Andrejs Reinfelds

Kompleksā mainīgā funkciju teorija

Latvijas Universitāte

Priekšvārds

Kompleksā mainīgā funkciju teorija ir reālā mainīgā funkciju teorijas paplašinājums funkcijām ar komplekso mainīgo. Teorija sāka veidoties 16. gs. ar Dž. Kardano pētījumiem par kvadratisku un kubisku vienādojumu atrisinājumiem. 20. gs. sākumā kompleksā mainīgā funkciju teorija jau bija izveidojusies par matemātikas apakšnozari ar plašiem lietojumiem fizikā, tehnikā. mehanikā u.c.

Dotais mācību līdzeklis ir sagatavots balstoties uz autora daudzgadīgu pieredzi lasot lekcijas kompleksā mainīgā funkciju teorijā matemātikas nodaļas studentiem. To var arī izmantot citu specialitāšu studenti, kurus interesē kompleksā mainīgā funkciju teorija un tās lietojumi.

Lai apgūtu grāmatas saturu, lasītājam nepieciešamās priekšzināšanas Fizikas un matemātikas vai tehniskas fakultātes augstākās matemātikas kursa apjomā.

Manuskripta zīmējumu sagatavošanā autoram daudz palīdzēja Liene Meļķe un Daiga Cepīte par ko izsaku viņām sirsnīgu pateicību.

Rīga, *Andrejs Reinfelds*
2009. gads

Saturs

Nodaļa 1
Kompleksie skaitļi

Dotai nodaļai ir ievada raksturs. Kā zināms ne katra algebriska vienādojuma atrisinājums ir reāls skaitlis. Līdz ar to rodas vajadzība paplašināt reālā skaitļa jēdzienu tā, lai pamata algebriskās operācijas vienmēr būtu izpildāmas. Tāds reālo skaitļu paplašinājums ir kompleksie skaitļi. Dotajā nodaļā dotas pamata ziņas par kompleksiem skaitļiem, apskatīta to algebriskā, trigonometriskā un eksponentforma, kā arī dota kompleksā skaitļa un komplekso skaitļu pamata algebraisko operāciju ģeometriskā interpretācija. Atzīmēsim, ka pamata algebriskās operācijas ar kompleksiem skaitļiem neizved ārpus komplekso skaitļu lauka.

1.1 Daži abstraktās algebras pamatjēdzieni

Apskatām patvaļīgu kopu E, kurā ir definēts attēlojums

$$E \times E \to E.$$

Šo attēlojumu dažkārt sauc arī par *kompozīcijas likumu* kopā E. Ja x un y ir kopas E elementi, tad pāra (x,y) attēlu sauc arī par *reizinājumu* un apzīmē ar xy. Daudzos gadījumos ērti izmantot arī aditīvo apzīmējumu $x+y$ un šajā gadījumā $x+y$ sauc par elementu x un y *summu*. Parasti gan apzīmējumu $x+y$ lieto tikai gadījumos, ja izpildās sakarība $x+y=y+x$.

Kopas E elementu x, y, z reizinājumu var izveidot divos dažādos veidos $(xy)z$ un $x(yz)$. Ja $(xy)z = x(yz)$ visiem kopas E elementiem x, y un z, tad mēs sakām, ka kompozīcijas likums ir *asociatīvs*.

Tādu kopas E elementu e, ka visiem $x \in E$ izpildās vienādības $ex = x = ex$ sauc par *vienības elementu*. Gadījumā ja kompozīcijas likumu pieraksta aditīvi, tad vienības elementu apzīmē ar 0 un sauc par *nulles elementu*. Vienības elements ir viens vienīgs. Pieņemot pretējo, ka e' ir cits vienības elements, mēs iegūstam pretrunu

$$e = ee' = e'.$$

Daudzos gadījumos vienības elementu e apzīmē vienkārši ar 1.

Ja $xy = yx$ visiem kopas E elementiem x un y, tad mēs sakām, ka kompozīcijas likums ir *komutatīvs*.

Monoīds ir tāda kopa E, kurā kompozīcijas likums ir asociatīvs, un kura satur vienības elementu. Seko monoīds nav tukša kopa.

Monoīdu, kurā kompozīcijas likums ir arī komutatīvs sauc par *komutatīvu monoīdu* vai *Ābela*[1] *monoīdu*.

Piemērs 1.1. Naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N}$ ir komutatīvs monoīds attiecībā pret reizināšanu.

Visu $n \times n$ kvadrātisko matricu kopa attiecībā pret matricu reizināšanu ir nekomutatīvs monoīds. Vienības elements šajā monoīdā ir vienības matrica. $\square$

Grupa G ir tāds monoīds, kur katram elementam $x \in G$ eksistē tāds elements $y \in G$, ka

$$xy = yx = e.$$

Elementu y sauc par elementa x *inverso elementu*. Inversais elements ir viens vienīgs. Pieņemam, ka y' ir cits elementa x inversais elements. Tad

$$y' = y'e = y'(xy) = (y'x)y = ey = y.$$

Inverso elementu apzīmēsim ar x^{-1} (vai ar $-x$ gadījumā, ja kompozīcijas likums pierakstās aditīvi).

Piemērs 1.2. Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ attiecībā pret saskaitīšanu ir Ābela grupa. Arī kopa $\mathbb{Q}$, ja no tās izslēdz 0, attiecībā pret reizināšanu ir Ābela grupa.

