Andrejs Reinfelds

Dzīvības apdrošināšanas matemātiskie pamati

Latvijas Universitāte

Saturs

Nodaļa 1
Mirstības tabulas

1.1 Izdzīvošanas funkcija

Apskatām vienkāršu dzīvības attīstības modeli, tā saukto *stohastisko modeli*[1]. Pieņemam, ka sākuma momentā cilvēks bija x gadus vecs. Ar ω apzīmējam *vecuma robežu*[2], t.i. maksimālo vecumu kādu var sasniegt cilvēks. Tā kā neviens cilvēks nedzīvo mūžīgi, tad ω ir galīgs skaitlis un praktiskos lietojumos parasti to ņem robežās starp 100 un 120 gadiem. Tomēr teorētiska rakstura darbos matemātiskās lietderības dēļ galīga skaitļa ω vietā ņemam $+\infty$. Ar T_x vai vēlāk tekstā vienkārši ar T, ja tas nerada pārpratumus, apzīmējām x gadus veca cilvēka *atlikušo dzīves ilgumu*[3]. Acīmredzot atlikušais dzīves ilgums T_x ir gadījuma lielums un mēs pieņemam, ka tas ir nepārtraukts lielums ar vērtībām kopā $[0,+\infty)$. Tālāk definējam *izdzīvošanas funkciju*.

Definīcija 1.1. Par *izdzīvošanas funkciju*[4] $s_x\colon [x,+\infty) \to [0,1]$ sauc skalāru funkciju, kura apmierina varbūtisku nosacījumu

$$s_x(t) = \Pr\{x \text{ gadus veca persona nodzīvos vēl vismaz } t \text{ gadus}\}.$$

Izlietojot gadījuma lielumu T_x izdzīvošanas funkciju varam definēt arī sekojoši

$$s_x(t) = \Pr\{T_x > t\}.$$

[1] Vēsturiski pirmais ir tā sauktais deterministiskais modelis. Tā izklāstam ir nepieciešamas tikai elementāras zināšanas varbūtību teorijā

[2] Angl. *limiting age*

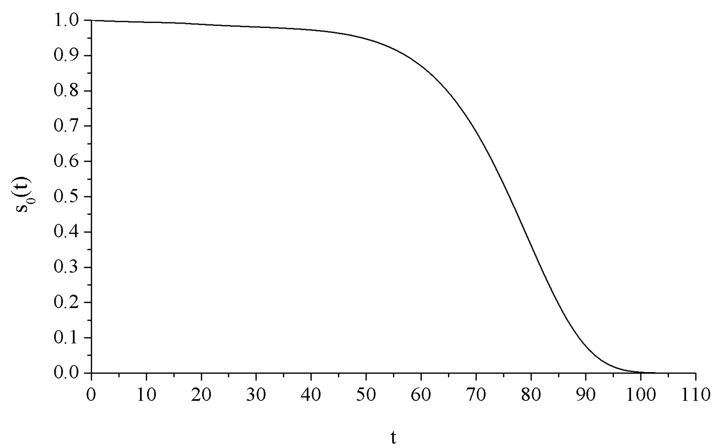
[3] Angl. *remaining lifetime*

[4] Angl. *survivorship function*, arī *survival function*

No izdzīvošanas funkcijas definīcijas izriet tās 3 būtiskas īpašības:

- funkcija s ir monotoni dilstoša funkcija (neviens mirušais nevar atdzīvoties);
- $s_x(t) = 0$, ja $t > \omega$ (neviens cilvēks nedzīvo mūžīgi);
- $s_x(x) = 1$.

Izdzīvošanas funkcijas s_0 grafiks attēlots Zīm. 1.1.



Zīm. 1.1 Izdzīvošanas funkcijas $t \mapsto s_0(t)$ grafiks

Piezīme 1.1. Lai varētu pielietot diferenciāl- un intergrālrēķinus nepietiek tikai ar nosacījumu, ka funkcija s_x ir monotoni dilstoša. Ja vēlamies ierobežoties ar Rīmaņa integrāli, tad vienkāršākais papildus nosacījums ir, ka funkcija s_x ir gabaliem gluda, t.i. tā ir nepārtraukta un tai eksistē nepārtraukts atvasinājums izņemot galīga skaita punktu, kuros atvasinājumam ir pirmā veida pārtraukums. Tālāk lietojumos mēs bieži vienkārši uzskatīsim, ka funkcija s_x ir nepārtraukta gabaliem lineāra funkcija. Ja turpretī izmantojam Lebega integrāli, tad papildus jāprasa lai funkcija s_x būtu absolūti nepārtraukta. Atzīmēsim, ka katra gabaliem gluda funkcija ir arī absolūti nepārtraukta funkcija, bet ne otrādi.

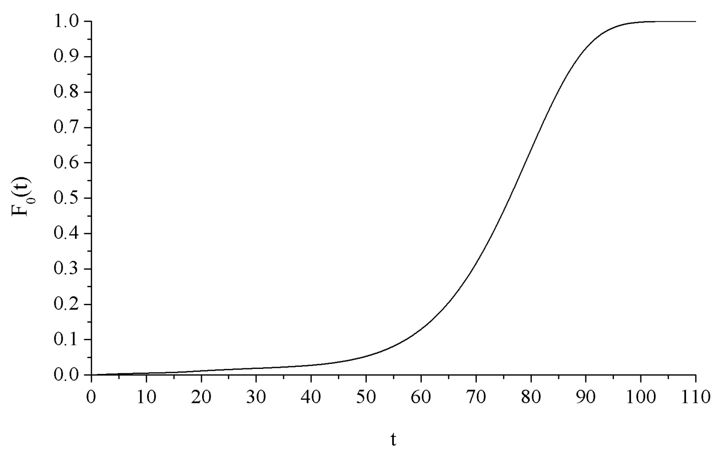
Tālāk apskatām funkciju $F_x\colon [x, +\infty) \to [0, 1]$, kur

$$F_x(t) = \Pr\{T_x \le t\}.$$

Tā kā

$$F_x(t) = \Pr\{T_x \leq t\} = 1 - \Pr\{T_x > t\} = 1 - s_x(t),$$

tad funkcija F_x ir gadījuma lieluma T_x *sadalījuma funkcija*. Saskaņā ar mūsu pieņēmumiem sadalījuma funkcija ir gabaliem gluda funkcija. Sadalījuma funkcijas F_0 grafiks parādīts Zīm 1.2.



Zīm. 1.2 Sadalījuma funkcijas $t \mapsto F_0(t)$ grafiks

1.2 Izdzīvošanas un mirstības varbūtības

Aktuārmatemātikā lietotos starptautiskos standarta apzīmējumus izstrādāja angļu aktuārs *George King*[5] 1887. gadā un tos adoptēja Otrais starptautiskais aktuāru kongress Londonā 1898. gadā. Pēdējo reizi revidētos aktuārmatemātikas standarta apzīmējumus adoptēja Četrpadsmitais starptautiskais aktuāru kongress Madridē 1954. gadā.

Definīcija 1.2. Par *mirstības varbūtību* ${}_tq_x$ sauc

$${}_tq_x = F_x(t) = \Pr\{T_x \leq t\}.$$

[5] George King, ⋆ 1846, † 1932, angļu aktuārs

Definīcija 1.3. Par *izdzīvošanas varbūtību* ${}_tp_x$ sauc

$$ {}_tp_x = s_x(t) = \Pr\{T_x > t\}. $$

Citiem vārdiem mirstības varbūtība ${}_tq_x$ nozīmē varbūtību, ka x gadus veca persona nomirs tuvāko t gadu laikā un attiecīgi izdzīvošanas varbūtība ${}_tp_x$ nozīmē varbūtību, ka x gadus veca persona nodzīvos vēl vismaz t gadus. Atzīmējām, ka ja $t \geq 0$, tad

$$ {}_tp_x + {}_tq_x = 1. $$

Aktuārmatemātikā kā laika vienību izmanto vienu gadu. Ja $t = 1$, tad priekšējo indeksu apzīmējumos ${}_tq_x$ un ${}_tp_x$ atmetam. Tādejādi

$$ q_x = {}_1q_x = \Pr\{T_x \leq 1\}, $$

$$ p_x = {}_1p_x = \Pr\{T_x > 1\} $$

un

$$ p_x + q_x = 1. $$

1.3 Mirstības tabulas

Praktiskos aktuāraprēķinos nepieciešams lietot varbūtības ${}_tp_x$ un ${}_tq_x$, tādēļ rodas vajadzība dotās varbūtības kaut kādā veidā tabulēt. Atzīmējam, ka ${}_tp_x$ ir definēts, ja $x \geq 0, t \geq 0$ un ${}_tp_x \neq 0$, ja $t + x < \omega$. Šādas tabulas būtu ļoti lielas un neparocīgas, un ja t, x, ω būtu tikai veseli skaitļi, tad tās saturētu $\omega(\omega+1)/2$ nenulles elementu. Piemēram, ja $\omega = 100$, tad ${}_tp_x$ tabula saturētu 5050 nenulles elementu. Tādēļ lieto tā sauktās *mirstības tabulas*[6], kuras atļauj iegūt nepieciešamo informāciju no mazākām tabulām. Pamata ideja ir izmantot Baijesa formulu varbūtību teorijā

$$ {}_{t+s}p_x = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t} = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}, $$

kur $t \geq 0$ un $s \geq 0$.

Tabulas konstruē sekojoši. Izvēlamies sākuma vecumu, kurš būs vismazākais vecums mirstības tabulā. Apzīmējam šo vismazāko ve-

[6] Angl. *life tables* Atzīmējam, ka termins *mirstības tabulas* nav burtisks termina *life tables* tulkojums

cumu ar α. Vismazākā vecuma α izvēle ir atkarīga no mērķa kādam mirstības tabulas tālāk tiks lietotas. Ja, piemēram, mirstības tabulas izlieto pensiju aprēķiniem, tad droši vien racionāli būtu ņemt $\alpha = 50$ gadi. Ja turpretī apskata cilvēkus kopš dzimšanas, tad dabiski $\alpha = 0$. Tālāk izvēlamies patvaļīgu pozitīvu veselu skaitli un apzīmējam to ar l_α. Skaitli l_α sauc par *mirstības tabulas rādiusu* vai *sakni* un tradicionāli tas ir liels skaitlis, piemēram, 100000. Skaitli l_α var interpretēt kā cilvēku skaitu homogēnā kopā, kuri sākuma momentā bija α gadus veci. Atzīmējam tomēr, ka tālākie matemātiskie aprēķini nav atkarīgi no mirstības tabulas rādiusa izvēles.

No mirstības statistikas datiem ir zināmas mirstības varbūtības $\{q_x\}_{x=0,1.2....,\omega}$, t.i. varbūtība ar kādu līdz vecumam x nodzīvojušais cilvēks nomirs nesasniedzot $x+1$ gadu vecumu. Tālāk definējam mirstības tabulas funkciju $l_x\colon [\alpha,\omega] \to \mathbb{R}$, vispirms pēc vecuma ar viena gada intervālu, sākot ar vecumu α, ar rekursīvu vienādību

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x = l_x \cdot (1 - q_x), \quad x = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots, \omega.$$

Acīmredzot $l_\omega = 0$. Tālāk dzīvības attīstības modeļa dēļ funkcija $x \mapsto l_x$ ir monotoni dilstoša un matemātiskās lietderības dēļ pieņemam, ka tā ir gabaliem gluda (parasti gabaliem lineāra). Bez tam atkal matemātiskās lietderības dēļ ir ērti turpināt funkciju l_x kopā $(\omega, +\infty)$ pieņemot, ka šajā kopā $l_x \equiv 0$.

Ja $x \in [\alpha, \omega)$ un $t \geq 0$, tad izlietojot Baijesa formulu iegūstam

$${}_t p_x = \frac{{}_{t+x-\alpha} p_\alpha}{{}_{x-\alpha} p_\alpha} = \frac{l_{x+t}}{l_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{l_x} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

un

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši ērtu paņēmienu varbūtību ${}_t p_x$ un ${}_t q_x$ aprēķinam zinot funkcijas l_x vērtības intervālā $x \in [\alpha, \omega]$.

Tālāk ievedam vēl vienu mirstības tabulas funkciju d_x, kuru definējam ar vienādību

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x \cdot q_x.$$

Pie reizes atzīmējam, ka varbūtība x gadus vecai personai nodzīvot vienu gadu ir

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

un varbūtība x gadus vecai personai nomirt gada laikā ir

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

Atzīmējam lietderīgu sakarību

$$d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{x+n-1}$$

$$= (l_x - l_{x+1}) + (l_{x+1} - l_{x+2}) + \ldots + (l_{x+n-1} - l_{x+n}) = l_x - l_{x+n}.$$

Ievērot l_x turpinājumu, iegūstam

$$\sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t} = l_x.$$

Piemērs 1.1. Vienas no populārākajām mirstības tabulām ir Anglijas mirstības tabulas *A 1967-70 Ultimate*. Šajās tabulās $\alpha = 0$, $\omega = 110$ un tabulas rādiuss ir $l_0 = 34489$. Piemēram, $l_{65} = 27442,681$, tad varbūtība, ka jaunpiedzimušais sasniegs pensijas vecumu ir

$${}_{65}p_0 = \frac{l_{65}}{l_0} = 0,79569373$$

vai $79,57\%$.

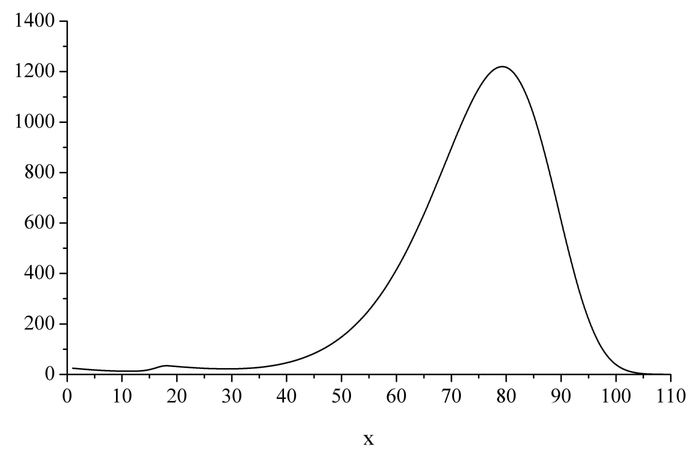
Iepriekšteikto ilustrēsim ar fragmentu no pieminētām mirstības tabulām *A 1967-70 Ultimate*. Mirstības tabulās rādītāji ir sakārtoti pēc vecuma ar viena gada intervālu un sākās ar nulles vecumu, t.i. no dzimšanas brīža. Dažādie demogrāfiskie rādītāji ir sakārtoti kolonās pēc vecuma. Parasti otrajā kolonā tiek norādīts cilvēku skaits, kuri nodzīvojuši līdz vecumam x, t.i. l_x. Jaundzimušo skaits l_0 tiek fiksēts un konkrētajā gadījumā tas ir 34489, bet citās tabulās tas var būt arī cits brīvi izvēlēts skaitlis. Skaitlis $l_1 = 34463,823$ nozīmē, ka tikai 34463,823 jaunpiedzimušo ir nodzīvojuši līdz savai pirmajai dzimšanas dienai. Nākošajā kolonā ir lielums d_x, kas norāda mirušo skaitu laika posmā starp savas dzīves x un $x+1$ gadiem. Sekojošais rādītājs q_x ir varbūtību ar kādu līdz vecumam x nodzīvojošais cilvēks nomirs nesasniedzot $x+1$ gadu vecumu. Nākošās kolonas rādītājs μ_x ir mirstības intensitāte vecumā x.

Apskatīsim detalizētāk viena gada mirstības varbūtību q_x un d_x tabulas par pamatu ņemot Anglijas mirstības tabulas *A 1967-70 Ulti-*

Tabula 1.1 Fragments no Anglijas mirstības tabulas *A 1967 -70 Ultimate*

x	l_x	d_x	q_x	μ_x
0	34489,000	25,176970	0,00073000	0,00075528
1	34463,823	23,435400	0,00068000	0,00070525
2	34440,388	21,697444	0,00063000	0,00065521
3	34418,690	19,962840	0,00058000	0,00060518
4	34398,727	18,231325	0,00053000	0,00055515

mate. Ievērojam, ka q_x dilst intervālā no $x = 0$ līdz $x = 11$. Tālāk q_x pieaug un sasniedz lokālu maksimumu pie $x = 17$. Tālāk q_x atkal dilst sasniedzot lokālu minimumu pie $x = 29$. Pēc tam q_x monotoni aug. Analogas ir d_x tabulas. Vienīgā būtiskā atšķirība ir, ka pie $x = 79$ (*Lexis* punkts) funkcija d_x sāk dilt. To var izskaidrot ar faktu, ka ievērojami samazinājies dzīvo personu skaits. Līdzīga situācija mazākā vai lielākā mērā novērojama arī citās Eiropas valstu iedzīvotāju mirstības tabulās.



Zīm. 1.3 Funkcijas $x \mapsto d_x$ grafiks

1.4 Mirstības intensitāte

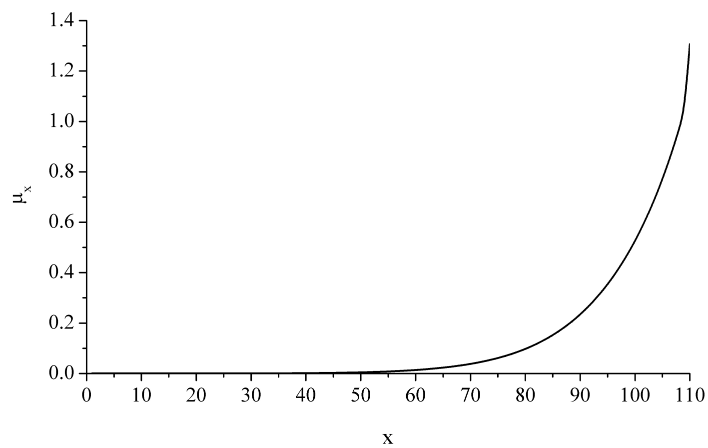
Definīcija 1.4. Par *mirstības intensitāti*[7] sauc robežu

$$\mu_x = \lim_{h \to +0} \frac{{}_h q_x}{h}.$$

Mirstības intensitātes interpretācija ir ļoti svarīga. Maziem h varam ignorēt robežu un rakstīt

$${}_h q_x \approx h \cdot \mu_x.$$

Citiem vārdiem mirstības varbūtība mazā laika intervālā ir proporcionāla intervāla garumam h ar proporcionalitātes koeficientu μ_x.



Zīm. 1.4 Mirstības intensitātes $x \mapsto \mu_x$ grafiks

Teorēma 1.1. *Pieņemam, ka funkcija l_x ir nepārtraukti diferencējama. Tad*[8]

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}. \tag{1.1}$$

[7] Angl. *rate of mortality, force of mortality*

[8] Saskaņā ar pieņēmumu funkcija l_x ir gabaliem gluda, seko μ_x ir gabaliem nepārtraukta funkcija ar galīga skaita pirmā veida pārtraukuma punktiem. Līdz ar to mēs bez ierobežojumiem varam lietot Rīmaņa integrāli

Pierādījums. Saskaņā ar mirstības intensitātes definīciju

$$\mu_x = \lim_{h\to+0} \frac{{}_hq_x}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{l_x - l_{x+h}}{hl_x}$$

$$= -\lim_{h\to+0} \frac{l_{x+h} - l_x}{hl_x} = -\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln l_x.$$

Līdz ar to esam pierādījuši teorēmu.

Integrējot (1.1) iegūstam

$$-\int_\alpha^x \mu_y \,\mathrm{d}y = \int_\alpha^x \frac{d}{\mathrm{d}y}(\ln l_y)\,\mathrm{d}y = \ln l_y\Big|_\alpha^x = \ln\left(\frac{l_x}{l_\alpha}\right).$$

No pēdējās izteiksmes iegūstam formulas

$$l_x = l_\alpha \exp\left(-\int_\alpha^x \mu_y \,\mathrm{d}y\right)$$

un

$$l_{x+t} = l_\alpha \exp\left(-\int_\alpha^{x+t} \mu_y \,\mathrm{d}y\right)$$

No šejienes izdzīvošanas varbūtība

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \exp\left(-\int_\alpha^{x+t} \mu_y \,\mathrm{d}y + \int_\alpha^x \mu_y \,\mathrm{d}y\right)$$

$$= \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y \,\mathrm{d}y\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+r} \,\mathrm{d}r\right).$$

Atzīmējam, ka gadījuma lieluma atlikuša dzīves ilguma T *sadalījuma funkcija* ir

$$F(t) = \Pr\{T \le t\} = {}_tq_x = \begin{cases} 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} & , \text{ja } t \ge 0 \\ 0 & , \text{ja } t < 0. \end{cases}$$

Tā kā funkcija $x \mapsto l_x$ ir gabaliem gluda, varam atrast sadalījuma funkcijas atvasinājumu, t.i. *blīvuma sadalījuma funkciju*.

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}\right) & \text{, ja } t > 0 \\ 0 & \text{, ja } t < 0. \end{cases}$$

Ievērojot, ka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} l_{x+t} = l'_{x+t} = -l_{x+t}\, \mu_{x+t}.$$

un

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} \mu_{x+t} = {}_t p_x\, \mu_{x+t}$$

iegūstam blīvuma sadalījuma funkcijas galīgo veidu

$$f(t) = \begin{cases} {}_t p_x\, \mu_{x+t} & \text{, ja } t > 0 \\ 0 & \text{, ja } t < 0. \end{cases}$$

Pie reizes atzīmējam, ka sadalījuma funkcija apmierina sakarības

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \text{ un } F(+\infty) = 1$$

un tādēļ

$${}_t q_x = \int_0^t {}_\tau p_x \mu_{x+\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

un attiecīgi

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = \int_t^{+\infty} {}_\tau p_x \mu_{x+\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

Ar simbolu ${}_{m|n} q_x$ apzīmējam *atliktās mirstības varbūtības* vai precīzāk

$${}_{m|n} q_x = \Pr\{x \text{ gadus veca persona nomirs vecumā starp}$$

$$x + m \text{ un } x + m + n \text{ gadiem}\}.$$

Saskaņā ar varbūtības teoriju iegūstam

$$_{m|n}q_x = {}_{m+n}q_x - {}_m q_x = {}_m p_x - {}_{m+n}p_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x}.$$

Ja $n = 1$, iegūstam formulu

$$_{m|}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} = \frac{d_{x+m}}{l_x}. \tag{1.2}$$

Piemērs 1.2. Aprēķināt varbūtību, ka 60 gadus veca persona nomirs pirmajos piecos gados pēc aiziešanas pensijā 65 gadu vecumā.
Atrisinājums.

$$_{5|5}q_{60} = \frac{l_{65} - l_{70}}{l_{60}} = \frac{27442,681 - 23622,102}{30039,787} = 0,12718396.$$

1.5 Vidējais atlikušais dzīves ilgums

Pieņemam, ka personas atlikušais dzīves ilgums ir T gadi.

Definīcija 1.5. Par *vidējo atlikušo dzīves ilgumu*[9] sauc gadījuma lieluma atlikuša dzīves ilguma T matemātisko cerību un apzīmē ar $\overset{\circ}{e}_x$. Tātad

$$\overset{\circ}{e}_x = \mathbb{E}(T) = \int\limits_0^\infty t \cdot {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, \mathrm{d}t.$$

Teorēma 1.2.

$$\overset{\circ}{e}_x = \int\limits_0^\infty {}_t p_x \, \mathrm{d}t.$$

Pierādījums. Izmantojam parciālo integrēšanu, kur pieņemam $u = t$ un $v = -{}_t p_x$. Tad $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v = -{}_t p_x \mu_{x+t} \mathrm{d}t$

$$\overset{\circ}{e}_x = \mathbb{E}(T) = \int\limits_0^\infty t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} \, \mathrm{d}t$$

$$= -t \cdot {}_t p_x \Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty -{}_t p_x \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty {}_t p_x \, \mathrm{d}t,$$

[9] Angl. *expectation of life*

jo ${}_t p_x = 0$, ja $t > \omega$.

Tālāk apskatām diskrēto gadījuma lielumu K, kuru definējam sekojoši

$$K = \text{gadījuma lieluma } T \text{ veselā daļa}$$

vai citiem vārdiem atlikušais dzīves ilgums veselos gados. Šo lielumu lieto daudzos aktuāru aprēķinos. Piemēram, vidējo atlikušo dzīves ilgumu e_x aprēķina pēc formulas

$$e_x = \mathbb{E}(K) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot {}_{k|}\, q_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k|}\, q_x.$$

Teorēma 1.3.

