpā $\mathcal{B}_2$.

Pierādām triviālā atrisinājuma unitāti telpā $\mathcal{B}_2$. Novērtējam

$$|\lambda_4(x,y)| \leq \varepsilon(p+1)\int_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}||\lambda_4(\varphi(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \varepsilon\mu(p+1)\|\lambda_4\|.$$

Seko

$$\|\lambda_4\| \leq \varepsilon\mu(p+1)\|\lambda_4\|,$$

no kurienes arī izriet triviālā atrisinājuma unitāte telpā $\mathcal{B}_2$.

*10. solis.* Attēlojumi $\alpha_2\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ un $\beta_2\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, kuri definēti ar vienādībām

$$\alpha_2(x,y,w) = \kappa_1(x,y) + \kappa_2(x+\kappa_1(x,y),w)$$

un

$$\beta_2(x,y) = \lambda_1(x,y) + \lambda_2(x+\kappa_1(x,y), y+\lambda_1(x,y))$$

arī attiecīgi apmierina soļu 8 un 9 funkcionālvienādojumus. Bez tam $\alpha_2 \in \mathcal{B}_4(p)$ un $\beta_2 \in \mathcal{B}_2$. No šejienes $\alpha_2(x,y,y) = 0$ un $\beta_2(x,y) = 0$. Iegūstam sekojošu identitāti

$$H_2(H_1(x,y)) = (x,y).$$

Ievērojot soļus 1, 2, 7 un 10, iegūstam, ka $H_1$ ir homeomorfisms, kurš realizē (5.11) un (5.14) globālo dinamisko ekvivalenci. Teorēma ir pierādīta. □

# Nodaļa 6
# Diskrēto dinamisko un semidinamisko sistēmu ekvivalence pilnā metriskā telpā

Patvaļīgā pilnā metriskā telpā aplūkojam homeomorfisma vai nepārtraukta attēlojuma $T$

$$T(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$$

inducēto diskrēto dinamisko (semidinamisko) sistēmu. Iegūstam nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai eksistētu globāls Lipšica attēlojums, kura grafiks ir dinamiskas (semidinamiskas) sistēmas invarianta kopa. Iegūtie starprezultāti atļauj atrast pietiekamos nosacījumus dinamiskās (semidinamiskās) sistēmas sadalīšanai un vienkāršošanai un tātad dod iespēju dotās sistēmas pētīšanu reducēt uz daudz vienkāršākas sistēmas izpēti. Iegūtas teorēmas ir klasiskās Grobmaņa–Hartmaņa teorēmas un redukcijas principa vispārinājums pilnā metriskā telpā.

## 6.1 Pamatjēdzieni

Šajā paragrāfā definēsim dažus pamatjēdzienus, kuri ir nepieciešami tālākā izklāstā, kā arī precizēsim attēlojuma $T$ formu.

**Definīcija 6.1.** Metriska telpa ir kopa $\mathbb{X}$, kurā ir definēta funkcija $\rho\colon \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ tāda ka:

(i) $\rho(x,x) = 0$ visiem $x \in \mathbb{X}$;
(ii) $\rho(x,x') > 0$ visiem $x \neq x'$, $x,x' \in \mathbb{X}$;
(iii) $\rho(x,x') = \rho(x',x)$;
(iv) $\rho(x,x'') \leq \rho(x,x') + \rho(x',x'')$ (trīsstūra nevienādība).

**Definīcija 6.2.** Virkni $\{x_i\}$ metriskajā telpā $\mathbb{X}$ sauc par *Košī virkni*, ja ka katram $\varepsilon > 0$ eksistē $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tāds, ka $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$ visiem $i, j \geq n$.

**Definīcija 6.3.** Metriska telpa $\mathbb{X}$ *pilna*, ja katra Košī virkne ir konverğenta.

**Definīcija 6.4.** Puntu $x \in \mathbb{X}$ sauc par attēlojuma $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *nekustīgo punktu*, ja izpildās vienādība $T(x) = x$.

Pieņemsim, ka $\mathbb{X}_1$ un $\mathbb{X}_2$ ir divas pilnas metriskas telpas ar atbilstošiem attālumiem $\rho_1$ un $\rho_2$.

**Definīcija 6.5.** Attēlojumu $T : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ sauc par *Lipšica* (ar konstanti $k$), ja visiem $x, x' \in \mathbb{X}_1$ izpildās nevienādība

$$\rho_2(T(x), T(x')) \leq k\rho_1(x, x').$$

**Teorēma 6.1 (Banaha nekustīgā punkta princips).** *Ja $T : E \to \mathbb{X}$ ir Lipšica attēlojums ar konstanti $k < 1$, $E$ ir pilnas metriskas telpas $\mathbb{X}$ slēgta apakškopa un $T(E) \subset \mathbb{X}$, tad attēlojumam $T$ ir viens un tikai viens nekustīgais punkts kopā $E$.*

**Definīcija 6.6.** Nepārtrauktu attēlojumu $H : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ sauc par *homeomorfismu*, ja tas ir bijektīvs un tā inversais attēlojums ir nepārtraukts.

**Definīcija 6.7.** Nepārtrauktu vienparametra attēlojumu saimi $\{T^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, kur $T^1 = T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, sauc par *diskrētu dinamisko sistēmu* ja:

(i) $T^0 = id$, kur $id$ ir identiskais attēlojums;
(ii) $T^n \circ T^k = T^{n+k}$.

*Diskrēta semidinamiska sistēma* ir vienparametra attēlojumu saime, kura definēta tikai nenegatīviem veseliem skaitļiem.

Ievērojam, ka diskrētas dinamiskās sistēmas gadījumā attēlojums $T$ ir homeomorfisms.

**Definīcija 6.8.** Divas diskrētas dinamiskās sistēmas $T_1^n, T_2^n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ir *topoloğiski ekvivalentas*, ja eksistē tāds homeomorfisms $H : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, ka

$$H \circ T_1^n = T_2^n \circ H$$

visiem $n \in \mathbb{Z}$.

**Definīcija 6.9.** Divas diskrētas semidinamiskās sistēmas $T_1^n, T_2^n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ir *topoloģiski ekvivalentas*, ja eksistē tāds homeomorfisms $H : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, ka

$$H \circ T_1^n = T_2^n \circ H$$

visiem $n \in \mathbb{N}$.

Viegli pārliecināties, ka divas diskrētas dinamiskās (semidinamiskās) sistēmas $T_1^n$ un $T_2^n$, kuras inducē attēlojumi $T_1$ un $T_2$, ir topoloģiski ekvivalentas tad un tikai tad, ja attēlojumi $T_1$ un $T_2$ ir topoloģiski ekvivalenti.

Tiešam, pieņemam, ka eksistē homeomorfisms $H$, ka $H \circ T_1 = T_2 \circ H =$. Tad

$$H \circ T_1^2 = H \circ T_1 \circ T_1 = T_2 \circ H \circ T_1 = T_2 \circ T_2 \circ H = T_2^2 \circ H$$

un vispārīgo apgalvojumu iegūstam lietojot matemātisko indukciju.

Pieņemsim, ka $\mathbb{X}$ un $\mathbb{Y}$ ir divas pilnas metriskas telpas ar atbilstošiem attālumiem $\rho_1$ un $\rho_2$. Aplūkosim nepārtrauktu attēlojumu $T : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ formā

$$T(x,y) = (f(x,y), g(x,y)), \tag{6.1}$$

kurš apmierina sekojošus nosacījumus:

(H1) $\rho_1(x,x') \leq \alpha\rho_1(f(x,y), f(x',y))$, $\alpha > 0$;
(H2) $\rho_1(f(x,y), f(x,y')) \leq \beta\rho_2(y,y')$;
(H3) $\rho_2(g(x,y), g(x',y')) \leq \gamma\rho_1(x,x') + \delta\rho_2(y,y')$, kur konstantes apmierina nevienādību $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$;
(H4) attēlojums $f(\cdot,y) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ir sirjektīvs.

Mūsu mērķis ir atrast nosacījumus pie kuriem dotais attēlojums $T$ ar topoloģiskas transformācijas palīdzību sadalās un vienkāršojās.

*Piemērs 6.1.* Apskatīsim sekojošu attēlojumu Banaha telpā

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x,y), \\ y^1 &= By + G(x,y), \end{aligned} \tag{6.2}$$

kur $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, $A$ un $B$ ir ierobežoti lineāri attēlojumi, attēlojumam $A$ eksistē inversais, $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, attēlojumi $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, $G : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$|F(x,y) - F(x',y')| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$

$$|G(x,y) - G(x',y')| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|).$$

Var pārliecināties, ka attēlojums $T$ apmierina nosacījumus (H1) – (H4), kur $\alpha = (\|A^{-1}\|^{-1} - \varepsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \varepsilon$, $\delta = \|B\| + \varepsilon$. Nosacījums $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reducējās uz nevienādību

$$\varepsilon < \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}.$$

Ar vienādību $x^1 = Ax + F(x,y)$ definētais attēlojums fiksētam $y$ ir sirjektīvs, ja $\varepsilon\|A^{-1}\| < 1$. Atzīmējam, ka $\varepsilon\|A^{-1}\| < 1/4$.

*Remark 6.1.* Apskatām attēlojumu, kurš parāda, ka vispārīgā gadījumā nevienādību $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ nevar aizvietot ar vienādību. Viegli pārliecināties, ka lineārais attēlojums

$$x^1 = \alpha^{-1}x - \beta y,$$
$$y^1 = \gamma x + \delta y,$$

kur $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$ un $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, apmierina nosacījumus (H1)–(H4).

Ja $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$, tad dotajam attēlojumam koordinātu sākumpunkts ir nekustīgais punkts un ir divas invariantas taisnes – Lipšica attēlojumu grafiki. Ja turpretīm $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) = 1$, tad dotajam attēlojumam caur koordinātu sākumpunktu iet tikai viena invarianta taisne. Atbilstošā lineārā attēlojuma raksturīgajam vienādojumam ir divkārša sakne, pie kam elementārā dalītāja pakāpe ir 2. Teorēma 6.6 nav spēkā.

## 6.2 Palīglemmas

Pamata rezultātu pierādījumā izlietosim sekojošas trīs lemmas. Apskatam attēlojumu kopu

$$\mathfrak{Lip}(k) = \{u \mid u\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \text{ un } \rho_2(u(x), u(x')) \le k\rho_1(x,x')\}.$$

**Lemma 6.1.** *Ja* $\alpha\beta k < 1$ *un* $u \in \mathfrak{Lip}(k)$, *tad ar vienādību* $\varphi(x) = f(x, u(x))$ *definētais attēlojums* $\varphi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *ir homeomorfisms.*

*Pierādījums.* Vispirms pierādām, ka attēlojums $\varphi$ ir injektīvs. Pretējā gadījumā eksistē tāds $x \neq x'$, bet $f(x,u(x)) = f(x',u(x'))$. Saskaņā ar (H1) un (H2) iegūstam, ka

$$\rho_1(x,x') \leq \alpha\rho_1(f(x,u(x)), f(x',u(x)))$$
$$= \alpha\rho_1(f(x',u(x')), f(x',u(x))) \leq \alpha\beta k\rho_1(x,x').$$

Tā kā $\alpha\beta k < 1$, tad seko, ka $\rho_1(x,x') = 0$ un $x = x'$.

Tālāk pierādīsim, ka $\varphi$ is sirjektīvs. Definējam attēlojumu $\Phi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ar vienādojumu $f(\Phi(x),u(x)) = x_1$. Saskaņā ar (H1) and (H4) katram $x \in \mathbb{X}$ ir viens vienīgs vienādojuma atrisinājums $\Phi(x)$ un bez tam

$$\rho_1(\Phi(x),\Phi(x')) \leq \alpha\rho_1(f(\Phi(x),u(x)), f(\Phi(x'),u(x)))$$
$$= \alpha\rho_1(f(\Phi(x'),u(x')), f(\Phi(x'),u(x))) \leq \alpha\beta k\rho_1(x,x').$$

Seko $\Phi$ ir saspiešanas operators metriskā telpā $\mathbb{X}$. Tātad katram $x_1 \in \mathbb{X}$ ir viens vienīgs $x \in \mathbb{X}$ tāds, ka $f(x,u(x)) = x_1$. Seko, $\varphi$ ir bijektīvs un $\varphi^{-1}$ ir tā inversais attēlojums. Atzīmēsim, ka

$$\rho_1(x,x') \leq \alpha\rho_1(f(x,u(x)), f(x',u(x)))$$
$$\leq \alpha\rho_1(f(x,u(x)), f(x',u(x'))) + \alpha\rho_1(f(x',u(x)), f(x',u(x')))$$
$$\leq \alpha\rho_1(f(x,u(x)), f(x',u(x'))) + \alpha\beta k\rho_1(x,x').$$

Iegūstam

$$\rho_1(x,x') \leq \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)), f(x',u(x'))). \tag{6.3}$$

Seko,

$$\rho_1(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(x')) \leq \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(x,x')$$

un tātad $\varphi^{-1}$ ir Lipšica attēlojums. Tātad $\varphi$ ir homeomorfisms un līdz ar to lemms ir pierādīta. □

Tālāk ar vienādību

$$(\mathscr{L}u)(f(x,u(x))) = g(x,u(x))$$

definējam operatoru $\mathscr{L}$ kopā $\mathfrak{Lip}(k)$.

**Lemma 6.2.** *Eksistē tāds $k \geq 0$, ka $\mathscr{L}(\mathfrak{Lip}(k)) \subset \mathfrak{Lip}(k)$.*

*Pierādījums.* Ievērojot nosacījumu (H3) iegūstam

$$\rho_2((\mathscr{L}u)(f(x,u(x))),(\mathscr{L}u)(f(x',u(x'))))$$
$$= \rho_2(g(x,u(x)),g(x',u(x'))) \leq (\gamma+\delta k)\rho_1(x,x').$$

Saskaņā ar (6.3) iegūstam

$$\rho_2((\mathscr{L}u)(f(x,u(x))),(\mathscr{L}u)(f(x',u(x'))))$$
$$\leq \alpha(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u(x'))).$$

Ja $k \geq 0$ apmierina nevienādības

$$0 \leq \alpha(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1} \leq k,$$

tad $\mathscr{L}(\mathfrak{Lip}(k)) \subset \mathfrak{Lip}(k)$. Tāds $k \geq 0$ eksistē, ja $\alpha(\delta+2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$. Izvēlamies

$$k = \frac{2\alpha\gamma}{1-\alpha\delta+\sqrt{(1-\alpha\delta)^2-4\alpha^2\beta\gamma}}.$$

□

Tālāk apskatām attēlojumu kopu

$$\mathfrak{Lip}(l) = \{v \mid v\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \text{ un } \rho_1(v(y),v(y')) \leq l\rho_2(y,y')\}$$

un definējam operatoru $\mathscr{K}$ kopā $\mathfrak{Lip}(l)$ ar vienādību

$$f(\mathscr{K}v(y),y) = v(g(v(y),y)).$$

Operators $\mathscr{K}$ ir korekti definēts, jo attēlojums $f(\cdot,y)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ is sirjektīvs un izpildās nosacījums (H1).

**Lemma 6.3.** *Eksistē tāds $l \geq 0$, ka $\mathscr{K}(\mathfrak{Lip}(l)) \subset \mathfrak{Lip}(l)$.*

*Pierādījums.* Saskaņā ar (H1) – (H3), iegūstam

$$\rho_1(\mathscr{K}v(y),\mathscr{K}v(y')) \leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{K}v(y),y),f(\mathscr{K}v(y'),y))$$
$$\leq \alpha\rho_1(v(g(v(y),y)),v(g(v(y'),y')))$$
$$+\alpha\rho_1(f(\mathscr{K}v(y'),y),f(\mathscr{K}v(y'),y')) \leq (\alpha l(\gamma l+\delta)+\alpha\beta)\rho_2(y,y').$$

Ja

$$0 \leq \alpha l(\gamma l+\delta)+\alpha\beta \leq l,$$

tad $\mathscr{K}(\mathfrak{Lip}(l)) \subset \mathfrak{Lip}(l)$. Seko, tāds $l \geq 0$ eksistē, ja $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$. Izvēlamies

$$l = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}.$$

□

Tālākā izklāstā pieņemsim, ka

$$k = \frac{2\alpha\gamma}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}} \tag{6.4}$$

un

$$l = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}. \tag{6.5}$$

Pie reizes atzīmējam, ka $\beta k = \gamma l$, $\alpha(\gamma + \delta k)(1 - \alpha\beta k)^{-1} = k$, $\alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta = l$, $\alpha\beta k = \alpha\gamma l < 1/2$ un $kl < 1$.

**Uzdevums 6.1.** Apskatām attēlojumu (6.2). Aprēķinām

$$k = l = \frac{2\varepsilon\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|(\|B\| - 2\varepsilon) + \sqrt{(1 - \|A^{-1}\|\|B\|)(1 - \|A^{-1}\|(\|B\| - 4\varepsilon))}}$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\| - 2\varepsilon - \sqrt{(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|)(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\| - 4\varepsilon)}}{2\varepsilon} < 1.$$

## 6.3 Nekustīgais punkts

Dosim pietiekamos nosacījumus nekustīgā punkta eksistencei.

**Teorēma 6.2.** *Ja* $(1-\alpha)(1-\delta) - \alpha\beta\gamma > 0$*, tad attēlojumam* $T$ *ir viens un tikai viens nekustīgais punkts* $T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

*Pierādījums.* Fiksējam $y_1 \in \mathbb{Y}$ un definējam attēlojumu $\Phi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ar vienādojumu $x = f(\Phi(x), y_1)$. Saskaņā ar (H1) un (H4), katram $x \in \mathbb{X}$ eksistē viens vienīgs $\Phi(x)$ un

$$\rho_1(\Phi(x), \Phi(x')) \leq \alpha\rho_1(f(\Phi(x), y_1), f(\Phi(x'), y_1)) = \alpha\rho_1(x, x'),$$

ja tikai $\alpha < 1$. Seko, ka $\Phi$ ir saspiešanas operators telpā $\mathbb{X}$. Tātad, katram $y_1 \in \mathbb{Y}$ eksistē viens vienīgs $x \in \mathbb{X}$ tāds, ka $x = f(x, y_1)$. Iegūstam ka attēlojums $\chi\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, kur

$$\chi(y) = f(\chi(y), y)$$

ir korekti definēts. Tāpēc

$$\begin{aligned}\rho_1(\chi(y), \chi(y')) &\le \alpha\rho_1(f(\chi(y), y), f(\chi(y'), y)) \\ &\le \alpha\rho_1(\chi(y), \chi(y')) + \alpha\beta\rho_2(y, y').\end{aligned}$$

No šejienes $\chi \in \mathfrak{Lip}(\alpha\beta(1-\alpha)^{-1})$.

Tālāk apskatām vienādojumu

$$y = g(\chi(y), y).$$

Seko

$$\rho_2(g(\chi(y), y), g(\chi(y'), y')) \le (\alpha\beta\gamma(1-\alpha)^{-1} + \delta)\rho_2(y, y').$$

Tā kā $\alpha\beta\gamma(1-\alpha)^{-1} + \delta < 1$, tad ir viens vienīgs $y_0 \in \mathbb{Y}$ tāds, ka $y_0 = g(\chi(y_0), y_0)$. Attiecīgi $x_0 = \chi(y_0)$, kas arī bija jāpierāda. $\square$

**Uzdevums 6.2.** Pieņemsim, ka attēlojums ir formā (6.2). Nosacījums $(1-\alpha)(1-\delta) > \alpha\beta\gamma$ reducējās uz nevienādību

$$\varepsilon < \frac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}.$$

Izlietojot sakarību starp ģeometrisko un aritmētisko vidējo iegūstam

$$\frac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|} \le \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}.$$

## 6.4 Invariantas kopas

Dosim nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai eksistētu tādi globāli Lipšica attēlojumi $u\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un $v\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, kuru definē invariantas kopas. Nākošā teorēma ir stabīlās, nestabīlās un centra varietātes vispārinājums pilnā metriskā telpā.