---

[1] Niels Henrik Abel, ⋆1802.5.VIII, Nedstrand, Norvēģija, †1829.6.IV, Froland, Norvēģija; norvēģu matemātiķis, pierādīja, ka vispārīgu piektās kārtas algebrisku vienādojumu nav iespējams atrisināt radikāļos, nozīmīgi darbi integrālvienādojumos, eliptisko funkciju teorijā. Nomira ar tuberkulozi divas dienas pirms saņēma piedāvājumu kļūt par Berlīnes universitātes profesoru. Norvēģijas Zinātņu akadēmija 2002.1.I nodibināja starptautisku Ābela prēmiju par izciliem sasniegumiem matemātikā (aptuveni 750 000 €). N. Ābela attēls ir arī uz Norvēģijas 500 kronu banknotes

Visu $n \times n$ kvadrātisko nesingulāro matricu kopa attiecībā pret matricu reizināšanu ir nekomutatīva grupa. $\square$

Gredzens A ir kopa ar diviem kompozīcijas likumiem, kurus attiecīgi sauc par saskaitīšanu un reizināšanu un attiecīgi pieraksta kā summu un reizinājumu un kuri apmierina sekojošus nosacījumus:

- attiecībā pret saskaitīšanu A ir Ābela grupa;
- reizināšana ir asociatīva un eksistē vienības elements;
- visiem $x, y, z \in A$ izpildās *distributīvie likumi* t.i.

$$(x+y)z = xz + yz \quad \text{un} \quad z(x+y) = zx + zy.$$

Kā parasti mēs vienības elementu attiecībā pret saskaitīšanu apzīmējam ar 0 un vienības elementu attiecībā pret reizināšanu ar 1.

Gredzenu A sauc par *ķermeni*, ja $1 \neq 0$ un katram nenulles elementam eksistē inversais elements attiecībā pret reizināšanu.

Gredzenu A sauc par *komutatīvu*, ja $xy = yx$ visiem $x, y \in A$. Komutatīvu ķermeni sauc par *lauku*. Atzīmēsim, ka lauks satur vismaz divus elementus, t.i. 0 un 1.

Piemērs 1.3. Racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ ir lauks. Arī reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ ir lauks. $\square$

1.2 Kompleksā skaitļa definīcija

Definīcija 1.1. Par *komplekso skaitļu* kopu $\mathbb{C}$ sauc tādu sakārtotu reālu skaitļu pāru kopu

$$\mathbb{C} = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

kurā jebkuriem diviem pāriem $(x_1; y_1)$ un $(x_2; y_2)$ ir definēti divi kompozīcijas likumi – saskaitīšana un reizināšana:

- $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$,
- $(x_1; y_1) \times (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Divi kompleksie skaitļi $(x_1; y_1)$ un $(x_2; y_2)$ ir vienādi tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2$ un $y_1 = y_2$.

Teorēma 1.1. *Kompleksie skaitļi veido algebrisku struktūru - lauku.*

Pierādījums. Pārbaudīsim, ka komplekso skaitļu kopa izveido lauku, t.i. kompleksie skaitļi apmierina lauka aksiomas, ievērojot, ka reālie skaitļi $\mathbb{R}$ izveido lauku. Viegli pārliecināties, ka saskaitīšana ir asociatīva

$$((x_1;y_1)+(x_2;y_2))+(x_3;y_3) = (x_1;y_1)+((x_2;y_2)+(x_3;y_3)),$$

jo

$$((x_1;y_1)+(x_2;y_2))+(x_3;y_3) = (x_1+x_2;y_1+y_2)+(x_3;y_3)$$
$$= (x_1+x_2+x_3;y_1+y_2+y_3) = (x_1;y_1)+(x_2+x_3;y_2+y_3)$$
$$= (x_1;y_1)+((x_2;y_2)+(x_3;y_3))$$

un komutatīva

$$(x_1;y_1)+(x_2;y_2) = (x_1+x_2;y_1+y_2) = (x_2+x_1;y_2+y_1)$$
$$= (x_2;y_2)+(x_1;y_1).$$

Bez tam pāris $(0;0)$ ir nulles elements

$$(x_1;y_1)+(0;0) = (x_1;y_1) = (0;0)+(x_1;y_1)$$

un pāris $(-x_1;-y_1)$ ir pāra $(x_1;y_1)$ inversais pāris attiecībā pret saskaitīšanu

$$(x_1;y_1)+(-x_1;-y_1) = (0;0) = (-x_1;-y_1)+(x_1;y_1).$$

Tātad $\mathbb{C}$ ir *Ābela grupa* attiecībā pret saskaitīšanu.

Analoģiski pārliecināmies, ka arī reizināšana ir asociatīva

$$((x_1;y_1)\times(x_2;y_2))\times(x_3;y_3) = (x_1;y_1)\times((x_2;y_2)\times(x_3;y_3))$$

un komutatīva

$$(x_1;y_1)\times(x_2;y_2) = (x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+y_1x_2)$$
$$= (x_2x_1-y_2y_1;x_2y_1+y_2x_1) = (x_2;y_2)\times(x_1;y_1).$$

Bez tam pāris $(1;0)$ ir vienības elements

$$(x_1;y_1)\times(1;0) = (x_1;y_1) = (1;0)\times(x_1;y_1).$$

Izpildās arī distributīvie likumi

$$((x_1;y_1)+(x_2;y_2))\times(x_3;y_3)=(x_1;y_1)\times(x_3;y_3)+(x_2;y_2)\times(x_3;y_3)$$

un[2]

$$(x_1;y_1)\times((x_2;y_2)+(x_3;y_3))=(x_1;y_1)\times(x_2;y_2)+(x_1;y_1)\times(x_3;y_3)$$

un tātad $\mathbb{C}$ ir komutatīvs gredzens.