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k|}\, q_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}.$$

Pierādījums. Izmantojot formulu (1.2) iegūstam

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k|}\, q_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot d_{x+k}$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (l_{x+k} - l_{x+k+1}) = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}.$$

Piemērs 1.3. Aprēķināt vidējo atlikušo dzīves ilgumu 25 gadus un 65 gadus vecām personām.
Atrisinājums.

$$e_{25} = \frac{1}{l_{25}} \sum_{k=1}^{\infty} l_{25+k} = \frac{1}{l_{25}} \sum_{k=1}^{84} l_{25+k} = 49,25 \ gadi$$

un

$$e_{65} = \frac{1}{l_{65}} \sum_{k=1}^{\infty} l_{65+k} = \frac{1}{l_{65}} \sum_{k=1}^{44} l_{65+k} = 14,74 \ gadi.$$

1.6 Vienmērīgais mirstības sadalījums

Pieņemam, ka x ir fiksēts. Sakām, ka starp vecumiem x un $x+1$ *mirstība sadalās vienmērīgi*, ja visiem $0 \le t \le 1$

$$l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1}, \qquad (1.3)$$

citiem vārdiem l_y ir lineāra, ja $x \le y \le x+1$. Vienādojumu (1.3) varam pārrakstīt

$$l_{x+t} = l_x - td_x, \quad 0 \le t \le 1. \qquad (1.4)$$

Teorēma 1.4. *Ja starp vecumiem x un $x+1$ mirstība sadalās vienmērīgi, tad*

$$_tq_x = t \cdot q_x, \quad 0 \le t \le 1$$

$$_tp_x\mu_{x+t} = q_x, \quad 0 \le t \le 1.$$

Pierādījums. Izdalam vienādību (1.4) ar l_x. Iegūstam

$$_tp_x = 1 - t \cdot q_x.$$

Tā kā $_tq_x = 1 - {}_tp_x$, tad

$$_tq_x = 1 - (1 - t \cdot q_x) = t \cdot q_x, \qquad (1.5)$$

kas arī bija jāpierāda. Diferencējam vienādības (1.5) abas puses pēc t. Iegūstam

$$_tp_x\mu_{x+t} = q_x.$$

Piemērs 1.4. Atrast $_{1,5}p_{20,5}$.
Atrisinājums.

$$_{1,5}p_{20,5} = \frac{l_{22}}{l_{20,5}} = \frac{2l_{22}}{l_{20} + l_{21}} = \frac{2 \cdot 34029,283}{34088,257 + 34057,937} = 0,99871412,$$

jo linearitātes dēļ visiem $0 < t < 1$

$$l_{20+t} = (1-t)l_{20} + tl_{21}.$$

1.7 Analītiskie mirstības likumi

Pazīstamāko analītisko mirstības likumu ir devis *Benjamin Gompertz*[10] 1825. gadā. Viņš pieņēma, ka mirstības intensitātes izmaiņa

[10] Benjamin Gompertz, ⋆ 1779.5.III Londona, Lielbritānija, † 1865.14.VII Londona, Lielbritānija - angļu matemātiķis, astronoms un aktuārs. Viņa tēvs un vectēvs sekmīgi nodarbojas ar dimantu tirdniecību. Savas ebreju izcelsmes dēļ nevarēja iestāties universitātē un matemātiku apguva pašmācības ceļā. Bija Londonas karaliskās biedrības biedrs un Londonas astronomijas biedrības

ir proporcionāla mirstības intensitātei, vai citiem vārdiem mirstības intensitāte apmierina parastu skalāru lineāru diferenciālvienādojumu

$$\frac{d\mu_x}{dx} = k\mu_x, \quad x \geq \alpha.$$

Diferenciālvienādojuma atrisinājums ir

$$\mu_x = \mu_\alpha \exp(k(x-\alpha)), \quad x \geq \alpha.$$

Eksperimentāli konstatēts, ka *B.Gompertz* likums ir pietiekoši precīzs, ja $25 \leq x \leq 30$.

1860. gadā *William Makeham*[11] piedāvāja sarežģītāku formulu

$$\mu_x = A + C\exp(kx).$$

Tomēr praksē izrādījies, ka mirstības likumi ir daudz sarežģītāki un mūsdienās datoru plašas lietošanas ērā analītiskiem mirstības likumiem ir maza praktiskā nozīmē. Tomēr mūsdienās analītiskos mirstības likumus pietiekoši plaši izmanto matemātiskajā bioloģijā modelējot dažādu insektu, kukaiņu u.c. dzīves ilgumu.

Pazīstamākā mūsdienās lietotā formula ir 1980. gadā L.Heligmana – J.H. Pollarda ietektā 8 parametru formula

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D\exp\left(-E\left(\ln x - \ln F\right)^2\right) + \frac{GH^x}{1+GH^x},$$

kuru lieto veidojot mirstības tabulas no statistiskiem datiem. Statistisko datu nogludināšanai var arī izmantot Čebiševa polinomus [12].

Piemērs 1.5. Atrast izdzīvošanas funkciju, ja mirstības intensitāte apmierina Gompertz likumu.
Atrisinājums.

$$s_x(t) = {}_t\,p_x = \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} \mu_y \,\mathrm{d}y\right) = \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} \mu_\alpha \exp(k(y-\alpha))\,\mathrm{d}y\right)$$

padomes loceklis. Darbi rindu summācijas teorijā, komplekso skaitļu teorijā, Pazistams ar savu empiriski atrasto mirstības likumu

[11] William Matthew Makeham, ⋆ 1826, † 1891 - angļu aktuārs un matemātiķis

[12] G. Pettere. *Survival analysis of Latvian popultion using Tschebyshev's polynomials*. Acta Applicandae Mathematicae, **79** (2003), no. 1-2, 69-81

$$= \exp\left(\mu_a k^{-1} \exp(k(x-\alpha))(1-\exp(kt))\right).$$

1.8 Izlases mirstības tabulas

Universālajās mirstības tabulās mirstības intensitāte ir atkarīga tikai no personas vecuma un dzimuma vai tikai no vecuma. Tomēr praksē ir lietderīgi lietot mirstības tabulas, kur mirstības intensitāte ir vēl atkarīga no laika kopš iestājies kāds fiksēts notikums. Parasti apdrošināšanas sabiedrības apdrošina personas, kurām ir labs veselības stāvoklis. Līdz ar to šīm personām noslēdzot apdrošināšanas līgumu ir mazāka mirstības intensitāte. Tādēļ ir lietderīgi izveidot speciālas tā sauktās *izlases mirstības tabulas*. Tomēr pēc zināma laika, kā liecina prakse, mirstības intensitāte ir atkarīga tikai no personas vecuma un dzimuma. Līdz ar to mirstības intensitāte noslēdzot apdrošināšanas līgumu atšķīrās, bet pēc kāda laika, tā sauktā *atlases perioda s*, sakrīt ar mirstības intensitāti universālajās mirstības tabulās.

Pieņemam, ka personai ir x gadi, kad tā iegādājās apdrošināšanas polisi. Tad beidzoties atlases periodam mirstības varbūtības un mirstības intensitāte izlases mirstības tabulās sakrīt ar mirstības varbūtību un mirstības intensitāti universālās tabulās t.i.

$$q_{[x]+t} = q_{x+t}, \text{ ja } t \geq s$$

un

$$\mu_{[x]+t} = \mu_{x+t}, \text{ ja } t \geq s.$$

Analoģiski

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}, \text{ ja } t \geq s.$$

Tabula 1.2 Fragments no Anglijas mirstības tabulas A 1967 -70 Selected

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
50	32558,008	32464,813	32338,568	52
51	32383,756	32282,013	32143,546	53
52	32188,740	32077,958	31926,430	54
53	31970,942	31850.639	31685,203	55
54	31728,226	31597,933	31417,739	56

Piemērs 1.6. Pieņemam, ka atlases periods $s = 2$. Aprēķināt lielumus $q_{[50]}$, ${}_2p_{[50]}$, ${}_{2|}q_{[50]}$ un ${}_{2|3}q_{[50]+1}$.
Atrisinājums.

$$q_{[50]} = \frac{l_{[50]} - l_{[50]+1}}{l_{[50]}} = \frac{32558,008 - 32464,813}{32558,008} = 0,00286,$$

$$ {}_2p_{[50]} = \frac{l_{52}}{l_{[50]}} = \frac{32338,568}{32558,008} =,0,99326$$

$$ {}_{2|}q_{[50]} = \frac{l_{52} - l_{53}}{l_{[50]}} = \frac{32338,568 - 32143,546}{32558,008} = 0,00587,$$

$$ {}_{2|3}q_{[50]+1} = \frac{l_{53} - l_{56}}{l_{[50]+1}} = \frac{32143,546 - 31417,739}{32464,813} = 0,02236.$$

Nodaļa 2
Apdrošināšanas veidi un atlīdzības

2.1 Akumulācijas un diskonta funkcijas, procentu intensitāte

Atradīsim nozīmīgu finansu matemātikas lielumu, kurš raksturo kapitāla (investīcijas) izmaiņu laikā. Pieņemsim, ka trīs brīvi izvēlētos laika momentos s, t un τ viens un tas pats kapitāls attiecīgi ir S_s, S_t un S_τ liels. Tradicionāli finansu matemātikā, tai skaitā aktuārmatemātikā, laika vienība ir gads, ja vien nav citādi norādīts. Aplūkojam divu argumentu funkciju A – *akumulācijas funkciju*[1], ko definējam ar vienādību

$$A(t,\tau) = \frac{S_\tau}{S_t}.$$

Atrodam akumulācijas funkcijas īpašības.

$$A(t,t) = \frac{S_t}{S_t} = 1. \tag{2.1}$$

No vienādības

$$\frac{S_\tau}{S_s} = \frac{S_\tau}{S_t}\frac{S_t}{S_s}$$

seko

$$A(s,\tau) = A(t,\tau)A(s,t). \tag{2.2}$$

Lai varētu izlietot integrāl- un diferenciālrēķinus, pieņemam, ka akumulācijas funkcija A ir nepārtraukta otrā argumenta funkcija[2] un, ka

---

[1] Angl. *accumulation function, accumulation factor*

[2] Ja izpildās vienādība (2.2) un $A(t,\tau) \neq 0$, tad var pierādīt, ka no akumulācijas funkcijas A nepārteauktības pēc otrā argumenta seko, ka A ir abu argumentu nepārtraukta funkcija

eksistē nepārtraukta robeža (varbūt izņemot galīga skaita punktu)[3]

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to t} \frac{A(t,\tau) - 1}{\tau - t}.$$

Funkciju δ sauc par *procentu intensitāti*[4].

Aprēķinām A atvasinājumu pēc t izmantojot atvasinājuma definīciju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(s,t) = \lim_{\tau \to t} \frac{A(s,\tau) - A(s,t)}{\tau - t} = \lim_{\tau \to t} \frac{A(t,\tau)A(s,t) - A(s,t)}{\tau - t}$$
$$= \lim_{\tau \to t} \frac{A(t,\tau) - 1}{\tau - t} A(s,t) = \delta(t)A(s,t).$$

Citiem vārdiem esam pierādījuši, ka akumulācijas funkcija A apmierina lineāru diferenciālvienādojumu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(s,t) = \delta(t)A(s,t)$$

ar sākumu nosacījumu $A(s,s) = 1$. No diferenciālvienādojumu vispārīgās teorijas izriet, ka esam ieguvuši Košī problēmu un tās atrisinājumu dod formula

$$A(s,t) = \exp\left(\int_s^t \delta(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Līdz ar to esam atraduši sakarību starp akumulācijas funkciju A un procentu intensitāti δ.

Divu argumentu funkciju v, kur

$$v(s,t) = \frac{1}{A(s,t)} = \exp\left(-\int_s^t \delta(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

sauc par *diskonta funkciju*.

No (2.2) seko diskonta funkcijas īpašība

$$v(s,\tau) = v(s,t)v(t,\tau), \quad \text{visiem } s,t,\tau.$$

---

[3] Ja izlietojam Lebega integrāli, tad pietiek prasīt, ka δ ir Lebega nozīmē integrējama funkcija

[4] Angl. *force of interest*

Pārliecināmies, ka $v(s,s) = 1$ un $v(s,t) = v(t,s)^{-1}$.

2.2 Nemainīga procentu intensitāte

Tālāk apskatām ļoti svarīgu praktisku gadījumu, kad procentu intensitāte δ nav atkarīga no laika t, t.i. $\delta(t) = \delta$ visiem t. Tad diskonta funkcija

$$v(s,t) = \exp(-\delta(t-s))$$

ir atkarīga tikai no abu argumentu starpības. Apzīmējam ar

$$v = v(s,s+1) = \exp(-\delta).$$

Definējam i un d ar vienādībām

$$i = v(s+1,s) - 1 = \exp(\delta) - 1,$$

$$d = 1 - v(s,s+1) = 1 - \exp(-\delta).$$

Finansu matemātikā lielumu i sauc par *gada procentu likmi*[5], d par *gada diskonta likmi*[6].

Jebkuru no trim lielumiem v, i un d var viegli izteikt ar pārejiem diviem. Piemēram,

$$d = iv = \frac{i}{1+i}, \quad i = \frac{d}{v} = \frac{d}{1-d}.$$

Līdz ar to visiem t

$$v^t = v(s,s+t) = \frac{1}{(1+i)^t} = \exp(-\delta t).$$

Pēdējā formula atļauj aprēķināt diskonta funkcijas vērtību jebkurā t garā laika intervālā.

---

[5] Angl. *rate of interest*

[6] Angl. *rate of discount*

2.3 Naudas plūsmas tagadnes vērtība

Vispirms apskatām diskrētu *naudas plūsmu*[7]. Pieņemam, ka fiksētos laika momentos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tiek veikti maksājumi $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Atzīmējam, ka $c_i > 0$, ja iemaksā naudu, un attiecīgi $c_i < 0$, ja izmaksā naudu. Tad par *naudas plūsmas tagadnes vērtību laika momentā* τ sauc summu

$$CF_d = c_1 v(\tau, t_1) + c_2 v(\tau, t_2) + \ldots + c_n v(\tau, t_n).$$

Ja maksājumu skaits ir bezgalīgs, tad naudas plūsmas tagadnes vērtība laika momentā τ ir

$$CF_d = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v(\tau, t_j).$$

Formulai ir jēga, ja atbilstošā rinda konverģē, kā tas ir aktuārmatemātikas lietojumos.

Ja procentu intensitāte δ ir konstanta, tad naudas plūsmas tagadnes vērtība laika momentā τ ir sekojoša

$$CF_d = c_1 v^{t_1 - \tau} + c_2 v^{t_2 - \tau} + \ldots + c_n v^{t_n - \tau},$$

kur $v^t = \exp(-\delta t)$.

Tālāk apskatām nepārtrauktu naudas plūsmas (naudas straumes) gadījumu. Pieņemam, ka investors laika intervālā $[t_s, t_b]$ maksā nepārtraukti ar ātrumu $\rho(t)$ laika vienībā. Tad kopējais maksājums būs

$$M(t_s, t_b) = \int_{t_s}^{t_b} \rho(t)\,\mathrm{d}t.$$

Atbilstoša naudas plūsmas tagadnes vērtība laika momentā τ ir

$$CF_c = \int_{t_s}^{t_b} v(\tau, t)\,\rho(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ja $t_b = \infty$, tad pie līdzīgiem argumentiem iegūstam

---

[7] Angl. *cashflow*

$$CF_c = \int_{t_s}^{\infty} v(\tau,t)\,\rho(t)\,\mathrm{d}t.$$

Apvienojot diskrēto un nepārtraukto naudas plūsmas gadījumus iegūstam formulu vispārīgai naudas plūsmas tagadnes vērtības aprēķināšanai momentā τ

$$CF = CF_d + CF_c = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v(\tau,t_j) + \int_{t_s}^{\infty} v(\tau,t)\,\rho(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ja procentu intensitāte δ ir konstanta, tad

$$CF = CF_d + CF_c = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v^{t_j-\tau} + \int_{t_s}^{\infty} v^{t-\tau}\rho(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= v^{-\tau}\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j v^{t_j} + \int_{t_s}^{\infty} v^{t}\rho(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Piemērs 2.1. Kāda persona bankā noguldīja 1000 €. Pēc viena gada tā no bankas izņēma 500 €. Kāda summa k personai jāiegulda bankā trešā gada sākumā, lai ceturtā gada sākumā varētu izņemt 2 reizes lielāku summu nekā trešā gada sākumā ieguldītā summa. Gada procentu likme ir 25%.

Apskatām naudas plūsmas tagadnes vērtību sākuma momentā $\tau = 0$

$$CF_d = 1000 - 500v + kv^2 - 2kv^3 = 0.$$

Mūsu gadījumā $i = 0,25$. Seko

$$v = \frac{1}{1+i} = 0,8.$$

Iegūstam $k = 1562,5$ €.

2.4 Principi, kurus jāievēro aprēķinot monetārās funkcijas

Apzīmējam ar x – personas vecumu noslēdzot apdrošināšanas līgumu[8] un ar $T \geq 0$ – dotās personas atlikušo dzīves ilgumu. T ir gadījuma lielums un atbilstošā gadījuma lieluma sadalījuma funkcijas atvasinājums jeb gadījuma lieluma sadalījuma blīvuma funkcija ir

$$f(t) = \begin{cases} {}_t p_x \, \mu_{x+t} & , \text{ja } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ja } t < 0. \end{cases}$$

Monetārās funkcijas aprēķina sekojoši:

1. Izlietojot apdrošināšanas polises nosacījumus atrodam jaunu gadījuma lielumu – visu atbilstošo maksājumu tagadnes vērtību $Z = g(T)$;
2. Aprēķinam gadījuma lieluma Z matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} g(t) \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, \mathrm{d}t.$$

Parasti aktuāros aprēķinos izmanto diskrēto gadījuma lielumu K – personas atlikušo dzīves ilgumu veselos gados, kur $k = 0, 1, 2, \ldots$. Citiem vārdiem K ir gadījuma lieluma T veselā daļa. Šī gadījuma lieluma sadalījuma likums ir

$$\Pr\{K = k\} = \Pr\{k \leq T < k+1\} = {}_k p_x \, q_{x+k} = {}_{k|} q_x.$$

Monetārās funkcijas diskrētā gadījumā aprēķina analogi nepārtrauktam gadījumam:

1. Izlietojot apdrošināšanas polises nosacījumus atrodam gadījuma lielumu – visu atbilstošo maksājumu tagadnes vērtību $Z = g(K)$;
2. Aprēķinam gadījuma lieluma Z matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \, {}_{k|} q_x.$$

[8] Lai vienkāršotu aprēķinus aktuārmatemātikā parasti pieņem, ka personas dzimšanas diena sakrīt ar apdrošināšanas līguma noslēgšanas dienu. Citiem vārdiem x ir vienāds ar personas pilno gadu skaitu apdrošināšanas līguma noslēgšanas kalendārā gada 31. decembrī

2.5 Pilnā dzīvības apdrošināšana, ja apdrošināšanas atlīdzību izmaksā nekavējoši

Pilnās dzīvības apdrošināšanas līgums darbojās no tā noslēgšanas brīža līdz apdrošināšanas gadījumam – apdrošinātās personas nāvei. Saskaņā ar līgumu apdrošinātās personas pilnvarotai personai pēc apdrošinātās personas nāves fakta oficiālās apstiprināšanas tiek nekavējoši izmaksāta līgumā noteiktā apdrošināšanas atlīdzība S.

Ar x apzīmējam apdrošinātās personas vecumu apdrošināšanas līguma noslēgšanas momentā un ar $T > 0$ – atlikušo dzīves ilgumu. Ievērojam, ka T ir gadījuma lielums un to raksturo gadījuma lieluma sadalījuma blīvuma funkcija $t \mapsto {}_t p_x \, \mu_{x+t}$. Apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība Z

$$Z = g(T) = Sv^T$$

arī ir gadījuma lielums.

Aprēķinam apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtības matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Sv^T) = S\mathbb{E}(v^T) = S \int_0^{+\infty} v^t \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, \mathrm{d}t.$$

Ievedam apzīmējumu

$$\overline{A}_x = \int_0^{+\infty} v^t \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, \mathrm{d}t.$$

Līdz ar to

$$\mathbb{E}(v^T) = \overline{A}_x \text{ un } \mathbb{E}(Z) = S\overline{A}_x.$$

Lai atvieglotu skaitliskos aprēķinus, lieto tā sauktās *komutatīvās funkcijas*, kuras bieži tabulē [6] pie dažādām procentu likmēm[9] i. Komutatīvās funkcijas definē sekojoši

$$D_x = v^x l_x,$$

[9] Pirmsdatoru laikā komutatīvo funkciju tabulas būtiski atviegloja aktuāraprēķinus. Arī tagad, ja ir ierobežoti datoru resursi un lai ievērojami palielinātu aprēķinu ātrumu izmanto komutatīvās funkcijas

$$\overline{C}_x = \int\limits_0^1 v^{x+t} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{+\infty} \overline{C}_{x+t}.$$

Izsakam monetāro funkciju $\overline{A}_x$ ar komutatīvām funkcijām, ievērojot, ka

$$_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Iegūstam

$$\overline{A}_x = \frac{\int_0^{+\infty} v^{x+t} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^x l_x} = \frac{\sum_{r=0}^{+\infty}\int_r^{r+1} v^{x+t} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^x l_x}.$$

Apskatām integrāli

$$\int\limits_r^{r+1} v^{x+t} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Pārejam integrālī uz jaunu integrācijas mainīgo $t = \tau + r$. Tad $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ un attiecīgi izmainot integrācijas robežas, iegūstam

$$\int\limits_r^{r+1} v^{x+t} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 v^{x+\tau+r} l_{x+\tau+r}\,\mu_{x+\tau+r}\,\mathrm{d}\tau = \overline{C}_{x+r}.$$

Līdz ar to varam $\overline{A}_x$ izteikt ar iepriekš definētām komutatīvām funkcijām

$$\overline{A}_x = \frac{\sum_{r=0}^{+\infty}\overline{C}_{x+r}}{D_x} = \frac{\overline{M}_x}{D_x}.$$

Aprēķinām gadījuma lieluma Z dispersiju

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} S^2 v^{2t}\,{}_t p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t - \left(\int\limits_0^{+\infty} S v^t\,{}_t p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

$$= S^2(\overline{A}_x^* - (\overline{A}_x)^2).$$

Ievērojam, ka $\overline{A}_x^*$ ir aprēķināta ar citu procenta likmi i^*. Ievērojam, ka

$$v^2 = v^* = \frac{1}{1+i^*}.$$

Iegūstam

$$v^2 = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1+2i+i^2}.$$

Tātad atbilstošā procentu likme ir

$$i^* = 2i + i^2.$$

2.6 Pilnā dzīvības apdrošināšana, ja apdrošināšanas atlīdzību izmaksā nāves gada beigās

Pilnās dzīvības apdrošināšanas līgums darbojās no tā noslēgšanas brīža līdz apdrošināšanas gadījumam – apdrošinātās personas nāvei. Saskaņā ar līgumu apdrošinātās personas pilnvarotai personai pēc apdrošinātās personas nāves fakta oficiālās apstiprināšanas nāves gada beigās tiek izmaksāta līgumā noteiktā apdrošināšanas atlīdzība S. Atgādinām, ka apdrošināšanas sabiedrībās apdrošināšanas gadus sāk skaitīt sākot ar apdrošināšanas polises noslēgšanas dienu.

Ar x apzīmējam apdrošinātās personas vecumu apdrošināšanas līguma noslēgšanas momentā un ar K atlikušo dzīves ilgumu veselos gados, t.i.

$$K = [T] = \text{ gadījuma lieluma } T \text{ veselā daļa.}$$

Arī K, tāpat kā T ir gadījuma lielums un tā sadalījuma likums ir

$$\Pr\{K = k\} = {}_k p_x \, q_{x+k} = {}_{k|}q_x.$$

Apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība Z arī ir gadījuma lielums

$$Z = g(K) = Sv^{K+1},$$

un diskonta faktora pakāpe ir $K+1$, jo apdrošināšanas atlīdzību izmaksā apdrošinātās personas nāves gada beigās. Aprēķinam apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtības matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Sv^{K+1}) = S\mathbb{E}(v^{K+1}) = S\sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x.$$

Ievedam apzīmējumu

$$A_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x.$$

Līdz ar to

$$\mathbb{E}(v^{K+1}) = A_x \text{ un } \mathbb{E}(Z) = SA_x.$$

Ievedam vēl jaunas komutatīvās funkcijas

$$C_x = v^{x+1}d_x,$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{+\infty} C_{x+t}.$$

Līdz ar to varam monetāro funkciju A_x izsacīt ar komutatīvām funkcijām

$$A_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1}\frac{d_{k+x}}{l_x} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{v^{k+x+1}d_{k+x}}{v^x l_x} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

Aprēķinām gadījuma lieluma Z dispersiju

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} S^2 v^{2(k+1)}\,{}_{k|}q_x - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} Sv^{k+1}\,{}_{k|}q_x\right)^2 \\ &= S^2\left(A_x^* - (A_x)^2\right),\end{aligned}$$

kur A_x^* ir aprēķināta ar procenta likmi i^*

$$i^* = 2i + i^2.$$

2.7 Sakarība starp $\overline{A}_x$ un A_x

Atrodam sakarību starp monetārām funkcijām $\overline{A}_x$ un A_x pieņemot, ka intervālos $[x+k, x+k+1]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ir vienmērīgais mirstības sadalījums. Aktuāraprēķinu daudzgadīga pieredze ir pierādījusi, ka šāds pieņēmums ir pietiekoši precīzs.

Teorēma 2.1. *Ja intervālos* $[x+k, x+k+1]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *ir vienmērīgais mirstības sadalījums, tad*

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Pierādījums. Vispirms pierādam, ka

$$\overline{C}_y = \frac{i}{\delta} C_y, \text{ ja } y = x+k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Tā kā

$${}_t p_y \, \mu_{y+t} = q_y, \quad 0 \le t \le 1,$$

kur

$${}_t p_y = \frac{l_{y+t}}{l_y}, \quad q_y = \frac{d_y}{l_y},$$

tad

$$l_{y+t} \, \mu_{y+t} = d_y, \quad 0 \le t \le 1.$$

Seko,

$$\overline{C}_y = \int_0^1 v^{y+t} l_{y+t} \mu_{y+t} \, \mathrm{d}t = d_y v^y \int_0^1 v^t \, \mathrm{d}t$$

$$= d_y v^y \left(\frac{v-1}{\ln v} \right) = d_y v^{y+1} \left(\frac{i}{\delta} \right) = \frac{i}{\delta} C_y.$$

Izvedumā ievērojam, ka $v = \exp(-\delta)$ un tātad $\delta = -\ln v$, kā arī

$$1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{i+1} = iv.$$

No šejienes iegūstam vajadzīgo vienādību

$$\overline{A}_x = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_{x+k}}{D_x} = \frac{i}{\delta} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}}{D_x} = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Piezīme 2.1. Gadījumā, ja i ir pietiekoši mazs, varam iegūt tuvinātas formulas. Izmantojot Teilora rindu iegūstam

$$\delta = \ln(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + o(i^2) = i\left(1 - \frac{i}{2} + o(i)\right) = \frac{i}{1 + \frac{i}{2} + o(i)}.$$

Līdz ar to iegūstam izvirzījumu

$$\frac{i}{\delta} = 1 + \frac{i}{2} + o(i).$$

Seko,

$$\frac{i}{\delta} \approx 1 + \frac{i}{2}.$$

No šejienes iegūstam tuvinātas formulas:

$$\overline{C}_x \approx \left(1 + \frac{i}{2}\right) C_x,$$

$$\overline{M}_x \approx \left(1 + \frac{i}{2}\right) M_x,$$

$$\overline{A}_x \approx \left(1 + \frac{i}{2}\right) A_x.$$

2.8 Termiņa dzīvības apdrošināšana

Apdrošināšanas līgumu noslēdz uz n gadiem. Apdrošināšanas gadījums ir apdrošinātās personas nāve līguma darbības laikā. Apdrošinātās personas nāves gadījumā saskaņā ar līgumu apdrošinātās personas pilnvarotai personai tiek nekavējoši pēc apdrošinātās personas nāves fakta oficiālās apstiprināšanas izmaksāta līgumā noteiktā atlīdzība S. Ja turpretī apdrošināšanas gadījums neiestājās līguma darbības laikā, tad nekāda atlīdzība netiek izmaksāta.