**Teorēma 6.3.** *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4). *Lai eksistētu attēlojumi $u\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un $v\colon \mathbb{Y} \to$*

$\mathbb{X}$, *kuri apmierina funkcionālvienādojumus*

$$u(f(x,u(x))) = g(x,u(x)), \tag{6.6}$$

$$f(v(y),y) = v(g(v(y),y)) \tag{6.7}$$

*un Lipšica nosacījumus*

$$\rho_2(u(x),u(x')) \le k\rho_1(x,x'), \tag{6.8}$$

$$\rho_1(v(y),v(y')) \le l\rho_2(y,y'), \tag{6.9}$$

*ir nepieciešami un pietiekami, lai attēlojumam $T$ būtu nekustīgais punkts.*

*Pierādījums. Pietiekamība.* Kopa

$$\mathbb{M}_1 = \{u \mid u \in \mathfrak{Lip}(k) \text{ and } u(x_0) = y_0\}$$

kļūst par pilnu metrisku telpu, ja metriku definējam ar vienādību

$$d_1(u,u') = \sup_x \frac{\rho_2(u(x),u'(x))}{\rho_1(x,x_0)}.$$

Acīmredzot $\mathbb{M}_1$ ir metriska telpa un katriem $u,u' \in \mathbb{M}_1$ izpildās novērtējums $d_1(u,u') \le 2k$. Atliek pierādīt, ka $\mathbb{M}_1$ ir pilna. Tā kā $\mathbb{Y}$ ir pilna metriska telpa, tad katrai Košī virknei eksistē nepārtraukta robeža, ja $x \ne x_0$. Robežas nepārtrauktība punktā $x = x_0$ izriet no novērtējuma

$$\rho_2(u(x),y_0) \le d_1(u,y_0)\rho_1(x,x_0) \le 2k\rho_1(x,x_0).$$

Tālāk ievedam operatoru $\mathscr{L}$ telpā $\mathbb{M}_1$ ar vienādību

$$(\mathscr{L}u)(f(x,u(x))) = g(x,u(x)).$$

Pieņemam, ka $u$, $u' \in \mathbb{M}_1$. Seko

$$\rho_2((\mathscr{L}u)(f(x,u(x))),(\mathscr{L}u')(f(x',u'(x'))))$$
$$= \rho_2(g(x,u(x)),g(x',u'(x'))) \le (\gamma+\delta k)\rho_1(x,x') + \delta\rho_2(u(x),u'(x)).$$

No otras puses seko

$$\rho_1(x,x') \le \alpha\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u(x)))$$
$$\le \alpha\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u'(x'))) + \alpha\rho_1(f(x',u'(x')),f(x',u(x)))$$

$$\leq \alpha\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u'(x'))) + \alpha\beta k\rho_1(x,x') + \alpha\beta\rho_2(u(x),u'(x)).$$

Rezultatā iegūstam, ka

$$\rho_1(x,x') \leq \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u'(x')))$$
$$+\alpha\beta(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_2(u(x),u'(x)).$$

Ja $x' = x_0$ un $u' = u$, tad

$$\rho_1(x,x_0) \leq \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)),f(x_0,u(x_0)))$$
$$= \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)),x_0).$$

Seko

$$\begin{aligned}
&\rho_2((\mathscr{L}u)(f(x,u(x))),(\mathscr{L}u')(f(x',u'(x'))))\\
&\leq \alpha(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u'(x')))\\
&+(\alpha\beta(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1}+\delta)\rho_2(u(x),u'(x))\\
&\leq k\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u'(x')))\\
&+(\beta k+\delta)d_1(u,u')\alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,u(x)),x_0)\\
&= k\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u'(x'))) + \mu d_1(u,u')\rho_1(f(x,u(x)),x_0),
\end{aligned}$$

kur

$$\mu = \alpha(\beta k+\delta)(1-\alpha\beta k)^{-1} = \frac{1+\alpha\delta-\sqrt{(1-\alpha\delta)^2-4\alpha^2\beta\gamma}}{1+\alpha\delta+\sqrt{(1-\alpha\delta)^2-4\alpha^2\beta\gamma}} < 1.$$

Atzīmējam, ka $f(x,u(x)) \neq x_0$ ja $x \neq x_0$. Seko

$$(\mathscr{L}u)(x_0) = (\mathscr{L}u)(f(x_0,u(x_0))) = g(x_0,u(x_0)) = y_0.$$

Tātad $\mathscr{L}(\mathbb{M}_1) \subset \mathbb{M}_1$. Pieņemam, ka

$$x_1 = f(x,u(x)) = f(x',u'(x')).$$

Seko

$$d_1(\mathscr{L}u,\mathscr{L}u') \leq \mu d_1(u,u').$$

Iegūstam, ka $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators pilnā metriskā telpā $\mathbb{M}_1$. Tātad telpā $\mathbb{M}_1$ ir viens vienīgs attēlojums $u$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu (6.6) un Lipšica nosacījumus (6.8). Pietiekamības pirmā daļa ir pierādīta.

Tālāk pierādīsim attēlojuma $v\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, kurš definē invarianto kopu, eksistenci. Kopa

$$\mathbb{M}_2 = \{v \mid v \in \mathfrak{Lip}(l) \text{ and } v(y_0) = x_0\}$$

ir pilna metriska telpa, ja metriku definējam ar vienādību

$$d_2(v, v') = \sup_y \frac{\rho_1(v(y), v'(y))}{\rho_2(y, y_0)}.$$

Definējam operatoru $\mathscr{K}$ ar vienādojumu

$$f(\mathscr{K} v(y), y) = v(g(v(y), y)).$$

Izmantojot $\mathscr{K}$ definīciju, iegūstam $\mathscr{K} v(y_0) = x_0$. No Lemmas 6.3 seko, ka $\mathscr{K} v \in \mathfrak{Lip}(l)$. Iegūstam, ka $\mathscr{K}(\mathbb{M}_2) \subset \mathbb{M}_2$.

Pieņemam, ka $v$, $v' \in \mathbb{M}_2$. Tad

$$\begin{aligned}
\rho_1(\mathscr{K} v(y), \mathscr{K} v'(y)) &\le \alpha \rho_1(f(\mathscr{K} v(y), y), f(\mathscr{K} v'(y), y)) \\
&= \alpha \rho_1(v(g(v(y), y)), v'(g(v'(y), y))) \\
&\le \alpha \rho_1(v(g(v(y), y)), v'(g(v(y), y))) + \alpha \gamma l \rho_1(v(y), v'(y)) \\
&\le (\alpha \rho_2(g(v(y), y), y_0) + \alpha \gamma l \rho_2(y, y_0)) d_2(v, v').
\end{aligned}$$

Novērtējam

$$\rho_2(g(v(y), y), y_0) = \rho_2(g(v(y), y), g(v(y_0), y_0)) \le (\gamma l + \delta) \rho_2(y, y_0).$$

Seko

$$d_2(\mathscr{K} v(y), \mathscr{K} v'(y')) \le \lambda d_2(v, v'),$$

kur

$$\lambda = \alpha\delta + 2\alpha\gamma l = 1 - \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma} < 1.$$

Esam ieguvuši ka $\mathscr{K}$ ir saspiešanas operators pilnā metriskā telpā $\mathbb{M}_2$. Seko, telpā $\mathbb{M}_2$ eksistē viens vienīgs attēlojums $v$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu (6.7) un Lipšica nosacījumus (6.9).

*Nepieciešamība*. Tā kā $kl < 1$, tad saskaņā ar Banaha nekustīgā punktu principu vienādojumu sistēmai

$$v(u(x)) = x \text{ un } u(v(y)) = y$$

ir viens vienīgs atrisinājums $(x_0, y_0)$. Mēs iegūstam

$$u(v(u(x_0))) = u(x_0) \text{ un } v(u(v(y_0))) = v(y_0).$$

No atrsinājumu unitātes seko, ka $u(x_0) = y_0$ un $v(y_0) = x_0$. Rezultatā iegūstam

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f(v(y_0), y_0) = v(g(v(y_0), y_0)) \\ &= v(g(x_0, u(x_0))) = v(u(f(x_0, y_0))). \end{aligned}$$

Seko, $f(x_0, y_0) = x_0$. Analoģiski, $g(x_0, y_0) = y_0$. $\square$

Atzīmējam, ka ja $\alpha\delta + 1 \leq 2\alpha$, tad

$$\beta k + \delta = \frac{1 - \alpha\delta - \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{2\alpha} + \delta < \frac{1 - \alpha\delta}{2\alpha} + \delta \leq 1.$$

Gadījumā, kad $\alpha\delta + 1 \geq 2\alpha$, iegūstam

$$\alpha(1 + \gamma l) = \alpha + \frac{1 - \alpha\delta - \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{2} < \alpha + \frac{1 - \alpha\delta}{2} \leq 1.$$

**Lemma 6.4.** *$\beta k + \delta < 1$ un $\alpha(1 + \gamma l) < 1$ tad un tikai tad ja $(1 - \alpha)(1 - \delta) > \alpha\beta\gamma$.*

*Pierādījums.* Pieņemam, ka $\beta k + \delta < 1$ un $\alpha(1 + \gamma l) < 1$. Tad

$$\frac{1 + \alpha\delta - \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{2\alpha} < 1$$

un

$$\frac{2\alpha + 1 - \alpha\delta - \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{2} < 1.$$

Seko

$$|1 + \alpha\delta - 2\alpha| < \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}.$$

Iegūstam

$$(1 - \alpha)(1 - \delta) > \alpha\beta\gamma.$$

Ja $(1 - \alpha)(1 - \delta) > \alpha\beta\gamma$, tad

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma} &> \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha(1-\alpha)(1-\delta)} \\ &= |1 + \alpha\delta - 2\alpha|. \end{aligned}$$

Ja $\alpha\delta+1 \leq 2\alpha$, tad

$$\alpha(1+\gamma l) = \alpha + \frac{1-\alpha\delta-\sqrt{(1-\alpha\delta)^2-4\alpha^2\beta\gamma}}{2}$$
$$< \alpha + \frac{1-\alpha\delta+1+\alpha\delta-2\alpha}{2} = 1.$$

Ja $\alpha\delta+1 \geq 2\alpha$, tad

$$\beta k+\delta < \frac{1-\alpha\delta-1-\alpha\delta+2\alpha}{2\alpha}+\delta = 1.$$

□

**Teorēma 6.4.** *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4)*, un pieņemsim, ka $\beta k+\delta < 1$. Lai eksistētu attēlojums $u\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu* (6.6) *un Lipšica nosacījumus* (6.8) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums $u_0 \in \mathfrak{Lip}(k)$, ka izpildās nevienādība*

$$\sup_x \rho_2(u_0(f(x,u_0(x))), g(x,u_0(x))) < +\infty. \tag{6.10}$$

*Pierādījums. Pietiekamība*. Kopa

$$\mathbb{M}_3 = \{u \mid u \in \mathfrak{Lip}(k) \text{ un } \sup_x \rho_2(u(x),u_0(x)) < +\infty\}$$

ir pilna metriska telpa, ja metriku definē ar vienādību

$$d_3(u,u') = \sup_x \rho_2(u(x),u'(x)).$$

Pierādām, ka $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators. Pieņemam, ka

$$x_1 = f(x,u(x)) = f(x',u'(x')).$$

Seko

$$\rho_2((\mathscr{L}u)(x_1),(\mathscr{L}u')(x_1)) = \rho_2(g(x,u(x)),g(x',u'(x')))$$
$$\leq (\gamma+\delta k)\rho_1(x,x')+\delta\rho_2(u(x),u'(x)).$$

No otras puses

$$\rho_1(x,x') \leq \alpha\rho_1(f(x,u(x)),f(x',u(x)))$$

$$= \alpha\rho_1(f(x',u'(x')), f(x',u(x))) \leq \alpha\beta\rho_2(u'(x),u(x)) + \alpha\beta k\rho_1(x,x').$$

Tātad

$$\rho_1(x,x') \leq \alpha\beta(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(u'(x),u(x)).$$

Mēs iegūstam

$$\rho_2((\mathscr{L}u)(x_1),(\mathscr{L}u')(x_1))$$
$$\leq (\alpha\beta(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1}+\delta)\rho_2(u(x),u'(x)).$$

No šejienes

$$d_3(\mathscr{L}u,\mathscr{L}u') \leq (\delta+\beta k)d_3(u,u').$$

Tā kā

$$\rho_2((\mathscr{L}u_0)(x_1),u_0(x_1)) = \rho_2(g(x,u_0(x)),u_0(f(x,u_0(x)))),$$

tad

$$d_3(\mathscr{L}u_0,u_0) \leq \sup_x \rho_2(g(x,u_0(x)),u_0(f(x,u_0(x)))).$$

Seko

$$d_3(\mathscr{L}u,u_0) \leq d_3(\mathscr{L}u,\mathscr{L}u_0) + d_3(\mathscr{L}u_0,u_0)$$
$$\leq (\delta+\beta k)d_3(u,u_0) + \sup_x \rho_2(g(x,u_0(x)),u_0(f(x,u_0(x)))). \quad (6.11)$$

Esam pierādījuši, ka $\mathscr{L}$ ir saspiešanas operators pilnā metriskā telpā $\mathbb{M}_3$. Tātad telpā $\mathbb{M}_3$ eksistē viens vienīgs attēlojums $u$ kurš apmierina funkcionālvienādojumu (6.6).

No (6.11) iegūstam

$$d(u,u_0) \leq (1-\delta-\beta k)^{-1} \sup_x \rho_2(g(x,u_0(x)),u_0(f(x,u_0(x)))).$$

*Nepieciešamība*. Pierādījums acīmredzams. □

**Teorēma 6.5.** *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacīju-mus* (H1)–(H4)*, un pieņemsim, ka* $\alpha(1+\gamma l) < 1$. *Lai eksistētu attēlojums $v\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu* (6.7) *un Lipšica nosacījumus* (6.9) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums $v_0 \in \mathfrak{Lip}(l)$, ka izpildās nevienādība*

$$\sup_y \rho_1(v_0(g(v_0(y),y)), f(v_0(y),y)) < +\infty. \quad (6.12)$$

*Pierādījums. Pietiekamība*. Kopa

$$\mathbb{M}_4 = \{v \mid v \in \mathfrak{Lip}(l) \text{ un } \sup_y \rho_2(v(y), v_0(y)) < +\infty\}$$

ir pilna metriska telpa, ja metriku definē sekojoši

$$d_4(v, v') = \sup_y \rho_1(v(y), v'(y)).$$

Pierādām, ka $\mathscr{K}$ ir saspiešanas operators.

$$\begin{aligned}
\rho_1(\mathscr{K} v(y), \mathscr{K} v'(y)) &\leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{K} v(y), y), f(\mathscr{K} v'(y), y)) \\
&= \alpha\rho_1(v(g(v(y), y)), v'(g(v'(y), y))) \\
&\leq \alpha\rho_1(v(g(v(y), y)), v'(g(v(y), y))) \\
&+\alpha\rho_1(v'(g(v(y), y)), v'(g(v'(y), y))).
\end{aligned}$$

Seko

$$d_4(\mathscr{K} v, \mathscr{K} v') \leq \alpha(1+\gamma l) d_4(v, v')$$

un

$$\begin{aligned}
\rho_1(\mathscr{K} v_0(y), v_0(y)) &\leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{K} v_0(y), y), f(v_0(y), y)) \\
&= \alpha\rho_1(v_0(g(v_0(y), y)), f(v_0(y), y)).
\end{aligned}$$

Iegūstam

$$d_4(\mathscr{K} v_0, v_0) \leq \alpha \sup_y \rho_1(f(v_0(y), y), v_0(g(v_0(y), y))).$$

Tātad

$$\begin{aligned}
d_4(\mathscr{K} v, v_0) \leq d_4(\mathscr{K} v, \mathscr{K} v_0) + d_4(\mathscr{K} v_0, v_0) &\leq \alpha(1+\gamma l) d_4(v, v_0) \\
&+\alpha \sup_y \rho_1(f(v_0(y), y), v_0(g(v_0(y), y))). \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

Esam pierādījuši, ka $\mathscr{K}$ ir saspiešanas operators pilnā metriskā telpā $\mathfrak{M}_4$. seko telpā $\mathfrak{M}_4$ ir viens vienīgs attēlojums $v$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu (6.7). No (6.13) seko, ka

$$d_4(v, v_0) \leq (\alpha^{-1} - (1+\gamma l))^{-1} \sup_y \rho_1(f(v_0(y), y), v_0(g(v_0(y), y))).$$

*Nepieciešamība.* Pierādījums acīmredzams. □

*Piezīme 6.1.* Viegli var pārliecināties, ka izpildās sekojošas nevienādības

$$\rho_2(u(f(x,y)),g(x,y)) \leq \rho_2(u(f(x,y)),u(f(x,u(x))))$$
$$+\rho_2(g(x,u(x)),g(x,y)) \leq (\beta k+\delta)\rho_2(u(x),y) \tag{6.14}$$

un

$$\begin{aligned}\rho_1(v(y),x) &\leq \alpha\rho_1(f(v(y),y),f(x,y))\\ &= \alpha\rho_1(v(g(v(y),y)),f(x,y))\\ &\leq \alpha\rho_1(f(x,y),v(g(x,y)))+\alpha\gamma l\rho_1(v(y),x).\end{aligned}$$

Tātad

$$\rho_1(v(y),x) \leq \alpha(1-\alpha\gamma l)^{-1}\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)).$$

*Piemērs 6.2.* Aplūkojam attēlojumu (6.2). Nosacījums (6.10) izpildās, ja

$$\sup_x |G(x,0)| < +\infty,$$

un nosacījums (6.12) izpildās, ja

$$\sup_y |F(0,y)| < +\infty.$$

**Lemma 6.5.** *Ja $T$ ir homeomorfisms un ja attēlojums $v\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ apmierina* (6.7) *un* (6.9)*, tad ar vienādību $\psi(y) = g(v(y),y)$ definētais attēlojums $\psi\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ ir homeomorfisms.*

*Pierādījums.* Vispirms pierādam, ka attēlojums $\psi$ ir injektīvs. Pretējā gadījumā eksistē $y \neq y'$ un $g(v(y),y) = g(v(y'),y')$. Saskaņā ar (6.7) seko $f(v(y),y) = f(v(y'),y')$. Iegūstam $T(v(y),y) = T(v(y'),y')$. Iegūstam pretrunu ar nosacījumu, ka $T$ Ir homeomorfisms. Seko attēlojums $\psi$ ir injektīvs.

Tālāk pierādām, ka $\psi$ ir sirjektīvs. Katram $y_1 \in \mathbb{Y}$ eksistē tāds pāris $(x,y)$, ka $T(x,y) = (v(y_1),y_1)$. No šejienes izriet, ka $f(x,y) = v(g(x,y))$. Saskaņā ar nosacījumiem (H1), (6.7) and (6.9) iegūstam

$$\rho_1(v(y),x) \leq \alpha\rho_1(f(v(y),y),f(x,y))$$
$$= \alpha\rho_1(v(g(v(y),y)),v(g(x,y))) \leq \alpha\gamma l\rho_1(v(y),x).$$

Tā kā $\alpha\gamma l < 1$, tad seko, ka $x = v(y)$ vai $g(v(y),y) = y_1$. Esam pierādījuši, ka attēlojums $\psi$ ir bijektīvs.

Atliek pierādīt attēlojuma $\psi^{-1}$ nepārtrauktību. Tā kā $T(v(y),y) = (v(\psi(y)),\psi(y))$, tad $T^{-1}(v(y),y) = (v(\psi^{-1}(y)),\psi^{-1}(y))$. No šejienes seko, ka $\psi^{-1}$ ir nepārtraukts. Līdz ar to lemma ir pierādīta. □

**Sekas 6.1.** *Ja $T$ ir homeomorfisms un attēlojumi $u\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un $v\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ apmierina* (6.6)–(6.9)*, tad attēlojums $S\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ ir homeomorfisms, kur $S(x,y) = (f(x,u(x)),g(v(y),y))$.*

## 6.5 Homeomorfismu ar nekustīgu punktu ekvivalence

Apskatām gadījumu, kad homeomorfismam $T$ ir nekustīgais punkts.

**Teorēma 6.6.** *Ja homeomorfismam $T : \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ ir nekustīgais punkts un tas apmierina nosacījumus* (H1)–(H4)*, tad eksistē tāds homeomorfisms $H : \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, ka*

$$H \circ T = S \circ H,$$

*kur $S(x,y) = (f(x,u(x)),g(v(y),y))$.*

*Pierādījums.* Pierādījums sastāv no vairākiem soļiem.

*Solis 1. Attēlojums $p$.* Apzīmējām ar $\mathfrak{M}_5$ pilnu metrisku telpu

$$\mathfrak{M}_5 = \left\{ p \mid p \in \mathbf{C}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}),\ \sup_{x,y} \frac{\rho_1(p(x,y),x)}{\rho_2(u(x),y)} < +\infty \right\}$$

ar sekojošu metriku

$$d_5(p,p') = \sup_{x,y} \frac{\rho_1(p(x,y),p'(x,y))}{\rho_2(u(x),y)}.$$

Apskatām attēlojumu $p \mapsto \mathscr{L}p$, kur $p \in \mathfrak{M}_5$ definēts ar vienādību

$$f(\mathscr{L}p(x,y),u(p(x,y))) = p(T(x,y)).$$

Sasakaņā ar nosacījumiem (H1), (H4) un homeomorfisma $T$ nepārtraukTību eksistē viens vienīgs nepārtraukts attēlojums $\mathscr{L}p$. Atliek pierādīt, ka $\mathscr{L}$ ir saspiešanas atttēlojums telpā $\mathfrak{M}_5$. Vispirms iegūstam

$$
\begin{aligned}
&\rho_1(\mathscr{L}p(x,y),\mathscr{L}p'(x,y))\\
&\le \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}p(x,y),u(p(x,y))),f(\mathscr{L}p'(x,y),u(p'(x,y))))\\
&+\alpha\rho_1(f(\mathscr{L}p'(x,y),u(p'(x,y))),f(\mathscr{L}p'(x,y),u(p(x,y))))\\
&\le \alpha\rho_1(p(T(x,y)),p'(T(x,y)))+\alpha\beta k\rho_1(p(x,y),p'(x,y))\\
&\le \alpha d_5(p,p')\rho_2(u(f(x,y)),g(x,y))+\alpha\beta k d_5(p,p')\rho_2(u(x),y)\\
&\le (\alpha(\beta k+\delta)+\alpha\beta k)d_5(p,p')\rho_2(u(x),y)=\lambda d_5(p,p')\rho_2(u(x),y).
\end{aligned}
$$

Tālāk iegūstam

$$\rho_1(\mathscr{L}id_x(x),x)\le \alpha\rho_1(f(x,y),f(x,u(x)))\le \alpha\beta\rho_2(u(x),y).$$

No novērtējuma

$$d_5(\mathscr{L}p,\mathscr{L}p')\le \lambda d_5(p,p'),$$

$$d_5(\mathscr{L}p,id_x)\le d_5(\mathscr{L}p,\mathscr{L}id_x)+d_5(\mathscr{L}id_x,id_x)\le \lambda d_5(p,id_x)+\alpha\beta$$

seko, ka $\mathscr{L}p\in\mathfrak{M}_5$ un funkcionālvienādojumam

$$f(p(x,y),u(p(x,y)))=p(T(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $p\in\mathfrak{M}_5$.