Pieņemam, ka $x_1^2+y_1^2>0$. Pārbaudām, ka

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2};-\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)\times(x_1;y_1)$$
$$=(x_1;y_1)\times\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2};-\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)=(1;0).$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katram nenulles elementam eksistē inversais elements attiecībā pret reizināšanu. Tātad komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$ ir lauks. □

Dotās grāmatas 8. nodaļā pierādīsim, ka komplekso skaitļu lauks ir *algebriski slēgts*. Tas nozīmē, ka katram viena mainīgā polinomam, kura koeficienti ir kompleksi skaitļi, ir sakne kompleksajā laukā $\mathbb{C}$.

Uzdevums 1.1. Pārbaudīt, ka komplekso skaitļu kopā reizināšana ir asociatīva un izpildās distributīvais likums. □

Formulas

$$(x_1;0)+(x_2;0)=(x_1+x_2;0),$$
$$(x_1;0)\times(x_2;0)=(x_1\times x_2;0),$$

kā arī nulles $(0;0)$ un vienības $(1;0)$ elementu pieraksts parāda, ka sakārtotu reālu skaitļu pāru kopa

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=\{(x;0)\mid x\in\mathbb{R}\}$$

ir lauka $\mathbb{C}$ apakšlauks, kurā aritmētika ir tāda pati kā laukā $\mathbb{R}$. Precīzāk, attēlojums $x\mapsto(x;0)$ ir lauku $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ izomorfisms, t.i. savstarpēji viennozīmīgs attēlojums, kas saglabā saskaitīšanas un reizināšanas likumus. Līdz ar to katru pāri formā $(x;0)\in\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ varam identificēt ar vienu vienīgu reālu skaitli $x\in\mathbb{R}$.

[2] Komutatīvā gredzenā otrais distributīvais likums ir sekas no pirmā distributīvā likuma

Komplekso skaitli $(0;1)$ sauc par *imagināro vienību* un 1777. gadā Eilers[3] imagināro vienību sāka apzīmēt ar i. Pārliecināmies, ka

$$(0;1)\times(0;1)=(-1;0)$$

vai

$$\mathrm{i}^2=-1.$$

Ievērojam, ka katru pāri izmantojot saskaitīšanas un reizināšanas likumus var uzdot formā

$$(x;y)=(x;0)+(0;1)\times(y;0).$$

Līdz ar to komplekso skaitļu $(x;y)$ apzīmēšanai varam lietot alternatīvu pierakstu, t.i. *algebrisko formu* $x+\mathrm{i}y$. Šāda atbilstība starp kompleksajiem skaitļiem un to algebrisko formu ir savstarpēji viennozīmīga. Vēl vairāk, šī atbilstība ir izomorfisms, kurš saglabā saskaitīšanas un reizināšanas likumus. Kompleksā skaitļa pieraksts algebriskā formā un vienādība $\mathrm{i}^2=-1$ ļauj komplekso skaitļu saskaitīšanas un reizināšanas likumus iegūt saskaņā ar parastajiem algebras likumiem

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$

$$\begin{aligned}(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)&=x_1x_2+\mathrm{i}x_1y_2+\mathrm{i}x_2y_1+\mathrm{i}^2y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

Komplekso skaitli pieņemts apzīmēt ar vienu burtu z, t.i. $z=x+\mathrm{i}y$. Komplekso skaitli $\mathrm{i}y$ sauc par *tīri imagināru*. Skaitli x sauc par kompleksā skaitļa $z=x+\mathrm{i}y$ *reālo daļu* un skaitli y par kompleksā skaitļa $z=x+\mathrm{i}y$ *imagināro daļu*. Līdz ar to skaitlis 0, t.i. kompleksais skaitlis $(0;0)$ ir vienīgais kompleksais skaitlis, kurš vienlaicīgi ir gan reāls skaitlis gan tīri imagināls skaitlis. Komplekso skaitļu reālās un imaginārās daļas apzīmēšanai lieto sekojošus apzīmējumus:

$$x=\mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)=\mathrm{Re}\,z,\quad y=\mathrm{Im}(x+\mathrm{i}y)=\mathrm{Im}\,z.$$

---

[3] Leonhard Euler, ⋆1707.15.IV, Bāzele, Šveice, †1783.18.IX, St. Pēterburga, Krievija; šveiciešu izcelsmes viens no 18. gs ievērojamākiem matemātiķiem, nozīmīgi darbi diferenciāl- un integrālrēķinos, skaitļu teorijā, grafu teorijā, matemātikas lietojumos astronomijā, mehānikā un fizikā. Pēc Katrīnas I ielūguma 1727. gadā ieradās Krievijā un kļuva par St. Pēterburgas akadēmiju īsteno locekli un profesoru. Bija arī Berlīnes akadēmijas īstenais loceklis. Viņš bija 866 zinātnisku publikāciju autors. L. Eilera attēls ir arī uz Šveices 10 franku banknotes

Šeit, kā arī turpmāk, pierakstā $z = x + \mathrm{i}y$ pieņemts, ka x un y ir reāli skaitļi.