Ar x apzīmējam apdrošinātās personas vecumu apdrošināšanas līguma noslēgšanas momentā un ar $T > 0$ – atlikušo dzīves ilgumu. Ievērojam, ka T ir gadījuma lielums un to raksturo gadījuma lieluma sadalījuma blīvuma funkcija $t \mapsto {}_t p_x \, \mu_{x+t}$. Arī apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība Z ir gadījuma lielums

$$Z = g(T) = \begin{cases} Sv^T & \text{, ja } T < n \\ 0 & \text{, ja } T \geq n \end{cases}$$

Aprēķinam apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtības matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} g(t)\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = S \int_0^n v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Ievedam apzīmējumu

$$\overline{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n|}} = \int_0^n v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Līdz ar to

$$\mathbb{E}(Z) = S\overline{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n|}}.$$

Izsakām monetāro funkciju $\overline{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n|}}$ ar komutatīvām funkcijām. Ievērojam, ka

$$\int_0^n v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t - \int_n^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Pārveidojam otro integrāli

$$\int_n^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Pārejām uz jaunu integrācijas mainīgo $t = \tau + n$. Tad $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ un attiecīgi izmainot integrācijas robežas, iegūstam

$$\int_n^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} v^{\tau+n}\, {}_{\tau+n} p_x\, \mu_{x+\tau+n}\, \mathrm{d}\tau.$$

Izlietojot Baijesa formulu

$${}_{\tau+n} p_x = {}_\tau p_{x+n} \cdot {}_n p_x$$

iegūstam

$$\int_n^{\infty} v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = v^n\, {}_np_x \int_0^{+\infty} v^\tau\, {}_\tau p_{x+n}\, \mu_{x+\tau+n}\, \mathrm{d}\tau = v^n\, {}_np_x \overline{A}_{x+n}.$$

Ievērojam, ka

$$v^n\, {}_np_x = \frac{v^n\, l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n}\, l_{x+n}}{v^x\, l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Iegūstam formulu

$$\overline{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n|}} = \overline{A}_x - v^n\, {}_np_x \overline{A}_{x+n}$$

$$= \overline{A}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\overline{A}_{x+n} = \frac{\overline{M}_x}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{\overline{M}_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}.$$

Ja apdrošinājuma atlīdzību izmaksā apdrošinātās personas nāves gada beigās, tad apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība ir

$$Z = g(K) = \begin{cases} Sv^{K+1} & \text{, ja } K < n \\ 0 & \text{, ja } K \geq n \end{cases}$$

un atbilstoši matemātiskā cerība

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\, {}_{k|}q_x = S\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x.$$

Ievedam apzīmējumu

$$A^{1}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x$$

un tātad

$$\mathbb{E}(Z) = SA^{1}_{x:\,\overline{n|}}.$$

Izsakam $A^{1}_{x:\,\overline{n|}}$ ar komutatīvām funkcijām

$$A^{1}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\frac{d_{k+x}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{k+x+1} d_{k+x}}{v^x l_x} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

No pēdējās formulas iegūstam sakarību

$$A^{1}_{x:\,\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}}$$

$$= A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n} = A_x - v^n\,{}_n p_x A_{x+n}.$$

2.9 Atliktā dzīvības apdrošināšana

Apdrošināšanas līgums darbojās no tā noslēgšanas brīža līdz apdrošinātās personas nāvei, ja tā iestājās pēc zināma līgumā paredzēta perioda n, un tad saskaņā ar līgumu apdrošinātās personas pilnvarotai personai tiek nekavējoši pēc apdrošinātās personas nāves fakta oficiālās apstiprināšanas izmaksāta līgumā noteiktā atlīdzība S. Ja apdrošinātā persona nomirst pirmos n gados, tad apdrošināšanas atlīdzība netiek izmaksāta. Apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība ir

$$Z = g(T) = \begin{cases} 0 & \text{, ja } T < n \\ Sv^T & \text{, ja } T \geq n \end{cases}$$

un atbilstoši matemātiskā cerība ir

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} g(t)\,{}_t p_x\, \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = S\int_n^{+\infty} v^t\,{}_t p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ievedam apzīmējumu

$${}_{n|}\overline{A}_x = \int_n^{+\infty} v^t\,{}_t p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

un seko

$$\mathbb{E}(Z) = S\,{}_{n|}\overline{A}_x.$$

Integrālī pārejām uz jaunu integrācijas mainīgo $t = \tau + n$. Tad $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ un attiecīgi izmainot integrācijas robežas, iegūstam

$$ {}_{n|}\overline{A}_x = \int\limits_0^{+\infty} v^{\tau+n}\, {}_{\tau+n}p_x\, \mu_{x+\tau+n}\,\mathrm{d}\tau. $$

Izlietojot Baijesa formulu

$$ {}_{\tau+n}p_x = {}_{\tau}\, p_{x+n}\, {}_{n}p_x $$

iegūstam

$$ {}_{n|}\overline{A}_x = v^n\, {}_{n}p_x \int\limits_0^{+\infty} v^{\tau}\, {}_{\tau}p_{x+n}\, \mu_{x+\tau+n}\,\mathrm{d}\tau = v^n\, {}_{n}p_x \overline{A}_{x+n}. $$

Izsakām monetāro funkciju ar komutatīvām funkcijām

$$ {}_{n|}\overline{A}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{\overline{M}_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{\overline{M}_{x+n}}{D_x} $$

Ja apdrošinājuma atlīdzību izmaksā apdrošinātās personas nāves gada beigās, tad apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība ir

$$ Z = g(K) = \begin{cases} 0 & \text{, ja } K < n \\ Sv^{K+1} & \text{, ja } K \geq n \end{cases} $$

un atbilstoši matemātiskā cerība

$$ \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\, {}_{k|}q_x = S\sum_{k=n}^{+\infty} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x. $$

Apzīmējam

$$ {}_{n|}A_x = \sum_{k=n}^{+\infty} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x. $$

Līdz ar to

$$ \mathbb{E}(Z) = S_{n|}A_x. $$

Izsakām monetāro funkciju ${}_{n|}A_x$ ar komutatīvām funkcijām.

$$ {}_{n|}A_x = \sum_{k=n}^{+\infty} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^{n+k+1}\, {}_{k+n|}q_x. $$

Ievērojam, ka

$$ {}_{k+n|}q_x = {}_np_x \cdot {}_{k|}q_{x+n}. $$

Seko

$$ {}_{n|}A_x = v^n \cdot {}_np_x \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1}\,{}_{k|}q_{x+n} = v^n \cdot {}_np_x A_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{M_{x+n}}{D_x}. $$

Iegūsim vēl noderīgas formulas. No vienādības

$$ \overline{A}^{1}_{x:\,\overline{n|}} = \overline{A}_x - v^n\,{}_np_x\overline{A}_{x+n} $$

seko

$$ \overline{A}^{1}_{x:\,\overline{n|}} = \overline{A}_x - {}_{n|}\overline{A}_x. $$

Analoģiski iegūstam

$$ A^{1}_{x:\,\overline{n|}} = A_x - {}_{n|}A_x. $$

2.10 Tīrā dzīvības apdrošināšana

Apdrošināšanas līgumu noslēdz x gadus veca persona uz n gadiem. Apdrošināšanas gadījums, kura rezultātā tiek izmaksāta apdrošināšanas atlīdzība S, ir apdrošinātās persona nodzīvošana līdz līguma termiņa beigām, t.i. sasniedzot $x+n$ gadu vecumu. Ja turpretī apdrošinātā persona nomirst līguma darbības laikā, t.i. nesasniedzot $x+n$ gadu vecumu, tad apdrošināšanas atlīdzību netiek izmaksāta. Apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība Z ir gadījuma lielums

$$ Z = g(T) = \begin{cases} 0 & \text{, ja } T < n \\ Sv^n & \text{, ja } T \geq n \end{cases} $$

un atbilstoši matemātiskā cerība

$$ \mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} g(t)\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = Sv^n \int_n^{+\infty} {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = Sv^n\,{}_np_x. $$

Ievedam apzīmējumus

$$ {}_nE_x = \overline{A}_{x:\,\overline{n|}}^{\;\;1} = A_{x:\,\overline{n|}}^{\;\;1} = v^n\,{}_np_x. $$

Izlietojot komutatīvās funkcijas, iegūstam formulu

$$ {}_nE_x = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. $$

2.11 Kombinētā dzīvības apdrošināšana

Apdrošināšanas līgumu noslēdz x gadus veca persona uz n gadiem. Apdrošināšanas gadījums, atkarībā no tā kurš iestājās pirmais, ir vai nu apdrošinātās personas nāve līguma darbības laikā, t.i. $T < n$, vai arī apdrošinātā persona nodzīvo līdz līguma termiņa beigām, t.i. sasniedzot $x+n$ gadu vecumu. Apdrošinātās personas nāves gadījumā saskaņā ar līgumu apdrošinātās personas pilnvarotai personai tiek nekavējoši pēc apdrošinātās personas nāves fakta oficiālās apstiprināšanas izmaksāta līgumā noteiktā atlīdzība S. Atlīdzība S tiek izmaksāta arī gadījumā, ja persona nodzīvo n gadus. Apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība ir

$$ Z = g(T) = \begin{cases} Sv^T & \text{ja } T < n \\ Sv^n & \text{ja } T \geq n \end{cases} = Sv^{\min(T,n)} $$

un atbilstoši matemātiskā cerība

$$ \mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} g(t)\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = S\left(\int_0^{n} v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} v^n\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t \right) $$

$$ = S\left(\overline{A}^{1}_{x:\,\overline{n|}} + \overline{A}_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} \right). $$

Ievedam monetāro funkciju

$$ \overline{A}_{x:\,\overline{n|}} = \overline{A}^{1}_{x:\,\overline{n|}} + \overline{A}_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} $$

un atzīmējām, ka

$$ \mathbb{E}(v^{\min(T,n)}) = \overline{A}_{x:\,\overline{n|}}. $$

Izsakām monetāro funkciju $\overline{A}_{x:\,\overline{n|}}$ ar komutatīvām funkcijām

$$\overline{A}_{x:\,\overline{n|}} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

Ja apdrošināšanas atlīdzību izmaksā apdrošināšanas gada beigās, tad apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība ir

$$Z = g(K) = \begin{cases} Sv^{K+1} & \text{, ja } K < n \\ Sv^n & \text{, ja } K \geq n \end{cases} = Sv^{\min(K+1,n)}$$

un atbilstošā matemātiskā cerība

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\,{}_{k|}q_x = S\left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x + v^n \sum_{k=n}^{+\infty} {}_{k|}q_x\right)$$

$$= S\left(A^1_{x:\,\overline{n|}} + A_{x:\,\overline{n|}}^{\ \ 1}\right).$$

Analoģiski ievedam apzīmējumu

$$A_{x:\,\overline{n|}} = A^1_{x:\,\overline{n|}} + A_{x:\,\overline{n|}}^{\ \ 1}$$

un atzīmējām, ka

$$\mathbb{E}(v^{\min(K+1,n)}) = A_{x:\,\overline{n|}}.$$

Izsakām monetāro funkciju $A_{x:\,\overline{n|}}$ ar komutatīvām funkcijām

$$A_{x:\,\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

2.12 Mainīgā dzīvības apdrošināšana

Iepriekš apskatīto apdrošināšanas gadījumos apdrošināšanas atlīdzība S nebija atkarīga no apdrošināšanas līguma ilguma. Tālāk apskatīsim gadījumu ar mainīgu apdrošināšanas atlīdzību $\beta(t)$ atkarīgu no apdrošināšanas līguma ilguma. Apdrošināšanas atlīdzības tagadnes vērtība pilnai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošināšanas atlīdzība apdrošinātās personas pilnvarotai personai tiek izmaksāta nekavējoši pēc apdrošinātās personas nāves fakta oficiālās apstiprināšanas ir

$$Z = g(T) = \beta(T)v^T$$

un attiecīgi matemātiskā cerība ir

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} g(t)\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} v^t\beta(t)\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ja $\beta(t) = St$ visiem $t > 0$, tad

$$\mathbb{E}(Z) = S\int_0^{+\infty} tv^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t = S(\overline{IA_x}).$$

Biežāk tiek lietots gadījums, kad $\beta(t) = S([t]+1)$, kur $[t]$ ir t veselā daļa. Tad

$$\mathbb{E}(Z) = S(I\overline{A})_x = S\int_0^{+\infty} v^t([t]+1)\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= S\frac{\int_0^{+\infty} v^{x+t}([t]+1)l_{x+t}\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^x l_x}$$

$$= S\frac{\sum_{r=0}^{+\infty}(r+1)\int_r^{r+1} v^{x+t}l_{x+t}\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^x l_x} = S\frac{\sum_{r=0}^{+\infty}(r+1)\overline{C}_{x+r}}{D_x}$$

$$= S\frac{\sum_{r=0}^{+\infty}\overline{M}_{x+r}}{D_x} = S\frac{\overline{R}_x}{D_x},$$

kur

$$\overline{R}_x = \sum_{r=0}^{+\infty}\overline{M}_{x+r}.$$

Tālāk apskatām gadījumu, kad atlīdzība tiek izmaksāta nāves gada beigās. Tad apdrošināšanas atbildības tagadnes vērtība ir

$$Z = g(K) = S(K+1)v^{K+1}$$

un atbilstoši matemātiskā cerība

$$\mathbb{E}(Z) = S(IA)_x = S\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\,{}_{k|}q_x.$$

Izsakām $(IA)_x$ ar komutatīvām funkcijām

$$(IA)_x = \frac{\sum_{r=0}^{+\infty}(r+1)C_{x+r}}{D_x} = \frac{\sum_{r=0}^{+\infty}M_{x+r}}{D_x} = \frac{R_x}{D_x},$$

kur

$$R_x = \sum_{r=0}^{+\infty} M_{x+r}.$$

Ja starp vecumiem $x+k$ un $x+k+1$ mirstība sadalās vienmērīgi, tad $\overline{C}_x = \frac{i}{\delta}C_x$. Iegūstam, ka $\overline{M}_x = \frac{i}{\delta}M_x$ un $\overline{R}_x = \frac{i}{\delta}R_x$. Līdz ar to pie šāda nosacījuma iegūstam formulu

$$(I\overline{A}_x) \approx \frac{i}{\delta}(IA_x).$$

Līdzīgi varam apskatīt termiņa apdrošināšanu.

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\,{}_{k|}q_x = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k}}{D_x}$$

$$= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x},$$

Kombinētās apdrošināšanas gadījumā iegūstam formulu

$$(IA)_{x:\,\overline{n|}} = (IA)^1_{x:\,\overline{n|}} + n\cdot{}_nE_x.$$

2.13 Bonusu aprēķināšana

Bieži apdrošināšanas kompānijas, lai ieinteresētu klientus, izmanto bonusu sistēmu. Parasti izlieto trīs bonusu sistēmas:

- vienkāršie bonusi;
- saliktie bonusi;
- supersaliktie bonusi.

Vienkāršie bonusi. Šo bonusu aprēķinā izmanto vienīgi apdrošināšanas summu, kuru apzīmējām ar S. Apskatām piemēra dēļ pilno dzīvības apdrošināšanas polisi un pieņemam, ka polisei pēc t apdrošināšanas gadiem piešķir sākuma bonusu B. Jaunos bonusus aprēķina pēc formulas

$$B_p = bS,$$

kur b bonusu procentu likme. Tātad pēc $t+k$ gadiem kopēja apdrošinājuma summa būs

$$S+B+kbS.$$

Ja apdrošināšanas summu izmaksā personas nāves gada beigās, tad jaunās apdrošinājuma summas tagadnes vērtības matemātiskā cerība ir

$$\sum_{k=0}^{\infty}(S+B+(k+1)bS)v^{k+1}\ {}_{k|}q_{x+t}$$
$$=(S+B)A_{x+t}+bS(IA)_{x+t}.$$

Ja apdrošināšanas summu izmaksā nekavējoši nāves gadījumā, tad

$$(S+B)\overline{A}_{x+t}+bS(I\overline{A})_{x+t}.$$

Savukārt termiņa apdrošināšanas gadījumā atbilstošās apdrošinājuma summas ir

$$(S+B)A_{x+t:\,\overline{n-t|}}+bS(IA)_{x+t:\,\overline{n-t|}}$$

un

$$(S+B)\overline{A}_{x+t:\,\overline{n-t|}}+bS(I\overline{A})_{x+t:\,\overline{n-t|}}.$$

Saliktie bonusi. Šo bonusu aprēķinā izmanto kā apdrošināšanas summu S, tā iepriekšējos gados uzkrātos bonusus. Tātad pēc t gadiem piešķir pirmo bonusu B un pēc $t+k$ gadiem kopējā apdrošināšanas summa būs

$$(S+B)(1+b)^k.$$

Tātad apdrošinājuma summas tagadnes vērtības matemātiskā cerība, ja to izmaksā nāves gada beigās ir

$$\sum_{k=0}^{\infty}(S+B)(1+b)^{k+1}v^{k+1}\ {}_{k|}q_{x+t}$$
$$=(S+B)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+b}{1+i}\right)^{k+1}\ {}_{k|}q_{x+t}$$
$$=(S+B)A^{*}_{x+t},$$

kur A^* ir aprēķināta ar intereses likmi

$$\frac{i-b}{1+b}.$$

Ja turpretī apdrošinājuma summu izmaksā nekavējoši nāves gadījumā tad tuvinātā formula ir

$$(S+B)(1+i)^{\frac{1}{2}}A^{*}_{x+t}.$$

Termiņa apdrošināšanas gadījumā atbilstošās formulas ir sekojošas

$$(S+B)A^{*}_{x+t:\,\overline{n-t|}}$$

un

$$(S+B)\left((1+i)^{1/2}A^{*\,1}_{x+t:\,\overline{n-t|}}+A^{*}_{x+t:\,\overset{1}{\overline{n-t|}}}\right).$$

Supersaliktie bonusi. Atbilstošos bonusi sastāv no divām daļām. Vienu daļu aprēķina ar fiksētu likmi no eksistējošiem bonusiem, otru daļu ar citu procentu likmi no apdrošinājuma summas. Apzīmējam pirmo bonusu

$$B(0)=B.$$

Tad

$$B(1)=B(1+b)+aS$$
$$B(2)=B(1+b)^2+aS(1+(1+b))$$

un vispārīgi

$$B(k+1)=B(1+b)^{k+1}+aS\times s_{\overline{k+1|}b}.$$

Pierādām izlietojot matemātisko indukciju. Tā kā

$$B(1)=(aS+bB)+B=B(1+b)+aS.$$

Seko rezultāts ir pareizs pie $k=1$. Pieņemam, ka formula ir pareiza priekš $B(k+1)$. Tad

$$\begin{aligned}B(k+2)&=(aS+bB(k+1))+B(k+1)\\&=(1+b)((1+b)^{k+1}B)+aS((1+b)s_{\overline{k+1|}b}+1)\\&=(1+b)^{k+2}B+aS(s_{\overline{k+2|}b}+1),\end{aligned}$$

ko arī vajadzēja pierādīt. Tas savukārt nozīmē, ka apdrošinājuma summa, ja to izmaksā personas nāves gada beigās ir

$$\sum_{k=0}^{\infty}(S+B(k+1))v^{k+1}\,{}_{k|}q_{x+t}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(S+aS\left(\frac{(1+b)^{k+1}-1}{b}\right)+B(1+b)^{k+1}\right)\,{}_{k|}q_{x+t}$$

$$=S\left(1-\frac{a}{b}\right)A_{x+t}+\left(\frac{a}{b}S+B\right)A^{*}_{x+t},$$

kur A^{*}_{x+t} ir aprēķināta pie intereses likmes

$$i^{*}=\frac{i-b}{1+b}.$$

Nodaļa 3
Rentes

3.1 Nepārtrauktā rente

Pieņemam, ka x gadus veca persona nepārtraukti visā savā atlikušā dzīves laikā maksā renti[1] 1 € gadā. Apzīmējam ar $T > 0$ – atlikušo dzīves ilgumu, dotā gadījumā nepārtraukto maksāšanas periodu. Ievērojam, ka T ir gadījuma lielums un to raksturo gadījuma lieluma sadalījuma blīvuma funkcija $t \mapsto {}_t p_x \, \mu_{x+t}$. Arī nepārtrauktā maksājuma tagadnes vērtība ir gadījuma lielums

$$g(T) = \bar{a}_{\overline{T|}} = \int_0^T v^r \, dr = \left. \frac{v^r}{\ln v} \right|_0^T = \frac{1 - v^T}{\delta}.$$

Aprēķinā izmantojam finansu matemātikas sakarības

$$\ln v = \ln \frac{1}{1+i} = -\ln(1+i) = -\delta.$$

Seko nepārtrauktā maksājuma tagadnes vērtības matemātiskā cerība ir

$$\bar{a}_x = \mathbb{E}(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, \mathrm{d}t.$$

Teorēma 3.1.

---

[1] Angl. *annuity*

$$\overline{a}_x = \int_0^\infty \overline{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mathrm{d}t.$$

Pierādījums. Pārveidojam integrāli izmantojot parciālo integrēšanu. Apzīmējam ar $u = \overline{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t v^r\, \mathrm{d}r$ un $\mathrm{d}v = {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t$. Tad $\mathrm{d}u = v^t\, \mathrm{d}t$ un $v = {}_t q_x - 1 = -{}_t p_x$. Iegūstam

$$\overline{a}_x = \int_0^\infty \overline{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t = -\overline{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mathrm{d}t,$$

jo $\overline{a}_{\overline{t}|} = 0$, ja $t = 0$, un ${}_t p_x = 0$, ja $t > \omega$. $\square$

Atradīsim sakarību starp apdrošināšanas atlīdzību $\overline{A}_x$ un renti $\overline{a}_x$.

$$\overline{a}_x = \mathbb{E}(\overline{a}_{\overline{T}|}) = \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^T}{\delta}\right) = \frac{1 - \mathbb{E}(v^T)}{\delta} = \frac{1 - \overline{A}_x}{\delta}.$$

Seko

$$\overline{A}_x = 1 - \delta \overline{a}_x.$$

Atrodam rentes dispersiju. Tā kā

$$\overline{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta},$$

tad

$$\mathrm{Var}(\overline{a}_{\overline{T}|}) = \frac{1}{\delta^2}\, \mathrm{Var}(v^T) = \frac{\overline{A}_x^* - (\overline{A}_x)^2}{\delta^2}.$$

kur $\overline{A}_x^*$ ir aprēķināta pie intereses likmes

$$i^* = 2i + i^2.$$

Izsakām renti ar komutatīvām funkcijām un tādēļ ievedam jaunas komutatīvās funkcijas

$$\overline{D}_x = \int_0^1 v^{x+t} l_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

un

$$\overline{N}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{D}_{x+t}.$$

Izsakam $\overline{a}_x$ ar komutatīvām funkcijām

$$\overline{a}_x = \frac{\int_0^{+\infty} v^{x+t} l_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^x l_x} = \frac{\sum_{r=0}^{+\infty} \int_r^{r+1} v^{x+t} l_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^x l_x}.$$

Apskatām integrāli

$$\int_r^{r+1} v^{x+t} l_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

un pārējam integrālī uz jaunu integrācijas mainīgo $t = \tau + r$. Tad $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ un attiecīgi izmainot integrācijas robežas, iegūstam

$$\int_r^{r+1} v^{x+t} l_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 v^{x+\tau+r} l_{x+\tau+r}\,d\tau = \overline{D}_{x+r}.$$

Līdz ar to varam renti izteikt $\overline{a}_x$ ar komutatīvām funkcijām

$$\overline{a}_x = \frac{\sum_{r=0}^{+\infty} \overline{D}_{x+r}}{D_x} = \frac{\overline{N}_x}{D_x}.$$

3.2 Gada rente

Tālāk apskatām gadījumu, kad renti maksā vienu reizi gadā, t.i. vai nu apdrošināšanas gada sākumā vai apdrošināšanas gada beigās. Pimajā gadījumā maksājuma tagadnes vērtība ir

$$g(K) = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \sum_{r=0}^{K} v^r = \frac{1 - v^{K+1}}{d},$$

bet otrajā

$$g(K) = a_{\overline{K}|} = \sum_{r=1}^{K} v^r = \sum_{r=0}^{K} v^r - 1 = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - 1.$$

Atzīmējam, ka $d = 1 - v$. Maksājuma tagadnes vērtība ir gadījuma lielums un tā matemātiskā cerība ir

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_x.$$

Ievērojot, ka

$$\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d}, \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

iegūstam

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right) = \frac{1 - \mathbb{E}(v^{K+1})}{d} = \frac{1 - A_x}{d}.$$

Esam ieguvuši sakarību

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x.$$

Teorēma 3.2.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\, {}_t p_x$$

un

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_t p_x.$$

Pierādījums. Saskaņā ar definīciju

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{k} v^t\, {}_{k|}q_x$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=t}^{\infty} v^t\, {}_{k|}q_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \sum_{k=t}^{\infty} {}_{k|}q_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\, {}_t p_x,$$

jo

$$\sum_{k=t}^{\infty} {}_{k|}q_x = {}_t p_x.$$

Ievērojot, ka $\ddot{a}_x = 1 + a_x$ iegūstam

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_x.$$

□

Definējam jaunu komutatīvo funkciju

$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}.$$

Izsakām renti $\ddot{a}_x$ ar komutatīvām funkcijām

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_x = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+x} l_{x+t}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}.$$

Analoģiski iegūstam

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Aprēķinam gadījuma lieluma $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ dispersiju.

$$\mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(v^{K+1})}{d^2} = \frac{A_x^* - (A_x)^2}{d^2},$$

kur A^* ir aprēķināta pie intereses likmes $i^* = 2i + i^2$.

$$\mathrm{Var}(a_{\overline{K}|}) = \mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - 1) = \mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}).$$

3.3 Termiņa rente

Pieņemam, ka renti maksā nepārtraukti $T < n$ gadus. Tad atbilstošā gadījuma lieluma tagadnes vērtība

$$g(T)=\begin{cases}\overline{a}_{\overline{T}|} & \text{ja } T<n\\ \overline{a}_{\overline{n}|} & \text{ja } T\geq n\end{cases}=\overline{a}_{\overline{\min(T,n)}|}.$$