*Solis 2. Attēlojums* $\pi$. Apskatām pilnu metrisku telpu

$$\mathfrak{M}_6=\left\{\pi\mid \pi\in\mathbf{C}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}),\ \sup_{x,y}\frac{\rho_2(\pi(x,y),y)}{\rho_1(v(y),x)}<+\infty\right\}$$

ar sekojošu metriku

$$d_6(\pi,\pi')=\sup_{x,y}\frac{\rho_2(\pi(x,y),\pi'(x,y))}{\rho_1(v(y),x)}.$$

Apskatām attēlojumu $\pi\mapsto\mathscr{L}\pi$, $\pi\in\mathfrak{M}_6$ definētu ar vienādību

$$\mathscr{L}\pi(T(x,y))=g(v(\pi(x,y)),\pi(x,y)).$$

Tā kā $T$ ir homeomorfisms, tad attēlojums $\mathscr{L}\pi$ ir nepārtraukts. Seko

$$
\begin{aligned}
&\rho_2(\mathscr{L}\pi(T(x,y)),\mathscr{L}\pi'(T(x,y)))\\
&=\rho_2(g(v(\pi(x,y)),\pi(x,y)),g(v(\pi'(x,y)),\pi'(x,y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (\gamma l+\delta)\rho_2(\pi(x,y),\pi'(x,y))\\
&\leq (\gamma l+\delta)d_6(\pi,\pi')\rho_1(v(y),x)\\
&\leq \alpha(\gamma l+\delta)(1-\alpha\gamma l)^{-1}d_6(\pi,\pi')\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y))\\
&= \mu d_6(\pi,\pi')\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)).
\end{aligned}
$$

Atzīmējām, ka

$$
\begin{aligned}
\rho_2(g(v(y),y),g(x,y)) &\leq \gamma\rho_1(v(y),x)\\
&\leq \alpha\gamma(1-\alpha\gamma l)^{-1}\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)).
\end{aligned}
$$

Seko

$$d_6(\mathscr{L}id_y,id_y)\leq \alpha\gamma(1-\alpha\gamma l)^{-1}.$$

No nevienādībām $d_6(\mathscr{L}\pi,\mathscr{L}\pi')\leq \mu d_6(\pi,\pi')$ un

$$
\begin{aligned}
d_6(\mathscr{L}\pi,id_y) &\leq d_6(\mathscr{L}\pi,\mathscr{L}id_y)+d_6(\mathscr{L}id_y,id_y)\\
&\leq \mu d_6(\pi,id_y)+\alpha\gamma(1-\alpha\gamma l)^{-1},
\end{aligned}
$$

seko, ka funkcionālvienādojumam

$$\pi(T(x,y)) = g(v(\pi(x,y)),\pi(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\pi\in\mathfrak{M}_6$.

*Solis 3. Attēlojums q.* Apskatām pilnas metriskas telpas $\mathfrak{M}_5$ slēgtā apakškopā

$$\mathfrak{M}_5(l)=\{q\mid q\in\mathfrak{M}_5,\ d_5(q,id_x)\leq l,\ \rho_1(q(x,z),q(x,z'))\leq l\rho_2(z,z')\}$$

attēlojumu $q\mapsto\mathscr{L}q$, $q\in\mathfrak{M}_5(l)$ definētu ar vienādību

$$f(\mathscr{L}q(x,z),z) = q(f(x,u(x)),g(q(x,z),z)).$$

Atzīmējām ka attēlojums $\mathscr{L}q$ ir korekti definēts un ir nepārtraukts. Iegūstam

$$
\begin{aligned}
\rho_1(\mathscr{L}q(x,z),x) &\leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}q(x,z),z),f(x,z))\\
&\leq \alpha\rho_1(q(f(x,u(x)),g(q(x,z),z)),f(x,u(x)))\\
&\quad +\alpha\rho_1(f(x,u(x)),f(x,z))\\
&\leq \alpha d_5(q,id_x)\rho_2(u(f(x,u(x))),g(q(x,z),z))+\alpha\beta\rho_2(u(x),z).
\end{aligned}
$$

No novērtējuma

$$\rho_2(u(f(x,u(x))),g(q(x,z),z)) = \rho_2(g(x,u(x)),g(q(x,z),z))$$
$$\leq \gamma\rho_2(q(x,z),x)+\delta\rho_2(u(x),z) \leq (\gamma d_5(q,id_x)+\delta)\rho_2(u(x),z),$$

iegūstam

$$d_5(\mathscr{L}q,id_x) \leq \alpha(\gamma d_5(q,id_x)+\delta)d_5(q,id_x)+\alpha\beta$$
$$\leq \alpha l(\gamma l+\delta)+\alpha\beta = l.$$

Bez tam

$$\rho_1(\mathscr{L}q(x,z),\mathscr{L}q(x,z'))$$
$$\leq \alpha\rho_1(q(f(x,u(x)),g(q(x,z),z)),q(f(x,u(x)),g(q(x,z'),z')))$$
$$+\alpha\beta\rho_2(z,z') \leq \alpha l(\gamma l+\delta)\rho_2(z,z')+\alpha\beta\rho_2(z,z') = l\rho_2(z,z').$$

Seko, ka $\mathscr{L}q \in \mathfrak{M}_5(l)$. Iegūstam

$$\rho_1(\mathscr{L}q(x,z),\mathscr{L}q'(x,z)) \leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}q(x,z),z),f(\mathscr{L}q'(x,z),z))$$
$$= \alpha\rho_1(q(f(x,u(x)),g(q(x,z),z)),q'(f(x,u(x)),g(q'(x,z),z)))$$
$$\leq \alpha d_5(q,q')\rho_2(u(f(x,u(x))),g(q(x,z),z))+\alpha\gamma l\rho_1(q(x,z),q'(x,z))$$
$$\leq (\alpha(\gamma d_5(q,id_x)+\delta)+\alpha\gamma l)d_5(q,q')\rho_2(u(x),z)$$
$$\leq \lambda d_5(q,q')\rho_2(u(x),z).$$

Seko, funkcionālvienādojumam

$$f(q(x,z),z) = q(f(x,u(x)),g(q(x,z),z))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $q \in \mathfrak{M}_5(l)$.

*Solis 4. Attēlojums* $\theta$. Apskatām pilnu metrisku telpu

$$\mathfrak{M}_7 = \left\{\theta \mid \theta \in \mathbf{C}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{Y},\ \sup_{x,y}\frac{\rho_2(\theta(x,y),y)}{\rho_1(q(x,y),v(y))} < +\infty\right\}$$

ar sekojošu metriku

$$d_7(\theta,\theta') = \sup_{x,y}\frac{\rho_2(\theta(x,y),\theta'(x,y))}{\rho_1(q(x,y),v(y))}.$$

Apskatām attēlojumu $\theta \mapsto \mathscr{L}\theta$, $\theta \in \mathfrak{M}_7$ definētu ar vienādību

$$\mathscr{L}\theta(S(x,y)) = g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)).$$

Tā kā attēlojums $S$ ir homeomorfisms, tad attēlojums $\mathscr{L}\theta$ ir nepārtraukts. Iegūstam

$$\begin{aligned}\rho_1(q(x,y),v(y)) &\le \alpha\rho_1(f(q(x,y),y),f(v(y),y))\\ &= \alpha\rho_1(q(f(x,u(x)),g(q(x,y),y)),v(g(v(y),y)))\\ &\le \alpha\rho_1(q(S(x,y)),v(g(v(y),y))) + \alpha\gamma l\rho_1(q(x,y),v(y)).\end{aligned}$$

Seko

$$\rho_1(q(x,y),v(y)) \le \alpha(1-\alpha\gamma l)^{-1}\rho_1(q(S(x,y)),v(g(v(y),y))).$$

No nevienādībām

$$\begin{aligned}&\rho_2(\mathscr{L}\theta(S(x,y)),\mathscr{L}\theta'(S(x,y)))\\ &= \rho_2(g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),g(q(x,\theta'(x,y)),\theta'(x,y)))\\ &\le (\gamma l+\delta)d_7(\theta,\theta')\rho_1(q(x,y),v(y))\\ &\le \alpha(\gamma l+\delta)(1-\alpha\gamma l)^{-1}d_7(\theta,\theta')\rho_1(q(S(x,y)),v(g(v(y),y)))\end{aligned}$$

iegūstam

$$d_7(\mathscr{L}\theta,\mathscr{L}\theta') \le \mu d_7(\theta,\theta').$$

Atzīmējām

$$\begin{aligned}\rho_2(g(q(x,y),y),g(v(y),y)) &\le \gamma\rho_1(q(x,y),v(y))\\ &\le \alpha\gamma(1-\alpha\gamma l)^{-1}\rho_1(q(S(x,y)),v(g(v(y),y))).\end{aligned}$$

Tad

$$\begin{aligned}&d_7(\mathscr{L}id_y,id_y) \le \alpha\gamma(1-\alpha\gamma l)^{-1}d_7(\mathscr{L}\theta,id_y)\\ &\le d_7(\mathscr{L}\theta,\mathscr{L}id_y)+d_7(\mathscr{L}id_y,id_y) \le \mu d_7(\theta,id_y)+\alpha\gamma(1-\alpha\gamma l)^{-1}.\end{aligned}$$

Seko funkcionālvienādojumam

$$\theta(S(x,y)) = g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\theta \in \mathfrak{M}_7$.

*Solis 5. Attēlojums P.* Apskatām funkcionālvienādojumu

$$P(S(x,y)) = f(P(x,y),u(P(x,y)))$$

pilnā metriskā telpā

$$\mathfrak{M}_8 = \left\{ P \mid P \in \mathbf{C}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}),\ \sup_{x,y} \frac{\rho_1(P(x,y),x)}{\rho_2(\theta(x,y),u(x))} < +\infty \right\}$$

kur metrika ir definēta ar vienādību

$$d_8(P,P') = \sup_{x,y} \frac{\rho_1(P(x,y),P'(x,y))}{\rho_2(\theta(x,y),u(x))}.$$

Var viegli pārbaudīt, ka šim funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $P(x,y) = x$. Pierādīsim šī atrisinājuma unitāti telpā $\mathfrak{M}_8$. Pretējā gadījumā eksistē pāris $(x,y)$ un $x \neq P(x,y)$. Iegūstam

$$\begin{aligned} &\rho_2(\theta(S(x,y)),u(f(x,u(x)))) \\ &= \rho_2(g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),g(x,u(x))) \\ &\leq \gamma\rho_1(q(x,\theta(x,y)),x) + \delta\rho_2(\theta(x,y),u(x)) \\ &\leq \gamma d_5(q,id_x)\rho_2(\theta(x,y),u(x)) + \delta\rho_2(\theta(x,y),u(x)) \\ &\leq (\gamma l + \delta)\rho_2(\theta(x,y),u(x)). \end{aligned}$$

No šejienes

$$\begin{aligned} &\rho_1(P(x,y),x) \leq \alpha\rho_1(f(P(x,y),u(P(x,y))),f(x,u(P(x,y)))) \\ &\leq \alpha\rho_1(f(P(x,y),u(P(x,y))),f(x,u(x))) + \alpha\beta k\rho_1(P(x,y),x) \\ &= \alpha\rho_1(P(S(x,y)),f(x,u(x))) + \alpha\beta k d_8(P,id_x)\rho_2(\theta(x,y),u(x)) \\ &\leq \alpha(\gamma l + \delta + \beta k)d_8(P,id_x)\rho_2(\theta(x,y),u(x)). \end{aligned}$$

Tātad

$$d_8(P,id_x) \leq \lambda d_8(P,id_x).$$

Seko, ka $P(x,y) = x$.

Attēlojums $P'$, kur $P'(x,y) = p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))$, arī apmierina funkcionālvienādojumu

$$\begin{aligned} &P'(S(x,y)) = p(q(f(x,u(x)),\theta(S(x,y))),\theta(S(x,y))) \\ &= p(f(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))) \\ &= p(T(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))) \end{aligned}$$

$$= f(p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),u(p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))))$$
$$= f(P'(x,y),u(P'(x,y))).$$

Pierādām, ka $P' \in \mathfrak{M}_8$. Tiešām,

$$\rho_1(P'(x,y),x) = \rho_1(p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),x)$$
$$\leq \rho_1(p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),q(x,\theta(x,y))) + \rho_1(q(x,\theta(x,y)),x)$$
$$\leq d_5(p,id_x)\rho_2(\theta(x,y),u(q(x,\theta(x,y)))) + d_5(q,id_x)\rho_2(\theta(x,y),u(x)).$$

Atzīmējām, ka

$$\rho_2(\theta(x,y),u(q(x,\theta(x,y))))$$
$$\leq \rho_2(\theta(x,y),u(x)) + k\rho_1(q(x,\theta(x,y)),x)$$
$$\leq \rho_2(\theta(x,y),u(x)) + kd_5(q,id_x)\rho_2(\theta(x,y),u(x)).$$

No šejienes

$$d_8(P',id_x) \leq d_5(p,id_x) + d_5(q,id_x) + kd_5(p,id_x)d_5(q,id_x).$$

Rezultatā iegūstam

$$P'(x,y) = p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)) = x.$$

*Solis 6. Attēlojums $\Pi$.* Apskatām funkcionālvienādojumu

$$\Pi(S(x,y)) = g(v(\Pi(x,y)),\Pi(x,y))$$

pilnā metriskā telpā $\mathfrak{M}_7$. Dotajam funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $\Pi(x,y) = y$. Pierādām šī atrisinājuma unitāti telpā $\mathfrak{M}_7$. Pretējā gadījumā eksistē $(x,y)$ un $y \neq \Pi(x,y)$. Iegūstam

$$\rho_2(\Pi(S(x,y)),g(v(y),y)) = \rho_2(g(v(\Pi(x,y)),\Pi(x,y)),g(v(y),y))$$
$$\leq (\gamma l+\delta)d_7(\Pi,id_y)\rho_1(q(x,y),v(y))$$
$$\leq \alpha(\gamma l+\delta)(1-\alpha\gamma l)^{-1}d_7(\Pi,id_y)\rho_1(q(S(x,y)),v(g(v(y),y))).$$

Tātad

$$d_7(\Pi,id_y) \leq \alpha(\gamma l+\delta)(1-\alpha\gamma l)^{-1}d_7(\Pi,id_y) = \mu d_7(\Pi,id_y).$$

Seko, ka $\Pi(x,y) = y$.

Attēlojums $\Pi'$, kur $\Pi'(x,y) = \pi(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))$, arī apmierina funkcionālvienādojumu

$$\Pi'(S(x,y)) = \pi(q(f(x,u(x)),\theta(S(x,y))),\theta(S(x,y)))$$
$$= \pi(f(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)))$$
$$= g(v(\pi(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))),\pi(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)))$$
$$= g(v(\Pi'(x,y)),\Pi'(x,y)).$$

Bez tam $\Pi' \in \mathfrak{M}_7$. Tiešām

$$\rho_2(\Pi'(x,y),y) \leq \rho_2(\pi(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)),\theta(x,y)) + \rho_2(\theta(x,y),y)$$
$$\leq d_6(\pi,id_y)\rho_1(q(x,\theta(x,y)),v(\theta(x,y))) + d_7(\theta,id_y)\rho_2(q(x,y),v(y)).$$

Atzīmējam, ka

$$\rho_1(q(x,\theta(x,y)),v(\theta(x,y)))$$
$$\leq \rho_1(q(x,\theta(x,y)),q(x,y)) + \rho_1(q(x,y),v(y)) + \rho_1(v(y),v(\theta(x,y)))$$
$$\leq l\rho_2(\theta(x,y),y) + \rho_1(q(x,y),v(y)) + l\rho_2(\theta(x,y),y)$$
$$\leq (2ld_7(\theta,id_y)+1)\rho_1(q(x,y),v(y)).$$

Tātad

$$d_7(\Pi',id_y) \leq d_6(\pi,id_y) + d_7(\theta,id_y) + 2ld_6(\pi,id_y)d_7(\theta,id_y).$$

Rezultatā iegūstam, ka

$$\Pi'(x,y) = \pi(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)) = y.$$

*Solis 7. Attēlojums $Q$.* Apskatām funkcionālvienādojumu

$$Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)) = f(Q(x,y,z),z)$$

pilnā metriskā telpā

$$\mathfrak{M}_9 = \{Q \mid Q \in \mathbf{C}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}),$$
$$\rho_1(Q(x,y,z),Q(x,y,z')) \leq l\rho_2(z,z'),$$
$$\left.\sup_{x,y,z}\frac{\rho_1(Q(x,y,z),x)}{\max\left(\rho_2(u(x),y),\rho_2(z,y)\right)} < \infty\right\}$$

ar metriku

$$d_9(Q,Q') = \sup_{x,y,z} \frac{\rho_1(Q(x,y,z),Q'(x,y,z))}{\max(\rho_2(u(x),y),\rho_2(z,y))}$$

un tās slēgtā apakškopā

$$\mathfrak{M}_9(l) = \{Q \mid Q \in \mathfrak{M}_9,\ d_9(Q,id_x) \le l\}.$$

Apskatām attēlojumu $Q \mapsto \mathscr{L}Q$, $Q \in \mathfrak{M}_9$ definētu ar vienādību

$$f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z) = Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)).$$

Attēlojums $\mathscr{L}Q$ ir korekti definēts un nepārtraukts. Atzīmējam, ka

$$\rho_2(g(Q(x,y,z),z),g(x,y)) \le \gamma\rho_1(Q(x,y,z),x) + \delta\rho_2(y,z)$$
$$\le \gamma d_9(Q,id_x)\max(\rho_2(u(x),y),\rho_2(y,z)) + \delta\rho_2(y,z).$$

Iegūstam novērtējumus

$$\rho_1(\mathscr{L}Q(x,y,z),x) \le \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z),f(x,z))$$
$$\le \alpha\rho_1(Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)),f(x,y)) + \alpha\rho_1(f(x,y),f(x,z))$$
$$\le \alpha d_9(Q,id_x)\max(\rho_2(u(f(x,y)),g(x,y)),\rho_2(g(Q(x,y,z),z),g(x,y)))$$
$$+\alpha\beta\rho_2(y,z).$$

No šejienes

$$d_9(\mathscr{L}Q,id_x) \le \alpha(\gamma\max(l,d_9(Q,id_x)) + \delta)d_9(Q,id_x) + \alpha\beta.$$

Ja $Q \in \mathfrak{M}_9(l)$, tad

$$d_9(\mathscr{L}Q,id_x) \le \alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta = l.$$

$\mathscr{L}Q$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$\rho_1(\mathscr{L}Q(x,y,z),\mathscr{L}Q(x,y,z'))$$
$$\le \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z),f(\mathscr{L}Q(x,y,z'),z')) + \alpha\beta\rho_2(z,z')$$
$$\le (\alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta)\rho_2(z,z') = l\rho_2(z,z').$$

Pieņemam, ka $Q \in \mathfrak{M}_9(l)$ un $Q' \in \mathfrak{M}_9$. Iegūstam

$$\begin{aligned}
&\rho_1(\mathscr{L}Q(x,y,z),\mathscr{L}Q'(x,y,z))\\
&\leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z),f(\mathscr{L}Q'(x,y,z),z))\\
&\leq \alpha\rho_1(Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)),Q'(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)))\\
&\quad+\alpha\gamma l\rho_1(Q(x,y,z),Q'(x,y,z)).
\end{aligned}$$

Tātad

$$d_9(\mathscr{L}Q,\mathscr{L}Q')\leq(\alpha(\gamma l+\delta)+\alpha\gamma l)d_9(Q,Q')=\lambda d_9(Q,Q').$$

Esam pierādījuši ka funkcionālvienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums telpā $\mathfrak{M}_9$.

Attēlojums $Q'$, kur $Q'(x,y,z)=q(p(x,y),z)$, arī apmierina funkcionālvienādojumu

$$\begin{aligned}
f(Q'(x,y,z),z)&=f(q(p(x,y),z),z)\\
&=q(f(p(x,y),u(p(x,y))),g(q(p(x,y),z),z))\\
&=q(p(f(x,y),g(x,y)),g(q(p(x,y),z),z))\\
&=Q'(T(x,y),g(Q'(x,y,z),z))
\end{aligned}$$

un Lipšica nosacījumus

$$\rho_1(Q'(x,y,z),Q'(x,y,z'))=\rho_1(q(p(x,y),z),q(p(x,y),z'))\leq l\rho_2(z,z').$$

Atzīmējam, ka

$$\begin{aligned}
\rho_1(Q'(x,y,z),x)&\leq\rho_1(q(p(x,y),z),p(x,y))+\rho_1(p(x,y),x)\\
&\leq d_5(q,id_x)\rho_2(u(p(x,y)),z)+d_5(p,id_x)\rho_2(u(x),y)
\end{aligned}$$

un

$$\rho_2(u(p(x,y)),z)\leq\rho_2(y,z)+\rho_2(u(x),y)+kd_5(p,id_x)\rho_2(u(x),y).$$

Iegūstam

$$d_9(Q',id_x)\leq 2d_5(q,id_x)+kd_5(p,id_x)d_5(q,id_x)+d_5(p,id_x).$$

Seko

$$Q(x,y,z)=q(p(x,y),z).$$

Ir viegli pārbaudīt, ka

$$Q(x,y,y) = x.$$

Tāpēc

$$q(p(x,y),y) = x.$$

*Solis 8. Attēlojums* $\Theta$. Apskatām funkcionālvienādojumu

$$\Theta(T(x,y)) = g(Q(x,y,\Theta(x,y)),\Theta(x,y))$$

pilnā metriskā telpā $\mathfrak{M}_6$. Viegli pārbaudāms, ka funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $\Theta(x,y) = y$. Pierādam šī atrisinājuma unitāti telpā $\mathfrak{M}_6$. Pretējā gadījumā eksistē pāris $(x,y)$ un $y \neq \Theta(x,y)$. Iegūstam

$$\begin{aligned}
&\rho_2(\Theta(T(x,y)),g(x,y))\\
&= \rho_2(g(Q(x,y,\Theta(x,y)),\Theta(x,y)),g(Q(x,y,y),y))\\
&\leq (\gamma l + \delta)\rho_2(\Theta(x,y),y).
\end{aligned}$$

No šejienes

$$d_6(\Theta,id_y) = \alpha(\gamma l + \delta)(1-\alpha\gamma l)^{-1}d_6(\Theta,id_y) = \mu d_6(\Theta,id_y).$$

Seko, ka $\Theta(x,y) = y$.