Komplekso skaitli $x - \mathrm{i}y$ sauc par kompleksā skaitļa $z = x + \mathrm{i}y$ *kompleksi saistīto* un apzīmē ar $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y.$$

Jebkuram kompleksam skaitlim z izpildās sakarība $\overline{(\bar{z})} = z$. Vienādība $z = \bar{z}$ ir spēkā tad un tikai tad, ja z ir reāls skaitlis. Bez tam viegli pārbaudāmas vienādības

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Reālu skaitli $\sqrt{x^2 + y^2}$ sauc par kompleksā skaitļa $z = x + \mathrm{i}y$ *moduli* un apzīmē ar $|z|$:

$$|z| = |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Acīmredzot $|z| \geq 0$ pie kam $|z| = 0$ tad un tikai tad, ja $z = 0$. Reāla skaitļa modulis sakrīt ar šī paša skaitļa absolūto vērtību. Bez tam no moduļa definīcijas izriet novērtējumi $|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ un $|y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

Atzīmēsim formulas:

$$|z| = |\bar{z}|,$$

$$z\bar{z} = (x = \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Piemērs 1.4. Atrodam kompleksā skaitļa $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$ reālo un imagināro daļu.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}.$$

Seko

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

un

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Tātad, lai atbrīvotos no imaginaritātes daļas saucējā, skaitītājs un saucējs ir jāpareizina ar saucēja kompleksi saistīto skaitli. □

Nākošais uzdevums parāda alternatīvu iespēju definēt kompleksos skaitļus.

Uzdevums 1.2. Pierādīt, ka visu speciāla veida 2×2 matricu

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

kopa, kur $x, y \in \mathbb{R}$, ar parasto matricu saskaitīšanu un reizināšanu ir izomorfa komplekso skaitļu $\mathbb{C}$ laukam. □

1.3 Komplekso skaitļu ğeometriskā interpretācija

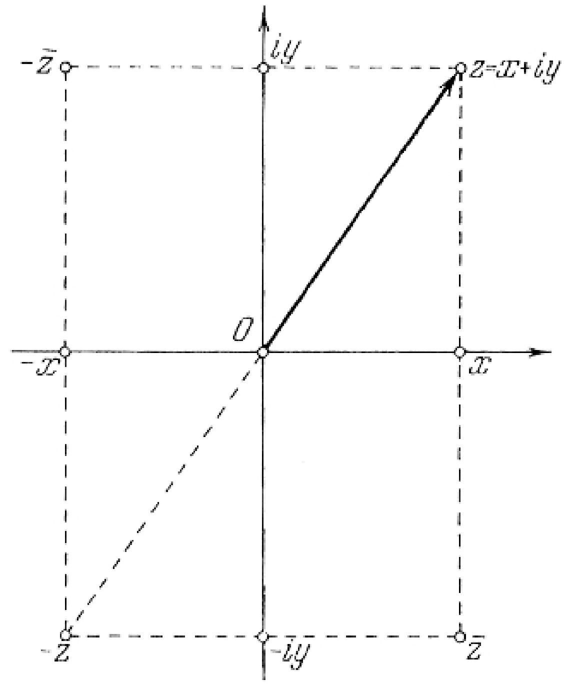
Apskatām plakni, kurā ievesta Dekarta[4] koordinātu sistēma. Komplekso skaitli $z = x + \mathrm{i}y$ var attēlot kā punktu ar koordinātēm (x, y) un šo punktu apzīmējām ar to pašu burtu z, skat. zīm. 1.1. Šāda atbilstība starp kompleksajiem skaitļiem un plaknes punktiem ir savstarpēji viennozīmīga. Atzīmējam, ka reālie skaitļi attēlojās par abscisu ass punktiem, bet tīri imaginārie skaitļi par ordinātu ass punktiem. Tādēļ abscisas asi saucām par *reālo asi*, bet ordinātu asi par *imagināro asi*. Plakni, kurā attēlo kompleksos skaitļus sauc par *komplekso plakni* vai *Arganda*[5] *diagrammu*. Atzīmēsim, ka punkti z un $-z$ ir simetriski pret koordinātu sākuma punktu O, bet punkti z un $\bar{z}$ ir simetriski pret reālo asi.

Komplekso skaitli z var arī attēlot kā vektoru ar sākumu koordinātu centrā O un galu punktā z (zīm. 1.1). Šāda atbilstība starp kompleksiem skaitļiem un vektoriem ar sākumu punktā O kompleksajā plaknē arī ir savstarpēji viennozīmīga. Tāpēc vektoru, kurš attēlo komplekso skaitli z apzīmē ar to pašu burtu z.