Aprēķinām matemātisko cerību

$$\overline{a}_{x:\,\overline{n}|}=\mathbb{E}(g(T))=\int\limits_0^n \overline{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t+\overline{a}_{\overline{n}|}\int\limits_n^\infty {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Izmantojam parciālo integrēšanu, kur pieņemam $u=\overline{a}_{\overline{t}|}=\int_0^t v^r\,\mathrm{d}r$ un $\mathrm{d}v={}_t\,p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$. Tad $\mathrm{d}u=v^t\,\mathrm{d}t$ un $v=-(1-{}_tq_x)=-{}_tp_x$. Iegūstam

$$\overline{a}_{x:\,\overline{n}|}=-\overline{a}_{\overline{t}|}\cdot{}_t\,p_x\Big|_0^n+\int\limits_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mathrm{d}t+\overline{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x=\int\limits_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mathrm{d}t.$$

Izsakām termiņa renti ar komutatīvām funkcijām

$$\overline{a}_{x:\,\overline{n}|}=\frac{\int_0^n v^{x+t}l_{x+t}\,\mathrm{d}t}{v^xl_x}=\frac{\overline{N}_x-\overline{N}_{x+n}}{D_x}.$$

Tālāk apskatām gadījumu, kad renti maksā vienreiz gadā gada sākumā un $K<n$. Tad atbilstošā gadījuma lieluma tagadnes vērtība ir

$$g(K)=\begin{cases}\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{ja } K<n\\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{ja } K\geq n\end{cases}=\ddot{a}_{\overline{\min(K+1,n)}|}.$$

Aprēķinām matemātisko cerību

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}=\mathbb{E}(g(K))=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_{k|}q_x+\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{k}v^t\,{}_{k|}q_x+\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\sum_{k=t}^{n-1}{}_{k|}q_x+\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}v^t({}_tp_x-{}_n\,p_x)+{}_n\,p_x\sum_{t=0}^{n-1}v^t=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\,{}_tp_x.$$

Izsakām $\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}$ ar komutatīvām funkcijām

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}=\frac{D_x+D_{x+1}+\ldots+D_{x+n-1}}{D_x}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}.$$

Ja turpretī renti maksā vienreiz gadā gada beigās un $K < n$, tad atbilstošā gadījuma lieluma tagadnes vērtība ir

$$g(K) = \begin{cases} a_{\overline{K}|} & \text{ja } K < n \\ a_{\overline{n}|} & \text{ja } K \geq n \end{cases} = a_{\overline{\min(K,n)}|}.$$

Aprēķinām matemātisko cerību

$$a_{x:\,\overline{n}|} = \mathbb{E}(G(K)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|\; k|}q_x + a_{\overline{n}|\; n}p_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{k} v^t \; _{k|}q_x + a_{\overline{n}|\; n}p_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \sum_{k=t}^{n-1} {}_{k|}q_x + a_{\overline{n}|\; n}p_x$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} v^t ({}_t p_x - {}_n p_x) + {}_n p_x \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \; {}_t p_x.$$

Izsakām $a_{x:\,\overline{n}|}$ ar komutatīvām funkcijām

$$a_{x:\,\overline{n}|} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Atzīmējam, ka

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = 1 + a_{x:\,\overline{n-1}|}.$$

Beigās atrodam sakarības starp apdrošinājumu un renti. Izmantojam sakarību

$$\ddot{a}_{\overline{\min(K+1,n)}|} = \frac{1 - v^{\min(K+1,n)}}{d}.$$

Tad aprēķinot matemātisko cerību iegūstam

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{\min(K+1,n)}|}) = \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{\min(K+1,n)}}{d}\right) = \frac{1 - A_{x:\,\overline{n}|}}{d}.$$

Analoģiski no vienādības nepārtrauktās rentes gadījumā

$$\bar{a}_{\overline{\min(T,n)}|} = \frac{1 - v^{\min(T,n)}}{\delta}$$

aprēķinot matemātisko cerību iegūstam

$$\overline{a}_{x:\,\overline{n}|} = \mathbb{E}(\overline{a}_{\overline{\min(T,n)}|}) = \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{\min(T,n)}}{\delta}\right) = \frac{1-\overline{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta}.$$

3.4 Atliktā rente

Atliktās rentes gadījumā renti sāk maksāt pēc m gadiem. Atbilstošā gadījuma lieluma tagadnes vērtība atliktās rentes gadījumā ir

$$g(T) = \begin{cases} 0 & , \text{ja } T < m \\ v^m \overline{a}_{\overline{T-m}|} & , \text{ja } T \geq m \end{cases}.$$

Aprēķinām matemātisko cerību

$$_{m|}\overline{a}_x = \mathbb{E}(g(T)) = \int\limits_m^\infty v^m \overline{a}_{\overline{t-m}|}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Pārejam integrālī uz jaunu mainīgo $t = \tau + m$. Iegūstam

$$_{m|}\overline{a}_x = \int\limits_0^\infty v^m \overline{a}_{\overline{\tau}|}\, {}_{\tau+m} p_x\, \mu_{x+\tau+m}\, \mathrm{d}\tau.$$

un izmantojot Baijesa formulu

$$_{\tau+m}p_x = {}_\tau p_{x+m} \cdot {}_m p_x$$

iegūstam

$$_{m|}\overline{a}_x = v^m\, {}_m p_x \int\limits_0^\infty \overline{a}_{\overline{\tau}|}\, {}_\tau p_{x+m} \mu_{x+\tau+m}\, \mathrm{d}\tau$$

$$= v^m\, {}_m p_x \overline{a}_{x+m} = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right) \overline{a}_{x+m} = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right) \int\limits_0^\infty v^t\, {}_t p_{x+m}\, \mathrm{d}t.$$

Atzīmējam, ka

$$\overline{a}_x = \overline{a}_{x:\,\overline{n}|} + {}_{n|}\,\overline{a}_x.$$

Tiešām

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \,{}_tp_x \,\mathrm{d}t = \int_0^n v^t \,{}_tp_x \,\mathrm{d}t + \int_n^\infty v^t \,{}_tp_x \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^n v^t \,{}_tp_x \,\mathrm{d}t + v^n \,{}_np_x \int_0^\infty v^t \,{}_tp_{x+n} \,\mathrm{d}t = \bar{a}_{x:\,\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x.$$

Analoģiski

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right) \ddot{a}_{x+m},$$

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x.$$

Piemērs 3.1. Dots, ka $a_x = 20$, $a_{x:\,\overline{n}|} = 18$ un $a_{x+n} = 8$. Aprēķināt ${}_nE_x$ un $\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}$.
Atrisinājums.
Ievērojam, ka

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= a_{x:\,\overline{n}|} + {}_nE_x \, a_{x+n}.$$

Seko ${}_nE_x = 0,25$.
Analoģiski

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} + D_x - N_{x+n+1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= a_{x:\,\overline{n}|} - {}_nE_x + 1.$$

Iegūstam, ka $\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = 18,75$.

3.5 Rentes, kuras maksā m reizes gadā

Lai aprēķinātu rentes, kuras maksā vairākas reizes gadā izmantojam skaitliskās analīzes formulas: *Eilera – Maklorena formulu*[2]

[2] Ja skalāra funkcija $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ir p reizes nepārtraukti diferencējama un pie $t > t_0 > 0$ izpildās identitāte $f(t) \equiv 0$, tad ir spēkā Eilera – Maklorena formula

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{t=0}^\infty f(t) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) \tag{3.1}$$

un *Woolhouse* formulu

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^\infty f\left(\frac{t}{m}\right) \approx \sum_{t=0}^\infty f(t) - \left(\frac{m-1}{2m}\right) f(0) + \left(\frac{m^2-1}{12m^2}\right) f'(0). \tag{3.2}$$

Piemērs 3.2. Izmantosim Eilera – Maklorena formulu, lai atrastu tuvinātu formulu $\bar{a}_x$. Apzīmējam ar

$$f(t) = v^t\, {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t (\delta + \mu_{x+r})\,\mathrm{d}r\right).$$

Tad

$$f'(t) = -(\delta + \mu_{x+t}) \exp\left(-\int_0^t (\delta + \mu_{x+r})\,\mathrm{d}r\right),$$

$f(0) = 1$ un $f'(0) = -(\delta + \mu_x)$. Saskaņā ar formulu (3.1) iegūstam

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\,\mathrm{d}t \approx \sum_{t=0}^\infty v^t\, {}_t p_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta) = \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta).$$

Praksē pēdējo saskaitāmo bieži ignorē. Iegūstam tuvinātu formulu

$$\bar{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{2} = a_x + \frac{1}{2}.$$

Ja renti maksā m reizes gadā, tad to aprēķina pēc formulām

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{t=0}^\infty f(t) - \frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=2}^p \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(0) + R,$$

kur B_k – Bernulli skaitļi un atlikuma R novērtējums ir

$$|R| \leq \frac{2}{(2\pi)^{2(p+1)}} \int_0^\infty |f^{(p)}(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{m} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

un

$$a_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{m} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x.$$

Izmantosim Woolhouse formulu (3.2). Apzīmējam ar $f(t) = v^t {}_tp_x$. Iegūstam

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{m} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$\approx \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_tp_x - \left(\frac{m-1}{2m}\right) - \left(\frac{m^2-1}{12m^2}\right)(\mu_x + \delta).$$

Praksē pēdējo saskaitāmo bieži ignorē. Iegūstam tuvinātu formulu

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \left(\frac{m-1}{2m}\right).$$

Aprēķināsim termiņa rentes tuvinātu formulu

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$\approx \left(\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\right) - \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\right)$$

$$= \ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right).$$

3.6 Mainīgās rentes

Pieņemam, ka x gadus veca persona nepārtraukti savā atlikušā dzīves laikā maksā renti ar mainīgu ātrumu $b(t)$ gadā. Apzīmējam ar $T \geq 0$ – atlikušo dzīves ilgumu, dotā gadījumā nepārtraukto maksāšanas periodu. Ievērojam, ka T ir gadījuma lielums. Maksājuma tagadnes vērtība arī ir gadījuma lielums un ir

$$g(T) = \int_0^T v^t b(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aprēķinam maksājumu tagadnes vērtības matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(g(T)) = \int_0^\infty g(t)\,{}_t p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Izmantojam parciālo integrēšanu iegūstam alternatīvu izteiksmi. Pieņemam, ka $u(t) = \int_0^t v^t b(t)\,\mathrm{d}t$ un $v(t) = -{}_t p_x$. Tad $\mathrm{d}u = v^t b(t)\,\mathrm{d}t$ un $\mathrm{d}v =_t p_x\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t$. Iegūstam

$$\mathbb{E}(g(T)) = -\,{}_t p_x \int_0^t v^t b(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty v^t b(t)\,{}_t p_x\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t b(t)\,{}_t p_x\,\mathrm{d}t.$$

Gadījumā, ja $b(t) = t$ iegūstam

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \mathbb{E}\left(\int_0^T t v^t\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty t v^t\,{}_t p_x\,\mathrm{d}t.$$

Apskatām gadījumu, kad $b(t) = [t]+1$, kur $[t]$ ir skaitļa t veselā daļa. Matemātiskā cerība

$$(I\bar{a})_x = \mathbb{E}\left(\int_0^T ([t]+1)v^t\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty ([t]+1)v^t\,{}_t p_x\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \int_r^\infty v^t\,{}_t p_x\,\mathrm{d}t = \sum_{r=0}^\infty {}_{r|}\bar{a}_x = \frac{\sum_{r=0}^\infty \overline{N}_{x+r}}{D_x} = \frac{\overline{S}_x}{D_x},$$

kur

$$\overline{S}_x = \sum_{r=0}^\infty \overline{N}_{x+r}.$$

Tālāk apskatām gadījumu, kad renti maksā vienu reizi gadā gada sākumā. Atbilstošā gadījuma lieluma tagadnes vērtība ir

$$g(K) = \sum_{t=0}^{K} v^t b(t).$$

Atrodam matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(b(K)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\,{}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k} v^t b(t)\,{}_{k|}q_x$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=t}^{\infty} v^t b(t)\,{}_{k|}q_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t b(t) \sum_{k=t}^{\infty} {}_{k|}q_x = \sum_{t=0}^{\infty} b(t) v^t\,{}_t p_x.$$

Apskatām gadījumu, kad $b(t) = t+1$. Iegūstam

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) v^t_t p_x = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} (t+1) D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}}{D_x} = \frac{S_x}{D_x},$$

kur

$$S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}.$$

Tālāk apskatām gadījumu, kad $b(t) = t$. Tad

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} t v^t_t p_x = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} N_{x+t}}{D_x} = \frac{S_{x+1}}{D_x},$$

Atrodam sakarību starp $(I\ddot{a})_x$ un $(Ia)_x$.

$$(Ia)_x = \sum_{t=0}^{\infty} t v^t_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1-1) v^t\,{}_t p_x$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) v^t_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^t_t p_x = (I\ddot{a})_x - \ddot{a}_x.$$

Izlietojot Eilera-Maklorena formulu atrodam tuvinātu formulu lieluma $(\bar{I}\bar{a})_x$ aprēķināšanai. Pieņemam, ka $f(t) = t v^t\,{}_t p_x$, ja $t \geq 0$. Tad

$$(\bar{I}\bar{a})_x \approx \sum_{t=0}^{\infty} t v^t\,{}_t p_x - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{12} f'(0).$$

Tā kā $f(0) = 0$ un

$$f'(0) = \left[v^t \, {}_t p_x + t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (v^t \, {}_t p_x) \right]_{t=0} = 1,$$

tad

$$(\bar{I}\bar{a})_x \approx \sum_{t=0}^{\infty} t v^t \, {}_t p_x + \frac{1}{12} = (Ia)_x + \frac{1}{12}.$$

Definējam termiņa renti.

$$\begin{aligned}
(I\ddot{a})_{x:\,\overline{n|}} &= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^t \, {}_t p_x = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} (t+1) D_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{D_x + 2D_{x+1} + \ldots + nD_{x+n-1}}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} (t+1) D_{x+t} - \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) D_{x+n+t} - n \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+n+t}}{D_x} \\
&= \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Līdzīgi

$$\begin{aligned}
(Ia)_{x:\,\overline{n|}} &= \sum_{t=1}^{n} t v^t_t p_x = \frac{\sum_{t=1}^{n} t D_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{D_{x+1} + 2D_{x+2} + \ldots + nD_{x+n}}{D_{x+n}} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+t} - \sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+n+t} - n \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+n+t}}{D_x} \\
&= \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Analoģiski iegūstam formulas

$$(\bar{I}\bar{a})_{x:\,\overline{n|}} = \int_0^n t v^t \, {}_t p_x \, \mathrm{d}t,$$

$$(I\bar{a})_{x:\,\overline{n|}} = \frac{\bar{S}_x - \bar{S}_{x+n} - n\bar{N}_{x+n}}{D_x},$$

$$_{m|}(I\ddot{a})_{x:\,\overline{n|}} = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x} \right) (I\ddot{a})_{x+m:\,\overline{n|}}.$$

Pārveidojam pēdējo formulu izlietojot komutatīvās funkcijas. Iegūstam

$$_{m|}(I\ddot{a})_{x:\,\overline{n|}} = \frac{S_{x+m} - S_{x+m+n} - nN_{x+m+n}}{D_x}.$$

Nodaļa 4
Prēmijas

4.1 Ekvivalences princips

Prēmijas, kuras aprēķina neievērojot administratīvos izdevumus, sauc par *neto* prēmijām, bet prēmijas, kuras aprēķinot ņem vērā administratīvos izdevumus, sauc par *bruto prēmijām*. Dzīvības apdrošināšanā polises var būt ar vienreizēju prēmiju iemaksu un var būt ar vairākkārtīgām regulārām, parasti vienādām prēmiju iemaksām. Parasti regulārie maksājumi ir vai nu vienu reizi gadā, vai vienu reizi pusgadā, vai vienu reizi kvartālā vai vienu reizi mēnesī. Var būt ierobežojums maksājumu skaitam. Regulārie prēmiju maksājumi, protams, tiek izbeigti iestājoties apdrošināšanas gadījumam, t.i. personas nāves gadījumā, izbeidzoties polises termiņam vai arī līdz noteiktam termiņam termiņa apdrošināšanā.

Prēmijas aprēķina balstoties uz *ekvivalences principu*, t.i. aprēķina matemātisko cerību

$$\mathbb{E}(Z) = 0, \tag{4.1}$$

kur Z - tagadnes vērtība visiem maksājumiem. Aprēķinot prēmijas parasti procentu likme ir fiksēta.

Savukārt var detalizēt matemātiskās cerības tagadnes vērtību visiem maksājumiem

$$\begin{aligned}
&\text{Visu prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\
=\ &\text{visu apdrošināšanas atlīdzību tagadnes vērtības matemātiskā} \\
&\text{cerība} + \text{visu administratīvo izdevumu tagadnes vērtības} \\
&\text{matemātiskā cerība.}
\end{aligned}$$

Piemērs 4.1. Aprēķināt neto prēmiju pilnai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summa ir S un to izmaksā nekavējoties nāves gadījumā, personas vecums iegādājoties polisi ir x gadi un prēmiju maksā nepārtraukti ar ātrumu P gadā. Aprēķināt neto prēmiju.

Aprēķinam tagadnes vērtību visiem maksājumiem

$$Z = g(T) = P\bar{a}_{\overline{T|}} - Sv^T.$$

Saskaņā ar ekvivalences principu

$$\mathbb{E}(P\bar{a}_{\overline{T|}} - Sv^T) = 0.$$

No šejienes

$$P\bar{a}_x = S\bar{A}_x.$$

Tātad neto prēmiju P konkrētā gadījumā aprēķina pēc formulas

$$P = S\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}.$$

Pie reizes aprēķināsim arī dispersiju

$$g(T) = P\bar{a}_{\overline{T|}} - Sv^T = P\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) - Sv^T = \frac{P}{\delta} - \left(\frac{P+S\delta}{\delta}\right)v^T.$$

Tad

$$\mathrm{Var}(g(T)) = \left(\frac{P+S\delta}{\delta}\right)^2 \mathrm{Var}(v^T) = \left(\frac{P+S\delta}{\delta}\right)^2 (\bar{A}_x^* - \bar{A}^2).$$

4.2 Bruto prēmijas

Bruto prēmijas ietver apdrošināšanas sabiedrības izdevumus. Izdevumus var klasificēt:

- sākuma izdevumi;
- kārtējie izdevumi.

Parasti sākuma izdevumi ir fiksēti vai arī ir proporcionāli apdrošinātai summai, bet kārtējie izdevumi ir proporcionāli kārtējai prēmijai.

Piemērs 4.2. Aprēķināt prēmiju $n = 25$ gadīgai kombinētai dzīvības apdrošināšanas polisei, ja apdrošināšanas summa ir $S = 10000$ €, personas vecums iegādājoties polisi ir $x = 40$ gadi un apdrošināšanas atlīdzību izmaksā apdrošināšanas gada beigās. Prēmiju P maksā vienu reizi gadā apdrošināšanas gada sākumā. Apdrošināšanas izdevumi sastāv no sākuma maksājuma I, kuri veido 1% no apdrošinājuma summas un 5% no no katras prēmijas ieskaitot pirmo. Procentu likme $i = 4\%$ un *A1967-1970 ultimate* mirstības tabulas.

Saskaņā ar ekvivalences principu sastādām vienādojumu

$$P\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = SA_{x:\,\overline{n}|} + 0,05P\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + 0,01S.$$

No šejienes brutto prēmijas vienādojums

$$P = S\frac{A_{x:\,\overline{n}|} + 0,01}{0,95\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}}.$$

Ievērojam, ka

$$A_{x:\,\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|},$$

$$d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$$

un

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

No tabulām atrodam $N_{40} = 132001,93$, $N_{65} = 23021,434$ un $D_{40} = 6986,496$. Aprēķinot iegūstam, ka $P = 276,70$ €.

Pie reizes atzīmēsim, ka $\ddot{a}_{40:\,\overline{25}|} = 15,59873$, $A_{40:\,\overline{25}|} = 0,4000487$ un visu prēmiju summa $\Sigma P = 6917,5$ €.

4.3 Prēmiju apzīmējumi

Lai norādītu apdrošināšanas veidu, lieto indeksus. Apskatīsim biežāk sastopamos apdrošināšanas veidus, to izteiksmes ar aktuārfunkcijām un komutatīvām funkcijām.

- Termiņa apdrošināšana

$$P^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

- Pilnā dzīvības apdrošināšana

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$$

- Kombinētā apdrošināšana

$$P_{x:\,\overline{n}|} = \frac{A_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Nodaļa 5
Apdrošināšanas rezerves

5.1 Rezervju jēdziens

Rezerves ir naudas daudzums, kuru uzkrāj finansu institūcijas tādas kā apdrošināšanas kompānijas un pensiju fondi, lai nosegtu starpību starp nākotnes atbildības, ieskaitot administrēšanas izdevumu, tagadnes vērtību un nākošo prēmiju tagadnes vērtību. Alternatīvi rezervi var uzskatīt kā iepriekšējo prēmiju uzkrājumu mīnus administrēšanas izdevumi un mirstības atlīdzību izmaksas. Rezerves ir vajadzīgas vairāku iemeslu dēļ:

1. lai izmaksātu atlīdzību apdrošināšanas līguma noteiktajā apdrošināšanas gadījumā;
2. lai izmaksātu atlīdzību polises pārtraukšanas gadījumā;
3. lai aprēķinātu revidētas polises prēmiju vai apdrošināšanas summu, polisi izmainot vai konvertējot uz citu polises tipu;
4. lai FKTK varētu kontrolēt apdrošināšanas sabiedrības maksātspēju;
5. lai varētu aprēķināt bonusu ienesīgumu, peļņas sadalījumu akciju turētājiem u.c.

5.2 Prospektīvās rezerves

Apskatām dzīvības apdrošināšanas polisi, kura izdota t gadus atpakaļ x gadus vecai personai. Definējam gadījuma lielumu L – prospektīvās saistības attiecībā pret šo polisi

$$L = \text{ nākošo apdrošināšanas izmaksu tagadnes vērtība}$$

$$+ \text{ nākošo administratīvo izdevumu tagadnes vērtība}$$

$$- \text{ nākošo prēmiju tagadnes vērtība.}$$

Par polises *prospektīvo rezervi* sauc lieluma L matemātisko cerību:

$$\begin{gathered}{}_tV = \mathbb{E}(L) = \text{ nākošo apdrošināšanas izmaksu un nākošo} \\ \text{administratīvo izdevumu tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\ - \text{ nākošo prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība.}\end{gathered}$$

Ja neņem vērā apdrošināšanas sabiedrības administratīvās izmaksas, tad

$$\begin{gathered}{}_tV = \mathbb{E}(L) = \text{ nākošo apdrošināšanas izmaksu} \\ \text{tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\ - \text{ nākošo prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība.}\end{gathered}$$

Par *prēmiju bāzi* sauc mirstības tabulas, procentu likmi un apdrošināšanas sabiedrības izdevumus, kurus izmanto prēmijas P aprēķināšanā. Par *rezerves bāzi* sauc mirstības tabulas, procentu likmi un apdrošināšanas sabiedrības izdevumus, kurus izmanto rezerves ${}_tV$ aprēķināšanā. Rezerves bāze var nesakrist ar prēmiju bāzi. Ja bāzes sakrīt un neievēro apdrošināšanas sabiedrības izdevumus, tad mēs iegūstam *neto prēmiju rezerves*. Pēc norunas rezervi ${}_tV$ aprēķina tieši pirms nākošas prēmijas saņemšanas. Tieši pēc prēmijas saņemšanas polises rezerve ir

$${}_tV + P' - e,$$

kur P' ir bruto prēmija un e apdrošināšanas sabiedrības izdevumi.

Dažreiz aprēķinot bruto polises rezervi ${}_tV$ pie maziem t iegūstam negatīvu skaitli. Tad vispārīgais likums ir polises rezervi šajā gadījumā ņemt vienādu ar nulli.

5.3 Neto prēmiju rezerves

Neto prēmiju rezerves aprēķina neņemot vērā administratīvos izdevumus un pie pieņēmuma, ka sakrīt prēmiju un rezervju bāzes. Līdz ar to neto prēmiju rezervi nosaka mirstības tabulas un procentu likme. No formulas

$$
\begin{aligned}
{}_tV = {} & \text{ neto prēmiju rezerve} \\
= {} & \text{ nākošo apdrošināšanas atlīdzību tagadnes vērtības} \\
& \text{ matemātiskā cerība} \\
- {} & \text{ nākošo prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība.}
\end{aligned}
$$

Piezīme 5.1. Vispārīgā gadījumā neto un bruto prēmiju rezerves atšķiras. Ja turpretī administratīvie izdevumi ir tikai kārtējie izdevumi proporcionāli kārtējai prēmijai un ir viena un tā pati prēmiju bāze, tad neto un bruto prēmiju rezerves sakrīt.

Piemērs 5.1. Apskatām pilnu dzīvības apdrošināšanas polisi par summu S, kur atlīdzību izmaksā nekavējoši nāves gadījumā. Polisi izdeva t gadus atpakaļ, kad personas vecums bija x gadi. Prēmiju maksā nepārtraukti. Atrast neto prēmijas rezervi ${}_tV$.

Apskatām saistības L, kurš ir gadījuma lielums. Tad

$$L = Sv^U - P\overline{a}_{\overline{U|}},$$

kur U atlikušais dzīves ilgums $x+t$ gadus vecai personai un neto prēmija $P = \overline{P}(\overline{A}_x)$. Iegūstam

$${}_tV = \mathbb{E}(L) = S\overline{A}_{x+t} - \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{x+t}.$$

No ekvivalences principa vienādojuma izriet

$$S\overline{A}_x = \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_x.$$

Līdz ar to

$${}_tV = S\left(\overline{A}_{x+t} - \overline{A}_x\frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}\right).$$

Tā kā

$$\overline{A}_x = 1 - \delta\overline{a}_x \quad \text{un} \quad \overline{A}_{x+t} = 1 - \delta\overline{a}_{x+t}$$

tad iegūstam

$${}_tV = S\left(1 - \delta\overline{a}_{x+t} - \left(\frac{1}{\overline{a}_x} - \delta\right)\overline{a}_{x+t}\right) = S\left(1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}\right).$$

Tālāk uzrakstīsim formulas neto prospektīvām rezervēm raksturīgiem apdrošināšanas veidiem.