Attēlojums $\Theta'$, kur $\Theta'(x,y) = \theta(p(x,y),\pi(x,y))$, arī apmierina funkcionālvienādojumu

$$\begin{aligned}
\Theta'(T(x,y)) &= \theta(p(T(x,y)),\pi(T(x,y))) = \theta(S(p(x,y),\pi(x,y)))\\
&= g(q(p(x,y),\theta(p(x,y),\pi(x,y))),\theta(p(x,y),\pi(x,y)))\\
&= g(q(p(x,y),\Theta'(x,y)),\Theta'(x,y)) = g(Q(x,y,\Theta'(x,y)),\Theta'(x,y)).
\end{aligned}$$

Atzīmējam, ka

$$\begin{aligned}
&\rho_1(q(p(x,y),\pi(x,y)),v(\pi(x,y)))\\
&\leq \rho_1(q(p(x,y),y),q(p(x,y),\pi(x,y))) + \rho_1(v(\pi(x,y)),x)\\
&\leq l\rho_2(\pi(x,y),y) + \rho_1(v(y),x) + l\rho_2(\pi(x,y),y)\\
&\leq (2ld_6(\pi,id_y)+1)\rho_1(v(y),x).
\end{aligned}$$

Tādēļ

$$\begin{aligned}
&\rho_2(\theta(p(x,y),\pi(x,y)),y)\\
&\leq \rho_2(\theta(p(x,y),\pi(x,y)),\pi(x,y)) + \rho_2(\pi(x,y),y)
\end{aligned}$$

$\leq d_7(\theta, id_y)\rho_1(q(p(x,y),\pi(x,y)),v(\pi(x,y))) + d_6(\pi, id_y)\rho_1(v(y),x).$

No šejienes seko, ka

$$d_6(\Theta', id_y) \leq d_6(\pi, id_y) + 2l d_6(\pi, id_y) d_7(\theta, id_y) + d_7(\theta, id_y).$$

Rezultatā seko

$$\Theta(x,y) = \theta(p(x,y),\pi(x,y)) = y.$$

Iegūstam, ka ar vienādībām

$$H(x,y) = (p(x,y),\pi(x,y))$$

un

$$\Gamma(x,y) = (q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))$$

definētie attēlojumi $H$, $\Gamma\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ ir savstarpēji inversi un $H$ ir homeomorfisms, kurš nodrošina attēlojumu $T$ un $S$ topoloģisko ekvivalenci. Teorēma ir pierādīta.

*Piemērs 6.3.* Pieņemam papildus, ka attēlojums (6.2) ir homeomorfisms ar nekustīgo punktu. Izmantojot Teorēmu 6.6 iegūstam ka homeomorfisms (6.2) is topoloģiski ekvivalents homeomorfismam

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x,u(x)),\\ y^1 &= By + G(v(y),y). \end{aligned}$$

## 6.6 Neapgriežamu attēlojumu ekvivalence

Apskatīsim nepārtraukta attēlojuma $T$ gadījumu.

**Teorēma 6.7.** *Ja nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4) *un ja attēlojums $u\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ apmierina nosacījumus* (6.6) *un* (6.8)*, tad eksistē tāds nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, ka*

$$H \circ T = R \circ H,$$

*kur $R(x,y) = (f(x,u(x)), g(q(x,y),y))$.*

*Pierādījums. Solis 1. Attēlojums $p$.* Skat. Teorēmu 6.6 1. soli.

*Solis 2. Attēlojums $q$*. Skat. Teorēmu 6.6 3. soli.

*Solis 3. Attēlojums $P$*. Apskatām funkcionālvienādojumu

$$P(R(x,y)) = f(P(x,y),u(P(x,y))).$$

Var viegli pārbaudīt, ka šim funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $P(x,y) = x$. Pierādām šī atrisinājuma unitāti $\mathfrak{M}_5$. Pretējā gadījumā eksistē $(x,y)$ un $x \neq P(x,y)$. Mēs iegūstam

$$\begin{aligned}\rho_1(P(x,y),x) &\le \alpha\rho_1(f(P(x,y),u(P(x,y))), f(x,u(P(x,y))))\\ &\le \alpha\rho_1(f(P(x,y),u(P(x,y))), f(x,u(x))) + \alpha\beta k\rho_1(P(x,y),x)\\ &\le \alpha\rho_1(P(R(x,y)), f(x,u(x))) + \alpha\beta k d_5(P,id_x)\rho_2(u(x),y)\\ &\le \alpha(\gamma l + \delta + \beta k) d_5(P,id_x)\rho_2(u(x),y).\end{aligned}$$

No šejienes

$$d_5(P,id_x) \le \lambda d_5(P,id_x).$$

Seko, ka $P(x,y) = x$.

Attēlojums $P'$, kur $P'(x,y) = p(q(x,y),y)$, arī apmierina funkcionālvienādojumu.

$$\begin{aligned}P'(R(x,y)) &= p(q(R(x,y)), g(q(x,y),y))\\ &= p(f(q(x,y),y), g(q(x,y),y)) = f(p(q(x,y),y), u(p(q(x,y),y)))\\ &= f(P'(x,y), u(P'(x,y))).\end{aligned}$$

Pierādam, ka $P' \in \mathfrak{M}_5$. Patiešām

$$\begin{aligned}\rho_1(P'(x,y),x) &= \rho_1(p(q(x,y),y),x)\\ &\le \rho_1(p(q(x,y),y),q(x,y)) + \rho_1(q(x,y),x)\\ &\le d_5(p,id_x)\rho_2(u(q(x,y)),y) + d_5(q,id_x)\rho_2(u(x),y).\end{aligned}$$

Atzīmējam, ka

$$\begin{aligned}\rho_2(u(q(x,y)),y) &\le \rho_2(u(x),y) + k\rho_1(q(x,y),x)\\ &\le \rho_2(u(x),y) + kd_5(q,id_x)\rho_2(u(x),y).\end{aligned}$$

No šejienes

$$d_5(P',id_x) \le d_5(p,id_x) + d_5(q,id_x) + kd_5(p,id_x)d_5(q,id_x).$$

Seko, iegūstam ka

$$P'(x,y) = p(q(x,y),y) = x.$$

*Solis 4. Attēlojums Q.* Apskatām funkcionālvienādojumu

$$f(Q(x,y,z),z) = Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z))$$

metriskā telpā $\mathfrak{M}_9$. Apskatām attēlojumu $Q \mapsto \mathscr{L}Q$, $Q \in \mathfrak{M}_9$ definētu ar vienādību

$$f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z) = Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)).$$

$\mathscr{L}Q$ ir korekti definēts un nepārtraukts. Iegūstam

$$\begin{gathered}
\rho_1(\mathscr{L}Q(x,y,z),\mathscr{L}Q(x,y,z')) \\
\leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z),f(\mathscr{L}Q(x,y,z'),z')) + \alpha\beta\rho_2(z,z') \\
= \alpha\rho_1(Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)),Q(T(x,y),g(Q(x,y,z'),z'))) \\
+\alpha\beta\rho_2(z,z') \\
\leq (\alpha l(\gamma l+\delta)+\alpha\beta)\rho_2(z,z') = l\rho_2(z,z').
\end{gathered}$$

Atzīmējam, ka

$$\begin{gathered}
\rho_2(g(Q(x,y,z),z),g(x,y)) \leq \gamma\rho_1(Q(x,y,z),x) + \delta\rho_2(y,z) \\
\leq \gamma d_9(Q,id_x)\max(\rho_2(u(x),y),\rho_2(y,z)) + \delta\rho_2(y,z).
\end{gathered}$$

Tādēļ

$$\begin{gathered}
\rho_1(\mathscr{L}Q(x,y,z),x) \leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z),f(x,z)) \\
\leq \alpha\rho_1(Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)),f(x,y)) + \alpha\rho_1(f(x,y),f(x,z)) \\
\leq \alpha d_9(Q,id_x)\max(\rho_2(u(f(x,y)),g(x,y)),\rho_2(g(Q(x,y,z),z),g(x,y))) \\
+\alpha\beta\rho_2(y,z).
\end{gathered}$$

Seko, ka

$$d_9(\mathscr{L}Q,id_x) \leq \alpha(\gamma\max(l,d_9(Q,id_x)) + \delta)d_9(Q,id_x) + \alpha\beta.$$

Ja $Q \in \mathfrak{M}_9(l)$, tad

$$d_9(\mathscr{L}Q, id_x) \leq \alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta = l.$$

Seko $\mathscr{L}Q \in \mathfrak{M}_9(l)$. Pieņemam, ka $Q \in \mathfrak{M}_9(l)$ un $Q' \in \mathfrak{M}_9$. Iegūstam

$$\begin{aligned}
&\rho_1(\mathscr{L}Q(x,y,z), \mathscr{L}Q'(x,y,z)) \\
&\leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}Q(x,y,z),z), f(\mathscr{L}Q'(x,y,z),z)) \\
&\leq \alpha\rho_1(Q(T(x,y), g(Q(x,y,z),z)), Q'(T(x,y), g(Q(x,y,z),z))) \\
&+\alpha\gamma l\rho_1(Q(x,y,z), Q'(x,y,z)).
\end{aligned}$$

No šejienes

$$d_9(\mathscr{L}Q, \mathscr{L}Q') \leq (\alpha(\gamma l + \delta) + \alpha\gamma l)d_9(Q,Q') = \lambda d_9(Q,Q').$$

Seko, ka ir viens vienīgs atrisinājums telpā $Q \in \mathfrak{M}_9(l)$ funkcionālvienādojumam

$$f(Q(x,y,z),z) = Q(T(x,y), g(Q(x,y,z),z)).$$

un papildus dotais atrisinājums ir viens vienīgs arī telpā $\mathfrak{M}_9$.

Attēlojums $Q'$, kur $Q'(x,y,z) = q(p(x,y),z)$ arī apmierina funkcionālvienādojumu

$$\begin{aligned}
&f(Q'(x,y,z),z) = f(q(p(x,y),z),z) \\
&= q(R(p(x,y),z)) = q(p(T(x,y)), g(q(p(x,y),z),z)) \\
&= Q'(T(x,y), g(Q'(x,y,z),z)),
\end{aligned}$$

un Lipšica nosacījumus

$$\rho_1(Q'(x,y,z), Q'(x,y,z')) = \rho_1(q(p(x,y),z), q(p(x,y),z')) \leq l\rho_2(z,z').$$

Bez tam

$$\begin{aligned}
&\rho_1(Q'(x,y,z),x) \leq \rho_1(q(p(x,y),z), p(x,y)) + \rho_1(p(x,y),x) \\
&\leq d_5(q,id_x)\rho_2(u(p(x,y)),z) + d_5(p,id_x)\rho_2(u(x),y) \\
&\rho_2(u(p(x,y)),z) \leq \rho_2(y,z) + \rho_2(y,u(x)) + kd_5(p,id_x)\rho_2(u(x),y) \\
&d_9(Q',id_x) \leq 2d_5(q,id_x) + kd_5(q,id_x)d_5(p,id_x) + d_5(p,id_x).
\end{aligned}$$

Esam ieguvuši, ka $Q' \in \mathfrak{M}_9(l)$ un, seko, $Q(x,y,z) = q(p(x,y),z)$. Var viegli pārbaudīt, ka $Q(x,y,y) = x$. Tāpēc

$$q(p(x,y),y) = x.$$

Mēs esam ieguvuši ka attēlojumi $H, \Gamma\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, kurus definē ar $H(x,y) = (p(x,y),y)$ un $\Gamma(x,y) = (q(x,y),y)$ ir savstarpēji inversi un ka $H$ ir homeomorfisms, kurš nodrošina attēlojumu $T$ un $R$ saistību. Teorēma ir pierādīta. □

**Teorēma 6.8.** *Ja nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4)*, eksistē tāds homeomorfisms $f_0\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}$, ka $f_0^{-1}$ ir Lipšica attēlojums ar konstanti mazāku par* 1*,* $\alpha(1+\gamma l) < 1$ *un*

$$\sup_{x,y} \rho_1(f(x,y), f_0(x)) < +\infty,$$

*tad eksistē nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, ka*

$$H\circ T = N_1\circ H,$$

*kur* $N_1(x,y) = (f_0(x), g(q(x,y),y))$.

*Piemērs 6.4.* Vispārīgā gadījumā neapgriežamiem attēlojumiem izlietojot Teorēmu 6.7 iegūstam ka (6.2) ir topoloģiski ekvivalents attēlojumam

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x,u(x)),\\ y^1 &= By + G(q(x,y),y). \end{aligned}$$

## 6.7 Homeomorfismu ekvivalence. 2

Apskatām gadījumu, kad $T$ ir homeomorfisms, un nav zināms vai eksistē nekustīgais punkts.

**Teorēma 6.9.** *Ja homeomorfisms $T$ apmierina nosacījumus* (H1) – (H4) *un ja attēlojums $v\colon \mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ apmierina nosacījumus* (6.7) *un* (6.9)*, tad eksistē nepārtraukts attēlojums $\theta\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret pirmo mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, ka*

$$H\circ T = N\circ H,$$

*kur* $N(x,y) = (f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y))$.

*Pierādījums.* Četros soļos mēs pierādīsim ka eksistē homeomorfisms $H$ kurš realizē attēlojumu $T$ un $N$ topoloģisko ekvivalenci.

*Solis 1. Attēlojums* $\pi$. Skat. Teorēmas 6.6 2. soli.

*Solis 2. Attēlojums* $\theta$. Apskatām slēgtu apakškopu

$$\mathfrak{M}_6(k) = \{\theta \mid \theta \in \mathfrak{M}_6, d_6(\theta, id_y) \le k$$
$$\text{un } \rho_2(\theta(x,y), \theta(x',y)) \le k\rho_1(x,x')\}$$

pilnā metriskā telpā $\mathfrak{M}_6$. Apskatām attēlojumu $\theta \mapsto \mathscr{L}\theta$, $\theta \in \mathfrak{M}_6(k)$, kuru definē ar vienādību

$$\mathscr{L}\theta(f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)) = g(x,\theta(x,y)).$$

Tā kā $T$ ir homeomorfism un izmantojo Lemmas 3.1 un 5.5, mēs iegūstam, ka $\mathscr{L}\theta$ ir korekti definēts un nepārtraukts. Tāpēc seko

$$\rho_2(\mathscr{L}\theta(f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)), g(v(y),y))$$
$$= \rho_2(g(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)) \le (\gamma + \delta k)\rho_1(v(y),x).$$

Tā ka

$$\rho_1(v(y),x) \le \alpha\rho_1(f(v(y),y), f(x,\theta(x,y))) + \alpha\beta d_6(\theta, id_y)\rho_1(v(y),x)$$

un seko,

$$\rho_1(v(y),x) \le \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(v(g(v(y),y)), f(x,\theta(x,y))).$$

No šejienes izriet

$$d_6(\mathscr{L}\theta, id_y) \le \alpha(\gamma + \delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1} = k.$$

Vēl papildus,

$$\rho_2(\mathscr{L}\theta(f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)), \mathscr{L}\theta(f(x',\theta(x',y)), g(v(y),y)))$$
$$= \rho_2(g(x,\theta(x,y)), g(x',\theta(x',y))) \le (\gamma + \delta k)\rho_1(x,x').$$

Atzīmējam, ka

$$\rho_1(x,x') \le \alpha\rho_1(f(x,\theta(x,y)), f(x',\theta(x,y)))$$
$$\le \alpha\rho_1(f(x,\theta(x,y)), f(x',\theta(x',y))) + \alpha\beta k\rho_1(x,x').$$

No sejienes izriet

$$\rho_1(x,x') \le \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,\theta(x,y)), f(x',\theta(x',y))).$$

Tātad

$$\begin{aligned}&\rho_2(\mathscr{L}\theta(f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)), \mathscr{L}\theta(f(x',\theta(x',y)), g(v(y),y)))\\ &\quad\le \alpha(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(x,\theta(x,y)), f(x',\theta(x',y))).\end{aligned}$$

Seko, ka $\mathscr{L}\theta \in \mathfrak{M}_6(k)$. Mēs iegūstam

$$\begin{aligned}&\rho_2(\mathscr{L}\theta(f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)), \mathscr{L}\theta'(f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)))\\ &\quad\le \rho_2(g(x,\theta(x,y)), g(x,\theta'(x,y))) + \beta k\rho_2(\theta(x,y),\theta'(x,y))\\ &\quad\le (\delta+\beta k)d_6(\theta,\theta')\rho_1(v(y),x)\\ &\quad\le \mu d_6(\theta,\theta')\rho_1(v(g(v(y),y)), f(x,\theta(x,y))).\end{aligned}$$

Seko, ka

$$d_6(\mathscr{L}\theta,\mathscr{L}\theta') \le \mu d_6(\theta,\theta')$$

un tāpēc ir viens vienīgs atrisinājums telpā $\theta \in \mathfrak{M}_6(k)$ funkcionālvienādojumam

$$\theta(N(x,y)) = g(x,\theta(x,y)),$$

kur

$$N(x,y) = (f(x,\theta(x,y)), g(v(y),y)).$$

*Solis 3. Attēlojums $\Pi$.* Apskatām funkcionālvienādojumu

$$\Pi(N(x,y)) = g(v(\Pi(x,y)),\Pi(x,y)).$$

Var viegli pārbaudīt, ka šim funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $\Pi(x,y) = y$. Pierādam atrisinājuma unitāti telpā $\mathfrak{M}_6$. Pretējā gadījumā eksistē $(x,y)$ un $y \ne \Pi(x,y)$. Mēs iegūstam

$$\begin{aligned}&\rho_2(\Pi(N(x,y)), g(v(y),y)) = \rho_2(g(v(\Pi(x,y)),\Pi(x,y)), g(v(y),y))\\ &\quad\le (\gamma l+\delta)\rho_2(\Pi(x,y),y) \le (\gamma l+\delta)d_6(\Pi,id_y)\rho_1(v(y),x)\\ &\quad\le \mu d_6(\Pi,id_y)\rho_1(v(g(v(y),y)), f(x,\theta(x,y))).\end{aligned}$$

No šejienes,

$$d_6(\Pi,id_y) \le \mu d_6(\Pi,id_y).$$

Seko, ka
$$\Pi(x,y) = y.$$

Attēlojums $\Pi'$, kur $\Pi'(x,y) = \pi(x, \theta(x,y))$, arī apmierina funkcionālvienādojumu.

$$\Pi'(N(x,y)) = \pi(f(x,\theta(x,y)), \theta(N(x,y)))$$
$$= \pi(f(x,\theta(x,y)), g(x,\theta(x,y)))$$
$$= g(v(\pi(x,\theta(x,y))), \pi(x,\theta(x,y))) = g(v(\Pi'(x,y)), \Pi'(x,y)).$$

Pierādīsim, ka $\Pi' \in \mathfrak{M}_6$. Patiešam,

$$\rho_2(\Pi'(N(x,y)), g(v(y),y))$$
$$= \rho_2(\pi(f(x,\theta(x,y)), \theta(N(x,y))), g(v(y),y))$$
$$\leq \rho_2(\pi(f(x,\theta(x,y)), \theta(N(x,y))), \theta(N(x,y)))$$
$$+\rho_2(\theta(N(x,y)), g(v(y),y))$$
$$\leq d_6(\pi, id_y)\rho_1(v(\theta(N(x,y))), f(x,\theta(x,y)))$$
$$+d_6(\theta, id_y)\rho_1(v(g(v(y),y)), f(x,\theta(x,y))).$$

Atzīmēsim ka
$$\rho_1(v(\theta(N(x,y))), f(x,\theta(x,y)))$$
$$\leq \rho_1(v(g(v(y),y)), f(x,\theta(x,y))) + l\rho_2(\theta(N(x,y)), g(v(y),y))$$
$$\leq (1 + ld_6(\theta, id_y))\rho_1(v(g(v(y),y)), f(x,\theta(x,y))).$$

No šejienes,

$$d_6(\Pi', id_y) \leq d_6(\theta, id_y) + d_6(\pi, id_y) + ld_6(\theta, id_y)d_6(\pi, id_y).$$