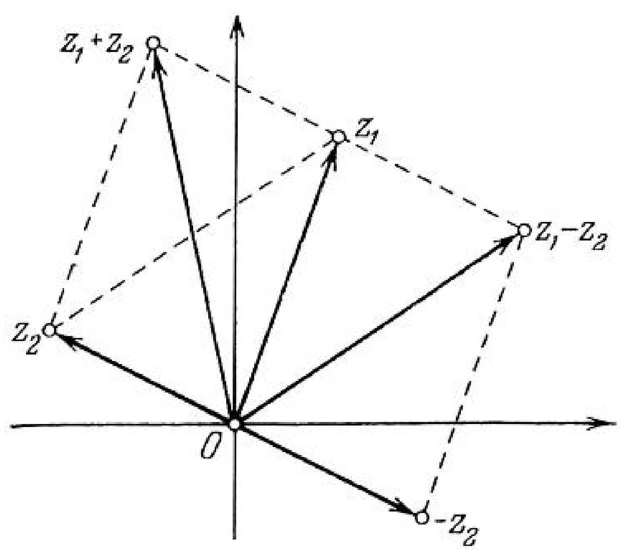
Izlietojot kompleksā skaitļa vektoriālo interpretāciju uzskatāmi var interpretēt komplekso skaitļu saskaitīšanu un atņemšanu. Skaitlis $z_1 + z_2$ attēlojās par vektoru, kuru iegūst pēc parastā vektoru z_1 un z_2

[4] René Descartes, ⋆1596.31.III La Haye, Francija, †1650.11.II Stokholma, Zviedrija; franču filozofs, fiziķis, matemātiķis un dabaszinātnieks, analītiskās ğeometrijas pamatlicējs. Kā aristokrāts varēja veltīt savu dzīvi zinātnei un ceļojumiem

[5] Jean Robert Argand, ⋆1768.18.VII, Žanēva, Šveice, †1822.13.VIII, Parīze, Francija; bukinists, amatieris matemātikā. 1806. gadā publicēja ideju par komplekso skaitļu ğeometrisko interpretāciju



Zīm. 1.1 Kompleksā skaitļa ģeometriskā interpretācija Dekarta koordinātēs



Zīm. 1.2 Komplekso skaitļu saskaitīšanas un atņemšanas ģeometriskā interpretācija

saskaitīšanas likuma. Vektors $z_1 - z_2$ attēlojās kā vektoru z_1 un $-z_2$ summa (skat. zīm. 1.2). No zīm. 1.2 redzams, ka attālums starp punktiem z_1 un z_2 vienāds ar vektora $z_1 - z_2$ garumu, t.i. $|z_1 - z_2|$.

Piemērs 1.5. Kopa

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho > 0\}$$

ir riņķa līnija ar centru punktā $z_0 \in \mathbb{C}$ un rādiusu ρ. $\square$

Uzdevums 1.3. Pierādīt, ka kopa

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| + |z - z_2| = 2a,\ a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|\}$$

ir elipse ar fokusiem punktos z_1 un z_2 un kopa

$$\{z \in \mathbb{C} \mid ||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a,\ a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|\}$$

ir hiperbola ar fokusiem punktos z_1 un z_2. $\square$

1.4 Komplekso skaitļu trigonometriskā un eksponentforma

Kompleksā skaitļa $z = x + \mathrm{i}y$ ($z \neq 0$) stāvokli kompleksā plaknē viennozīmīgi nosaka ne tikai Dekarta koordinātes x un y, bet arī polārās koordinātes r un φ (zīm. 1.3), kur $r = |z|$ ir attālums no koordinātu sākuma punkta O līdz punktam z un φ leņķis starp x pozitīvo asi un vektoru z. Leņķis ir pozitīvs, ja vērsts pretēji pulksteņa rādītāju virzienam, un negatīvs, ja vērsts pulksteņa rādītāju virzienā. Šo leņķi sauc par kompleksā skaitļa z ($z \neq 0$) *argumentu* un apzīmē $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Skaitlim $z = 0$ arguments nav definēts, bet modulis $r = |0| = 0$. Jāatzīmē, ka leņķis $\operatorname{Arg} z$ ir noteikts ar pareizību līdz saskaitāmajam $2\pi n$, kur $n \in \mathbb{Z}$. Lai panāktu leņķa φ viennozīmību definē kompleksā skaitļa z *argumenta galveno vērtību* $\arg z$ ar papildus nosacījumu $-\pi < \arg z \leq \pi$. Tātad

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

vai[6]

[6] Apzīmējums $A = B \pmod{\alpha}$ nozīmē, ka $A - B = n\alpha$, kur $n \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z \pmod{2\pi}.$$

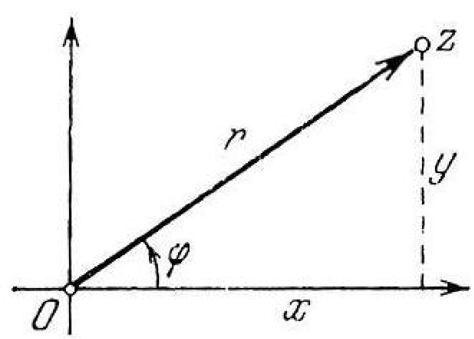
No zīmējuma 1.3 redzams, ka

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1.1}$$

Seko, jebkuru komplekso skaitli $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ var uzrakstīt formā

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Šo pierakstu sauc par kompleksā skaitļa *trigonometrisko formu*.