- pilnai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā nekavējoši apdrošinātās personas nāves gadījumā un prēmiju maksā nepārtraukti
$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_x) = S\overline{A}_{x+t} - \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{x+t}; $$
- pilnai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā apdrošinātās personas nāves gada beigās un prēmiju maksā gada sākumā
$$ {}_tV(A_x) = SA_{x+t} - P(A_x)\ddot{a}_{x+t}; $$
- n gadīgai termiņa dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā nekavējoši apdrošinātās personas nāves gadījumā un prēmiju maksā nepārtraukti
$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}) = S\overline{A}^{1}_{x+t:\,\overline{n-t}|} - \overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|})\overline{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}; $$
- n gadīgai termiņa dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā apdrošinātās personas nāves gada beigās un prēmiju maksā gada sākumā
$$ {}_tV(A^{1}_{x:\,\overline{n}|}) = SA^{1}_{x+t:\,\overline{n-t}|} - P(A^{1}_{x:\,\overline{n}|})\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}; $$
- n gadīgai tīrai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā apdrošinātai personai, ja tā nodzīvo līdz līguma beigu termiņam un prēmiju maksā nepārtraukti
$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}) = S\overline{A}_{x+t:\,\overset{1}{\overline{n-t}|}} - \overline{P}(\overline{A}_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}})\overline{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}; $$
- n gadīgai tīrai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā apdrošinātai personai, ja tā nodzīvo līdz līguma beigu termiņam un prēmiju maksā gada sākumā
$$ {}_tV(A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}) = SA_{x+t:\,\overset{1}{\overline{n-t}|}} - P(A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}})\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}. $$
- n gadīgai kombinētai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā nekavējoši apdrošinātās personas nāves gadījumā vai beidzoties apdrošināšanas līgumam un prēmiju maksā nepārtraukti
$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_{x:\,\overline{n}|}) = S\overline{A}_{x+t:\,\overline{n-t}|} - \overline{P}(\overline{A}_{x:\,\overline{n}|})\overline{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}; $$

- n gadīgai kombinētai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošinājuma summu izmaksā apdrošinātās personas nāves gada beigās vai beidzoties apdrošināšanas līgumam un prēmiju maksā gada sākumā

$$_tV(A_{x:\,\overline{n|}}) = SA_{x+t:\,\overline{n-t|}} - P(A_{x:\,\overline{n|}})\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}};$$

Piemērs 5.2. 35 gadus veca persona iegādājās kombinēto apdrošināšanas polisi uz 25 gadiem par apdrošināšanas summu 50000 €, kuru izmaksātu personas nāves gada beigās vai beidzoties apdrošinājuma līguma termiņam atkarībā no tā kurš notikums iestāsies pirmais. Prēmijas persona maksā vienu reizi gadā gada sākumā. Apdrošināšanas kompānija izmanto *A 1967-70 Ultimate* mirstības tabulas ar 4% interešu likmi. Administratīvie izdevumi ir 2,5% no katras prēmijas un sākuma izdevumi 1% no apdrošinājuma summas. Aprēķināt rezervi pēc četriem apdrošināšanas gadiem.

Atrisinājums Vispirms, izmantojot ekvivalences principu, sastādām vienādojumu bruto prēmijas P aprēķinam.

$$P\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}} = 50000A_{35:\,\overline{25|}} + 0,025P\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}} + 50000 \cdot 0,01.$$

Tad

$$A_{35:\,\overline{25|}} = \frac{M_{35} - M_{60} + D_{60}}{D_{35}} = 0,389425$$

un

$$\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}} = \frac{N_{35} - N_{60}}{D_{35}} = 15,87495.$$

Ieliekam skaitliskās vērtības

$$P = 1290,30\ €.$$

Tālāk aprēķinām rezervi

$$_4V = 50000A_{39:\,\overline{21|}} + 0,025P\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}} - P\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}}.$$

Tad

$$A_{39:\,\overline{21|}} = \frac{M_{39} - M_{60} + D_{60}}{D_{39}} = 0,453177$$

un

$$\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}} = \frac{N_{39} - N_{60}}{D_{35}} = 14,21740.$$

No šejienes

$$_4V = 4772,83 \text{ €}.$$

5.3.1 Rezervju aprēķināšana starplaikos

Apskatām piemēra dēļ pilno dzīvības apdrošināšanu, kur apdrošinājuma summu izmaksā nāves gada beigās un prēmiju maksā apdrošināšanas gada sākumā. Personas vecums noslēdzot polises līgumu bija x un neto prēmija P_x. Ja t ir vesels skaitlis, tad rezerve

$$_{t-0}V_x \quad \text{tieši pirms gada prēmijas iemaksas}$$

$$_{t+0}V_x + P_x \quad \text{tieši pēc gada prēmijas iemaksas.}$$

Aprēķinām rezervi momentā $t = r + k$, kur r vesels skaitlis un $0 < k < 1$. Tad rezervi novērtē izmantojot lineāro interpolāciju

$$_{r+k}V_x \approx (1-k)(_rV_x + P_x) + k\,_{r+1}V_x, \quad 0 < k < 1.$$

5.3.2 Rezerves, ja prēmijas maksā vairākas reizes gadā

Apskatām detalizētāk praksē bieži sastopamu gadījumu, kad prēmijas maksā m reizes gadā (piemēram, ikmēneša prēmiju gadījumā $m = 12$). Lai vienkāršotu izklāstu apskatām pilno dzīvības apdrošināšanu, kuru noslēgusi x gadus veca persona ar apdrošināšanas summu S un kur apdrošināšanas atlīdzību izmaksā nāves gadījumā nekavējoši. Atbilstošo prēmiju (kopēja gada prēmija) apzīmējam ar $P = P^{(m)}(\overline{A}_x)$. Tad rezerve momentā t tieši pirms kārtējas prēmijas iemaksas ir

$$_tV = S\overline{A}_{x+t} - P\ddot{a}^{(m)}_{x+t}$$

un tieši pēc

$$_tV + \frac{P}{m}.$$

Rezervi pie $t = r + \frac{k}{m}$, kur r ir vesels $\frac{1}{m}$ reizinātājs un $0 < k < 1$ parasti aprēķina lineāri interpolējot starp $_rV + \frac{P}{m}$ un $_{r+\frac{1}{m}}V$.

5.4 Retrospektīvās rezerves

Tomēr bieži ir gadījumi, kad ir jāaprēķina uzkrājums, tātad samaksātās prēmijas mīnus apdrošināšanas summas un administratīvie izdevumi.

Apskatām atkal pilno dzīvības apdrošināšanas polisi, kura izdota t gadus atpakaļ x gadus vecai personai. Pieņemam, ka apdrošināšanas summu S izmaksā nāves gada beigās. Līdz ar to l_x identisku polišu uzkrātā summa ir

$$\begin{aligned}
&P_x\left(l_x(1+i)^t + l_{x+1}(1+i)^{t-1} + \ldots + l_{x+t-1}(1+i)\right)\\
&-S\left(d_x(1+i)^{t-1} + d_{x+1}(1+i)^{t-2} + \ldots + d_{x+t-1}\right)\\
&= P_x l_x(1+i)^t\left(1 + p_x v + {}_2p_x v^2 + \ldots + {}_{t-1}p_x v^{t-1}\right)\\
&-S l_x(1+i)^t\left(q_x v + {}_{1|}q_x v^2 + \ldots + {}_{t-1|}q_x v^t\right)\\
&= l_x(1+i)^t\left(P_x\ddot{a}_{x:\,\overline{t|}} - SA^1_{x:\,\overline{t|}}\right).
\end{aligned}$$

Dalam doto izteiksmi ar l_{x+t} vai citiem vārdiem ar dzīvi palikušajiem pēc t gadiem un līdz ar to atrodam vienas polises uzkrāto summu pēc t gadiem

$$\begin{aligned}
&\text{Retrospektīvā rezerve pēc } t \text{ gadiem}\\
&= \frac{l_x(1+i)^t}{l_{x+t}}\left(P_x\ddot{a}_{x:\,\overline{t|}} - SA^1_{x:\,\overline{t|}}\right).\\
&= \frac{D_x}{D_{x+t}}\left(P_x\ddot{a}_{x:\,\overline{t|}} - SA^1_{x:\,\overline{t|}}\right).
\end{aligned}$$

Vispārīgā gadījumā

$$\frac{D_{x+t}}{D_x} \times \text{Retrospektīvā rezerve pēc } t \text{ gadiem}$$

$=$ samaksāto prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība polises izdošanas dienā - izmaksāto apdrošināšanas summu un administratīvo izdevumu tagadnes vērtības matemātiskā cerība polises izdošanas dienā.

Teorēma 5.1. *Ja prēmiju un rezervju bāzes sakrīt, tad dotās polises prospektīvā un retrospektīvā rezerves sakrīt.*

Pierādījums. Pierādījumu ilustrēsim ar pilnās dzīvības polisi, kuru apskatījām iepriekš. Retrospektīvā un prospektīvā rezerves ir sekojošas

$$V_R = \frac{D_x}{D_{x+t}}\left(P_x \ddot{a}_{x:\,\overline{t|}} - SA^1_{x:\,\overline{t|}}\right)$$

un

$$V_P = SA_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

attiecīgi. No šejienes

$$\begin{aligned}
&\frac{D_{x+t}}{D_x}(V_R - V_P)\\
&= P_x \ddot{a}_{x:\,\overline{t|}} - SA^1_{x:\,\overline{t|}} - \frac{D_{x+t}}{D_x}(SA_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t})\\
&= P_x \ddot{a}_x - SA_x = 0.
\end{aligned}$$

Pierādījumā izmantojām sakarības

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\,\overline{t|}} + {}_{t|}\ddot{a}_x,$$

$$A_x = A^1_{x:\,\overline{t|}} + {}_{t|}A_x$$

un prēmijas vienādojumu

$$P_x \ddot{a}_x - SA_x = 0.$$

Dotos argumentus var izmantot citu polišu gadījumā, ieskaitot arī rezerves, kurās ir ņemti vērā administratīvie izdevumi.

No teorēmas izriet, ka ja prēmiju un rezervju bāzes sakrīt, tad nav jāprecizē kādu rezervi izlieto. Praksē kā likums lieto prospektīvo rezervi.

5.5 Zilmerētās rezerves

Pieņemam, ka prēmiju bāze un rezervju bāze sakrīt. Kā parādīts iepriekš, tad prospektīvās un retrospektīvās rezervju metodes dod vienu un to pašu rezultātu. Bet praksē rezerves jau nav neto prēmiju rezerves, jo jāņem vērā arī administratīvie izdevumi. Ar zilmerētām rezervēm[1] var vienkārši aprēķināt rezerves, ja ir zināma neto rezerve.

Apskatīsim n gadu kombinēto dzīvības apdrošināšanu. Apdrošinājuma summa ir S, kuru izmaksā nāves gada beigās, ja tas notiek polises darbības laikā. Ar P'' apzīmējam bruto prēmiju, kuru maksā apdrošināšanas gada sākumā n gadus vai līdz apdrošinātās personas nāvei. Personas vecums polisi iegādājoties ir x gadi. Administratīvie izdevumi sastāv no sākuma izdevumiem IS, kur I proporcionalitātes koeficients, un katras prēmijas administrēšanas izdevumiem e.

Teorēma 5.2. *Augstāk minētās polises zilmerētā rezerve ir*

$$_tV^Z = (1+I)_tV - IS,$$

kur ar $_tV$ apzīmējām atbilstošo neto prēmiju rezervi, t.i.

$$\begin{aligned} _tV &= {}_tV_{x:\,\overline{n|}} = SA_{x+t:\,\overline{n-t|}} - P_{x:\,\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}} \\ &= S\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\right) \end{aligned}$$

Pierādījums. Vispirms aprēķinam polises gada bruto prēmiju P''. No ekvivalences vienādojuma

$$P''\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} = SA_{x:\,\overline{n|}} + e\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} + IS$$

seko

$$P'' - e = S\frac{I + A_{x:\,\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}.$$

Tālāk aprēķinam rezervi pēc laika t ar prospektīvo metodi.

$$\begin{aligned} _tV^Z = &\text{ nākošo izmaksu un administratīvo izdevumu} \\ &\text{mīnuss prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\ &= SA_{x+t:\,\overline{n-t|}} - (P'' - e)\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}} \end{aligned}$$

[1] Rezerves nosauktas vācu matemātiķa un aktuāra August Zillmer (⋆1831.23.I, †1893.22.II) vārdā. Viņš ieguva doktora grādu Rostokas universitātē. Bija dzīvības apdrošināšanas sabiedrību direktors un pirmās sistemātiskās vācu valodā uzrakstītās grāmatas par aktuārmatemātiku autors (1861).

$$= SA_{x+t:\,\overline{n-t|}} - S\left(\frac{I + A_{x:\,\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\right)\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}$$

$$= SA_{x+t:\,\overline{n-t|}} - \frac{SA_{x:\,\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}} - \frac{IS}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}$$

$$= \left(SA_{x+t:\,\overline{n-t|}} - P_{x:\,\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}\right) - \frac{IS}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}.$$

Pēdējā izteiksmē izlietojam neto prēmiju $P_{x:\,\overline{n|}}$, kuru aprēķinam no vienādojuma

$$P_{x:\,\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} = SA_{x:\,\overline{n|}}.$$

Seko

$$_tV^Z =_t V_{x:\,\overline{n|}} - IS\frac{\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}.$$

Ievērojam, ka

$$_tV_{x:\,\overline{n|}} = S\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\right).$$

Līdz ar to

$$\begin{aligned} _tV^Z &=_t V_{x:\,\overline{n|}} - I(S -_t V_{x:\,\overline{n|}}) \\ &= (1+I)_tV_{x:\,\overline{n|}} - IS. \end{aligned}$$

Piemērs 5.3. 10 gadus iepriekš apdrošināšanas kompānija 35 gadus vecai personai pārdeva 20 gadīgu kombinēto dzīvības apdrošināšanas polisi par summu 10000 €, kuru izmaksā nāves gada beigās vai personai nodzīvojot 20 gadus. Prēmijas maksā vienu reizi gadā katra apdrošināšanas gada sākumā. Prēmijas un rezerves aprēķinā izlieto *A 1967-70 Ultimate* mirstības tabulas un 6% ienesīguma procentu likmi. Administratīvos izdevumus sastāda 3% no katras prēmijas un papildus 1,5% no apdrošinājuma summas. Aprēķināt bruto un neto prēmiju, neto rezervi un zilmereto rezervi tieši pirms prēmijas iemaksas un tieši pēc iemaksas.

Atrisinājums. Izlietojot ekvivalences principu aprēķinam bruto prēmiju P"

$$P\text{"}\ddot{a}_{35:\,\overline{20|}} = 10000A_{35:\,\overline{20|}} + 0,015\cdot 10000 + 0,03P\text{"}\ddot{a}_{35:\,\overline{20|}},$$

kur

$$A_{35:\,\overline{20|}} = \frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{D_{35}} = 0,3209572,$$

un

$$\ddot{a}_{35:\,\overline{20|}} = \frac{N_{35} - N_{55}}{D_{35}} = 11,996423.$$

Ieliekam skaitliskās vērtības

$$P\text{''} = \frac{10000}{0,97}\left(\frac{A_{35:\,\overline{20|}} + 0,015}{\ddot{a}_{35:\,\overline{20|}}}\right) = 288,71\,€.$$

Attiecīgi neto prēmija P (neņem vērā administratīvos izdevumus)

$$P = \frac{10000A_{35:\,\overline{20|}}}{\ddot{a}_{35:\,\overline{20|}}} = 267,54\,€.$$

Neto rezerves pēc 10 gadiem

$${}_{10}V_{35:\,\overline{20|}} = 10000A_{45:\,\overline{10|}} - P\ddot{a}_{45:\,\overline{10|}} = 3592,15\,€.$$

Rezervju aprēķinā var izlietot Zilmera formulas. Zilmerētā rezerve tieši pirms gada prēmijas iemaksas

$${}_{10}V^{Z}_{35:\,\overline{20|}} = 1,015\,{}_{10}V_{35:\,\overline{20|}} - 10000 \cdot 0,015 = 3496,03\,€$$

un zilmerētā rezerve tieši pēc prēmijas iemaksas

$$3496,03 + 0,97 \cdot 288,71 = 3776,08\,€.$$

Nodaļa 6
Rezervju lietojumi

6.1 Atteikšanās summa

Apdrošināšanas praksē jāsastopas ar situāciju, ka persona tādu vai citādu iemeslu dēļ vēlas pirms termiņa pārtraukt apdrošināšanas līgumu un saņemt atteikšanās summu[1] SV. Parasti atteikšanās summa ir vienāda ar uzkrāto rezervi mīnus komisijas nauda, pie kam komisijas nauda var būt fiksēts procents no uzkrātās rezerves un var būt mainīgs procents atkarīgs no tā cik ilgi darbojās konkrētais apdrošināšanas līgums. Apskatām sekojošu piemēru.

Piemērs 6.1. Pirms četriem gadiem persona, kurai tad bija 35 gadi iegādājās kombinēto dzīvības apdrošināšanas polisi uz 25 gadiem par apdrošināšanas summu 50000 €, kuru izmaksātu personas nāves gada beigās vai beidzoties apdrošinājuma līguma termiņam atkarībā no tā, kurš notikums iestāsies pirmais. Prēmijas persona maksā vienu reizi gadā sākoties kārtējam apdrošināšanas gadam. Apdrošināšanas kompānija izmanto *A 1967-70 Ultimate* mirstības tabulas ar procentu likmi 4% gadā. Administratīvos izdevumus veido 2,5% no katras prēmijas ieskaitot pirmo un sākuma izdevumi 1% no apdrošinājuma summas. Aprēķināt atteikšanās summu, ja tā ir 95% no rezerves.

Atrisinājums Vispirms, izmantojot ekvivalences principu, sastādām vienādojumu bruto prēmijas P aprēķinam

$$P\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}} = 50000A_{35:\,\overline{25|}} + 0,025P\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}} + 50000\cdot 0,01.$$

Aprēķinam aktuārfunkcijas, izmantojot tabulas datus:

[1] Angl. *surrender value*

$$A_{35:\,\overline{25|}} = \frac{M_{35} - M_{60} + D_{60}}{D_{35}}$$

$$= \frac{1949,1294 - 1477,0836 + 2855,594}{8545,006} = 0,389425$$

un

$$\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}} = \frac{N_{35} - N_{60}}{D_{35}}$$

$$= \frac{171492,78 - 35841,26}{8545,006} = 15,87495.$$

No šejienes bruto prēmija ir

$$P = 1290,29\,€.$$

Tālāk aprēķinām polises prospektīvo rezervi pēc 4 pilniem apdrošināšanas gadiem tieši pirms kārtējās gada prēmijas iemaksas

$${}_4V = 50000A_{39:\,\overline{21|}} + 0,025P\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}} - P\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}}.$$

Atrodam

$$A_{39:\,\overline{21|}} = \frac{M_{39} - M_{60} + D_{60}}{D_{39}}$$

$$= \frac{1918,4892 - 1477,0836 + 2855,594}{7275,307} = 0,453177$$

un

$$\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}} = \frac{N_{39} - N_{60}}{D_{39}}$$

$$= \frac{139277,29 - 35841,26}{8545,006} = 14,2174.$$

No šejienes

$${}_4V = 4772,83\,€.$$

Līdz ar to klientam izmaksātā atteikšanās summa saskaņā ar apdrošināšanas kompānijas nosacījumiem ir

$$SV = 0,95 \cdot {}_4V = 4534,19\,€.$$

Piezīme. Mūsu gadījumā, ievērojot, ka sākuma administratīvie izdevumi ir proporcionāli apdrošinājuma summai ar koeficientu $I = 0,01$ (1% no apdrošinājuma summas), rezervi varēja arī izrēķināt izmantojot zilmerētās rezerves formulu. Atrodam

$$
{}_4V = 50000\left((1+I)\left(1-\frac{\ddot{a}_{39:\,\overline{21|}}}{\ddot{a}_{35:\,\overline{25|}}}\right)-I\right)
$$

$$
= 50000\left((1+0,01)\left(1-\frac{14,2174}{15,87495}\right)-0,01\right) = 4772,83 \text{ €},
$$

kur neto rezervi aprēķina pēc formulas

$$
{}_tV_{x:\,\overline{n|}} = S\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}\right).
$$

6.2 Polises transformācija

Otra biežāk sastopamākā situācija ir, ka polises īpašnieks vēlas polisi pārveidot, t.i. izmainīt apdrošināšanas summu, prēmiju, termiņu utt. Citiem vārdiem pārveidot polisi uz citiem apdrošināšanas noteikumiem.

Kā likums šajos gadījumos rīkojās sekojoši. Aprēķina polises rezervi pirms pārveidošanas un pēc pārveidošanas. Ja V_1 un V_2 ir polises rezerves pirms un pēc pārveidošanas, tad likums ir sekojošs:

$$
V_1 = V_2.
$$

Ja ņem vērā pārveidošanas komisijas naudu C, tad aprēķinus veic saskaņā ar formulu

$$
V_1 - C = V_2.
$$

Aprēķinu bāzes aprēķinot rezerves V_1 un V_2 var atšķirties un V_2 var rēķināt prospektīvi ar bruto prēmijas metodi.

Lai pamatotu augstāk minētās formulas spriež sekojoši. Izmanto ekvivalences principa vienādojumu

$$
\begin{aligned}
V_1 &+ \text{nākošo prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\
&= \text{nākošo izmaksu tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\
&+ \text{nākošo administratīvo izdevumu tagadnes vērtības} \\
&\quad \text{matemātiskā cerība } + C.
\end{aligned}
$$

Pārveidojot vienādību, iegūstam

$$\begin{aligned}
V_1 - C + &\text{nākošo prēmiju tagadnes vērtības matemātiskā cerība} \\
= \ &\text{nākošo izmaksu un nākošo administratīvo izdevumu tagadnes} \\
&\text{vērtības matemātiskā cerība.}
\end{aligned}$$

Piemērs 6.2. 10 gadus atpakaļ persona, kurai pašreiz ir 40 gadu, iegādājās pilno dzīvības apdrošināšanas polisi par summu 10000 € ar nosacījumu, ka apdrošināšanas summu izmaksās nāves gada beigās. Savukārt prēmijas persona maksā vienu reizi gadā apdrošināšanas gada sākumā. Prēmiju aprēķinā izmanto *A 1967-70 Ultimate* mirstības tabulas ar procentu likmi 4% gadā. Administrēšanas izdevumi ir sekojoši – 50% no pirmās prēmijas un 5% no nākošām prēmijām.

Tieši pirms vienpadsmitā maksājuma persona lūdza izmanīt apdrošināšanas nosacījumus un pārveidot polisi uz kombinēto dzīvības apdrošināšanas polisi, tā lai apdrošināšanas summu izmaksātu personas 60-ajā dzimšanas dienā un lai nemainītu pašreizējo prēmiju lielumu. Arī pārveidotās polises aprēķinos izmantot *A 1967-70 Ultimate* mirstības tabulas ar procentu likmi 4% gadā un 5% administratīvos izdevumus no katras prēmijas.

Atrisinājums Apzīmējam gada bruto prēmiju ar P un prēmiju aprēķinām no ekvivalences principa vienādojuma

$$P\ddot{a}_{30} = 10000A_{30} + 0,45P + 0,05P\ddot{a}_{30}.$$

Atrodam aktuārfunkcijas

$$A_{30} = \frac{M_{30}}{D_{30}} = \frac{1981,9545}{10433,309} = 0,189964$$

un

$$\ddot{a}_{30} = \frac{N_{30}}{D_{30}} = \frac{219735,21}{10433,309} = 21,06093.$$

No šejienes

$$P = 97,13 \text{ €}.$$

Atbilstošā rezerve pēc 10 gadiem ir

$$V_1 = 10000\,{}_{10}V_{30} = 10000A_{40} + 0,05P\ddot{a}_{40} - P\ddot{a}_{40} = 989,74 \text{ €},$$

kur

$$A_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} = \frac{1909,4980}{6986,496} = 0,273313$$

un

$$\ddot{a}_{40} = \frac{N_{40}}{D_{40}} = \frac{132001,93}{6986,496} = 18,89387.$$

Izmainītās polises jauno apdrošināšanas summu S aprēķinam izmantojot ekvivalences principu

$${}_{10}V_{40} = SA_{40:\,\overline{20|}} + 0,05 \cdot 97,13\ddot{a}_{40:\,\overline{20|}} - 97,13 \cdot \ddot{a}_{40:\,\overline{20|}},$$

kur

$$A_{40:\,\overline{20|}} = \frac{M_{40} - M_{60} + D_{60}}{D_{40}} = 0,470623$$

un

$$\ddot{a}_{40:\,\overline{20|}} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 13,76379.$$

No šejienes aprēķinam jauno apdrošināšanas summu

$$S = 4801,63\ €.$$

Piemērs 6.3. 45 gadus veca persona iegādājās 10 gadus ilgu kombinēto dzīvības apdrošināšanas polisi. Mēneša prēmija pirmajos piecos gados ir 25 €, nākošajos piecos gados – 50 €. Apdrošinājuma summu izmaksā personas nāves gada beigās vai beidzoties apdrošināšanas līgumam. Lai aprēķinātu prēmijas izmanto *A 1967-70 Ultimate* mirstības tabulas ar procentu likmi 4% gadā. Administratīvie izdevumi ir 1 € mēnesī un sākuma izdevumi 2,5% no apdrošinājuma summas.

Pēc pieciem gadiem persona vēlējās izmainīt apdrošināšanas noteikumus – atstāt nemainīgu iepriekšējo ikmēneša prēmiju un atlīdzību personas nāves gadījumā. Aprēķināt izmainīto apdrošinājuma summu, ja persona nodzīvotu 10 gadus un alternēšanas izdevumi ir 30 €.