Seko, iegūstam
$$\Pi'(x,y) = \pi(x,\theta(x,y)) = y.$$

*Solis 4. Attēlojums* $\Theta$. Apskatām pilnu merisko telpu

$$\mathfrak{M}_{10} = \{\Theta \mid \Theta\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\mathbb{X} \to \mathbb{Y} \text{ ir nepārtraukts},$$
$$\sup_{x,y,z} \frac{\rho_2(\Theta(x,y,z),y)}{\max(\rho_1(v(y),x), \rho_1(x,z))} < +\infty \text{ and}$$
$$\rho_2(\Theta(x,y,z), \Theta(x,y,z')) \leq k\rho_1(z,z')\}$$

kura ievesta metriska

$$d_{10}(\Theta,\Theta') = \sup_{x,y,z} \frac{\rho_2(\Theta(x,y,z),\Theta'(x,y,z))}{\max(\rho_1(v(y),x),\rho_1(x,z))},$$

un ir dotās telpas slēgta apakškopa

$$\mathfrak{M}_{10}(k) = \{\Theta \mid \Theta \in \mathfrak{M}_{10} \text{ and } d_{10}(\Theta, id_y) \leq k\}.$$

Apskatām attēlojumu $\Theta \mapsto \mathscr{L}\Theta$ definētu ar funkcionālvienādojumu

$$\mathscr{L}\Theta(T(x,y), f(z,\Theta(x,y,z))) = g(z,\Theta(x,y,z)).$$

Analoģiski solim 2, $\mathscr{L}\Theta$ ir korekti definēts un nepārtraukts. Iegūstam

$$\rho_2(\mathscr{L}\Theta(T(x,y), f(z,\Theta(x,y,z))), \mathscr{L}\Theta(T(x,y), f(z',\Theta(x,y,z'))))$$
$$= \rho_2(g(z,\Theta(x,y,z)), g(z',\Theta(x,y,z'))) \leq (\gamma+\delta k)\rho_1(z,z').$$

Tālāk,

$$\rho_1(z,z') \leq \alpha\rho_1(f(z,\Theta(x,y,z)), f(z',\Theta(x,y,z'))) + \alpha\beta k\rho_1(z,z').$$

Seko, ka

$$\rho_1(z,z') \leq \alpha(1-\alpha\beta k)^{-1}\rho_1(f(z,\Theta(x,y,z)), f(z',\Theta(x,y,z'))).$$

Tāpēc $\mathscr{L}\Theta$ apmierina Lipšica nosacījumus ar konstanti $k$. Ayzīmējam, ka

$$\begin{aligned}\rho_1(x,z) &\leq \alpha\rho_1(f(x,\Theta(x,y,z)), f(z,\Theta(x,y,z)))\\ &\leq \alpha\rho_1(f(x,y), f(z,\Theta(x,y,z)))\\ &+\alpha\beta d_{10}(\Theta, id_y)\max(\rho_1(v(y),x),\rho_1(x,z))\end{aligned}$$

un

$$\rho_1(v(y),x) \leq \alpha\rho_1(f(v(y),y), f(x,y))$$

$$\leq \alpha\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)) + \alpha\gamma l\rho_1(v(y),x).$$

Mēs iegūstam

$$\begin{aligned}
&\max(\rho_1(v(y),x),\rho_1(x,z)) \\
&\leq \alpha\max(\rho_1(f(x,y),f(z,\Theta(x,y,z))),\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y))) \\
&+\alpha\beta\max(d_{10}(\Theta,id_y),k)\max(\rho_1(v(y),x),\rho_1(x,z)).
\end{aligned}$$

No šejienes,

$$\begin{aligned}
&\max(\rho_1(v(y),x),\rho_1(x,z)) \\
&\leq \frac{\alpha\max(\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)),\rho_1(f(x,y),f(z,\Theta(x,y,z))))}{1-\alpha\beta\max(d_{10}(\Theta,id_y),k)}.
\end{aligned}$$

No šejienes,

$$\begin{aligned}
&\rho_2(\mathscr{L}\Theta(T(x,y),f(z,\Theta(x,y,z))),g(x,y)) \\
&= \rho_2(g(z,\Theta(x,y,z)),g(x,y)) \\
&\leq \gamma\rho_1(x,z) + \delta d_{10}(\Theta,id_y)\max(\rho_1(v(y),x),\rho_1(x,z)) \\
&\leq \frac{\alpha(\gamma+\delta d_{10}(\Theta,id_y))\max(\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)),\rho_1(f(x,y),f(z,\Theta(x,y,z))))}{1-\alpha\beta\max(d_{10}(\Theta,id_y),k)}.
\end{aligned}$$

If $\Theta \in \mathfrak{M}_{10}(k)$, then

$$d_{10}(\mathscr{L}\Theta,id_y) \leq \alpha(\gamma+\delta k)(1-\alpha\beta k)^{-1} = k.$$

Seko, $\mathscr{L}\Theta \in \mathfrak{M}_{10}(k)$. Apzīmējam $\Theta \in \mathfrak{M}_{10}(k)$ and $\Theta' \in \mathfrak{M}_{10}$. Iegūstam

$$\begin{aligned}
&\rho_2(\mathscr{L}\Theta(T(x,y),f(z,\Theta(x,y,z))),\mathscr{L}\Theta'(T(x,y),f(z,\Theta(x,y,z)))) \\
&\leq \rho_2(g(z,\Theta(x,y,z)),g(z,\Theta'(x,y,z))) + \beta k\rho_2(\Theta(x,y,z),\Theta'(x,y,z)) \\
&\leq (\delta+\beta k)\rho_2(\Theta(x,y,z),\Theta'(x,y,z)) \\
&\leq \frac{\alpha(\delta+\beta k)d_{10}(\Theta,\Theta')\max(\rho_1(v(g(x,y)),f(x,y)),\rho_1(f(x,y),f(z,\Theta(x,y,z))))}{1-\alpha\beta k}.
\end{aligned}$$

No šejienes,

$$d_{10}(\mathscr{L}\Theta,\mathscr{L}\Theta') \leq \mu d_{10}(\Theta,\Theta').$$

No šejienes ir viens vienīgs atrisinājums telpā $\Theta \in \mathfrak{M}_{10}(k)$ funkcionālvienādojumam

$$\Theta(T(x,y), f(z,\Theta(x,y,z))) = g(z,\Theta(x,y,z)).$$

Papildus atrisinājums ir viens vienīgs arī telpā $\mathfrak{M}_{10}$.

Attēlojums $\Theta'$, kur $\Theta'(x,y,z) = \theta(z,\pi(x,y))$, arī apmierina funkcionālvienādojumu

$$\Theta'(T(x,y), f(z,\Theta'(x,y,z))) = \theta(f(z,\theta(z,\pi(x,y))),\pi(T(x,y)))$$
$$= \theta(f(z,\theta(z,\pi(x,y))), g(v(\pi(x,y)),\pi(x,y)))$$
$$= g(z,\theta(z,\pi(x,y))) = g(z,\Theta'(x,y,z))$$

un Lipšica nosacījumus

$$\rho_2(\Theta'(x,y,z),\Theta'(x,y,z'))$$
$$= \rho_2(\theta(z,\pi(x,y)),\theta(z',\pi(x,y))) \leq k\rho_1(z,z').$$

Un papildus,

$$\rho_2(\Theta'(x,y,z),y) = \rho_2(\theta(z,\pi(x,y)),y)$$
$$\leq \rho_2(\theta(z,\pi(x,y)),\pi(x,y)) + \rho_2(\pi(x,y),y)$$
$$\leq d_{10}(\theta,id_y)\rho_1(z,v(\pi(x,y))) + d_{10}(\pi,id_y)\rho_1(v(y),x)$$
$$\leq d_{10}(\theta,id_y)(\rho_1(x,z)+\rho_1(v(y),x)$$
$$+ld_{10}(\pi,id_y)\rho_1(v(y),x)) + d_{10}(\pi,id_y)\rho_1(v(y),x).$$

Tātad,

$$d_{10}(\Theta',id_y) \leq 2d_{10}(\theta,id_y) + ld_{10}(\theta,id_y)d_{10}(\pi,id_y) + d_{10}(\pi,id_y).$$

Seko, ka $\Theta' \in \mathfrak{M}_{10}$, un tāpēc $\Theta(x,y,z) = \theta(z,\pi(x,y))$. Acīmredzot

$$\Theta(x,y,x) = y.$$

Tātad,

$$\theta(x,\pi(x,y)) = y.$$

Mēs iegūstam ka attēlojumi $H,\Gamma\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ definēti ar $H(x,y) = (x,\pi(x,y))$ un $\Gamma(x,y) = (x,\theta(x,y))$ ir savstarpēji inversi un ka $H$ ir homeomorfisms kurš nodrošina attēlojumu $T$ un $N$ dinamisko ekvivalenci. Teorēma ir pierādīta. $\square$

**Teorēma 6.10.** *Ja homeomorfisms $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4)*, eksistē tāds homeomorfisms $g_0\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$, kurš ir Lipšica attēlojums ar konstanti mazāku par* 1*, $\beta k + \delta < 1$ un*

$$\sup_{x,y} \rho_2(g(x,y), g_0(y)) < +\infty, \tag{6.15}$$

*tad eksistē homeomorfisms $H\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ tāds, ka*

$$H \circ T = R_0 \circ H,$$

*kur $R_0(x,y) = (f(x,u(x)), g_0(y))$.*

*Pierādījums. Solis 1.* Atzīmējam, ka Teorēmas 6.4 nosacījumi izpildās. Patiešam mēs varam izvēlēties $u(x) = y_0$. Saskaņā ar (13), nevienādība (7) ir spēkā. Pielietojot Teorēmu 6.7 mēs iegūstam, ka eksistē nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, tāds ka homeomorfisms $T$ ir topoloģiski saistīts ar homeomorfismu $R$.

*Solis 2. Attēlojums $\pi_0$.* Apskatām attēlojumu kopu

$$\mathfrak{M}_{11} = \{\pi_0 \mid \pi_0\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}, \quad \sup_{x,y} \rho_2(\pi_0(x,y), y) < +\infty\}.$$

Ar suprema metriku

$$d_{11}(\pi_0, \pi_0') = \sup_{x,y} \rho_2(\pi_0(x,y), \pi_0'(x,y)),$$

$\mathfrak{M}_{11}$ ir pilna metriska telpa. Apskatām attēlojumu $\pi_0 \mapsto \mathscr{L}\pi_0$, $\pi_0 \in \mathfrak{M}_{11}$ definētu ar vienādību

$$\mathscr{L}\pi_0(R_0(x,y)) = g(q(x, \pi_0(x,y)), \pi_0(x,y)).$$

Tā kā $R_0$ ir homeomorfisms, $\mathscr{L}\pi_0$ ir nepārtraukts. Apskatām novērtējumu

$$\begin{aligned} &\rho_2(\mathscr{L}\pi_0(R_0(x,y)), \mathscr{L}\pi_0'(R_0(x,y))) \\ &= \rho_2(g(q(x,\pi_0(x,y)), \pi_0(x,y)), g(q(x,\pi_0'(x,y)), \pi_0'(x,y))) \\ &\le (\gamma l + \delta)\rho_2(\pi_0(x,y), \pi_0'(x,y)) \le (\gamma l + \delta) d_{11}(\pi_0, \pi_0'). \end{aligned}$$

No šejienes mēs iegūstam ka

$$d_{11}(\mathscr{L}\pi_0, \mathscr{L}\pi_0') \le (\gamma l + \delta) d_{11}(\pi_0, \pi_0').$$

Vienkāršas sekas no nosacījuma (13) ir novērtējums

$$d_{11}(\mathscr{L} id_y, id_y) \leq \sup_{x,y} \rho_2(g(x,y), g_0(y)).$$

Seko,

$$d_{11}(\mathscr{L}\pi_0, id_y) \leq (\gamma l + \delta) d_{11}(\pi_0, id_y) + \sup_{x,y} \rho_2(g(x,y), g_0(y)).$$

Tā kā $\gamma l + \delta$ ir mazāks pa 1, attēlojums $\mathscr{L}$ ir saspiešana telpā $\mathfrak{M}_{11}$ un tātad ir viens vienīgs atrisinājums $\pi_0 \in \mathfrak{M}_{11}$ funkcionālvienādojumam

$$\pi_0(R_0(x,y)) = g(q(x, \pi_0(x,y)), \pi_0(x,y)).$$

*Solis 3. Attēlojums* $\theta_0$. Analoģiski solim 2, mēs varam pierādīt unitāti telpā $\theta_0 \in \mathfrak{M}_{11}$, kas apmierina funkcionālvienādojumu

$$\theta_0(R(x,y)) = g_0(\theta_0(x,y)).$$

*Solis 4. Attēlojums* $\Pi_0$. Apskatām funkcionālvienādojumu

$$\Pi_0(R(x,y)) = g(q(x, \Pi_0(x,y)), \Pi_0(x,y)).$$

Var viegli pārliecināties, ka funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $\Pi_0(x,y) = y$. Pierādam atrisinājuma unitāti telpā $\mathfrak{M}_{11}$. Pretējā gadījumā eksistē $(x,y)$ un $y \neq \Pi_0(x,y)$. Mēs iegūstam

$$\begin{aligned} &\rho_2(\Pi_0(R(x,y)), g(q(x,y),y)) \\ &= \rho_2(g(q(x, \Pi_0(x,y)), \Pi_0(x,y)), g(q(x,y),y)) \\ &\leq (\gamma l + \delta)\rho_2(\Pi_0(x,y), y). \end{aligned}$$

No šejienes,

$$d_{11}(\Pi_0, id_y) \leq (\gamma l + \delta) d_{11}(\Pi_0, id_y).$$

Seko, ka

$$\Pi_0(x,y) = y.$$

Attēlojums $\Pi_0'$, kur $\Pi_0'(x,y) = \pi_0(x, \theta_0(x,y))$, arī apmierina funkcionālvienādojumu.

$$\Pi_0'(R(x,y)) = \pi_0(f(x,u(x)), \theta_0(R(x,y)))$$

$$= \pi_0(f(x,u(x)), g_0(\theta_0(x,y)))$$
$$= g(q(x,\pi_0(x,\theta_0(x,y))), \pi_0(x,\theta_0(x,y))) = g(q(x,\Pi_0'(x,y)), \Pi_0'(x,y)).$$

Pierādam, ka $\Pi_0' \in \mathfrak{M}_{11}$. Tiešām,

$$\begin{aligned} &\rho_2(\Pi_0'(R(x,y)), g(q(x,y),y)) \\ &= \rho_2(\pi_0(f(x,u(x)), \theta_0(R(x,y))), g(q(x,y),y)) \\ &\le \rho_2(\pi_0(f(x,u(x)), \theta_0(R(x,y))), \theta_0(R(x,y))) \\ &\quad + \rho_2(\theta_0(R(x,y)), g(q(x,y),y)) \\ &\le d_{11}(\pi_0, id_y) + d_{11}(\theta_0, id_y). \end{aligned}$$

Seko, mēs iegūstam

$$\Pi_0'(x,y) = \pi_0(x,\theta_0(x,y)) = y.$$

*Solis 5. Attēlojums $\Theta_0$.* Analoģiski solim 4, mēs varam pierādīt funkcionālvienādojumam

$$\Theta_0(R_0(x,y)) = g_0(\Theta_0(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\Theta_0 \in \mathfrak{M}_{11}$, un

$$\Theta_0(x,y) = \theta_0(x,\pi_0(x,y)) = y.$$

Mēs iegūstam, ka attēlojumi $H_0, \Gamma_0 \colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ definēti ar $H_0(x,y) = (x,\pi_0(x,y))$ un $\Gamma_0(x,y) = (x,\theta_0(x,y))$ ir savstarpēji inversi un ka $H_0$ ir homeomorfisma, kurš realizē topoloģisko ekvivalenci starp homeomorfismiem $R_0$ un $R$. Teorēma ir pierādīta. □

**Teorēma 6.11.** *Ja homeomorfisms $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4)*, eksistē tāds homeomorfisms $f_0 \colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, ka $f_0^{-1}$ ir Lipšica attēlojums ar konstanti mazāku par* 1, $\alpha(1+\gamma l) < 1$ *un*

$$\sup_{x,y} \rho_1(f(x,y), f_0(x)) < +\infty, \tag{6.16}$$

*tad eksistē homeomorfisms $H \colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ tāds,*

$$H \circ T = N_0 \circ H,$$

*kur $N_0(x,y) = (f_0(x), g(v(y),y))$.*

*Pierādījums. Solis 1*. Atzīmējam ka Teorēmas 5.5 nosacījumi izpildās. Tiešām mēs varam izvēlēties $v(y) = x_0$. Saskaņā ar (14), nevienādība (9) izpildās. Izlietojot Teorēmu 8.8 mēs iegūstam, ka eksistē nepārtraukts attēlojums $\theta\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}$, Lipšica pret pirmo mainīgo un tāds, ka homeomorfisms $T$ ir topoloģiski ekvivalents homeomorfismam $N$.

*Solis 2. Attēlojums $p_0$*. Apskatām attēlojumu kopu

$$\mathfrak{M}_{12} = \{p_0 \mid p_0\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}, \quad \sup_{x,y}\rho_1(p_0(x,y),x) < +\infty\}.$$

Ar suprēma metriku

$$d_{12}(p_0,p_0') = \sup_{x,y}\rho_1(p_0(x,y),p_0'(x,y))$$

$\mathfrak{M}_{12}$ ir pilna metriska telpa. Apskatām attēlojumu $p_0 \mapsto \mathscr{L}p_0$, $p_0 \in \mathfrak{M}_{12}$ definēti ar vienādību

$$p_0(N_0(x,y)) = f(\mathscr{L}p_0(x,y),\theta(p_0(x,y),y)).$$

Apskatām novērtējumu

$$\begin{gathered}\rho_1(\mathscr{L}p_0(x,y),\mathscr{L}p_0'(x,y))\\ \le \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}p_0(x,y),\theta(p_0(x,y),y)), f(\mathscr{L}p_0'(x,y),\theta(p_0(x,y),y)))\\ \le \alpha\rho_1(p_0(N_0(x,y)),p_0'(N_0(x,y))) + \alpha\beta k\rho_1(p_0(x,y),p_0'(x,y)).\end{gathered}$$

No šejienes, mēs iegūstam

$$d_{12}(\mathscr{L}p_0,\mathscr{L}p_0') \le \alpha(1+\beta k)d_{12}(p_0,p_0').$$

Vienkāršas sekas no nosacījuma (14) ir novērtējums

$$d_{12}(\mathscr{L}id_x,id_x) \le \alpha\sup_{x,y}\rho_1(f(x,y),f_0(x)).$$

Seko,

$$d_{12}(\mathscr{L}p_0,id_x) \le \alpha(1+\beta k)d_{12}(p_0,id_x) + \alpha\sup_{x,y}\rho_1(f(x,y),f_0(x)).$$

Tā kā $\alpha(1+\beta k)$ ir mazāks par 1, attēlojums $\mathscr{L}$ ir saspiešana telpā $\mathfrak{M}_{12}$ un tātad ir viens vienīgs atrisinājums $p_0 \in \mathfrak{M}_{12}$ funkcionālvienādojumam

$$p_0(N_0(x,y)) = f(p_0(x,y), \theta(p_0(x,y),y)).$$

*Solis 3. Attēlojums $q_0$.* Analoģiski solim 2, mēs varam pierādīt unitāti $q_0 \in \mathfrak{M}_{12}$ apmierina funkcionālvienādojumu

$$q_0(N(x,y)) = f_0(q_0(x,y)).$$

*Solis 4. Attēlojums $P_0$.* Apskatām funkcionālvienādojumu

$$P_0(N(x,y)) = f(P_0(x,y), \theta(P_0(x,y),y)).$$

Acīmredzot funkcionālvienādojumam ir atrisinājums $P_0(x,y) = x$. Pierādīsim atrisinājuma unitāti telpā $\mathfrak{M}_{12}$. Pretējā gadījumā eksistē $(x,y)$ un $x \neq P_0(x,y)$. Mēs iegūstam

$$\rho_1(P_0(x,y),x) \leq \alpha\rho_1(f(P_0(x,y),\theta(P_0(x,y),y)), f(x,\theta(P_0(x,y),y)))$$
$$\leq \alpha\rho_1(P_0(N(x,y)), f(x,\theta(x,y))) + \alpha\beta k\rho_1(P_0(x,y),x).$$

No šejienes,

$$d_{12}(P_0, id_x) \leq \alpha(1+\beta k)d_{12}(P_0, id_x).$$

Seko, ka

$$P_0(x,y) = x.$$

Attēlojums $P_0'$, kur $P_0'(x,y) = p_0(q_0(x,y),y)$, arī apmierina funkcionālvienādojumu.

$$P_0'(N(x,y)) = p_0(q_0(N(x,y)), g(v(y),y)) = p_0(f_0(q_0(x,y)), g(v(y),y))$$
$$= f(p_0(q_0(x,y),y), \theta(p_0(q_0(x,y),y),y)) = f(P_0'(x,y), \theta(P_0'(x,y),y)).$$

Pierādam, ka $P_0' \in \mathfrak{M}_{12}$. Patiešam,

$$\rho_1(P_0'(x,y),x) \leq \rho_1(p_0(q_0(x,y),y),x)$$
$$\leq \rho_1(p_0(q_0(x,y),y), q_0(x,y)) + \rho_1(q_0(x,y),x)$$
$$\leq d_{12}(p_0, id_x) + d_{12}(q_0, id_x).$$

Seko, ka

$$P_0'(x,y) = p_0(q_0(x,y),y) = x.$$

*Solis 5. Attēlojums* $Q_0$. Analoģiski solim 4, mēs varam pierādīt, ka funkcionālvienādojums

$$Q_0(N_0(x,y)) = f_0(Q_0(x,y))$$

ir viens vienīgs attēlojums $Q_0 \in \mathfrak{M}_{12}$, un

$$Q_0(x,y) = q_0(p_0(x,y),y) = x.$$

Mēs iegūstam, ka attēlojumi $H_0, \Gamma_0 \colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ definēti ar $H_0(x,y) = (p_0(x,y),y)$ un $\Gamma_0(x,y) = (q_0(x,y),y)$ ir savstarpēji inversi un ka $H_0$ ir homeomorfisms kurš realizē topoloģisko ekvivalenci starp homeomorfismiem $N_0$ un $N$. Teorēma ir pierādīta. $\square$

*Piemērs 6.5.* Apskatām attēlojumu (6.2). Nosacījums (6.15) izpildās, ja

$$\sup_{x,y} |G(x,y) - G(0,y)| < +\infty$$

un nosacījums (6.16) izpildās, ja

$$\sup_{x,y} |F(x,y) - F(x,0)| < +\infty.$$

Pieņemsim, ka attēlojums (6.2) ir homeomorfisms, un pieņemsim, ka $B$ eksistē inversais attēlojums, $\|B\| < 1$, $\sup_{x,y} |G(x,y)| < +\infty$ un

$$\varepsilon < \begin{cases} \dfrac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| \leq 2 \\[2ex] \dfrac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| > 2. \end{cases}$$

Izlietojot Teorēmu 6.10 iegūsim, ka homeomorfisms (6.2) ir topoloģiski ekvivalents

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x, u(x)), \\ y^1 &= By. \end{aligned}$$

Ja $\|A^{-1}\| < 1$, $\sup_{x,y} |F(x,y)| < +\infty$ un

$$\varepsilon < \begin{cases} \dfrac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| \le 2 \\[2ex] \dfrac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| > 2, \end{cases}$$

tad no Teorēmas 6.11 izriet ka homeomorfisms (6.2) ir topoloğiski ekvivalents homeomorfismam

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax, \\ y^1 &= By + G(v(y), y). \end{aligned}$$

# Nodaļa 7
# Diskrēto dinamisko paplašinājumu ekvivalence

## 7.1 Pamatjēdzieni

Šajā nodaļā definēsim dažus pamatjēdzienus, kuri ir nepieciešami tālākā izklāstā un precizēsim attēlojuma $T$ formu.