Zīm. 1.3 Kompleksā skaitļa ģeometriskā interpretācija polārajās koordinātēs

No formulām (1.1), ja $z = x + \mathrm{i}y$ un $\varphi = \arg z$, seko, ka

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{1.2}$$

Tātad, lai atrastu kompleksā skaitļa argumentu ir jāatrisina vienādojumu sistēma (1.2). Iegūstam

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & \text{ja } x > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ja } x = 0, y > 0; \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & \text{ja } x < 0 \text{ un } y \geq 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ja } x = 0, y < 0; \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & \text{ja } x < 0 \text{ un } y < 0. \end{cases}$$

Dažreiz programmās programmējot skaitliskos aprēķinos ir ērtāk izmantot formulu

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ja } y \geq 0; \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ja } y < 0. \end{cases}$$

Piemērs 1.6. Pierakstam komplekso skaitļi $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ trigonometriskā formā. Iegūstam

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

Tā kā dotais kompleksais skaitlis z atrodas trešajā kvadrantā, tad

$$\arg z = \arctan\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

un tātad kompleksais skaitlis z trigonometriskā formā ir

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

□

Kompleksā skaitļa $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ apzīmēšanai lietosim īsāku simbolu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, t.i.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Šo pierakstu sauc par *Eilera formulu*. Atzīmējam, ka $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$, $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$, $\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} = \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^0 = 1$ un $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ visiem $\varphi \in \mathbb{R}$.

Funkcijai $\varphi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ir parastās eksponentfunkcijas īpašības, kas arī attaisno dotā apzīmējuma ievešanu. Atzīmēsim galvenās:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{1.4}$$

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Pierādīsim, piemēram, vienādību (1.3).

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Līdzīgi pierādam vienādību (1.4)

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Vienādību (1.5) pierāda izmantojot matemātisko indukciju un formulas (1.3) un (1.4). No formulas (1.5) saskaņā ar Eilera formulu iegūstam *Muavra*[7] *formulu*

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Katru komplekso skaitli $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ izlietojot Eilera formulu var pierakstīt *eksponentformā*

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

kur $r = |z|$ un $\varphi = \arg z$.

Pieņemam, ka divi kompleksie skaitļi ir uzdoti eksponentformā $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ un $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$. Tad vienādība $z_1 = z_2$ ir spēkā tad un tikai tad, ja

$$r_1 = r_2$$

un

$$\varphi_1 = \varphi_2 \pmod{2\pi}.$$

Arī reizināšanas un dalīšanas darbības ir ērtāk izpildīt, ja kompleksie skaitļi ir pierakstīti eksponentformā.

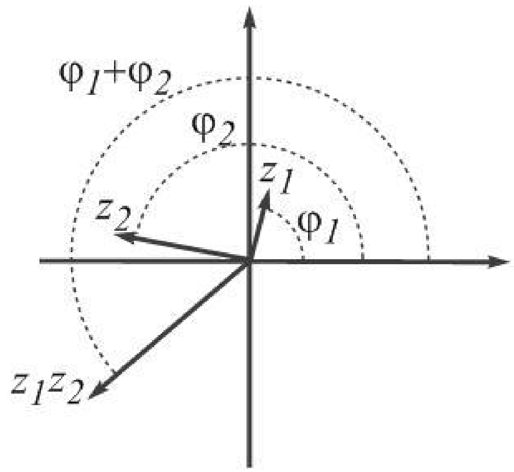
$$z_1 z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

No pēdējām izteiksmēm izriet formulas reizinājuma un dalījuma modulim

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

[7] Abraham de Moivre, ⋆1667.26.V. Vitry-le-François, Francija, †1754.27.XI, Londona, Anglija, franču matemātiķis, pirmais matemātiķis, kurš izmantoja kompleksos skaitļus trigonometrijā, nozīmīgi darbi varbūtību teorijā. Kā hugenots viņš 1685. gadā bija spiests pamest Franciju un atlikušo mūža daļu pavadīt Anglijā, kur bija privātskolotājs un arī azartspēļu un apdrošināšanas konsultants



Zīm. 1.4 Komplekso skaitļu reizināšana

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0,$$

kā arī formulas reizinājuma un dalījuma argumentam

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi},$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

Atzīmēsim, ka kompleksiem skaitļiem izpildās sakarības

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$$

un

$$\arg\bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}.$$

Piemērs 1.7. Aprēķināsim summas $\sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\theta = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta}$ un $\sum_{k=1}^{n} a^k \sin k\theta = \mathrm{Im}\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta}$, ja $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ un $ae^{i\theta} \neq 1$. Apskatām ģeometrisko progresiju $\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta}$ ar kvocientu $ae^{i\theta}$. Izmantojot ģeometriskās progresijas summas formulu iegūstam

$$\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta} = \frac{a^{n+1}e^{i(n+1)\theta} - 1}{ae^{i\theta} - 1} = \frac{(a^{n+1}e^{i(n+1)\theta} - 1)(ae^{-i\theta} - 1)}{(ae^{i\theta} - 1)(ae^{-i\theta} - 1)}$$

$$= \frac{a^{n+2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - a^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 1}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}.$$

Atdalot pēdējā vienādībā reālo un imagināro daļu, iegūstam

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\theta = \frac{a^{n+2}\cos n\theta - a^{n+1}\cos(n+1)\theta - a\cos\theta + 1}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}$$

un

$$\sum_{k=1}^{n} a^k \sin k\theta = \frac{a^{n+2}\sin n\theta - a^{n+1}\sin(n+1)\theta + a\sin\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}.$$

□

Piemērs 1.8. Pieņemam, ka $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ ir n-tās kārtas polinoms ar reāliem koeficientiem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Tad

$$\overline{P_n(z)} = a_0(\bar{z})^n + a_1(\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_n = P_n(\bar{z}).$$