Atrisinājums. Uzrakstam ekvivalences principa vienādojumu:

$$300 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{45:\,\overline{10|}} + 300 \cdot {}_{5|}\ddot{a}^{(12)}_{45:\,\overline{5|}} = S(0,025 + A_{45:\,\overline{10|}}) + 12\ddot{a}^{(12)}_{45:\,\overline{10|}},$$

ievērojot, ka pirmajos 5 gados gada prēmija ir 300 € gadā un turpmākajos 5 gados jāiemaksā papildus vēl 300 € gadā. Aprēķinam

$$A_{45:\,\overline{10|}} = \frac{M_{45} - M_{55} + D_{55}}{D_{45}} = 0,680542,$$

$$\ddot{a}_{45:\,\overline{10|}} = \frac{N_{45} - N_{55}}{D_{45}} = 8,305908,$$

$$\ddot{a}_{50:\,\overline{5|}} = \frac{N_{50} - N_{55}}{D_{50}} = 4,5821419,$$

$$\ddot{a}^{(12)}_{45:\,\overline{10|}} \approx \ddot{a}_{45:\,\overline{10|}} - \frac{12-1}{2\cdot 12}\left(1 - \frac{D_{55}}{D_{45}}\right) = 8,1428004,$$

$$\ddot{a}^{(12)}_{50:\,\overline{5|}} \approx \ddot{a}_{50:\,\overline{5|}} - \frac{12-1}{2\cdot 12}\left(1 - \frac{D_{55}}{D_{50}}\right) = 4,489171$$

un

$$_{5|}\ddot{a}^{(12)}_{45:\,\overline{5|}} = \frac{D_{50}}{D_{45}}\ddot{a}^{(12)}_{50:\,\overline{5|}} = 3,627412.$$

No šejienes apdrošināšanas summa ir

$$S = 4866,26 \text{ €}.$$

Aprēķinam rezervi pirms un pēc polises izmaiņas

$$4866,26A_{50:\,\overline{5|}} - (600-12)\ddot{a}^{(12)}_{50:\,\overline{5|}} - 30$$

$$= 4866,26A^{1}_{50:\,\overline{5|}} + S'A_{50:\,\overset{1}{\overline{5|}}} - (300-12)\ddot{a}^{(12)}_{50:\,\overline{5|}},$$

ievērojot, ka personas nāves gadījumā izmaksā 4866,26 €, bet beidzoties 10-gadu līgumam S'. Aprēķinām

$$A^{1}_{50:\,\overline{5|}} = \frac{M_{50} - M_{55}}{D_{50}} = 0,0266091,$$

$$A_{50:\,\overset{1}{\overline{5|}}} = \frac{D_{55}}{D_{50}} = 0,7971547,$$

$$A_{50:\,\overline{5|}} = A^{1}_{50:\,\overline{5|}} + A_{50:\,\overset{1}{\overline{5|}}} = \frac{M_{50} - M_{55} + D_{55}}{D_{50}} = 0,823764.$$

Seko

$$S' = 3139,18 \text{ €}.$$

Nodaļa 7
Peļņas tests

7.1 Naudas plūsmas aprēķins

Pieņemam, ka persona, kuras vecums ir x gadi apdrošinājusi dzīvību uz n gadiem. Lietosim sekojošus apzīmējumus:

- P_t - prēmija, kuru maksā vienu reizi gadā t-ā apdrošināšanas gada t sākumā
- e_t - administratīvie izdevumi, kurus maksā vienu reizi t-ā apdrošināšanas gada t sākumā
- D_t - miršanas ieguvums gada, kuru maksā t-ā apdrošināšanas gada beigās
- S_t - izdzīvošanas ieguvums t-a apdrošināšanas gada biegās un kuru parasti maksā n-tā gada beigās
- i - intereses likme

Parasti aprēķinos izlieto trīs veida bāzes:

- *prēmiju* bāzi, kuru lieto tikai lai aprēķinātu prēmijas;
- *rezerves* bāzi, kuru lieto tikai, lai aprēķinātu rezerves;
- *izdevumu* bāzi.

Dažos gadījumos visas trīs bāzes vai divas bāzes sakrīt. Atzīmējam, ka simboli e_t, i un q_{x+t} attiecās uz trešo bāzi, kamēr P_t attiecās uz pirmo bāzi.

Naudas plūsmu $(CF)_t$, $1 \leq t \leq n$ definē sekojoši

$$(CF)_t = (P_t - e_t)(1+i) - q_{x+t-1}D_t - p_{x+t-1}S_t.$$

Piemērs 7.1. Persona, kuras vecums $x = 55$ gadi apdrošinājās uz 5 gadiem par 5000 €. Prēmijas maksā vienu reizi apdrošināšanas gada sākumā. Prēmiju aprēķinā izlieto *A1967-70 ultimate* tabulas, 6% procentu ienesīguma likmi un sākuma izdevumi ir 250 €. Bez tam, katru reizi maksājot prēmiju sākot ar otro maksā komisijas naudu 42 €, pie kam katru gadu palielinot par 5%. Atlīdzību izmaksā nāves gada beigās.

Atrisinājums Lai aprēķinātu prēmiju izlietojam ekvivalences principa vienādojumu

$$P\ddot{a}_{55:\,\overline{5}|} = 5000A_{55:\,\overline{5}|} + 250 + \sum_{t=1}^{4} 42(1,05)^{t-1}\,{}_{t}p_{55}v^{t}.$$

Aprēķinot, iegūstam

$$P = \frac{5000 \cdot 0,75171 + 250 + 152,62}{4,386} = 948,74 \text{ €}.$$

Tabula 7.1 Naudas plūsmas aprēķins I

t	P_t	e_t	$0,06(P_t - e_t)$	$5000q_{54+t}$	$S_t\,p_{54+t}$
1	948,74	250,00	41,92	42,20	0,00
2	948,74	42,00	54,40	47,10	0,00
3	948,74	44,10	54,28	52,50	0,00
4	948,74	46,30	54,14	58,45	0,00
5	948,74	48,62	54,01	64,95	4935,05

Tabula 7.2 Naudas plūsmas aprēķins II

t	$(CF)_t$	${}_{t-1}p_{55}$	${}_{t-1}p_{55}(CF)_t$
1	698,34	1,00000	698,34
2	913,94	0,99156	906,22
3	906,32	0,98222	890,20
4	898,04	0,97191	872,81
5	-4045,99	0,96055	-3886,38

7.2 Peļņas vektors un peļņas signatūra

Peļņas vektoru aprēķina pēc formulas

$$(PRO)_t = {}_{t-1}V(1+i) + (CF)_t - p_{x+t-1} \cdot {}_tV.$$

Lieto arī pierakstu

$$(PRO)_t = (CF)_t + i\,{}_{t-1}V - (IR)_t,$$

kur

$$(IR)_t = p_{x+t-1} \cdot {}_tV - {}_{t-1}V.$$

Savukārt *peļņas signatūru* aprēķina pēc formulas

$$\sigma_t = {}_{t-1}p_x (PRO)_t.$$

Piemērs 7.2. Apskatām iepriekšējo piemēru. Pieņemam, ka rezerves ir aprēķinātas pēc rezerves bāzes un ir sekojošas:

$$\begin{aligned} {}_0V &= 0 \\ {}_1V &= 919 \\ {}_2V &= 1876 \\ {}_3V &= 2873 \\ {}_4V &= 3914 \\ {}_5V &= 0 \end{aligned}$$

Tabula 7.3 Peļņas vektora un peļņas signatūras aprēķins I

t	${}_{t-1}V$	p_{54+t}	$(IR)_t$	$0,06\,{}_{t-1}V$	$(CF)_t$
1	0,00	0,99156	911,24	0,00	698,34
2	919,00	0,99058	939,33	55,14	913,94
3	1876,00	0,98950	966,84	112,56	906,32
4	2873,00	0,98831	995,26	172,38	898,04
5	3914,00	0,98701	-3914,00	234,84	-4045,99

Tabula 7.4 Peļņas vektora un peļņas signatūras aprēķins II

t	$(PRO)_t$	${}_{t-1}p_{55}$	σ_t
1	-212,90	1,00000	-212,90
2	29,75	0,99156	29,49
3	52,04	0,98222	51,11
4	75,16	0,97191	73,05
5	102,85	0,96055	98,80

Nodaļa 8
Saistīto dzīvību funkcijas

8.1 Saistīto dzīvību mirstības tabulas un sadalījuma likumi

Apskatām divas personas, kuru vecumi atbilstoši ir x un y. Ar T_1 un T_2 apzīmējam atbilstošo personu atlikušos dzīves ilgumus. Acīmredzot T_1 un T_2 ir gadījuma lielumi un pieņemam, ka šie gadījuma lielumi ir neatkarīgi. Apzīmējam ar $T = \min\{T_1, T_2\}$. Mūsu gadījumā T ir *kopīgais atlikušais dzīves ilgums*, t.i. laiks, kurā pirmais no abiem nomirs.

Piezīme 8.1. Ja personas ar vecumiem x un y ir laulātais pāris, tad pieņēmums par gadījumu lielumu T_1 un T_2 neatkarību ir diskutējams, piemēram, auto avārijā, kurā iet bojā abas dzīvības. Bet praksē parasti uzskatām, ka gadījuma lielumi ir neatkarīgi.

Definējam izdzīvošanas un mirstības varbūtības

$$ {}_t p_{xy} = \Pr\{\min\{T_1, T_2\} > t\} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y $$

un

$$ {}_t q_{xy} = \Pr\{\min\{T_1, T_2\} \le t\} = 1 - {}_t p_{xy}. $$

No šejienes

$$ \begin{aligned} {}_t q_{xy} &= 1 - {}_t p_{xy} = 1 - {}_t p_x \cdot {}_t p_y \\ &= 1 - (1 - {}_t q_x)(1 - {}_t q_y) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x \cdot {}_t q_y. \end{aligned} $$

Aprēķinam mirstības intensitāti

$$ \mu_{xy} = \lim_{h \to +0} \frac{{}_h q_{xy}}{h} $$

$$= \lim_{h\to+0}\left(\frac{{}_hq_x}{h}+\frac{{}_hq_y}{h}-\frac{{}_hq_x}{h}\cdot\frac{{}_hq_y}{h}\cdot h\right)=\mu_x+\mu_y.$$

Teorēma 8.1.

$${}_tp_{xy}=\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau:\,y+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Pierādījums.

$${}_tp_{xy}={}_tp_x\cdot{}_tp_y=\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{y+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)$$

$$=\exp\left(-\int\limits_0^t (\mu_{x+\tau}+\mu_{y+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)=\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau:\,y+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right),$$

kur

$$\mu_{x+\tau}+\mu_{y+\tau}=\mu_{x+\tau:\,y+\tau},$$

Atzīmējam, ka gadījuma lieluma kopīgā atlikuša dzīves ilguma T sadalījuma funkcija ir

$$F(t)=\Pr\{\min\{T_1,T_2\}\le t\}=\begin{cases}{}_tq_{xy}\ , \text{ ja } t\ge 0\\ 0\quad\ , \text{ ja } t<0\end{cases}$$

Atrodam sadalījuma funkcijas atvasinājumu, t.i. *blīvuma sadalījuma funkciju*

$$f(t)=F'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-{}_tp_{xy})$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau:\,y+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)$$

$$=\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau:\,y+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\mu_{x+t:\,y+t}.$$

Iegūstam blīvuma sadalījuma funkcijas galīgo veidu

$$f(t)=\begin{cases}{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t:\,y+t}\ , \text{ ja } t>0\\ 0\qquad\qquad\quad\ , \text{ ja } t<0.\end{cases}$$

Pie reizes atzīmējam, ka

$$\int_0^\infty {}_t p_{xy}\, \mu_{x+t\,:\,y+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty {}_t p_{xy}\, (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})\, \mathrm{d}t = 1$$

Definējam

$$l_{xy} = l_x \cdot l_y$$

($x \geq \alpha_1$, $y \geq \alpha_2$, kur α_1, α_2 ir jaunākie vecumi). Tad saistīto dzīvību izdzīvošanas varbūtību

$${}_t p_{xy} = \frac{l_{x+t\,:\,y+t}}{l_{xy}},$$

saistīto dzīvību mirstības varbūtību

$${}_t q_{xy} = \frac{l_{xy} - l_{x+t\,:\,y+t}}{l_{xy}}$$

un atlikto saistīto dzīvību mirstības varbūtību

$$\begin{aligned} {}_{k|}q_{xy} &= {}_k p_{xy} - {}_{k+1} p_{xy} \\ &= \frac{l_{x+k\,:\,y+k} - l_{x+k+1\,:\,y+k+1}}{l_{xy}} = \frac{d_{x+k\,:\,y+k}}{l_{xy}}, \end{aligned}$$

kur

$$d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1\,:\,y+1}$$

varam izteikt izlietojot vienas dzīvības mirstības tabulas.

Parasti aktuāros aprēķinos izmanto diskrēto gadījuma lielumu K – kopīgo atlikušo dzīves ilgumu veselos gados, kur $k = 0, 1, 2, \ldots$. Citiem vārdiem K ir

$$K = \min\{K_1, K_2\},$$

kur K_1 ir gadījuma lieluma T_1 vesela daļa un K_2 gadījuma lieluma T_2 veselā daļa. Tad gadījuma lieluma kopīgā atlikušā dzīves ilguma K sadalījuma likums ir

$$\Pr\{K = k\} = \Pr\{k \leq T < k+1\} = {}_{k|}q_{xy} = {}_k p_{xy} - {}_{k+1} p_{xy}.$$

8.2 Vidējais kopīgais atlikušais dzīves ilgums

Definīcija 8.1. Par *vidējo atlikušo dzīves ilgumu* sauc gadījuma lieluma atlikuša dzīves ilguma $T = \min\{T_1, T_2\}$ matemātisko cerību un apzīmē ar $\overset{\circ}{e}_{xy}$. Tātad

$$\overset{\circ}{e}_{xy} = \mathbb{E}(T) = \int_0^\infty t \cdot {}_t p_{xy}\, \mu_{x+t\,:\,y+t}\, \mathrm{d}t.$$

Analogi, ka vienas dzīvības gadījumā, izmantojot parciālo integrēšanu iegūstam

$$\overset{\circ}{e}_{xy} = \int_0^\infty {}_t p_{xy}\, \mathrm{d}t.$$

Līdzīgi rīkojoties diskrētajā gadījumā iegūstam

$$e_{xy} = \mathbb{E}(K) = \sum_{k=1}^\infty k \cdot {}_{k|}\, q_{xy} = \sum_{k=1}^\infty {}_k p_{xy}.$$

Izmantojot Eilera – Maklorena formulu varam atrast tuvinātu formulu

$$e_{xy} \approx \overset{\circ}{e}_{xy} - \frac{1}{2}.$$

8.3 Monetārās funkcijas

Monetāro funkciju apzīmējumi saistīto dzīvību gadījumā ir līdzīgi vienas dzīvības gadījumam (jāmaina x uz xy). Vispirms aprēķinām nepārtraukto renti

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xy} &= \mathbb{E}(\bar{a}_{\overline{T|}}) \\ &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\, {}_t p_{xy}\, \mu_{x+t\,:\,y+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_{xy}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Arī pierādījums ir analogs vienas dzīvības gadījumam.

Savukārt apdrošināšanas atlīdzība pilnai kopīgai dzīvības apdrošināšanai, ja apdrošināšanas atlīdzību izmaksā nekavējoši ir

$$\overline{A}_{xy} = \mathbb{E}(v^T) = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{xy} \, \mu_{x+t\,:\,y+t} \, \mathrm{d}t.$$

Atrodam sakarību starp $\overline{A}_{xy}$ un $\overline{a}_{xy}$

Teorēma 8.2.

$$\overline{A}_{xy} = 1 - \delta \overline{a}_{xy}.$$

Pierādījums.

$$\overline{a}_{xy} = \mathbb{E}(\overline{a}_{\overline{T|}}) = \mathbb{E}\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) = \frac{1-\overline{A}_{xy}}{\delta}.$$

No šejienes seko vajadzīgā vienādība.

Monetārā funkcija kombinētai dzīvības apdrošināšanai saistīto dzīvību gadījumā ir

$$\mathbb{E}(v^{\min(T,n)}) = \overline{A}_{xy:\,\overline{n|}} = \overline{A}^{1}_{xy:\,\overline{n|}} + \overline{A}_{xy:\,\overset{1}{\overline{n|}}}$$

$$= \int_0^n v^t \, {}_tp_{xy} \, \mu_{x+t:y+t} \, \mathrm{d}t + v^n \, {}_np_{xy}.$$

Līdzīgi

$$\ddot{a}_{xy} = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_tp_{xy}.$$

Pārejās saistīto dzīvību funkcijas

$$a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_{xy} = \ddot{a}_{xy} - 1,$$

$$\ddot{a}_{xy:\,\overline{n|}} = \ddot{a}_{xy} - {}_np_{xy} v^n \ddot{a}_{x+n\,:\,y+n}.$$

Izlietojot Woolhouse aproksimāciju atrodam

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} \approx \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m},$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy:\,\overline{n|}} \approx \ddot{a}_{xy:\,\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_np_{xy} v^n),$$

Savukārt izlietojot Eilera – Maklorena formulu iegūstam

$$\overline{a}_{xy} \approx \ddot{a}_{xy} - \frac{1}{2} = a_{xy} + \frac{1}{2}.$$

Komutatīvās funkcijas parasti nelieto. Tomēr

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} l_{xy}$$

$$N_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:\, y+t}.$$

No šejienes iegūstam

$$_nE_{xy} = v^n\, _np_{xy} = \frac{D_{x+n:\, y+n}}{D_{xy}}$$

un

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+y:\, y+t}}{l_{xy}} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}.$$

Analoģiski

$$A_{xy} = \mathbb{E}(v^{K+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\, _{t|}q_{xy}.$$

Teorēma 8.3.

$$A_{xy} = 1 - d\ddot{a}_{xy}.$$

Pierādījums.

$$\ddot{a}_{xy} = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}) = \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{K+1}}{d}\right) = \frac{1-A_{xy}}{d}.$$

No šejienes seko vajadzīgā vienādība.

Arī prēmijas rēķina analogi vienas dzīvības gadījumam. Piemēram, saistīto dzīvību pilnās apdrošināšanas neto prēmija ir

$$\overline{P}(\overline{A}_{xy}) = S\frac{\overline{A}_{xy}}{\overline{a}_{xy}} = S\left(\frac{1}{\overline{a}_{xy}} - \delta\right).$$

Arī rezervju aprēķināšanā nav principiālu atšķirību ar vienas dzīvības polisēm. Piemēram,

$$_t\overline{V}(\overline{A}_{xy}) = S\overline{A}_{x+t:\, y+t} - \overline{P}(\overline{A}_{xy})\overline{a}_{x+t:\, y+t}.$$

Var pierādīt, ka

$$ {}_t\overline{V}(\overline{A}_{xy}) = S\left(1 - \frac{\overline{a}_{x+t:\,y+t}}{\overline{a}_{xy}}\right). $$

8.4 Pēdējā izdzīvojošā varbūtības

Apskatām divas personas, kuru vecumi atbilstoši ir x un y. Ar T_1 un T_2 apzīmējam atbilstošo personu atlikušos dzīves ilgumus. Acīmredzot T_1 un T_2 ir gadījuma lielumi. Apzīmējam ar $T = \max\{T_1, T_2\}$.

Definējam izdzīvošanas un mirstības varbūtības

$$ {}_t p_{\overline{xy}} = \Pr\{\max\{T_1, T_2\} > t\} = 1 - {}_t q_{\overline{xy}}. $$

No elementārās varbūtību teorijas

$$ {}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy} $$

no kurienes

$$ \begin{aligned} {}_t q_{\overline{xy}} = 1 - {}_t p_{\overline{xy}} &= 1 - (1 - {}_t q_x) - (1 - {}_t q_y) + (1 - {}_t q_{xy}) \\ &= {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{xy}. \end{aligned} $$

Dotās formulas ir pareizas pat gadījumā ja T_1 un T_2 nav neatkarīgi gadījuma lielumi. Ja turpretī tie ir neatkarīgi, tad

$$ {}_t p_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y $$

no kurienes

$$ {}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \cdot {}_t p_y $$

un

$$ {}_t q_{\overline{xy}} = {}_t q_x \cdot {}_t q_y. $$

Atzīmējam ka funkcija $t \mapsto {}_t q_{\overline{xy}}$ ir gadījuma lieluma $T = \max\{T_1, T_2\}$ sadalījuma funkcija. Atrodam bīvuma funkciju

$$ f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_t q_{\overline{xy}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_t q_x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_t q_y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_t q_{xy}). $$

No šejienes

$$ f(t) = {}_t p_x\, \mu_{x+t} + {}_t p_y\, \mu_{y+t} - {}_t p_x \cdot {}_t p_y\, (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}). $$

Līdz ar to mirstības intensitāte

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{{}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y\,(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})}{{}_tp_{\overline{xy}}}.$$

8.5 Pēdējā izdzīvojošā monetārās funkcijas

Vispirms atrodam rentu aprēķināšanas formulas. Apskatām vienādību

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}.$$

Pareizinam šo vienādību ar v^t un integrējam vai summējām pa t. Iegūstam sekojošas sakarības:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy},$$

$$\overline{a}_{\overline{xy}} = \overline{a}_x + \overline{a}_y - \ddot{a}_{xy},$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{xy}} = \ddot{a}^{(m)}_x + \ddot{a}^{(m)}_y - \ddot{a}^{(m)}_{xy}.$$

Bez tam varam arī definēt termiņa renti

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\,\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} v^t\big({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}\big) = \ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} + \ddot{a}_{y:\,\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\,\overline{n|}}.$$

Tālāk atrodam apdrošinājumu summu aprēķināšanas formulas. Izmantojam sakarību

$$v^{T_1} + v^{T_2} = v^{\min\{T_1,T_2\}} + v^{\max\{T_1,T_2\}}.$$

No šejienes aprēķinam matemātisko cerību

$$\mathbb{E}\big(v^{T_1} + v^{T_2}\big) = \mathbb{E}\big(v^{\min\{T_1,T_2\}} + v^{\max\{T_1,T_2\}}\big).$$

Seko

$$\overline{A}_x + \overline{A}_y = \overline{A}_{xy} + \overline{A}_{\overline{xy}}.$$

Analoģiski, ja apdrošinājuma summu izmaksā nāves gada beigās. Tad

$$v^{K_1+1}+v^{K_2+1}=v^{\min\{K_1+1,K_2+1\}}+v^{\max\{K_1+1,K_2+1\}}.$$

No šejienes iegūstam sakarību

$$A_x+A_y=A_{xy}+A_{\overline{xy}}.$$

Atzīmēsim vēl sakarību starp apdrošinājuma summu un renti

$$A_{\overline{xy}}=A_x+A_y-A_{xy}$$
$$=(1-d\ddot{a}_x)+(1-d\ddot{a}_y)-(1-d\ddot{a}_{xy})=1-d\ddot{a}_{\overline{xy}}.$$

Līdzīgi iegūstam

$$\overline{A}_{\overline{xy}}=\overline{A}_x+\overline{A}_y-\overline{A}_{xy}$$
$$=(1-\delta\overline{a}_x)+(1-\delta\overline{a}_y)-(1-\delta\overline{a}_{xy})=1-\delta\overline{a}_{\overline{xy}}.$$

Tālāk pārejam pie prēmiju aprēķināšanas. Izmantojam ekvivalences vienādojumu. Piemēram, aprēķināt neto prēmiju saistīto pilnas dzīves apdrošināšanai, ja apdrošināšanas atlīdzību izmaksā otrās personas nāves gada beigās. Iegūstam

$$\overline{P}(\overline{A}_{\overline{xy}})=S\frac{\overline{A}_{\overline{xy}}}{\overline{a}_{\overline{xy}}}=S\left(\frac{1}{\overline{a}_{\overline{xy}}}-\delta\right)$$

Nodaļa 9
Nosacītā apdrošināšana

9.1 Nosacītās varbūtības

Apskatām divas personas, kuru vecumi atbilstoši ir x un y. Ar T_1 un T_2 apzīmējam atbilstošo personu atlikušos dzīves ilgumus. Acīmredzot T_1 un T_2 ir gadījuma lielumi un pieņemam, ka šie gadījuma lielumi ir neatkarīgi. Apzīmējam ar

$$
\begin{aligned}
{}_tq^{1}_{xy} &= \Pr\{T_1 \le t \text{ un } T_1 \le T_2\} \\
&= \Pr\{\text{persona, kuras vecums ir } x,\ \text{nomirs tuvāko } t \\
&\quad \text{gadu laikā un pirms personas ar vecumu } y\}.
\end{aligned}
$$

Gadījuma lielumu T_1 un T_2 atbilstošās blīvuma sadalījuma funkcijas ir

$$f_1(t_1) = {}_{t_1}p_x \mu_{x+t_1}$$

un

$$f_2(t_2) = {}_{t_2}p_y \mu_{y+t_2}.$$

Tad

$$
\begin{aligned}
{}_tq^{1}_{xy} &= \iint\limits_{0<t_1\le t;\ t_1\le t_2} f_1(t_1) f_2(t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_0^t \left(\int_{t_1}^{\infty} {}_{t_1}p_x \mu_{x+t_1} \cdot {}_{t_2}p_y \mu_{y+t_2}\, \mathrm{d}t_2 \right) \mathrm{d}t_1
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^t {}_{t_1}p_x \mu_{x+t_1} \cdot {}_{t_1}p_y \, \mathrm{d}t_1 = \int_0^t {}_rp_{xy}\mu_{x+r} \, \mathrm{d}r.$$

Ja $t = 1$, tad simbolu t atmetam un

$$q^1_{xy} = \int_0^1 {}_tp_{xy}\mu_{x+t} \, \mathrm{d}t.$$

Atzīmējam arī, ka

$${}_\infty q^1_{xy} = \int_0^\infty {}_tp_{xy}\mu_{x+t} \, \mathrm{d}t$$

$= \Pr\{x$ gadus veca persona nomirs pirms personas ar vecumu $y\}$.

Vēl ievērojam, ka speciālā gadījumā $x = y$ iegūstam

$${}_tq^1_{x:\,x} = \int_0^t {}_tp_{xx}\mu_{x+t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t {}_rp_{xx}\mu_{x+r:\,x+r} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\,{}_tq_{xx}.$$

Bez tam ir spēkā formula

$${}_tq^1_{xy} + {}_tq_{x\overset{1}{y}} = {}_tq_{xy}.$$

Atzīmējam vēl

$${}_\infty q^1_{xy} + {}_\infty q_{x\overset{1}{y}} = {}_\infty q_{xy} = 1.$$

Līdzīgi var definēt atliktās nosacītās varbūtības

$${}_{t|}q^1_{x:\,y} = {}_tp_{xy}q^1_{x+t:\,y+t}$$

un

$${}_{t|\infty}q^1_{x:\,y} = {}_tp_{xy} \cdot {}_\infty q^1_{x+t:\,y+t}.$$

Analogi definējam

$${}_tq^2_{xy} = \Pr\{\text{persona, kuras vecums ir } x \text{ nomirs tuvāko } t$$

gadu laikā un pēc personas ar vecumu $y\}$.