Pieņemsim, ka $\mathbb{X}$ un $\mathbb{Y}$ ir pilnas metriskas telpas ar atbilstošiem attālumiem $\rho_1$ un $\rho_2$, un $\Lambda$ ir topoloģiska telpa. Dotā nodaļā vispārināsim redukcijas teorēmu uz homeomorfismu (nepārtrauktu attēlojumu) inducētu diskrētu dinamisko (semidinamisko) sistēmu paplašinājumiem pilnā metriskā telpā.

Aplūkosim nepārtrauktu attēlojumu $T$ formā

$$(x,y,\lambda) \mapsto (f(x,y,\lambda), g(x,y,\lambda), \sigma(\lambda)),$$

kurš apmierina sekojošus nosacījumus:

(H1) $\rho_1(x,x') \le \alpha\rho_1(f(x,y,\lambda), f(x',y,\lambda))$, $\alpha > 0$;
(H2) $\rho_1(f(x,y,\lambda), f(x,y',\lambda)) \le \beta\rho_2(y,y')$;
(H3) $\rho_2(g(x,y,\lambda), g(x',y',\lambda)) \le \gamma\rho_1(x,x') + \delta\rho_2(y,y')$, kur $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$;
(H4) attēlojums $f(\cdot,y,\lambda)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ir surjektīvs;
(H5) attēlojums $\sigma\colon \Lambda \to \Lambda$ ir homeomorfisms.

Mūsu mērķis ir atrast nosacījumus pie kuriem dotais attēlojums $T$ ar topoloģiskas transformācijas palīdzību sadalās un vienkāršojās.

*Piemērs 7.1.* Apskatīsim sekojošu neautonomu diferenču vienādojumu sistēmu formā

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= A(n)x(n) + F(x(n), y(n), n),\\
y(n+1) &= B(n)y(n) + G(x(n), y(n), n),
\end{aligned}
$$

kur $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ un $\mathbb{Y}$ ir Banaha telpas, $A(n)$ un $B(n)$ ir ierobežoti lineāri attēlojumi, attēlojumam $A(n)$ eksistē inversais, $\|B(n)\| < \|A^{-1}(n)\|^{-1}$ un attēlojumi $F\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, $G\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$
\begin{aligned}
|F(x,y,n) - F(x',y',n)| &\le \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|),\\
|G(x,y,n) - G(x',y',n)| &\le \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|).
\end{aligned}
$$

Var viegli pārliecināties, ka attēlojums $T$ apmierina nosacījumus (H1)– (H5), kur $\alpha = ((\sup_n \|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \varepsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \varepsilon$, $\delta = \sup_n \|B(n)\| + \varepsilon$ un $\sigma(n) = n + 1$. Nosacījums $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reducējās uz nevienādību

$$
\varepsilon < \frac{(\sup_n \|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \sup_n \|B(n)\|}{4}.
$$

Ar vienādību $x_1 = A(n)x + F(x,y,n)$ definētais attēlojums fiksētam $n$ un $y$ ir sirjektīvs, ja $\varepsilon \sup_n \|A^{-1}(n)\| < 1$. Atzīmēsim, ka

$$
\varepsilon \sup_n \|A^{-1}(n)\| < 1/4.
$$

## 7.2 Palīglemmas

Pamata rezultāta pierādījumā izlietosim sekojošas trīs lemmas. Apskatam nepārtrauktu attēlojumu kopu

$$
\mathfrak{Lip}(k) = \{u \mid u\colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y} \text{ un } \rho_2(u(x,\lambda), u(x',\lambda)) \le k\rho_1(x,x')\}.
$$

**Lemma 7.1.** *Ja $\alpha\beta k < 1$ un $u \in \mathfrak{Lip}(k)$, tad ar vienādību $\varphi(x,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), \sigma(\lambda))$ definētais attēlojums $\varphi\colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{X} \times \Lambda$ ir homeomorfisms.*

Tālāk ar vienādību

$$
(\mathscr{L}u)(f(x,u(x,\lambda),\lambda), \sigma(\lambda)) = g(x,u(x,\lambda),\lambda)
$$

definējam operatoru $\mathscr{L}$ kopā $\mathfrak{Lip}(k)$.

**Lemma 7.2.** *Eksistē tāds $k \geq 0$, ka $\mathscr{L}(\mathfrak{Lip}(k)) \subset \mathfrak{Lip}(k)$.*

Tālāk apskatām nepārtrauktu attēlojumu kopu

$$\mathfrak{Lip}(l) = \{v \mid v\colon \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{X} \text{ un } \rho_1(v(y,\lambda), v(y',\lambda)) \leq l\rho_2(y,y')\}$$

un definējam operatoru $\mathscr{K}$ kopā $\mathfrak{Lip}(l)$ ar vienādību

$$f(\mathscr{K}v(y,\lambda), y, \lambda) = v(g(v(y,\lambda), y, \lambda), \sigma(\lambda)).$$

Operators $\mathscr{K}$ ir korekti definēts, jo attēlojums $f(\cdot, y, \lambda)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ir sirjektīvs un izpildās nosacījums (H1).

**Lemma 7.3.** *Eksistē tāds $l \geq 0$, ka $\mathscr{K}(\mathfrak{Lip}(l)) \subset \mathfrak{Lip}(l)$.*

## 7.3 Invariantas kopas

Dosim nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai eksistētu tādi attēlojumi $u\colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$ un $v\colon \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{X}$, kuru grafiki ir invariantas kopas.

**Teorēma 7.1.** *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H5)*. Lai eksistētu attēlojumi $u\colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$ un $v\colon \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{X}$, kuri apmierina funkcionālvienādojumus*

$$u(f(x, u(x,\lambda), \lambda), \sigma(\lambda)) = g(x, u(x,\lambda), \lambda), \tag{7.1}$$

$$f(v(y,\lambda), y, \lambda) = v(g(v(y,\lambda), y, \lambda), \sigma(\lambda)) \tag{7.2}$$

*un Lipšica nosacījumus*

$$\rho_2(u(x,\lambda), u(x',\lambda)) \leq k\rho_1(x,x'), \tag{7.3}$$

$$\rho_1(v(y,\lambda), v(y',\lambda)) \leq l\rho_2(y,y') \tag{7.4}$$

*ir nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu nepārtraukti attēlojumi $x_0\colon \Lambda \to \mathbb{X}$ un $y_0\colon \Lambda \to \mathbb{Y}$ tādi, ka*

$$f(x_0(\lambda), y_0(\lambda), \lambda) = x_0(\sigma(\lambda)) \text{ un } g(x_0(\lambda), y_0(\lambda), \lambda) = y_0(\sigma(\lambda)).$$

**Teorēma 7.2.** *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H5)*, un pieņemsim, ka $\beta k + \delta < 1$. Lai eksistētu attēlojums $u\colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu*

(7.1) *un Lipšica nosacījumu* (7.3) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums* $u_0 \in \mathfrak{Lip}(k)$*, ka izpildās nevienādība*

$$\sup_{x,\lambda} \rho_2(u_0(f(x,u_0(x,\lambda),\lambda),\sigma(\lambda)),g(x,u_0(x,\lambda),\lambda)) < +\infty.$$

**Teorēma 7.3.** *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums* $T$ *apmierina nosacījumus* (H1)–(H5)*, un pieņemsim, ka* $\alpha(1+\gamma l) < 1$*. Lai eksistētu attēlojums* $v\colon \mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}$*, kurš apmierina funkcionālvienādojumu* (7.2) *un Lipšica nosacījumu* (7.4) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums* $v_0 \in \mathfrak{Lip}(l)$*, ka izpildās nevienādība*

$$\sup_{y,\lambda} \rho_1(v_0(g(v_0(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda)),f(v_0(y,\lambda),y,\lambda)) < +\infty.$$

**Lemma 7.4.** *Ja* $T$ *ir homeomorfisms un ja nepārtrauktais attēlojums* $v\colon \mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}$ *apmierina* (7.2) *and* (7.4)*, tad ar vienādību* $\psi(y,\lambda) = (g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda))$ *definētais attēlojums* $\psi\colon \mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{Y}\times\Lambda$*, ir homeomorfisms.*

**Sekas 7.1.** *Ja* $T$ *ir homeomorfisms un ja nepārtrauktie attēlojumi* $u\colon \mathbb{X}\times\Lambda \to \mathbb{Y}$ *un* $v\colon \mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}$ *apmierina* (7.1)–(7.4)*, tad ar vienādību* $S(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda),g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda))$ *definētais attēlojums* $S\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda$ *ir homeomorfisms.*

## 7.4 Homeomorfismu ekvivalence. 1

Apskatām gadījumu, kad attēlojums $T$ ir homeomorfisms.

**Teorēma 7.4.** *Ja homeomorfisms* $T$ *apmierina nosacījumus* (H1) – (H5) *un ja nepārtrauktie attēlojumi* $x_0\colon \Lambda \to \mathbb{X}$ *un* $y_0\colon \Lambda \to \mathbb{Y}$ *ir tādi, ka*

$$f(x_0(\lambda),y_0(\lambda),\lambda) = x_0(\sigma(\lambda)) \text{ un } g(x_0(\lambda),y_0(\lambda),\lambda) = y_0(\sigma(\lambda)),$$

*tad eksistē tāds homeomorfisms* $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda$*, ka*

$$H\circ T = S\circ T,$$

*kur* $S(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda),g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda))$*.*

## 7.5 Neapgriežamu attēlojumu ekvivalence

**Teorēma 7.5.** *Ja nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1) – (H4) *un ja nepārtraukts attēlojums $u\colon \mathbb{X}\times\Lambda \to \mathbb{Y}$ apmierina nosacījumus* (7.1) *un* (7.3)*, tad eksistē nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, ka*

$$H\circ T = R\circ T,$$

*kur* $R(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), g(q(x,y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

Pieņemsim, ka eksistē nepārtraukts attēlojums $f_0\colon \mathbb{X}\times\Lambda \to \mathbb{X}$, kurš apmierina nosacījumus:

(i) $\rho_1(x,x') \le c_1\rho_1(f_0(x,\lambda), f_0(x',\lambda))$ un $c_1 < 1$;
(ii) attēlojums $f_0(\cdot,\lambda)\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ir sirjektīvs.

**Teorēma 7.6.** *Ja nepārtrauktais attēlojums $T$ apmierina nosacījumus* (H1)–(H4)*, $\alpha(1+\gamma l) < 1$ un*

$$\sup_{x,y,\lambda} \rho_1(f(x,y,\lambda), f_0(x,\lambda)) < +\infty,$$

*tad eksistē nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda$, ka*

$$H\circ T = N_1\circ T,$$

*kur* $N_1(x,y,\lambda) = (f_0(x,\lambda), g(q(x,y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

## 7.6 Homeomorfismu ekvivalence. 2

**Teorēma 7.7.** *Ja homeomorfisms $T$ apmierina nosacījumus* (H1) – (H5) *un ja nepārtrauktais attēlojums $v\colon \mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{X}$ apmierina nosacījumus* (7.2) *un* (7.4)*, tad eksistē nepārtraukts attēlojums $\theta\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\Lambda \to \mathbb{Y}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret pirmo mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, ka*

$$H\circ T = N\circ T,$$

*kur* $N(x,y,\lambda) = (f(x,\theta(x,y,\lambda)), g(v(y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums $g_0 \colon \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$ apmierina nosacījumus:

(i) $\rho_2(g_0(y,\lambda), g_0(y',\lambda)) \leq c_2 \rho_2(y,y')$ un $c_2 < 1$;
(ii) attēlojums $(y,\lambda) \mapsto (g_0(y,\lambda), \sigma(\lambda))$ ir homeomorfisms.

**Teorēma 7.8.** *Ja homeomorfisms* $T$ *apmierina nosacījumus* (H1) – (H5)*, nepārtrauktais attēlojums* $u \colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$ *apmierina nosacījumus* (7.1) *un* (7.3)*,* $\beta k + \delta < 1$ *un*

$$\sup_{x,y,\lambda} \rho_2(g(x,y,\lambda), g_0(y,\lambda)) < +\infty,$$

*tad eksistē homeomorfisms* $H \colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \Lambda$ *tāds, ka*

$$H \circ T = R \circ T,$$

*kur* $R_0(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), g_0(y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums $f_0 \colon \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{X}$ apmierina nosacījumus:

(i) $\rho_1(x,x') \leq c_1 \rho_1(f_0(x,\lambda), f_0(x',\lambda))$ un $c_1 < 1$;
(ii) attēlojums $(x,\lambda) \mapsto (f_0(x,\lambda), \sigma(\lambda))$ ir homeomorfisms.

**Teorēma 7.9.** *Ja homeomorfisms* $T$ *apmierina nosacījumus* (H1) – (H5)*, nepārtrauktais attēlojums* $v \colon \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{X}$ *apmierina nosacījumus* (7.2) *un* (7.4)*,* $\alpha(1+\gamma l) < 1$ *un*

$$\sup_{x,y,\lambda} \rho_1(f(x,y,\lambda), f_0(x,\lambda)) < +\infty,$$

*tad eksistē homeomorfisms* $H \colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \Lambda \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \Lambda$ *tāds, ka*

$$H \circ T = N_0 \circ T,$$

*kur* $N_0(x,y,\lambda) = (f_0(x,\lambda), g(v(y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

# Nodaļa 8
# Ekvivalences lietojumi

## 8.1 Lietojumi stabilitātes teorijā

Pierādīsim, ka nepārtraukta attēlojuma $T: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, kur

$$T(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$$

inducētās semidinamiskas sistēmas asimptotisko izturēšanos nosaka reducētā nepārtraukta attēlojuma $\varphi: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, kur

$$\varphi(x) = f(x, u(x)),$$

inducētā semidinamiskā sistēma.

**Teorēma 8.1.** *Ja attēlojumam $T$ izpildās nosacījumi* (H1)–(H4) *un ir nekustīgais punkts $T(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$, tad jebkuram $(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ eksistē tāds $\xi \in \mathbb{X}$, ka*

$$\rho_1(x^n, x_0) \le l_1(k\beta + \delta)^n(\rho_2(y,y_0) + k\rho_1(x,x_0)) + \rho_1(\xi^n, x_0),$$

$$\rho_2(y^n, y_0) \le (1 + kl_1)(k\beta + \delta)^n(\rho_2(y,y_0) + k\rho_1(x,x_0)) + k\rho_1(\xi^n, x_0)$$

*un*

$$\rho_1(\xi, x_0) \le l_1\rho_2(y,y_0) + (1 + kl_1)\rho_1(x,x_0),$$

*kur*

$$T^n(x,y) = (f^n(x,y), g^n(x,y)) = (x^n, y^n)$$

*ir $T$ $n$–tā iterācija un*

$$l_1 = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}.$$

*Pierādījums.* Saskaņā ar Teorēmu 6.3 eksistē attēlojums $u\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, kurš apmierina (6.6), (6.8) un $u(x_0) = y_0$. No (6.14) lietojot matemātisko indukciju iegūstam

$$\rho_2(u(f^n(x,y)), g^n(x,y)) \leq (k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x))$$

vai

$$\rho_2(y^n, u(x^n)) \leq (k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x)).$$

Ņemam $\xi = p(x,y)$, kur attēlojums $p$ ir definēts Teorēmā 6.7. Tad

$$\begin{aligned} \xi^1 &= f(\xi, u(\xi)) = f(p(x,y), u(p(x,y))) \\ &= p(f(x,y), g(x,y)) = p(x^1, y^1). \end{aligned}$$

Lietojot matemātisko indukciju, mēs iegūstam $\xi^n = p(x^n, y^n)$. Apzīmējam ar

$$d_5(p, id) \leq \frac{\alpha\beta}{1-\lambda} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}} = l_1.$$

Tad

$$\begin{aligned} \rho_1(x^n, \xi^n) &= \rho_1(x^n, p(x^n, y^n)) \\ &\leq d_5(p, id_x)\rho_2(y^n, u(x^n)) \leq l_1(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x)). \end{aligned}$$

Iegūstam

$$\begin{aligned} \rho_1(x^n, x_0) &\leq \rho_1(x^n, \xi^n) + \rho_1(\xi^n, x_0) \\ &\leq l_1(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x)) + \rho_1(\xi^n, x_0) \end{aligned}$$

un

$$\begin{aligned} \rho_2(y^n, y_0) &\leq \rho_2(y^n, u(x^n)) + \rho_2(u(x^n), y_0) \\ &\leq (1 + kl_1)(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x)) + k\rho_1(\xi^n, x_0). \end{aligned}$$

Atzīmējam, ka

$$\rho_2(y, u(x)) \leq \rho_2(y, y_0) + \rho_2(u(x), u(x_0)) \leq \rho_2(y, y_0) + k\rho_1(x, x_0)$$

un

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi, x_0) &\leq \rho_1(p(x,y), x) + \rho_1(x, x_0) \\ &\leq l_1\rho_2(y, u(x)) + \rho_1(x, x_0) \leq l_1\rho_2(y, y_0) + (1 + kl_1)\rho_1(x, x_0). \end{aligned}$$

Teorēma ir pierādīta. □

**Sekas 8.1.** *Ja $\beta k + \delta \leq 1$ un $x_0$ ir stabīls attēlojuma $\varphi$ nekustīgais punkts, tad $(x_0, y_0)$ ir stabīls attēlojuma $T$ nekustīgais punkts. Ja $\beta k + \delta < 1$ un $x_0$ ir asimptotiski stabīls attēlojuma $\varphi$ nekustīgais punkts, tad $(x_0, y_0)$ ir asimptotiski stabīls attēlojuma $T$ nekustīgais punkts.*

*Piemērs 8.1.* Apskatām attēlojumu (6.2) un pieņemsim, ka $F(0,0) = 0$ un $G(0,0) = 0$. Saskaņā ar Teorēmu 8.1 iegūstam novērtējumus

$$|x^n| \leq l_1(k\beta + \delta)^n(|y| + k|x|) + |\xi^n|,$$

$$|y^n| \leq (1 + kl_1)(k\beta + \delta)^n(|y| + k|x|) + k|\xi^n|,$$

kur

$$\xi^{n+1} = A\xi^n + F(\xi^n, u(\xi^n))$$

un

$$|\xi| \leq l_1|y| + (1 + kl_1)|x|.$$

## 8.2 Ēnas lemma

Pierādīsim, ka attēlojumam $T$ ir ēnas īpašība.

**Definīcija 8.1.** Virkne $\{x^n, y^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir attēlojuma $T$ *orbita*, ja visiem $n \in \mathbb{Z}$

$$(x^{n+1}, y^{n+1}) = T(x^n, y^n).$$

**Definīcija 8.2.** Virkne $\{\zeta^n, \eta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir attēlojuma $T$ $\Delta$–*pseidoorbita*, ja visiem $n \in \mathbb{Z}$

$$\max\{\rho_1(f(\zeta^n, \eta^n), \zeta^{n+1}), \rho_2(g(\zeta^n, \eta^n), \eta^{n+1})\} \leq \Delta.$$

**Definīcija 8.3.** Attēlojumam $T$ *ir ēnas* īpašība, ja katram $e > 0$ eksistē tāds $\Delta > 0$, ka jebkura $\Delta$–pseidoorbita $\{\zeta^n, \eta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir $e$ attālumā no īstās orbitas $\{x^n, y^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, t.i. visiem $n \in \mathbb{Z}$

$$\max\{\rho_1(x^n, \zeta^n), \rho_2(y^n, \eta^n)\} \leq e.$$

**Teorēma 8.2.** *Ja izpildās nosacījumi* (H1)–(H4) *un* $(1-\alpha)(1-\delta) > \alpha\beta\gamma$*, tad attēlojumam $T$ ir ēnas īpašība.*

*Pierādījums.* Pieņemam, ka $\{\zeta^n, \eta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir $\Delta$–pseido–orbita un pieņemam, ka

$$\kappa = \frac{\alpha(1-\delta+\beta)}{(1-\alpha)(1-\delta)-\alpha\beta\gamma}\Delta$$

un

$$\nu = \frac{1-\alpha+\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\delta)-\alpha\beta\gamma}\Delta.$$

Aplūkojam divas pilnas metriskas telpas $\mathbb{E}$ un $\mathbb{F}$, kur

$$\mathbb{E} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{Z}},\ \sup_n \rho_1(x^n, \zeta^n) \leq \kappa\}$$

un

$$\mathbb{F} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \{y^n\}_{n\in\mathbb{Z}},\ \sup_n \rho_2(y^n, \eta^n) \leq \nu\}$$

ar metrikām

$$r_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = \sup_n \{\rho_1(x^n, x_1^n)\}$$

un

$$r_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1) = \sup_n \{\rho_2(y^n, y_1^n)\}$$

attiecīgi. Atzīmējam, ka ja $(1-\alpha)(1-\delta) > \alpha\beta\gamma$, tad $\beta k + \delta < 1$ un $\alpha(1+\gamma l) < 1$.