Ja $P_n(z_0) = 0$, tad $P_n(\overline{z_0}) = \overline{P_n(z_0)} = 0$. No šejienes, ja skaitlis z_0 ir polinoma ar reāliem koeficientiem sakne, tad arī kompleksi saistītais skaitlis $\overline{z_0}$ ir dotā polinoma sakne. □

Tālāk pierādām *trīsstūra nevienādību*

Teorēma 1.2. *Jebkuriem kompleksiem skaitļiem $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ir spēka nevienādības*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Pierādījums. Ievērojam, ka

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1} + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.$$

Tā kā

$$|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|,$$

iegūstam

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

no kurienes seko

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.6}$$

No nevienādībām

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \le |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

un

$$|z_2| = |z_1 + z_2 - z_1| \le |z_1 + z_2| + |z_1|$$

seko nevienādība

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|. \tag{1.7}$$

□

Sekas 1.1. *Jebkuriem kompleksiem skaitļiem* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *ir spēkā nevienādība*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |z_k|.$$

□

Uzdevums 1.4. Noskaidrot, kad trīsstūra nevienādībā (1.6) var lietot vienādības zīmi. □

Uzdevums 1.5. Pierādīt, ka ikviena trijstūra iekšējā punkta z attālumu summa līdz trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā trijstūra pusperimetrs p. □

Uzdevums 1.6. Aprēķināt $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$. □

Uzdevums 1.7. Atrast pietiekamos nosacījumus, lai kvadrātvienādojuma

$$x^2 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R}$$

abas saknes pēc moduļa būtu mazākas par 1. □

Atbilde. $|q| < 1$, $|p| < q + 1$.

Uzdevums 1.8. Pierādīt *paralelograma identitāti*[8]

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

□

[8] Katra Hilberta telpa ir arī Banaha telpa ar normu, kuru inducē skalārais reizinājums Hilberta telpā. Apgrieztais apgalvojums ne vienmēr ir pareizs. Ja Banaha telpas norma apmierina paralelograma identitāti, tad Banaha telpā var definēt skalāro reizinājumu un līdz ar to ievest Hilberta telpas struktūru

Uzdevums 1.9. Pierādīt, ka vienīgā nepārtrauktā netriviālā skalārā funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kura apmierina funkcionālvienādojumu

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

ir $x\mapsto f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$, kur $\lambda\in\mathbb{R}$. $\square$

Uzdevums 1.10. Pierādīt *Lagranža*[9] *identitāti*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2-\sum_{1\le k<l\le n}|z_k\overline{w_l}-z_l\overline{w_k}|^2,$$

kur $z_1,z_2,\dots,z_n,w_1,w_2,\dots,w_n\in\mathbb{C}$.

Pierādīt *Košī*[10] - *Buņakovska*[11] - *Švarca*[12] nevienādību

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2\le\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2.$$

$\square$

1.5 Saknes vilkšana no kompleksā skaitļa

Apskatām vienādojumu

$$z^n=a,\tag{1.8}$$

kur $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ ir komplekss skaitlis un $n\in\mathbb{N}$. Pieņemam, ka $a=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Tad

$$r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

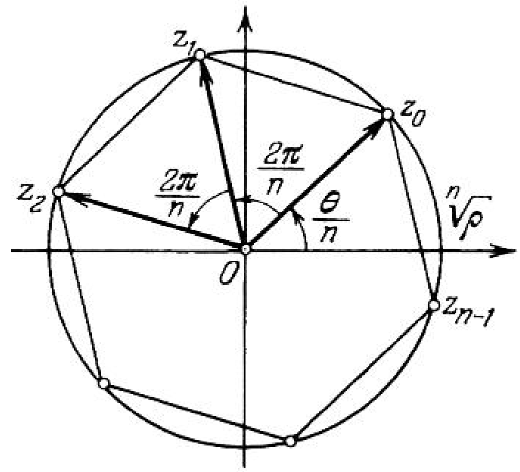
[9] Joseph-Louis Lagrange, ⋆1736.25.I, Turina, Itālija, †1813.10.IV, Parīze, Francija; franču itāļu izcelsmes viens no ievērojamākiem 18. gs. matemātiķiem, mūža beigās matemātikas profesors École Polytechnique Parīzē, nozīmīgi darbi variāciju rēķinos, skaitļu teorijā, mehānikā. Napoleons viņam piešķīra grāfa titulu

[10] Augustin Louis Cauchy, ⋆1789.21.VIII, Parīze, Francija, †1857.23.V, Sceaux (Parīzes apkārtnē), Francija; viens no ievērojamākiem franču matemātiķiem, nozīmīgi darbi reālā un kompleksā mainīgā funkciju teorijā, diferenciālvienādojumos, mehānikā. Profesors École Polytechnique Parīzē, 789 matemātisku publikāciju autors, viņa kopotie raksti izdoti 27 sējumos

[11] Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, ⋆1804.16.XII, Bar, Ukraina, †1889.12.XI, St. Pēterburga, Krievija, krievu matemātiķis Košī skolnieks, St. Pēterburgas universitātes profesors. 1859. gadā pierādīja Košī-Buņakovska-Švarca nevienādību