Veicot analoģiskos aprēķinus, kā gadījumā ${}_tq^1_{xy}$ iegūstam

$$
\begin{aligned}
{}_tq^2_{xy} &= \iint\limits_{0<t_1\le t;\ t_2<t_1} f_1(t_1)f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t_1} {}_{t_1}p_x\mu_{x+t_1} \cdot {}_{t_2}p_y\mu_{y+t_2}\,\mathrm{d}t_2 \right) \mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^t (1 - {}_rp_y)\,{}_rp_x\mu_{x+r}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^t {}_rp_x\mu_{x+r}\,\mathrm{d}r - \int_0^t {}_rp_y \cdot {}_rp_x\mu_{x+r}\,\mathrm{d}r = {}_tq_x - {}_tq^1_{xy}.
\end{aligned}
$$

No šejienes

$$
{}_tq_x = {}_tq^1_{xy} + {}_tq^2_{xy}
$$

kura izriet arī no vienādības

$$
\Pr\{T_1 \le t\} = \Pr\{T_1 \le t \text{ un } T_1 \le T_2\} + \Pr\{T_1 \le t \text{ un } T_1 > T_2\}.
$$

9.2 Nosacītā apdrošināšana

Apskatām apdrošināšanas atlīdzību, kuru izmaksā nekavējoši, ja persona ar vecumu x nomirst pirms personas ar vecumu y. Aprēķinam tagadnes vērtības matemātisko cerību

$$
\begin{aligned}
\overline{A}^1_{xy} &= \mathbb{E}\begin{pmatrix} v^{T_1}, \text{ ja } T_1 \le T_2 \\ 0, \quad \text{ja } T_1 > T_2 \end{pmatrix} \\
&= \iint\limits_{t_1\le t_2} v^{t_1}({}_{t_1}p_x\mu_{x+t_1})({}_{t_2}p_y\mu_{y+t_2})\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty v^{t_1}\,{}_{t_1}p_x\mu_{x+t_1} \left(\int_{t_1}^\infty {}_{t_2}p_y\mu_{y+t_2}\,\mathrm{d}t_2 \right) \mathrm{d}t_1
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^\infty v^{t_1}\, {}_{t_1}p_x \mu_{x+t_1} \left({}_{t_1}p_y\right) \mathrm{d}t_1$$

$$= \int_0^\infty v^t\, {}_t p_{xy} \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Praksē integrāļa aprēķināšanai lieto tuvinātās integrācijas formulas, piemēram, Simpsona formulu.

Analoģiski var aprēķināt apdrošināšanas atlīdzību, kuru izmaksā nekavējoši, ja persona ar vecumu x nomirst pirms personas ar vecumu y tuvāko n gadu laikā. Aprēķinam tagadnes vērtības matemātisko cerību ir

$$\overline{A}^{1}_{x:\, y:\, \overline{n|}} = \int_0^n v^t\, {}_t p_{xy} \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t.$$

Atzīmējam, ka

$$\overline{A}^{1}_{xx} = \frac{1}{2} \overline{A}_{xx}.$$

Bez tam ir spēkā formula

$$\overline{A}_{xy} = \overline{A}^{1}_{xy} + \overline{A}_{x\overset{1}{y}}.$$

Tālāk apskatīsim nosacīto apdrošināšanas atlīdzību, kuru izmaksā nekavējoši otrās nāves gadījumā, t.i. ja persona ar vecumu x nomirst pēc personas ar vecumu y. Definējam

$$\overline{A}^{2}_{xy} = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t} (1 - {}_t p_y)\, \mathrm{d}t.$$

No šejienes

$$\overline{A}_x = \overline{A}^{1}_{xy} + \overline{A}^{2}_{xy}.$$

Termiņa nosacītā apdrošinājuma atlīdzība, kuru maksā otrās nāves gadījumā, t.i. atlīdzību, kuru izmaksā personas ar vecumu x nāves gadījumā tuvāko n gadu laikā, ja persona ar vecumu x nomirst pēc personas ar vecumu y. Iegūstam

$$\int_0^n v^t \,{}_tp_x \mu_{x+t} (1 - {}_tp_y)\,\mathrm{d}t = \overline{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|} - \overline{A}^{\,1}_{xy:\,\overline{n}|}.$$

Atzīmējam, ka

$$\overline{A}^{\,2}_{xx} = \frac{1}{2}\overline{A}_{\overline{xx}}.$$

Tālāk apskatām gadījumu, kad apdrošinājuma atlīdzību, kuru izmaksā apdrošināšanas gada beigās. Tad precīza izteiksme ir

$$A^1_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_tp_{xy} q^1_{x+t:\,y+t}.$$

Tomēr praksē mēs varam lietot tuvinātu formulu

$$A^1_{xy} \approx (1+i)^{1/2}\overline{A}^{\,1}_{xy}.$$

Līdzīgi varam iegūt citas formulas:

$$A_{xy} = A^1_{xy} + A_{xy}^{\;\;1}$$

$$A_x = A^1_{xy} + A^2_{xy}$$

$$A^1_{xx} = \frac{1}{2}A_{xx}$$

$$A^2_{xx} = \frac{1}{2}A_{\overline{xx}}$$

Nodaļa 10
Reversīvās rentes

10.1 Reversīvā rente, kuru maksā nepārtraukti

Apskatām renti, kuru maksā otrai personai nepārtraukti pēc pirmās personas nāves. Tad rentes tagadnes vērtība ir

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{U|}} - \bar{a}_{\overline{T|}} & \text{ja } U > T \\ 0 & \text{ja } U \le T \end{cases},$$

kur

- T = pirmās personas dzīves ilgums ar blīvuma sadalījuma funkciju $t \mapsto {}_t p_x \mu_{x+t}$
- U = otrās personas dzīves ilgums ar blīvuma sadalījuma funkciju $u \mapsto {}_u p_y \mu_{y+u}$

Atzīmējam, ka abām personām ir atšķirīgas mirstības intensitātes.

Definējam renti kā gadījuma lieluma Z matemātisko cerību

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x|y} &= \mathbb{E}(Z) \\ &= \iint\limits_{u>t} (\bar{a}_{\overline{u|}} - \bar{a}_{\overline{t|}})({}_u p_y \mu_{y+u})({}_t p_x \mu_{x+t})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty (\bar{a}_{\overline{u|}} - \bar{a}_{\overline{t|}})\,{}_u p_y \mu_{y+u}\,\mathrm{d}u \right) {}_t p_x \mu_{x+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Teorēma 10.1.

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}.$$

Pierādījums. Ievērojam, ka

$$Z+\overline{a}_{\overline{\min(T,U)|}} = \begin{cases} (\overline{a}_{\overline{U|}} - \overline{a}_{\overline{T|}}) + \overline{a}_{\overline{T|}}, & \text{ja } U > T \\ \overline{a}_{\overline{U|}}, & \text{ja } U \leq T \end{cases} = \overline{a}_{\overline{U|}}.$$

Ņemam matemātisko cerību no vienādības abām pusēm. Iegūstam

$$\mathbb{E}(Z) + \overline{a}_{xy} = \overline{a}_y.$$

No pēdejās formulas seko vajadzīgā formula. □

Teorēma 10.2.

$$\overline{a}_{x|y} = \int_0^\infty v^t_t p_x \mu_{x+t\,t} p_y \overline{a}_{y+t}\,\mathrm{d}t.$$

Pierādījums. Ievērojam, ka

$$\overline{a}_{x|y} = \overline{a}_y - \overline{a}_{xy} = \int_0^\infty v^t\,{}_t p_y (1 - {}_t p_x)\,\mathrm{d}t.$$

Integrējam doto integrāli parciāli. Pieņemam, ka $f(t) = 1 - {}_t p_x = {}_t q_x$ un $g'(t) = v^t\,{}_t p_y$. Tad $f'(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$ un $g(t) = -{}_{t|}\overline{a}_y = -\int_t^\infty v^r\,{}_r p_y\,\mathrm{d}r$. Iegūstam

$$\begin{aligned} \overline{a}_{x|y} &= \int_0^\infty f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-{}_{t|}\overline{a}_y)\,{}_t q_x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} ({}_{t|}\overline{a}_y)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} v^t\,{}_t p_y \overline{a}_{y+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Piezīme 10.1. Izlietojot Eilera-Maklorena formulu varam atrast tuvinātu formulu nosacītai rentei

$$\overline{a}_{x|y} = \overline{a}_y - \overline{a}_{xy}$$

$$\approx \left(a_y + \frac{1}{2}\right) - \left(a_{xy} + \frac{1}{2}\right) = a_y - a_{xy} = a_{x|y}.$$

□

10.2 Reversīvā rente, kuru maksā m reizes gadā

Pieņemam, ka rente tiek maksāta m reizes gadā un pirmais maksājums tiek izdarīts gada $\frac{1}{m}$ daļas beigās pēc pesonas ar vecumu x nāves. Lietosim simbolu $a_{x|y}^{(m)}$ šajā gadījumā. Lietojam vienādību

$$a_{x|y}^{(m)} + a_{xy}^{(m)} = a_y^{(m)},$$

no kurienes izriet

$$a_{x|y}^{(m)} = a_y^{(m)} - a_{xy}^{(m)}.$$

Ja $m = 1$, to atmetam un iegūstam formulu

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy}.$$

Saskaņā ar Woolhousa formulu

$$a_{x|y}^{(m)} \approx \left(a_y + \frac{m-1}{2m}\right) - \left(a_{xy} + \frac{m-1}{2m}\right)$$
$$= a_y - a_{xy} = a_{x|y}.$$

Nodaļa 11
Daudzdekrementu tabulas

11.1 Ievads

Apskatām cilvēku kopu ar divām izejas modām α un β. Piemēram, apskatām kādas lielas kompānijas viena vecuma x neprecējušos darbinieku kopu. No kopas darbinieki var iziet vai nu saskaņā ar modu α – apprecoties vai arī saskaņā ar modu β – atstājot kompāniju. Lai vienkāršotu modeli ignorojam nāves gadījumu. Ar T_1 apzīmējam gadījuma lielumu – laiku pēc kura darbinieks apprecās neatkarīgi no tā vai viņš strādā vai vairs nestrādā kompānijā un ar T_2 apzīmējam gadījuma lielumu – laiku pēc kura darbinieks aiziet no kompānijas neatkarīgi no tā vai viņš ir precējies vai nē. Ar $T = \min\{T_1, T_2\}$ apzīmējamam laiku, kad kompānijas darbinieks iziet no kopas saskaņā ar modu α (apprecās) vai saskaņā ar modu β (atstāj kompāniju). Apskatītā situācija ir līdzīga saistīto dzīvību gadījumam.

Definējam varbūtību, ka darbinieks atrodās kopā un nav izgājis no pēc abām modām

$$_t(ap)_x = \Pr\{T \geq t\}.$$

Apzīmējam ar

$$_t(aq)_x = \Pr\{T < t\}$$

varbūtību ka darbinieks ir atstājis kopu saskaņā ar modu α vai β. Ar $(al)_x$ apzīmējam x gadus vecu cilvēku skaitu apskatāmājā kopā. Tad

$$_t(ap)_x = \frac{(al)_{x+t}}{(al)_x}, \quad x \geq x_0, \quad t \geq 0.$$

Ja $t = 1$, tad atmetām priekšējo indeksu

$$(aq)_x = \frac{(ad)_x}{(al)_x} = \frac{(al)_x - (al)_{x+1}}{(al)_x}$$

un

$$_{t|}(aq)_x = \frac{(ad)_{x+t}}{(al)_x}.$$

Tapat varam definēt "izejas intensitāti" ar robežu

$$(a\mu)_x = \lim_{h\to+0} \frac{_h(aq)_x}{h}.$$

Analogi, kā mirstības tabulās

$$_t(ap)_x = \exp\left(-\int\limits_0^t (a\mu)_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Tad blīvuma sadalījuma funkcija ir

$$f(t) = \begin{cases} _t(ap)_x(a\mu)_{x+t} & \text{, ja } t \geq 0 \\ 0 & \text{, ja } t < 0 \end{cases}$$

un attiecīgi sadalījuma funkcija ir

$$_t(aq)_x = \int\limits_0^t {}_r(ap)_x(a\mu)_{x+r}\,\mathrm{d}r, \quad t \geq 0.$$

11.2 Saistītās viena dekrementa tabulas

Katrai dekrementa modai ir sava "mirstības tabula", apzīmējam, piemēram, ar l_x^α vai l_x^β. Tad ar

$$_tp_x^\alpha = \Pr\{T_1 \geq t\}$$

apzīmējam varbūtību, ka neiziet no modas α laikā t, neatkarīgi vai atrodās vai neatrodās modā β (neapprecās laikā t mūsu piemērā). Attiecīgi ar

$$_tp_x^\beta = \Pr\{T_2 \geq t\}$$

apzīmējam varbūtību, ka neiziet no modas β laikā t, neatkarīgi vai atrodās vai neatrodās modā α (aiziet no kompānijas laikā t mūsu piemērā). Bez tam

$$_tq_x^\alpha = \Pr\{T_1 < t\} = 1 - {_tp_x^\alpha}$$

un

$$_tq_x^\beta = \Pr\{T_2 < t\} = 1 - {_tp_x^\beta}.$$

11.3 Sakars starp daudzu dekrementu tabulām un ar tām saistītām viena dekrementa tabulām

Parasti pieņem, ka gadījuma lielumi T_1 un T_2 ir neatkarīgi. Tad iegūstam

$$\begin{aligned} {_t(ap)_x} &= \Pr\{T_1 \geq t \text{ un } T_2 \geq t\} \\ &= \Pr\{T_1 \geq t\}\Pr\{T_2 \geq t\} = {_tp_x^\alpha} \cdot {_tp_x^\beta}. \end{aligned}$$

Konstruējam funkciju $x \mapsto (al)_x$ ar funkciju $x \mapsto l_x^\alpha$ un $x \mapsto l_x^\beta$ palīdzību. Tad

$$_t(ap)_x = \frac{(al)_{x+t}}{(al)_x} = \frac{l_{x+t}^\alpha}{l_x^\alpha}\frac{l_{x+t}^\beta}{l_x^\beta}$$

visiem $x \geq x_0$ un $t \geq 0$. Ņemot $x = x_0$ un $y = x_0 + t$ iegūstam

$$(al)_y = kl_y^\alpha l_y^\beta, \quad y \geq x_0,$$

kur k ir konstante. Ja izvēlēsimies radiusu $(al)_{x_0} = l_{x_0}^\alpha l_{x_0}^\beta$, tad

$$(al)_y = l_y^\alpha l_y^\beta, \quad y \geq x_0.$$

Pie reizes iegūsim dažas svarīgas formulas.

$$\begin{aligned} {_t(aq)_x} &= 1 - {_t(ap)_x} \\ &= 1 - (1 - {_tq_x^\alpha})(1 - {_tq_x^\beta}) = {_tq_x^\alpha} + {_tq_x^\beta} - {_tq_x^\alpha}\,{_tq_x^\beta}. \end{aligned}$$

Ja $t = 1$, tad

$$(aq)_x = q_x^\alpha + q_x^\beta - q_x^\alpha q_x^\beta.$$

Bez tam ”izejas intensitātei” iegūstam izteiksmi līdzīgu, ka saistītām dzīvībām

$$(a\mu)_x = \lim_{h\to+0} \frac{{}_h(aq)_x}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{{}_hq_x^\alpha + {}_hq_x^\beta - {}_hq_x^\alpha\,{}_hq_x^\beta}{h}$$

$$= \lim_{h\to+0} \frac{{}_hq_x^\alpha}{h} + \lim_{h\to+0} \frac{{}_hq_x^\beta}{h} - \lim_{h\to+0} \left(\frac{{}_hq_x^\alpha}{h}\right)\left(\frac{{}_hq_x^\alpha}{h}\right) h$$

$$= \mu_x^\alpha + \mu_x^\beta.$$

Definējam varbūtību

$${}_t(aq)_x^\alpha = \Pr\{T_1 < t \text{ un } T_1 < T_2\},$$

kur gadījuma lielumu T_1 un T_2 blīvumu sadalījuma funkcijas ir

$$f_1(t_1) = {}_{t_1}p_x^\alpha \mu_{x+t_1}^\alpha, \text{ ja } t_1 > 0$$

un

$$f_2(t_2) = {}_{t_2}p_x^\beta \mu_{x+t_2}^\beta, \text{ ja } t_2 > 0$$

attiecīgi. Iegūstam

$${}_t(aq)_x^\alpha = \iint\limits_{t_1<t,\,t_1<t_2} f_1(t_1) f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

$$= \int_0^t \int_{t_1}^\infty {}_{t_1}p_x^\alpha \mu_{x+t_1}^\alpha\,{}_{t_2}p_x^\beta \mu_{x+t_2}^\beta\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1$$

$$= \int_0^t {}_{t_1}p_x^\alpha \mu_{x+t_1}^\alpha \left(\int_{t_1}^\infty {}_{t_2}p_x^\beta \mu_{x+t_2}^\beta\,\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1$$

$$= \int_0^t {}_{t_1}p_x^\alpha \mu_{x+t_1}^\alpha\,{}_{t_1}p_x^\beta\,\mathrm{d}t_1.$$

Seko

$${}_t(aq)_x^\alpha = \int_0^t {}_rp_x^\alpha \mu_{x+r}^\alpha\,{}_rp_x^\beta\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^t {}_r(ap)_x \, \mu_{x+r}^{\alpha} \, \mathrm{d}r.$$

Ja $t = 1$, tad

$$(aq)_x^{\alpha} = \int_0^1 {}_t(ap)_x \, \mu_{x+t}^{\alpha} \, \mathrm{d}t.$$

Teorēma 11.1. *Ja dekrementi ir vienmērīgi sadalīti starp vecumiem x un $x+1$ katrā viena dekrementa tabulā, tad*

$$(aq)_x^{\alpha} = q_x^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\beta}\right)$$

un

$$(aq)_x^{\beta} = q_x^{\beta} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\alpha}\right).$$

Pierādījums. Ja dekrementi ir vienmērīgi sadalīti, tad

1. l_{x+t} ir lineāra, ja $0 \le t \le 1$,
2. ${}_t q_x = t \cdot q_x$, ja $0 \le t \le 1$,
3. ${}_t p_x \mu_{x+t} = q_x$, ja $0 \le t \le 1$.

No šejienes

$$(aq)_x^{\alpha} = \int_0^1 {}_t p_x^{\alpha} \, \mu_{x+t}^{\alpha} \, {}_t p_x^{\beta} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 q_x^{\alpha} (1 - {}_t q_x^{\beta}) \, \mathrm{d}t = q_x^{\alpha} \int_0^1 (1 - t q_x^{\beta}) \, \mathrm{d}t$$

$$= q_x^{\alpha} \left(t - \frac{t^2}{2} q_x^{\beta}\right) \Bigg|_{t=0}^{t=1} = q_x^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\beta}\right).$$

Analoģiski iegūstam otro vienādību.

11.4 Praktiska daudzdekrementu tabulas konstrukcija

Definējam

$$(ad)_x^{\alpha} = (al)_x (aq)_x^{\alpha}.$$

Citiem vārdiem definētais lielums raksturo, cik personas iziet no modas α vecumā starp x un $x+1$ gadiem. Atzīmējam, ka

$$(aq)_x = (aq)_x^{\alpha} + (aq)_x^{\beta}.$$

Lai pierādītu šos rezultātus atzīmējam, ka

$$\begin{aligned} &{}_t(aq)_x^{\alpha} + {}_t(aq)_x^{\beta} \\ &= \Pr\{T_1 \leq t \text{ un } T_1 \leq T_2\} + \Pr\{T_2 \leq t \text{ un } T_2 \leq T_1\} \\ &= \Pr\{\min\{T_1, T_2\} \leq t\} = {}_t(aq)_x. \end{aligned}$$

Liekot $t = 1$ iegūstam

$$(ad)_x = (al)_x (aq)_x = (ad)_x^{\alpha} + (ad)_x^{\beta}.$$

Bez tam

$${}_{t|}(aq)_x^{\alpha} = {}_t(ap)_x (aq)_{x+t}^{\alpha} = \frac{(ad)_{x+t}^{\alpha}}{(al)_x}.$$

Lai konstruētu daudzdekrementu tabulas jāizpilda sekojoši soļi:

1. Izvēlamies tabulas radiusu $(al)_{x_0}$, kur x_0 jaunākais apskatāmais vecums. Piemēram, $(al)_{x_0}$ varētu būt 10000 vai 100000.
2. Aprēķinam q_x^{α} un q_x^{β}, ja $x = x_0, x_0+1, \ldots$ un novērtējam $(aq)_x^{\alpha}$ un $(aq)_x^{\alpha}$ pieņemot, ka ir vienmērīgais sadalījums.
3. Aprēķinām
$$(ad)_{x_0}^{\alpha} = (al)_{x_0} (aq)_{x_0}^{\alpha}$$
un
$$(ad)_{x_0}^{\beta} = (al)_{x_0} (aq)_{x_0}^{\beta}.$$
Tad atrodam
$$\begin{aligned} (al)_{x_0+1} &= (al)_{x_0} - \left((ad)_{x_0}^{\alpha} + (ad)_{x_0}^{\beta} \right) \\ &= (al)_{x_0} - (ad)_{x_0}. \end{aligned}$$
Pēc tam procedūru atkārtojam priekš x_0+1, x_0+2 utt.

Piemērs 11.1. Apskatām iedzīvotāju kopu ar divām dekramenta modām:

- d - nāve
- i - pastāvīga darba nespēja

Mirstību nosakām saskaņā ar *A 1967 – 1970 Ultimate* mirstības tabulām. Attiecīgi darba nespējas intensitāti vecumā $60 \le x \le 62$ pieņemam vienādu ar 0,01. Konstruējam daudzdekrementu tabulas vecumiem $x = 60, 61, 62$.

Izmantojot vienmērīgo mirstības sadalījumu, atrodam

$$(aq)_x^d = q_x^d \left(1 - \frac{1}{2} q_x^i\right)$$

un

$$(aq)_x^i = q_x^i \left(1 - \frac{1}{2} q_x^d\right).$$

izvēlamies radiusu $(al)_{x_0} = 100000$. Iegūstam tabulu

Tabula 11.1 Divdekrementu tabula

x	q_x^d	q_x^i	$(aq)_x^d$	$(aq)_x^i$	$(al)_x$	$(ad)_x^d$	$(ad)_x^i$
60	0,01443	0,01	0,01436	0,00993	100000	1436	993
61	0,01601	0,01	0,01593	0,00992	97571	1554	968
62	0,01775	0,01	0,01766	0,00991	95049	1679	942
63					92428		

Izmantojot atrasto divdekrementu tabulu varam aprēķināt, piemēram, varbūtību, ka personai, kurai pašlaik ir 60 gadu nodzīvos līdz 63 gadu vecumam un nebūs patstāvīgi darba nespējīga

$${}_3(ap)_{60} = \frac{(al)_{63}}{(al)_{60}} = \frac{92428}{100000} = 0,92428.$$

Atrodam varbūtību, ka persona, kurai pašlaik ir 60 gadu 3 gadu laikā kļūs patstāvīgi darba nespējīga

$$\begin{aligned} {}_3(aq)_{60}^i &= \frac{(ad)_{60}^i + (ad)_{61}^i + (ad)_{62}^i}{(al)_{60}} \\ &= \frac{993 + 968 + 942}{100000} = 0,02903. \end{aligned}$$

Tālāk definējam dekrementa intensitāti

$$(a\mu)_x^\alpha = \lim_{h \to +0} \frac{{}_h(aq)_x^\alpha}{h}.$$

Teorēma 11.2. *Visiem x izpildās vienādība*

$$(a\mu)_x^\alpha = \mu_x^\alpha.$$

Pierādījums. Saskaņā ar definīciju

$$(a\mu)_x^\alpha = \lim_{h\to+0} \frac{{}_h(aq)_x^\alpha}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{\int_0^h {}_t(ap)_x \mu_{x+t}^\alpha \,\mathrm{d}t}{h}.$$

Izlietojam Lopitāla likumu robežu aprēķināšanai. Iegūstam

$$(a\mu)_x^\alpha = \lim_{h\to+0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\int_0^h {}_t(ap)_x \mu_{x+t}^\alpha \,\mathrm{d}t}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}(h)}$$

$$= \lim_{h\to+0} \frac{{}_h(ap)_x \mu_{x+h}^\alpha}{1} = \mu_x^\alpha$$

jo $\lim_{h\to+0} {}_h(ap)_x = 1$. Iegūto rezultātu sauc par intensitāšu identitāti.

Pie reizes atzīmējam, ka

$$(a\mu)_x = \lim_{h\to+0} \frac{{}_h(aq)_x}{h} = \lim_{h\to+0} \left(\frac{{}_h(aq)_x^\alpha}{h} + \frac{{}_h(aq)_x^\beta}{h} \right)$$

$$= (a\mu)_x^\alpha + (a\mu)_x^\beta = \mu_x^\alpha + \mu_x^\beta.$$

11.5 Vispārinājums 3 modu dekrementiem

Pieņemam ka ir 3 dekrementu modas α, β un γ. Vispārinot 2 modu rezultātus var pierādīt, ka

$${}_t(ap)_x = {}_tp_x^\alpha \, {}_tp_x^\beta \, {}_tp_x^\gamma$$

un

$$(aq)_x^\alpha = \int_0^1 {}_tp_x^\alpha \mu_{x+t}^\alpha \, {}_tp_x^\beta \, {}_tp_x^\gamma \,\mathrm{d}t.$$

Teorēma 11.3. *Ja ir vienmērīgais sadalījums katrā modā, tad*

$$(aq)_x^\alpha = q_x^\alpha \left(1 - \frac{1}{2}(q_x^\beta + q_x^\gamma) + \frac{1}{3} q_x^\beta q_x^\gamma\right).$$

Pierādījums.

$$(aq)_x^\alpha = \int_0^1 {}_tp_x^\alpha \mu_{x+t}^\alpha \, {}_tp_x^\beta \, {}_tp_x^\gamma \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 q_x^\alpha (1 - {}_tq_x^\beta)(1 - {}_tq_x^\gamma) \, \mathrm{d}t$$

$$= q_x^\alpha \int_0^1 (1 - tq_x^\beta)(1 - tq_x^\gamma) \, \mathrm{d}t$$

$$= q_x^\alpha \int_0^1 (1 - t(q_x^\beta + q_x^\alpha) + t^2 q_x^\beta q_x^\gamma) \, \mathrm{d}t$$

$$= q_x^\alpha \left(t - \frac{t^2}{2}(q_x^\beta + q_x^\gamma) + \frac{t^3}{3} q_x^\beta q_x^\gamma\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

$$= q_x^\alpha \left(1 - \frac{1}{2}(q_x^\beta + q_x^\gamma) + \frac{1}{3} q_x^\beta q_x^\alpha\right).$$

Pie reizes atzīmēsim, ka ir spēkā intensitāšu identitāte un

$$(a\mu)_x = \mu_x^\alpha + \mu_x^\beta + \mu_x^\gamma.$$

Nodaļa 12
Daudzstāvokļu modeļi, Čepmena – Kolmogorova vienādojumi

Ir divas pieejas kā risināt daudzdekrementu tabulas:

- *tradicionālā*, kura izmanto viendekrementa tabulas.
- *modernā*, kura izlieto nepārtraukta laika stohastikos procesus ar galīga skaita stāvokļiem.