Apskatām funkcionālvienādojumu virkni

$$p^{n+1}(g(p^n(w^n), w^n)) = f(p^n(w^n), w^n)$$

pilnā metriskā telpā

$$\mathbb{P} = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} \colon \mathbb{F} \to \mathbb{E} \text{ un } r_1(\mathbf{p}(\mathbf{w}), \mathbf{p}(\mathbf{w}_1)) \leq l r_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1)\}$$

kurās ievestas metrikas

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = \sup_{\mathbf{w}} r_1(\mathbf{p}(\mathbf{w}), \mathbf{p}_1(\mathbf{w})).$$

Apskatām attēlojumu $\mathbf{p} \mapsto \mathscr{L}\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ definētu ar vienādību

$$p^{n+1}(g(p^n(w^n), w^n)) = f(\mathscr{L}p^n(w^n), w^n).$$

Iegūstam

$$\rho_1(\mathscr{L}p^n(w^n), \mathscr{L}p_1^n(w_1^n)) \leq \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}p^n(w^n), w^n), f(\mathscr{L}p_1^n(w_1^n), w^n))$$

$$\leq \alpha\rho_1(p^{n+1}(g(p^n(w^n), w^n)), p_1^{n+1}(g(p_1^n(w_1^n), w_1^n))) + \alpha\beta\rho_2(w^n, w_1^n)$$

$$\le \alpha\rho_1(p^{n+1}(g(p^n(w^n),w^n)),p_1^{n+1}(g(p^n(w^n),w^n)))$$
$$+\alpha l(\gamma\rho_1(p^n(w^n),p_1^n(w^n))+(\gamma l+\delta)\rho_2(w^n,w_1^n))+\alpha\beta\rho_2(w^n,w_1^n)$$
$$\le \alpha(1+\gamma l)D(\mathbf{p},\mathbf{p}_1)+(\alpha l(\gamma l+\delta)+\alpha\beta)\rho_2(w^n,w_1^n)$$
$$\le \alpha(1+\gamma l)D(\mathbf{p},\mathbf{p}_1)+lr_2(\mathbf{w},\mathbf{w}_1).$$

Seko, ka

$$D(\mathscr{L}\mathbf{p},\mathscr{L}\mathbf{p}_1)\le \alpha(1+\gamma l)D(\mathbf{p},\mathbf{p}_1)$$

un

$$r_1(\mathscr{L}\mathbf{p}(\mathbf{w}),\mathscr{L}\mathbf{p}(\mathbf{w}_1))\le lr_2(\mathbf{w},\mathbf{w}_1).$$

Atzīmējam, ka

$$\rho_1(\mathscr{L}p^n(w^n),\zeta^n)\le \alpha\rho_1(f(\mathscr{L}p^n(w^n),w^n),f(\zeta^n,w^n))$$
$$\le \alpha\rho_1(p^{n+1}(g(p^n(w^n),w^n)),\zeta^{n+1})$$
$$+\alpha\rho_1(\zeta^{n+1},f(\zeta^n,\eta^n))+\alpha\beta\rho_2(\eta^n,w^n)$$
$$\le \alpha D(\mathbf{p},\zeta)+\alpha\Delta+\alpha\beta r_2(\eta,\mathbf{w})\le \alpha\kappa+\alpha\Delta+\alpha\beta\nu=\kappa.$$

Seko, ka $\mathscr{L}\mathbf{p}\in\mathbb{P}$. Izlietojot Banaha saspiešanas principu pabeidzam teorēmas pirmās daļas pierādījumu.

Apskatām vienādību virkni

$$q^{n+1}=g(p^n(q^n),q^n).$$

Apskatām attēlojumu $\mathbf{q}\mapsto\mathscr{L}\mathbf{q}$, $\mathbf{q}\in\mathbb{F}$ definētu ar vienādību

$$\mathscr{L}q^{n+1}=g(p^n(q^n),q^n).$$

Iegūstam

$$\rho_2(\mathscr{L}q^{n+1},\mathscr{L}q_1^{n+1})=\rho_2(g(p^n(q^n),q^n),g(p^n(q_1^n),q_1^n))$$
$$\le(\gamma l+\delta)\rho_2(q^n,q_1^n)\le(\gamma l+\delta)r_2(\mathbf{q},\mathbf{q}_1).$$

Seko, ka

$$r_2(\mathscr{L}\mathbf{q},\mathscr{L}\mathbf{q}_1)\le(\gamma l+\delta)r_2(\mathbf{q},\mathbf{q}_1).$$

Atzīmējam, ka

$$\rho_2(\mathscr{L}q^{n+1},\eta^{n+1})$$
$$\le\rho_2(g(p^n(q^n),q^n),g(\zeta^n,\eta^n))+\rho_2(\eta^{n+1},g(\zeta^n,\eta^n))$$

$$\leq \gamma\rho_1(p^n(q^n),\zeta^n)+\delta\rho_2(q^n,\eta^n)+\rho_2(\eta^{n+1},g(\zeta^n,\eta^n))$$
$$\leq \gamma D(\mathbf{p},\zeta)+\delta r_2(\mathbf{q},\eta)+\Delta \leq \gamma\kappa+\delta\nu+\Delta=\nu.$$

Seko, ka $\mathscr{L}\mathbf{q}\in\mathbb{F}$. Izlietojot Banaha saspiešanas principu pabeidzam teorēmas otrās daļas pierādījumu.

Mēs esam ieguvuši, ka $\Delta$–pseido–orbita $\{\zeta^n,\eta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir $e$–pēda orbitai

$$\{p^n(q^n),q^n\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

kur

$$e=\frac{\max\{\alpha(1-\delta+\beta),1-\alpha+\alpha\gamma\}}{(1-\alpha)(1-\delta)-\alpha\beta\gamma}\Delta$$

. □

*Piezīme 8.1.* Teorēma 8.2 paliek spēkā *pozitīvas orbitas* un *pozitīvas* $\Delta$*–pseidoorbitas* gadījumā.

*Piemērs 8.2.* Apskatīsim attēlojumu (6.2). Izlietojot Teorēmu 8.2 iegustam, ka attēlojumam (6.2) ir ēnas īpašība, ja

$$\varepsilon<\frac{(\|A^{-1}\|^{-1}-1)(1-\|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1}-\|B\|}$$

un

$$e=\frac{\max\{(\|A^{-1}\|^{-1}-1),(1-\|B\|)\}}{(\|A^{-1}\|^{-1}-1)(1-\|B\|)-\varepsilon(\|A^{-1}\|^{-1}-\|B\|)}\Delta.$$

## Nodaļa 9
# Impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu ekvivalence

Dotajā nodaļā pierādītas redukcijas teorēmas dažādas modifikācijas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām Banaha telpā (tai skaitā arī neapgriežamām sistēmām), ja sistēma sadalās divās daļās. Bieži redukcijas tipa teorēmas ir lietojamas jau reizi reducētai sistēmai, kas atļauj tālāk vienkāršot doto sistēmu. Izmantojot standarta paņēmienus var iegūt arī redukciju teorēmu lokālos variantus.

## 9.1 Pamatjēdzieni

Pieņemam, ka $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ ir Banaha telpas. Ar $\mathscr{L}(\mathbf{X})$ un $\mathscr{L}(\mathbf{Y})$ apzīmējam lineāru ierobežotu operatoru Banaha telpas. Aplūkojam sekojošu impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t,x,y), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t,x,y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) \\ &= C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0), y(\tau_i-0)), \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= y(\tau_i+0) - y(\tau_i-0) \\ &= D_i y(\tau_i-0) + q_i(x(\tau_i-0), y(\tau_i-0)), \end{cases} \tag{9.1}$$

kur:

(i) attēlojumi $A\colon \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbf{X})$ un $B\colon \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbf{Y})$ ir lokāli integrējami Bohnera nozīmē;
(ii) attēlojumi $f\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un $g\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ ir lokāli integrējami Bohnera nozīmē attiecībā pret $t$ fiksētiem $x$ un $y$, un

apmierina Lipšica nosacījumus

$$|f(t,x,y) - f(t,x',y')| \leq \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$

$$|g(t,x,y) - g(t,x',y')| \leq \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|);$$

(iii) visiem $i \in \mathbb{Z}$, $C_i \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, $D_i \in \mathscr{L}(\mathbf{Y})$, attēlojumi $p_i\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, $q_i\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$|p_i(x,y) - p_i(x',y')| \leq \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$

$$|q_i(x,y) - q_i(x',y')| \leq \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|);$$

(iv) attēlojumi $(x,y) \mapsto (x + C_i x + p_i(x,y), y + D_i y + q_i(x,y))$, $x \mapsto x + C_i x$ ir homeomorfismi;

(v) impulsu momenti $\tau_i$ veido monotoni augošu virkni

$$\ldots < \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots,$$

kuras robežpunkti var būt vienīgi $\mp\infty$.

Dosim impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājuma un globālās dinamiskās ekvivalences jēdziena definīcijas.

**Definīcija 9.1.** Impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas *atrisinājums* ir gabaliem absolūti nepārtraukts attēlojums ar pirmā veida pārtraukumiem punktos $t = \tau_i$, kurš gandrīz visiem $t$ apmierina impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu (9.1) un punktos $t = \tau_i$ apmierina "lēciena" nosacījumus.

Atzīmējam, ka nosacījums (iv) garantē (9.1) atrisinājuma turpināmību negatīvā virzienā. Nosacījums (v) kopā ar labās puses Lipšica nosacījumiem attiecībā pret $x$ un $y$ nodrošina atrisinājuma unitāti uz $\mathbb{R}$.

Apzīmējam ar $\Phi(\cdot,s,x,y) = (x(\cdot,s,x,y), y(\cdot,s,x,y))\colon \mathbb{R} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ sistēmas (9.1) atrisinājumu, kur $\Phi(s+0,s,x,y) = (x(s+0,s,x,y), y(s+0,s,x,y)) = (x,y)$. Pārtraukuma punktos $\tau_i$ visu atrisinājumu vērtības aprēķinātas punktos $\tau_i + 0$, ja nav speciāli norādīts. Tālāk lietosim saīsināto apzīmējumu $\Phi(t) = (x(t), y(t))$.

Pieņemsim, ka $\mathbf{U}$ ir Banaha telpa. Apskatām divas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas

$$du/dt = P(t,u),\ \Delta u\Big|_{t=\tau_i} = S_i(u(\tau_i - 0)) \tag{9.2}$$

un

$$du/dt = Q(t,u),\ \Delta u\big|_{t=\tau_i} = T_i(u(\tau_i - 0)), \tag{9.3}$$

kuras apmierina atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmas nosacījumus. Pieņemsim, ka maksimālais atrisinājuma eksistences intervals ir $\mathbb{R}$. Apzīmēsim ar $\phi(\cdot,s,u)\colon \mathbb{R} \to \mathbf{U}$ un $\psi(\cdot,s,u)\colon \mathbb{R} \to \mathbf{U}$ augstāk minēto sistēmu atrisinājumus attiecīgi. Pieņemsim, ka eksistē tāda funkcija $e\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}_+$, ka

$$\max\{|P(t,u) - Q(t,u)|, \sup_i |S_i(u) - T_i(u)|\} \le e(u).$$

**Definīcija 9.2.** Divas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas (9.2) un (9.3) ir *globāli dinamiski ekvivalentas*, ja eksistē tāds attēlojums $H\colon \mathbb{R} \times \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ un pozitīva konstante $c$ ka:

(i) $H(t,\cdot)\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ ir homeomorfisms;
(ii) $H(t,\phi(t,s,u)) = \psi(t,s,H(s,u))$ visiem $t \in \mathbb{R}$;
(iii) $\max\{|H(t,u) - u|, |H^{-1}(t,u) - u|\} \le ce(u)$.

Atzīmēsim, ka bez nosacījuma (iii) dinamiskās ekvivalences jēdziens kļūst triviāls, jo šajā gadījumā ar vienādību

$$H(s,u) = \psi(s,0,\phi(0,s,u))$$

definētais attēlojums $H$ apmierina nosacījumus (i) un (ii). Ir svarīgi atzīmēt, ka klasiskajā globālajā Grobmaņa–Hartmana teorēmā autonomu diferenciālvienādojumu sistēmām atbilstošā funkcija ir $e(x) = a > 0$ un atbilstošā konstante $c$ ir atkarīga tikai no lineārā tuvinājuma.

## 9.2 Palīglemmas

Apzīmējam ar $X(t,\tau)$ un $Y(t,\tau)$ lineāro impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = C_i x(\tau_i - 0) \end{cases}$$

un attiecīgi

$$\begin{cases} dy/dt &= B(t)y, \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= y(\tau_i + 0) - y(\tau_i - 0) = D_i y(\tau_i - 0) \end{cases}$$

evolūcijas operatorus. Apzīmējam ar

$$\nu_1 = \sup_s \int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||X(t,s)|\,dt + \sup_s \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)||X(\tau_i - 0, s)|,$$

$$\nu_2 = \sup_s \int_{s}^{+\infty} |X(s,t)||Y(t,s)|\,dt + \sup_s \sum_{s < \tau_i} |X(s,\tau_i)||Y(\tau_i - 0, s)|$$

un

$$\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}.$$

Pieņemam, ka $\mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X},\mathbf{Y})$ ir to attēlojumu $u\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ kopa, kuri ir nepārtraukti ja $(t,x)\in[\tau_i,\tau_{i+1})\times\mathbf{X}$ un kuriem ir pirmā veida pārtraukumi, ja $t=\tau_i$. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{B}_1 = \left\{ u \in \mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,\middle|\, \sup_{s,x} |u(s,x)| < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja lietojam normu

$$\|u\| = \sup_{s,x} |u(s,x)|.$$

Ja $k>0$, tad kopa

$$\mathbf{B}_1(k) = \left\{ u \in \mathbf{B}_1 \mid |u(s,x) - u(s,x')| \le k|x-x'| \right\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{B}_1$ slēgta apakškopa. Apzīmējam ar

$$\mu_1 = \sup_s \left( \int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)|\,dt + \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)| \right) < +\infty.$$

**Lemma 9.1.** *Ja $u,u'\in\mathbf{B}_1(k)$ un $\varepsilon(1+k)\nu_1<1$, tad pastāv novērtējums*

$$\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||z(t)-z'(t)|\,dt + \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)||z(\tau_i-0)-z'(\tau_i-0)|$$

$$\le \nu_1\left(1-\varepsilon\nu_1(1+k)\right)^{-1}\left(|x-x'| + \varepsilon\mu_1\|u-u'\|\right),$$

*kur* $z\colon(-\infty,s]\to\mathbf{X}$ *ir impulsīvas diferenciālvienādojuma sistēmas*

$$\begin{cases} dz/dt &= A(t)z+f(t,z,u(t,z)),\ z(s)=x,\\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} &= C_i z(\tau_i-0)+p_i(z(\tau_i-0),u(\tau_i-0,z(\tau_i-0)))\end{cases}$$

*atrisinājums.*

Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_1=\left\{u\in\mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X},\mathbf{Y})\,\middle|\,\sup_{s,x\neq 0}\frac{|u(s,x)|}{|x|}<+\infty\right\}$$

ir Banaha telpa, ja lietojam normu

$$\|u\|=\sup_{s,x\neq 0}\frac{|u(s,x)|}{|x|}.$$

Ja $k>0$, tad kopa

$$\mathbf{N}_1(k)=\left\{u\in\mathbf{N}_1\mid |u(s,x)-u(s,x')|\le k|x-x'|\right\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{N}_1$ slēgta apakškopa.

**Lemma 9.2.** *Ja* $u,u'\in\mathbf{N}_1(k)$, $f(t,0,0)=0$, $p_i(0,0)=0$ *un* $\varepsilon(1+k)\nu_1<1$, *tad pastāv novērtējums*

$$\int_{-\infty}^{s}|Y(s,t)||z(t)-z'(t)|\,dt+\sum_{\tau_i\le s}|Y(s,\tau_i)||z(\tau_i-0)-z'(\tau_i-0)|$$

$$\le\nu_1\left(1-\varepsilon\nu_1(1+k)\right)^{-1}\left(|x-x'|+\varepsilon\nu_1(1-\varepsilon\nu_1(1+k))^{-1}|x|\|u-u'\|\right),$$

*kur* $z\colon(-\infty,s]\to\mathbf{X}$ *ir impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} dz/dt &= A(t)z+f(t,z,u(t,z)),\ z(s)=x,\\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} &= C_i z(\tau_i-0)+p_i(z(\tau_i-0),u(\tau_i-0,z(\tau_i-0)))\end{cases}$$

*atrisinājums.*

*Piezīme 9.1.* Lemmas 9.1 un 9.2 paliek spēkā arī neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām, ja nosacījums $\varepsilon(1+k)\nu_1<1$ ir aizvietots ar stingrāku nosacījumu

$$\varepsilon(1+k)\max\{\nu_1,\sup_i|(id_x+C_i)^{-1}|\}<1.$$

Attēlojumu kopa

$$\mathbf{B}_2 = \left\{ v \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \,\middle|\, \sup_{s,y} |v(s,y)| < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja lieto normu

$$\|v\| = \sup_{s,y} |v(s,y)|.$$

Ja $l > 0$, tad kopa

$$\mathbf{B}_2(l) = \left\{ v \in \mathbf{B}_2 \mid |v(s,y) - v(s,y')| \le l|y - y'| \right\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{B}_2$ slēgta apakškopa. Apzīmējam ar

$$\mu_2 = \sup_s \left( \int_s^{+\infty} |X(s,t)|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)| \right) < +\infty.$$

**Lemma 9.3.** *Ja* $v, v' \in \mathbf{B}_2(l)$ *un* $\varepsilon(1+l)\nu_2 < 1$*, tad pastāv novērtējums*

$$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||w(t) - w'(t)|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||w(\tau_i - 0) - w'(\tau_i - 0)|$$

$$\le \nu_2 \left(1 - \varepsilon\nu_2(1+l)\right)^{-1} \left( |y - y'| + \varepsilon\mu_2 \|v - v'\| \right),$$

*kur* $w\colon [s, +\infty) \to \mathbf{Y}$ *ir impulsīvas diferenciālvienādojuma sistēmas*

$$\begin{cases} dw/dt &= B(t)w + g(t, v(t,w), w), \ w(s) = y, \\ \Delta w\big|_{t=\tau_i} &= D_i w(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, w(\tau_i - 0)), w(\tau_i - 0)) \end{cases}$$

*atrisinājums.*

Analoģiski, attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_2 = \left\{ v \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \,\middle|\, \sup_{s, y \ne 0} \frac{|v(s,y)|}{|y|} < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja ieved normu

$$\|v\| = \sup_{s, y \ne 0} \frac{|v(s,y)|}{|y|}.$$

Ja $l > 0$, tad kopa

$$\mathbf{N}_2(l) = \left\{ v \in \mathbf{N}_2 \mid |v(s,y) - v(s,y')| \le l|y - y'| \right\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{N}_2$ slēgta apakškopa.

**Lemma 9.4.** *Ja $v, v' \in \mathbf{N}_2(l)$, $g(t,0,0) = 0$, $q_i(0,0) = 0$ un $\varepsilon(1 + l)\nu_2 < 1$, tad pastāv novērtējums*

$$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||w(t) - w'(t)|\,dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||w(\tau_i - 0) - w'(\tau_i - 0)|$$

$$\le \nu_2\,(1 - \varepsilon\nu_2(1+l))^{-1} \left(|y - y'| + \varepsilon\nu_2(1 - \varepsilon\nu_2(1+l))^{-1}|y|\|v - v'\|\right),$$

*kur $w\colon [s, +\infty) \to \mathbf{Y}$ impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} dw/dt &= B(t)w + g(t, v(t,w), w),\; w(s) = y, \\ \Delta w\big|_{t=\tau_i} &= D_i w(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, w(\tau_i - 0)), w(\tau_i - 0)) \end{cases}$$

*atrisinājums.*

Tālāk pieņemsim, ka

$$k = (2\varepsilon\nu_1)^{-1}(1 - 2\varepsilon\nu_1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1})$$

un

$$l = (2\varepsilon\nu_2)^{-1}(1 - 2\varepsilon\nu_2 - \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}).$$

## 9.3 Invariantas kopas

Invariantām kopām ir liela nozīme ekvivalences teorijā.

**Teorēma 9.1.** *Ja $4\varepsilon\nu < 1$, $f(t,0,0) = 0$, $g(t,0,0) = 0$, $p_i(0,0) = 0$ un $q_i(0,0) = 0$, tad eksistē viens un tikai viens attēlojums $u \in \mathbf{N}_1(k)$ un viens un tikai viens attēlojums $v \in \mathbf{N}_2(l)$, kuriem ir sekojošas īpašības:*

(i) $u(t, x(t,s,x,u(s,x))) = y(t,s,x,u(s,x))$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;
(ii) $|u(s,x) - u(s,x')| \le k|x - x'|$;

(iii) $\displaystyle\int_s^{+\infty} |X(s,t)||y(t,s,x,y)-u(t,x(t,s,x,y))|\,dt$

$\displaystyle + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||y(\tau_i-0,s,x,y)-u(\tau_i-0,x(\tau_i-0,s,x,y))|$

$\le \nu_2(1-\varepsilon(1+k)\nu_2)^{-1}|y-u(s,x)|$;

(iv) $v(t,y(t,s,v(s,y),y)) = x(t,s,v(s,y),y)$ *visiem* $t\in\mathbb{R}$;

(v) $|v(s,y)-v(s,y')| \le l|y-y'|$;

(vi) $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||x(t,s,x,y)-v(t,y(t,s,x,y))|\,dt$

$\displaystyle + \sum_{\tau_i\le s} |Y(s,\tau_i)||x(\tau_i-0,s,x,y)-v(\tau_i-0,y(\tau_i-0,s,x,y))|$

$\le \nu_1(1-\varepsilon(1+l)\nu_1)^{-1}|x-v(s,y)|$.

*Pierādījums.* Fukcionālvienādojumiem

$$u(s,x) = \int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)g(\tau,z(\tau),u(\tau,z(\tau)))\,d\tau$$

$$+ \sum_{\tau_i\le s} Y(s,\tau_i)q_i(z(\tau_i-0),u(\tau_i-0,z(\tau_i-0)))$$

un

$$v(s,y) = \int_s^{+\infty} X(s,\tau)f(\tau,v(\tau,w(\tau)),w(\tau))\,d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)p_i(v(\tau_i-0,w(\tau_i-0)),w(\tau_i-0))$$

Banaha telpā $\mathbf{N}_1(k)$ (attiecīgi $\mathbf{N}_2(l)$) eksistē viens un tikai viens atrisinājums, kur $z\colon (-\infty,s]\to\mathbf{X}$ ir impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} dz/dt &= A(t)z + f(t,z,u(t,z)),\ z(s)=x,\\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} &= C_i z(\tau_i-0) + p_i(z(\tau_i-0),u(\tau_i-0,z(\tau_i-0))) \end{cases}$$

un $w\colon [s,+\infty)\to\mathbf{Y}$ ir impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} dw/dt &= B(t)w + g(t,v(t,w),w),\ w(s)=y,\\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} &= D_i w(\tau_i-0) + q_i(v(\tau_i-0,w(\tau_i-0)),w(\tau_i)) \end{cases}$$

atrisinājumi.

*Piezīme 9.2.* Teorēmas 9.1 nosacījumi (i)–(v) paliek spēkā arī neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām, ja pievienojam papildus nosacījumu

$$2\varepsilon \sup_i |(id_x + C_i)^{-1}| < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1}.$$

**Teorēma 9.2.** *Ja* $4\varepsilon\nu \leq 1$, $\sup_{t,x}|g(t,x,0)| < +\infty$, $\sup_{i,x}|q_i(x,0)| < +\infty$ *un* $2\varepsilon\mu_1 < 1 + \sqrt{1-4\varepsilon\nu_1}$*, tad eksistē viens un tikai viens attēlojums* $u \in \mathbf{B}_1(k)$*, kuram ir sekojošas īpašības:*

(i) $u(t,x(t,s,x,u(s,x))) = y(t,s,x,u(s,x))$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;
(ii) $|u(s,x) - u(s,x')| \leq k|x - x'|$;
(iii)
$$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||y(t,s,x,y) - u(t,x(t,s,x,y))|\,dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||y(\tau_i - 0,s,x,y) - u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0,s,x,y))| \leq \nu_2(1 - \varepsilon(1+k)\nu_2)^{-1}|y - u(s,x)|.$$

*Piezīme 9.3.* Teorēma 9.2 paliek spēkā arī neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām, ja pievienojam papildus nosacījumu

$$2\varepsilon \sup_i |(id_x + C_i)^{-1}| < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1}.$$

**Teorēma 9.3.** *Ja* $4\varepsilon\nu \leq 1$, $\sup_{t,y}|f(t,0,y)| < +\infty$, $\sup_{i,y}|p_i(0,y)| < +\infty$ *un* $2\varepsilon\mu_2 < 1 + \sqrt{1-4\varepsilon\nu_2}$*, tad eksistē viens un tikai viens attēlojums* $v \in \mathbf{B}_2(l)$*, kuram ir sekojošas īpašības:*

(iv) $v(t,y(t,s,v(s,y),y)) = x(t,s,v(s,y),y)$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;
(v) $|v(s,y) - v(s,y')| \leq l|y - y'|$;
(vi)
$$\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||x(t,s,x,y) - v(t,y(t,s,x,y))|\,dt + \sum_{\tau_i \leq s} |Y(s,\tau_i)||x(\tau_i - 0,s,x,y) - v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0,s,x,y))| \leq \nu_1(1 - \varepsilon(1+l)\nu_1)^{-1}|x - v(s,y)|.$$

## 9.4 Apgriežamu sistēmu dinamiskā ekvivalence. 1

Tālāk apskatām reducētu impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t,x,u(t,x)), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t,v(t,y),y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0))), \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)). \end{cases} \tag{9.4}$$

Pēdējā sistēma sadalās divās daļās. Pirmā no tām nesatur mainīgo $y$, kamēr otrā ir neatkarīga no $x$. Pieņemsim, ka

$$\Psi(\cdot,s,x,y) = (x_0(\cdot,s,x), y_0(\cdot,s,y)) \colon \mathbb{R} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$$

ir sistēmas (9.4) atrisinājums, kur $\Psi(s+0,s,x,y) = (x,y)$. Ievedīsim saīsināto apzīmējumu $\Psi(t) = (x_0(t), y_0(t))$.

**Teorēma 9.4.** *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un attēlojumi* $u\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ *un* $v\colon \mathbb{R}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ *apmierina nosacījumus* (i) – (vi)*, tad impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (9.1) *un* (9.4) *ir globāli dinamiski ekvivalentas.*

*Pierādījums.* Teorēmas pierādījums sastāv no vairākiem soļiem.

*Solis 1.* Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_3 = \left\{ \kappa \in \mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y},\mathbf{X}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y-u(s,x)|} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y-u(s,x)|}$$

ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionalvienādojuma

$$\kappa_1(s,x,y)$$

$$= \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau,\Phi(\tau))$$

$$- f(\tau, x(\tau) + \kappa_1(\tau,\Phi(\tau)), u(\tau, x(\tau) + \kappa_1(\tau,\Phi(\tau))))) \, d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(\Phi(\tau_i - 0))$$

$$-p_i(x(\tau_i - 0) + \kappa_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0)), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0)$$
$$+\kappa_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0)))))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_3$.

*Solis 2*. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_4 = \left\{ \lambda \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x - v(s,y)|} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\lambda\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x - v(s,y)|}$$

ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_1(s,x,y)$$
$$= \int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)(g(\tau, v(\tau, y(\tau)$$
$$+\lambda_1(\tau, \Phi(\tau))), y(\tau) + \lambda_1(\tau, \Phi(\tau))) - g(\tau, \Phi(\tau)))\, d\tau$$
$$+ \sum_{\tau_i \le s} Y(s, \tau_i)(q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)$$
$$+\lambda_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0))), y(\tau_i - 0)$$
$$+\lambda_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0))) - q_i(\Phi(\tau_i - 0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_4$.

Apzīmēsim ar $H_1(s,x,y) = (x + \kappa_1(s,x,y), y + \lambda_1(s,x,y))$. No atrisinājuma unitātes visiem $t \in \mathbb{R}$ iegūstam

$$H_1(t, \Phi(t,s,x,y)) = \Psi(t, s, H_1(s,x,y)).$$

*Solis 3*. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_3(l) = \left\{ \kappa \in \mathbf{N}_3 \mid |\kappa(s,x,y) - \kappa(s,x,y')| \le l|y - y'| \right\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{N}_3$ slēgta apakškopa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvie-nādojuma

$$\kappa_2(s,x,w)$$

$$= \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau,x_0(\tau),u(\tau,x_0(\tau))) - f(\tau,x_0(\tau)$$

$$+\kappa_2(\tau,x_0(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau)))\,d\tau$$

$$+\sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(x_0(\tau_i-0),u(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0)))$$

$$-p_i(x_0(\tau_i-0)+\kappa_2(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))),$$

$$\eta(t) = Y(t,s)w + \int_s^t Y(t,\tau)g(\tau,x_0(\tau)+\kappa_2(\tau,x_0(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau))\,d\tau$$

$$+\sum_{s<\tau_i\le t} Y(t,\tau_i)q_i(x_0(\tau_i-0)+\kappa_2(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_3(l)$.

*Solis 4*. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_5 = \left\{ \lambda \in \mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x+\kappa_2(s,x,y)-v(s,y)|} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\lambda\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x+\kappa_2(s,x,y)-v(s,y)|}$$

ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_2(s,x,y) = \int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)(g(\tau,x_0(\tau)+\kappa_2(\tau,x_0(\tau),y_0(\tau)$$

$$+\lambda_2(\tau,\Psi(\tau))),y_0(\tau)+\lambda_2(\tau,\Psi(\tau))) - g(\tau,v(\tau,y_0(\tau)),y_0(\tau)))\,d\tau$$

$$+\sum_{\tau_i\le s} Y(s,\tau_i)(q_i(x_0(\tau_i-0)+\kappa_2(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0),y_0(\tau_i-0)$$

$$+\lambda_2(\tau_i-0,\Psi(\tau_i-0))),y_0(\tau_i-0)+\lambda_2(\tau_i-0,\Psi(\tau_i-0)))$$

$$-q_i(v(\tau_i-0,y_0(\tau_i-0)),y_0(\tau_i-0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_5$.

Definējam attēlojumu $H_2$ ar vienādību

$$H_2(s,x,y) = (x+\kappa_2(s,x,y+\lambda_2(s,x,y)),y+\lambda_2(s,x,y)).$$

Tad attēlojums $H_2$ visiem $t \in \mathbb{R}$ apmierina funkcionālvienādojumu

$$H_2(t, \Psi(t,s,x,y)) = \Phi(t,s,H_2(s,x,y)).$$

*Solis 5.* Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_6 = \left\{ \kappa \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y + \lambda_2(s,x,y) - u(s,x)|} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y + \lambda_2(s,x,y) - u(s,x)|}$$

ir Banaha telpa. Triviālais atrisinājums ir vienīgais funkcionālvienādojuma

$$\kappa_3(s,x,y) = \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau, x_0(\tau), u(\tau, x_0(\tau)))$$

$$-f(\tau, x_0(\tau) + \kappa_3(\tau, \Psi(\tau)), u(\tau, x_0(\tau) + \kappa_3(\tau, \Psi(\tau))))) \, d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(x_0(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x_0(\tau_i - 0))) - p_i(x_0(\tau_i - 0)$$

$$+\kappa_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0)), u(\tau_i - 0, x_0(\tau_i - 0) + \kappa_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0)))))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_6$.

*Solis 6.* Triviālais atrisinājums ir vienīgais funkcionālvienādojuma

$$\lambda_3(s,x,y) = -\int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)(g(\tau, v(\tau, y_0(\tau)), y_0(\tau))$$

$$-g(\tau, v(\tau, y_0(\tau) + \lambda_3(\tau, \Psi(\tau))), y_0(\tau) + \lambda_3(\tau, \Psi(\tau)))) \, d\tau$$

$$+ \sum_{\tau_i \le s} Y(s,\tau_i)(q_i(v(\tau_i - 0, y_0(\tau_i - 0) + \lambda_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0))), y_0(\tau_i - 0))$$

$$+\lambda_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0))) - q_i(v(\tau_i - 0, y_0(\tau_i - 0)), y_0(\tau_i - 0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_5$.

*Solis 7.* Atzīmējam, ka attēlojumi $\alpha_1 : \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un $\beta_1 : \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$, kuri definēti ar vienādībām

$$\alpha_1(s,x,y)$$

$$= \kappa_2(s,x,y+\lambda_2(s,x,y)) + \kappa_1(s,x+\kappa_2(s,x,y+\lambda_2(s,x,y)),y+\lambda_2(s,x,y))$$

un

$$\beta_1(s,x,y) = \lambda_2(s,x,y) + \lambda_1(s,x+\kappa_2(s,x,y+\lambda_2(s,x,y)),y+\lambda_2(s,x,y))$$

arī attiecīgi apmierina soļu 5 un 6 funkcionālvienādojumus. Bez tam $\alpha_1 \in \mathbf{N}_6$ un $\beta_1 \in \mathbf{N}_5$. No šejienes $\alpha_1(s,x,y) = 0$ un $\beta_1(s,x,y) = 0$. Seko, spēkā identitāte

$$H_1(s,H_2(s,x,y)) = (x,y).$$

*Solis 8.* Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_7 = \left\{ \kappa \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \,\middle|\, \sup_{s,x,y,w} \frac{|\kappa(s,x,y,w)|}{\max\{|y-u(s,x)|,|y-w|\}} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{s,x,y,w} \frac{|\kappa(s,x,y,w)|}{\max\{|y-u(s,x)|,|y-w|\}}$$

ir Banaha telpa. Kopa

$$\mathbf{N}_7(l) = \{\kappa \in \mathbf{N}_7 \mid |\kappa(s,x,y,w) - \kappa(s,x,y,w')| \le l|w-w'|\}$$

ir $\mathbf{N}_7$ slēgta apakškopa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\kappa_4(s,x,y,w)$$

$$= \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau,\Phi(\tau)) - f(\tau,x(\tau)+\kappa_4(\tau,\Phi(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau)))\,d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(\Phi(\tau_i-0)) - p_i(x(\tau_i-0)$$

$$+\kappa_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))),$$

$$\eta(t) = Y(t,s)w + \int_s^t Y(t,\tau)g(\tau,x(\tau)+\kappa_4(\tau,\Phi(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau))\,d\tau$$

$$+\sum_{s<\tau_i\le t} Y(t,\tau_i)q_i(x(\tau_i-0)+\kappa_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_7(l)$.

*Solis 9.* Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_4(s,x,y)=-\int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)(g(\tau,\Phi(\tau))$$

$$-g(\tau,x(\tau)+\kappa_4(\tau,\Phi(\tau),y(\tau)+\lambda_4(\tau,\Phi(\tau))),y(\tau)+\lambda_4(\tau,\Phi(\tau))))\,d\tau$$
$$+\sum_{\tau_i\le s} Y(s,\tau_i)(q_i(x(\tau_i-0)+\kappa_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0),y(\tau_i-0)$$
$$+\lambda_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0))),y(\tau_i-0)$$
$$+\lambda_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0)))-q_i(\Phi(\tau_i-0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_4$.

*Solis 10.* Attēlojumi $\alpha_2\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ un $\beta_2\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$, kuri definēti ar vienādībām

$$\alpha_2(s,x,y,w)=\kappa_1(s,x,y)+\kappa_2(s,x+\kappa_1(s,x,y),w)$$

un

$$\beta_2(s,x,y)=\lambda_1(s,x,y)+\lambda_2(s,x+\kappa_1(s,x,y),y+\lambda_1(s,x,y))$$

arī attiecīgi apmierina soļu 8 un 9 funkcionālvienādojumus. Bez tam $\alpha_2\in\mathbf{N}_7(l)$ un $\beta_2\in\mathbf{N}_4$. No šejienes $\alpha_2(s,x,y,y)=0$ un $\beta_2(s,x,y)=0$. Iegūstam sekojošu identitāti

$$H_2(s,H_1(s,x,y))=(x,y).$$

Ievērojot soļus 1, 2, 7 un 10, iegūstam, ka $H_1(s,\cdot)$ ir homeomorfisms, kurš realizē (9.1) un (9.4) globālo dinamisko ekvivalenci. Viegli pārliecināties, ka ja diferenciālvienādojumu sistēma (9.1) ir autonoma un nav impulsu iedarbības, tad attēlojumi $u$, $v$, $H_1$ un $H_2$ ir neatkarīgi no $s\in\mathbb{R}$. Atzīmēsim, ka mūsu gadījumā $e(x,y)=\varepsilon(|x|+|y|)$. Teorēma ir pierādīta. $\square$

## 9.5 Neapgriežamu sistēmu dinamiskā ekvivalence

Neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām nosacījumu (iv) aizvietojam ar nosacījumu:

(iv') attēlojums $x \mapsto x + C_i x$ ir homeomorfisms.

**Teorēma 9.5.** *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un attēlojums* $u\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *apmierina* (i)–(iii)*, tad eksistē attēlojums* $q\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$*, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret trešo mainīgo, tāds ka impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (9.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t,x,u(t,x)), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t,q(t,x,y),y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0))), \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(q(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0), y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{9.5}$$

*ir dinamiski ekvivalentas, ja* $t \geq s$.

Dosim citu pietiekamo nosacījumu divu impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu dinamiskai ekvivalencei. Pieņemsim, ka eksistē attēlojumi $f_0\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un $p_{i0}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ lokāli integrējami Bohnera nozīmē attiecībā pret $t$ fiksētam $x$ un tādi ka

$$\sup_{t,x,y} |f(t,x,y) - f_0(t,x)| < +\infty;$$

$$\sup_{i,x,y} |p_i(x,y) - p_{i0}(x)| < +\infty;$$

$$|f_0(t,x) - f_0(t,x')| \leq \varepsilon |x - x'|;$$

$$|p_{i0}(x) - p_{i0}(x')| \leq \varepsilon |x - x'|.$$

**Teorēma 9.6.** *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un* $2\varepsilon\mu_2 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}$*, tad eksistē attēlojums* $q\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$*, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret trešo mainīgo, tāds, ka impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (9.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f_0(t,x), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t,q(t,x,y),y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_{i0}(x(\tau_i - 0)), \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(q(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0), y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{9.6}$$

*ir dinamiski ekvivalentas, ja $t \geq s$.*

## 9.6 Apgriežamu sistēmu dinamiskā ekvivalence. 2

**Teorēma 9.7.** *Ja $4\varepsilon\nu < 1$ un attēlojums $v\colon \mathbb{R}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ apmierina* (iv)–(vi)*, tad eksistē attēlojums $\theta\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, tāds ka impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (9.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t,x,\theta(t,x,y)),\\ dy/dt &= B(t)y + g(t,v(t,y),y),\\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0),\theta(x(\tau_i-0),y(\tau_i-0))),\\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i-0) + q_i(v(\tau_i-0,y(\tau_i-0)),y(\tau_i-0)) \end{cases} \tag{9.7}$$

*ir globāli dinamiski ekvivalentas.*

Pieņemsim, ka eksistē attēlojumi $g_0\colon \mathbb{R}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$ un $q_{i0}\colon \mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$ lokāli integrējami Bohnera nozīmē attiecībā pret $t$ fiksētam $y$ un, bez tam tie apmierina novērtējumus:

$$\sup_{t,x,y}|g(t,x,y)-g_0(t,y)| < +\infty;$$

$$\sup_{i,x,y}|q_i(x,y)-q_{i0}(y)| < +\infty;$$

$$|g_0(t,y)-g_0(t,y')| \leq \varepsilon|y-y'|;$$

$$|q_{i0}(y)-q_{i0}(y')| \leq \varepsilon|y-y'|.$$

**Teorēma 9.8.** *Ja $4\varepsilon\nu < 1$, $2\varepsilon\mu_1 < 1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu_1}$, attēlojums $u\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ apmierina* (i)–(iii) *un attēlojumi $y\mapsto y+D_i y+q_{i0}(y)$ ir homeomorfismi, tad impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (9.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t,x,u(t,x)),\\ dy/dt &= B(t)y + g_0(t,y),\\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0),u(\tau_i-0,x(\tau_i-0))),\\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i-0) + q_{i0}(y(\tau_i-0)) \end{cases} \tag{9.8}$$

*ir globāli dinamiski ekvivalentas.*

**Teorēma 9.9.** *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$, $2\varepsilon\mu_2 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}$, *attēlojums* $v\colon \mathbb{R} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *apmierina* (iv)–(vi) *un attēlojumi* $x \mapsto x + C_i x + p_{i0}(y)$ *ir homeomorfismi, tad impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (9.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f_0(t,x), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t, v(t,y), y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_{i0}(x(\tau_i - 0)), \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{9.9}$$

*ir globāli dinamiski ekvivalentas.*

# References

1. Bhatia N.P., Szego G.P. : Stability Theory of Dynamical Systems, (Reprint Edition). Springer, New York, Berlin, Heidelberg (2002)
2. Carr J. : Applications of Center Manifold Theory. Springer, New York (1981)
3. Coddington E.A., Levinson N. : Theory of Ordinary Differential Equations, (Reprint Edition). Kruger Publishing Company, Malabar, Florida (1984)
4. Hartman P. : Ordinary Differential Equations (second Edition). Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart (1982)
5. Heil J.K. : Ordinary Differential Equations (revised Edition), Dover Publications, Inc., Mincola, New York (1997)
6. Perko L. : Differential Equations and Dynamical Systems (third Edition), Springer, New York, Berlin, Heidelberg (2001)
7. Reiziņš L. : Stabilitātes Teorija, LVU, Rīga (1977)