Katrai pieejai ir savas priekšrocības un ir arī savi trūkumi. Bet abas procedūras noved pie viena un tā paša rezultāta.

12.1 Čepmena – Kolmogorova vienādojumi

Pieņemam, ka ir n iespējamie stāvokļi. Definējam

$$p_{ij}(x, x+t) = \Pr\{\text{persona atradīsies stāvokli } j \text{ vecumā } x+t,$$
$$\text{ja tā atradās stāvoklī } i \text{ vecumā } x\}.$$

Atzīmējam, ka sākuma nosacījumi ir

$$p_{ij}(x,x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = j \\ 0, & \text{ja } i \neq j \end{cases}$$

Definējam pārejas intensitātes μ_{ij} ar robežām

$$\mu_{ij}(y) = \lim_{h \to +0} \frac{p_{ij}(y, y+h)}{h}, \quad i \neq j.$$

Bez tam

$$\mu_i(y) = \sum_{i \neq j} \mu_{ij}(y).$$

Ja pārejas intensitātes ir konstantas, tad sakām ka ir *homogēna ķēde*, ja pārejas intensitātes mainās līdz ar vecumu, tad ir *nehomogēna ķēde*. *Čepmena – Kolmogorova vienādojumi* sistēmai ar n stāvokļiem ir sekojoši:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_{ij}(x, x+t) = -\mu_j(x+t) p_{ij}(x, x+t)$$
$$+ \sum_{\nu \neq j} \mu_{\nu j}(x+t) p_{i\nu}(x, x+t), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad t \geq 0.$$

Čepmena – Kolmogorova vienādojumu sistēmu katram fiksētam x varam pierakstīt matricu formā

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P = P \times M,$$

kur

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & \dots & p_{1n}(x,x+t) \\ p_{21}(x,x+t) & p_{22}(x,x+t) & \dots & p_{2n}(x,x+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(x,x+t) & p_{n2}(x,x+t) & \dots & p_{nn}(x,x+t) \end{pmatrix}$$

un

$$M = \begin{pmatrix} -\mu_1(x+t) & \mu_{12}(x+t) & \dots & \mu_{1n}(x+t) \\ \mu_{21}(x+t) & -\mu_2(x+t) & \dots & \mu_{2n}(x+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x+t) & \mu_{n2}(x+t) & \dots & -\mu_n(x+t) \end{pmatrix}$$

vai izvērstā veidā

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & \dots & p_{1n}(x,x+t) \\ p_{21}(x,x+t) & p_{22}(x,x+t) & \dots & p_{2n}(x,x+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(x,x+t) & p_{n2}(x,x+t) & \dots & p_{nn}(x,x+t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & \dots & p_{1n}(x,x+t) \\ p_{21}(x,x+t) & p_{22}(x,x+t) & \dots & p_{2n}(x,x+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(x,x+t) & p_{n2}(x,x+t) & \dots & p_{nn}(x,x+t) \end{pmatrix} \cdot$$

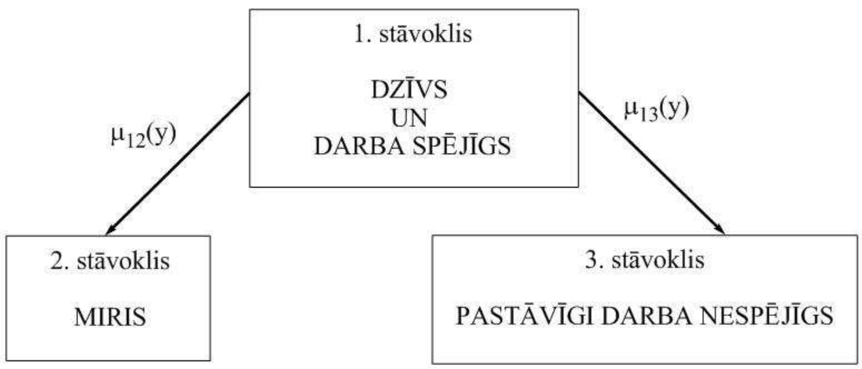
$$\times \begin{pmatrix} -\mu_1(x+t) & \mu_{12}(x+t) & \dots & \mu_{1n}(x+t) \\ \mu_{21}(x+t) & -\mu_2(x+t) & \dots & \mu_{2n}(x+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x+t) & \mu_{n2}(x+t) & \dots & -\mu_n(x+t) \end{pmatrix}$$

Piemērs 12.1. Apskatām vienkāršotu trīs stāvokļu modeli, kurā

$$\mu_1(y) = \mu_{12}(y) + \mu_{13}(y),$$

$$\mu_2(y) = \mu_{21}(y) = \mu_{23}(y) = 0,$$

$$\mu_3(y) = \mu_{31}(y) = \mu_{32}(y) = 0.$$



Zīm. 12.1 Trīs stāvokļu modelis

Sastādām atbilstošo Čepmena – Kolmogorova vienādojumu sistēmu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & p_{13}(x,x+t) \\ p_{21}(x,x+t) & p_{22}(x,x+t) & p_{23}(x,x+t) \\ p_{31}(x,x+t) & p_{32}(x,x+t) & p_{33}(x,x+t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & p_{13}(x,x+t) \\ p_{21}(x,x+t) & p_{22}(x,x+t) & p_{23}(x,x+t) \\ p_{31}(x,x+t) & p_{32}(x,x+t) & p_{33}(x,x+t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -\mu_1(x+t) & \mu_{12}(x+t) & \mu_{13}(x+t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uzrakstām atbilstošo diferenciālvienādojumu sistēmu kopā ar sākuma nosacījumiem izvērstā veidā

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{11}(x,x+t) = -\mu_1(x+t)p_{11}(x,x+t), \quad p_{11}(x,x) = 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{12}(x,x+t) = \mu_{12}(x+t)p_{11}(x,x+t), \quad p_{12}(x,x) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{13}(x,x+t) = \mu_{13}(x+t)p_{11}(x,x+t), \quad p_{13}(x,x) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{21}(x,x+t) = -\mu_1(x+t)p_{21}(x,x+t), \quad p_{21}(x,x) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{22}(x,x+t) = \mu_{12}(x+t)p_{21}(x,x+t), \quad p_{22}(x,x) = 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{23}(x,x+t) = \mu_{13}(x+t)p_{21}(x,x+t), \quad p_{23}(x,x) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{31}(x,x+t) = -\mu_1(x+t)p_{31}(x,x+t), \quad p_{31}(x,x) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{32}(x,x+t) = \mu_{12}(x+t)p_{31}(x,x+t), \quad p_{32}(x,x) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{33}(x,x+t) = \mu_{13}(x+t)p_{31}(x,x+t), \quad p_{33}(x,x) = 1.$$

Atrisinam doto vienādojumu sistēmu ievērojot sākuma nosacījumus.

$$p_{11}(x,x+t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_1(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

$$p_{12}(x,x+t) = \int_0^t \mu_{12}(x+\tau)p_{11}(x,x+\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$p_{13}(x,x+t) = \int_0^t \mu_{13}(x+\tau)p_{11}(x,x+\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$p_{21}(x,x+t) = 0,$$
$$p_{22}(x,x+t) = 1,$$
$$p_{23}(x,x+t) = 0,$$
$$p_{31}(x,x+t) = 0,$$
$$p_{32}(x,x+t) = 0,$$
$$p_{33}(x,x+t) = 1.$$

Ievērojam, ka p_{11} atbilst

$$_t(ap)_x = \exp\left(-\int_0^t (a\mu)_{x+r}\,\mathrm{d}r\right) = \exp\left(-\int_0^t (\mu^\alpha_{x+r} + \mu^\beta_{x+r})\,\mathrm{d}r\right),$$

kur μ^α_{x+r} atbilst $\mu_{12}(x+r)$ un μ^β_{x+r} atbilst $\mu_{13}(x+r)$. Līdzīgi iegūstam tradicionālās formulas

$$_t(aq)^\alpha_x = \int_0^t {}_r(ap)_x \mu^\alpha_{x+r}\,\mathrm{d}r$$

un

$$_t(aq)^\beta_x = \int_0^t {}_r(ap)_x \mu^\beta_{x+r}\,\mathrm{d}r.$$

12.2 Mirstības tabulas kā stohastisks process

Mirstības tabulas satur tikai vienu dekrementu – nāvi, un tādēļ

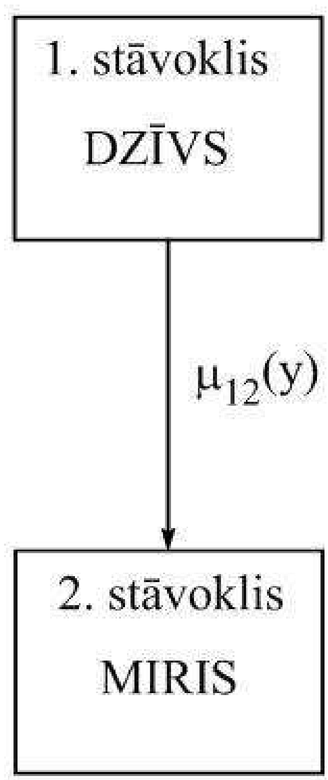
$$\mu_{12}(y) = \mu_y$$

lietojot tradicionālos apzīmējumus. Atrisinot Čepmena – Kolmogorova vienādojumus iegūstam

$$p_{11}(x,x+t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{12}(x+r)\,\mathrm{d}r\right).$$

Tas sakrīt ar tradicionālo formulu

$$ {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+r}\,\mathrm{d}r\right). $$



Zīm. 12.2 Mirstības tabulas modelis

No Zīm. 12.2 redzams, ka ir tikai 2 stāvokļi (dzīvs vai miris) un tāpēc

$$ p_{21}(x_1, x_2) = 0 \text{ ja } x_1 \le x_2 $$

un

$$ p_{22}(x_1, x_2) = 1 \text{ ja } x_1 \le x_2. $$

Pielikums A
Mirstības tabulas

Tabula A.1 Anglijas mirstības tabulas A 1967 -70 Ultimate

x	l_x	q_x	p_x
0	34 489,00000000	0,00073000	0,99927000
1	34 463,82300000	0,00067999	0,99932001
2	34 440,38800000	0,00063002	0,99936998
3	34 418,69000000	0,00058000	0,99942000
4	34 398,72700000	0,00052999	0,99947001
5	34 380,49600000	0,00048999	0,99951001
6	34 363,65000000	0,00045001	0,99954999
7	34 348,18600000	0,00041999	0,99958001
8	34 333,76000000	0,00040001	0,99959999
9	34 320,02600000	0,00037998	0,99962002
10	34 306,98500000	0,00037001	0,99962999
11	34 294,29100000	0,00037000	0,99963000
12	34 281,60200000	0,00036999	0,99963001
13	34 268,91800000	0,00040001	0,99959999
14	34 255,21000000	0,00047000	0,99953000
15	34 239,11000000	0,00060997	0,99939003
16	34 218,22500000	0,00081001	0,99918999
17	34 190,50800000	0,00105538	0,99894462
18	34 154,42400000	0,00099683	0,99900317
19	34 120,37800000	0,00094140	0,99905860
20	34 088,25700000	0,00088946	0,99911054
21	34 057,93700000	0,00084133	0,99915867
22	34 029,28300000	0,00079740	0,99920260
23	34 002,14800000	0,00075801	0,99924199
24	33 976,37400000	0,00072365	0,99927635
25	33 951,78700000	0,00069481	0,99930519
26	33 928,19700000	0,00067201	0,99932799
27	33 905,39700000	0,00065582	0,99934418
28	33 883,16100000	0,00064690	0,99935310
29	33 861,24200000	0,00064593	0,99935407
30	33 839,37000000	0,00065368	0,99934632
31	33 817,25000000	0,00067099	0,99932901
32	33 794,55900000	0,00069884	0,99930116
33	33 770,94200000	0,00073812	0,99926188
34	33 746,01500000	0,00079005	0,99920995
35	33 719,35400000	0,00085577	0,99914423
36	33 690,49800000	0,00093661	0,99906339
37	33 658,94300000	0,00103411	0,99896589
38	33 624,13600000	0,00114971	0,99885029
39	33 585,47800000	0,00128529	0,99871471
40	33 542,31100000	0,00144269	0,99855731
41	33 493,92000000	0,00162394	0,99837606
42	33 439,52800000	0,00183146	0,99816854
43	33 378,28500000	0,00206763	0,99793237
44	33 309,27100000	0,00233524	0,99766476

Tabula A.2 Anglijas mirstības tabulas A 1967 -70 Ultimate

x	l_x	q_x	p_x
45	33 231,48600000	0,00263723	0,99736277
46	33 143,84700000	0,00297690	0,99702310
47	33 045,18100000	0,00335783	0,99664217
48	32 934,22100000	0,00378391	0,99621609
49	32 809,60100000	0,00425930	0,99574070
50	32 669,85500000	0,00478882	0,99521118
51	32 513,40500000	0,00537738	0,99462262
52	32 338,56800000	0,00603063	0,99396937
53	32 143,54600000	0,00675458	0,99324542
54	31 926,43000000	0,00755571	0,99244429
55	31 685,20300000	0,00844129	0,99155871
56	31 417,73900000	0,00941901	0,99058099
57	31 121,81500000	0,01049743	0,98950257
58	30 795,11600000	0,01168565	0,98831435
59	30 435,25500000	0,01299375	0,98700625
60	30 039,78700000	0,01443246	0,98556754
61	29 606,23900000	0,01601355	0,98398645
62	29 132,13800000	0,01774971	0,98225029
63	28 615,05100000	0,01965466	0,98034534
64	28 052,63200000	0,02174309	0,97825691
65	27 442,68100000	0,02403100	0,97596900
66	26 783,20600000	0,02653551	0,97346449
67	26 072,50000000	0,02927491	0,97072509
68	25 309,23000000	0,03226890	0,96773110
69	24 492,52900000	0,03553847	0,96446153
70	23 622,10200000	0,03910592	0,96089408
71	22 698,33800000	0,04299509	0,95700491
72	21 722,42100000	0,04723097	0,95276903
73	20 696,45000000	0,05184005	0,94815995
74	19 623,54500000	0,05685023	0,94314977
75	18 507,94200000	0,06229045	0,93770955
76	17 355,07400000	0,06819078	0,93180922
77	16 171,61800000	0,07458264	0,92541736
78	14 965,49600000	0,08149780	0,91850220
79	13 745,84100000	0,08896880	0,91103120
80	12 522,89000000	0,09702856	0,90297144
81	11 307,81200000	0,10570966	0,89429034
82	10 112,46700000	0,11504447	0,88495553
83	8 949,08360000	0,12506402	0,87493598
84	7 829,87520000	0,13579821	0,86420179
85	6 766,59220000	0,14727447	0,85272553
86	5 770,04590000	0,15951762	0,84048238
87	4 849,62190000	0,17254883	0,82745117
88	4 012,82530000	0,18638499	0,81361501
89	3 264,89490000	0,20103786	0,79896214
90	2 608,52740000	0,21651335	0,78348665
91	2 043,74640000	0,23281064	0,76718936
92	1 567,94050000	0,24992160	0,75007840
93	1 176,07830000	0,26782991	0,73217009
94	861,08935000	0,28651073	0,71348927
95	614,37801000	0,30593029	0,69406971
96	426,42117000	0,32604549	0,67395451
97	287,38847000	0,34680421	0,65319579
98	187,72094000	0,36814524	0,63185476
99	118,61237000	0,38999882	0,61000118
100	72,35368600	0,41228762	0,58771238
101	42,52315700	0,43492728	0,56507272
102	24,02867600	0,45782793	0,54217207
103	13,02767700	0,48089530	0,51910470
104	6,76272840	0,50403251	0,49596749
105	3,35409340	0,52714143	0,47285857
106	1,58601180	0,55012453	0,44987547
107	0,71350781	0,57288630	0,42711370
108	0,30474896	0,59533509	0,40466491
109	0,12332121	0,61738431	0,38261569

Tabula A.3 Komutatīvās funkcijas izlietojot Anglijas mirstības tabulas A 1967 -70 Ultimate un 4% ienesīguma likmi

x	D_x	C_x	M_x	N_x	R_x
0	34 489,000	24,208654	2 341,1765	835 843,39	141 566,1783
1	33 138,291	21,666975	2 316,9679	801 354,39	139 225,0017
2	31 842,075	19,289443	2 295,3009	768 216,10	136 908,0339
3	30 598,090	17,064456	2 276,0114	736 374,03	134 612,7330
4	29 404,176	14,984553	2 258,9470	705 775,94	132 336,7215
5	28 258,262	13,313639	2 243,9624	676 371,76	130 077,7745
6	27 158,092	11,751369	2 230,6488	648 113,50	127 833,8121
7	26 101,798	10,540937	2 218,8974	620 955,41	125 603,1633
8	25 087,342	9,649326	2 208,3565	594 853,61	123 384,2659
9	24 112,795	8,810032	2 198,7072	569 766,27	121 175,9094
10	23 176,570	8,245780	2 189,8971	545 653,47	118 977,2022
11	22 276,917	7,925512	2 181,6514	522 476,90	116 787,3051
12	21 412,187	7,617682	2 173,7258	500 199,99	114 605,6537
13	20 581,024	7,916028	2 166,1082	478 787,80	112 431,9279
14	19 781,530	8,939758	2 158,1921	458 206,77	110 265,8197
15	19 011,762	11,150672	2 149,2524	438 425,24	108 107,6276
16	18 269,390	14,229166	2 138,1017	419 413,48	105 958,3752
17	17 552,492	17,812077	2 123,8725	401 144,09	103 820,2735
18	16 859,584	16,159676	2 106,0605	383 591,60	101 696,4010
19	16 194,979	14,659605	2 089,9008	366 732,02	99 590,3405
20	15 557,436	13,305435	2 075,2412	350 537,04	97 500,4397
21	14 945,767	12,090710	2 061,9357	334 979,60	95 425,1986
22	14 358,839	11,009384	2 049,8450	320 033,83	93 363,2628
23	13 795,567	10,054991	2 038,8356	305 674,99	91 313,4178
24	13 254,913	9,222997	2 028,7807	291 879,43	89 274,5821
25	12 735,886	8,508659	2 019,5577	278 624,51	87 245,8015
26	12 237,535	7,907418	2 011,0490	265 888,63	85 226,2438
27	11 758,953	7,415205	2 003,1416	253 651,09	83 215,1948
28	11 299,271	7,028358	1 995,7264	241 892,14	81 212,0532
29	10 857,655	6,743546	1 988,6980	230 592,87	79 216,3268
30	10 433,309	6,557701	1 981,9545	219 735,21	77 227,6288
31	10 025,471	6,468250	1 975,3968	209 301,90	75 245,6743
32	9 633,407	6,473282	1 968,9285	199 276,43	73 270,2776
33	9 256,418	6,569563	1 962,4552	189 643,03	71 301,3490
34	8 893,833	6,756310	1 955,8857	180 386,61	69 338,8938
35	8 545,006	7,031305	1 949,1294	171 492,78	67 383,0081
36	8 209,321	7,393237	1 942,0981	162 947,77	65 433,8787
37	7 886,184	7,841510	1 934,7048	154 738,45	63 491,7807
38	7 575,028	8,374119	1 926,8633	146 852,26	61 557,0759
39	7 275,307	8,991213	1 918,4892	139 277,24	59 630,2125
40	6 986,496	9,691649	1 909,4980	132 001,93	57 711,7233
41	6 708,093	10,474536	1 899,8063	125 015,43	55 802,2254
42	6 439,615	11,340256	1 889,3318	118 307,34	53 902,4190
43	6 180,597	12,287691	1 877,9915	111 867,73	52 013,0872
44	5 930,594	13,316668	1 865,7039	105 687,13	50 135,0957
45	5 689,178	14,426594	1 852,3872	99 756,54	48 269,3918
46	5 455,937	15,617107	1 837,9606	94 067,36	46 417,0046
47	5 230,476	16,887531	1 822,3435	88 611,42	44 579,0440
48	5 012,416	18,237030	1 805,4560	83 380,95	42 756,7006
49	4 801,394	19,664025	1 787,2189	78 368,53	40 951,2446
50	4 597,061	21,167778	1 767,5549	73 567,14	39 164,0257
51	4 399,083	22,745721	1 746,3871	68 970,07	37 396,4708
52	4 207,142	24,395888	1 723,6414	64 570,99	35 650,0837
53	4 020,933	26,115089	1 699,2455	60 363,85	33 926,4423
54	3 840,166	27,899232	1 673,1304	56 342,92	32 227,1967
55	3 664,568	29,743929	1 645,2312	52 502,75	30 554,0663
56	3 493,880	31,643160	1 615,4873	48 838,18	28 908,8351
57	3 327,856	33,590319	1 583,8441	45 344,30	27 293,3479
58	3 166,272	35,576872	1 550,2538	42 016,45	25 709,5038
59	3 008,915	37,593347	1 514,6769	38 850,18	24 159,2500

Tabula A.4 Komutatīvās funkcijas izlietojot Anglijas mirstības tabulas A 1967 -70 Ultimate un 4% ienesīguma likmi

x	D_x	C_x	M_x	N_x	R_x
60	2 855,594	39,628122	1 477,0836	35 841,26	22 644,5731
61	2 706,136	41,668113	1 437,4554	32 985,67	21 167,4895
62	2 560,385	43,698169	1 395,7873	30 279,53	19 730,0341
63	2 418,211	45,701060	1 352,0892	27 719,15	18 334,2467
64	2 279,502	47,657131	1 306,3881	25 300,93	16 982,1576
65	2 144,171	49,544784	1 258,7310	23 021,43	15 675,7695
66	2 012,158	51,340045	1 209,1862	20 877,26	14 417,0385
67	1 883,428	53,016508	1 157,8461	18 865,10	13 207,8523
68	1 757,972	54,545971	1 104,8296	16 981,68	12 050,0062
69	1 635,811	55,898300	1 050,2837	15 223,70	10 945,1765
70	1 516,997	57,041895	994,3854	13 587,89	9 894,8929
71	1 401,609	57,944531	937,3435	12 070,90	8 900,5075
72	1 289,757	58,573519	879,3989	10 669,29	7 963,1641
73	1 181,577	58,897134	820,8254	9 379,53	7 083,7651
74	1 077,235	58,885616	761,9283	8 197,95	6 262,9397
75	976,917	58,512115	703,0427	7 120,72	5 501,0114
76	880,831	57,754388	644,5306	6 143,80	4 797,9688
77	789,199	56,596656	586,7762	5 262,97	4 153,4382
78	702,248	55,030467	530,1795	4 473,77	3 566,6620
79	620,208	53,056905	475,1490	3 771,52	3 036,4825
80	543,297	50,687827	422,0921	3 151,31	2 561,3335
81	471,713	47,946780	371,4043	2 608,02	2 139,2414
82	405,624	44,869962	323,4575	2 136,30	1 767,8371
83	345,153	41,505960	278,5876	1 730,68	1 444,3795
84	290,372	37,915347	237,0816	1 385,53	1 165,7920
85	241,288	34,168845	199,1663	1 095,16	928,7104
86	197,839	30,345019	164,9974	853,87	729,5441
87	159,885	26,526872	134,6524	656,03	564,5467
88	127,209	22,797855	108,1255	496,14	429,8943
89	99,518	19,237407	85,3277	368,93	321,7688
90	76,453	15,916450	66,0903	269,42	236,4411
91	57,596	12,893256	50,1738	192,96	170,3509
92	42,488	10,210166	37,2806	135,37	120,1770
93	30,643	7,891534	27,0704	92,88	82,8965
94	21,573	5,943221	19,1789	62,24	55,8261
95	14,800	4,353691	13,2356	40,66	36,6473
96	9,877	3,096585	8,8819	25,86	23,4116
97	6,401	2,134452	5,7854	15,99	14,5297
98	4,020	1,423087	3,6509	9,58	8,7443
99	2,442	0,915924	2,2278	5,56	5,0934
100	1,433	0,567929	1,3119	3,12	2,8656
101	0,810	0,338565	0,7440	1,69	1,5537
102	0,440	0,193641	0,4054	0,88	0,8097
103	0,229	0,106035	0,2118	0,44	0,4043
104	0,114	0,055473	0,1057	0,21	0,1926
105	0,055	0,027667	0,0503	0,10	0,0869
106	0,025	0,013128	0,0226	0,04	0,0366
107	0,011	0,005914	0,0095	0,02	0,0140
108	0,004	0,002524	0,0035	0,01	0,0046
109	0,002	0,001018	0,0010	0,00	0,0010

Literatūra

1. Scott, W.F.: Life Assurance Mathematics. Institute of Actuaries, London (1999)
2. Gerber, H.U.: Life Insurance Mathematics (third Edition). Springer, Berlin - Heidelberg (1997)
3. Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., Nesbitt, S.: Actuarial Mathematics. Society of Actuaries USA (1997)
4. Promislow, S.D.: Fundamentals of Acturial Mathematics (second Edition). John Wiley & Sons Ltd, United Kingdom (2011)
5. Oliveiri, A., Pitacco E.: Introduction to Insurance Mathematics. Springer, Berlin - Heidelberg (2011)
6. Formulae and Tables for Actuarial Examinations. Institute of Actuaries. London (1980)
7. Norberg, R.: Financial Mathematics in Life and Pension Insurance. Summer School in Mathematical Finance, Dubrovnik 16-22, September 2001
8. Matvejevs, A.: Dzīvības apdrošināšanas matemātiskie modeļi. RTU, Rīga (2005)