[12] Hermann Amandus Schwarz, ⋆1843.25.I, Hermsdorf, Polija, †1921.30.XI, Berlīne, Polija; vācu matemātiķis, profesors Getingenas un Berlīnes universitātēs, nozīmīgi darbi konformo attēlojumu, parciālo diferenciālvienādojumu teorijā

No šejienes atrodam $r^n = \rho$ un $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vai $r = \sqrt[n]{\rho}$ un $\varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$. Seko



Zīm. 1.5 *N*-tās kārtas sakņu izvietojums kompleksajā plaknē

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.9}$$

Pierādīsim, ka ir tieši n atšķirīgi kompleksie skaitļi formā (1.9). Atzīmēsim, ka saknes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ ir savā starpā atšķirīgas, jo to argumenti ir savā starpā atšķirīgi un starpība starp divu dažādu sakņu argumentiem ir mazāka par 2π. Tālāk ievērojam, ka visiem $k \in \mathbb{Z}$ ir spēkā vienādība

$$z_{k+n} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2(n+k)\pi)}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}{n}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = z_k.$$

Seko vienādojumam (1.8), ja $a \neq 0$, ir tieši n savā starpā atšķirīgas saknes

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1.10}$$

Kompleksajā plaknē šīs saknes attēlojās kā riņķī ar rādiusu $\sqrt[n]{\rho}$ un centru punktā O (skat. zīm. 1.5) ievilkta regulāra n-stūra virsotnes.

Uzdevums 1.11. Atrast visas kompleksā skaitļa

$$z = -4 + 3\mathrm{i}$$

kuba saknes.

Uzrakstam komplekso skaitli eksponentformā

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5,$$

$$\arg z = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi = \pi - \arctan\left(\frac{3}{4}\right).$$

Tātad

$$z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \arctan\frac{3}{4})}$$

un seko kompleksa skaitļa kuba saknes ir

$$z_k = \sqrt[3]{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi - \arctan\frac{3}{4}}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

□

Uzdevums 1.12. Atrast regulāra n-stūra virsotnes, ja tā centrs atrodas koordinātu sākuma punktā O un zināma viena virsotne z_1. □

Uzdevums 1.13. Pierādīt, ka

$$\sqrt{x + \mathrm{i}y} = \pm\left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + \sigma(y)\mathrm{i}\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}\right),$$

kur

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1, & \text{ja } y \geq 0, \\ -1, & \text{ja } y < 0. \end{cases}$$

□

1.6 Kubiskais vienādojums

Tradicionāli kompleksā mainīgā funkciju teorijā neapskata kubisko vienādojumu, tomēr daudzos lietojumos rodas nepieciešamība apskatīt kubisko vienādojumu, noskaidrot kubiskā vienādojuma sakņu īpašības.

Apskatam vienādojumu

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \tag{1.11}$$

kur koeficienti $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ir kompleksi skaitļi un $a \neq 0$. Ievedot jaunu mainīgo $z = w - \frac{b}{3a}$ iegūstam kubisko vienādojumu kanoniskā formā

$$w^3 + pw + q = 0, \tag{1.12}$$

kur

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{d}{a} + \frac{2b^3 - 9abc}{27a^3}.$$

Vēlreiz pārejot uz jaunu mainīgo $w = t - \frac{p}{3t}$ un reizinot vienādojuma abas puses ar t^3 iegūstam sestās kārtas vienādojumu

$$t^6 + qt^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{1.13}$$

Noskaidrojam vienādojuma (1.13) sakņu struktūru. Pieņemam, ka A ir viena no vienādojuma (1.13) sešām saknēm. Tad vienādojuma (1.13) pārejās saknes ir $A\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$, $A\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$, B, $B\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$ un $B\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$, kur $B = -p(3A)^{-1}$, un attiecīgi kanoniskā kubiskā vienādojuma (1.12) saknes ir

$$\begin{aligned} w_1 &= A + B, \\ w_2 &= A\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} + B\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}, \\ w_3 &= A\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} + B\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}. \end{aligned}$$

Vienādojumu (1.13) ar substitūciju $s = t^3$ reducē uz kvadrātvienādojumu

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0$$

un atrisinām. Izvēlamies vienādojuma (1.13) sakni A formā

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Tad, saskaņā ar nosacījumu $AB = -\frac{p}{3}$, sakne B ir formā

$$B = -p(3A)^{-1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Iegūstam *Kardano*[13] *formulas* vienādojuma (1.12) saknēm

$$w_1 = A + B$$

un

$$w_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm \mathrm{i}\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2}.$$

Piezīme 1.1. Apskatam gadījumu, kad kanoniskā kubiskā vienādojuma (1.12) koeficienti $p, q \in \mathbb{R}$ ir reāli skaitļi.

- Ja $Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, tad vienādojumam (1.12) ir viena reāla un divas kompleksi saistītas saknes, pie kam A un B var izvēlēties tā, lai $A, B \in \mathbb{R}$.
- Ja $Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, tad vienādojumam (1.12) ir trīs reālas saknes pie kam vismaz divas ir sakrītošas. Arī A un B var izvēlēties tā, lai $A, B \in \mathbb{R}$.
- Ja $Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, tad vienādojumam (1.12) ir trīs atšķirīgas reālas saknes. Izlietojot kompleksā skaitļa eksponentformu, atrodam

  $$\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha}\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

  kur

  $$\cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

  Izvēlamies A un B formā

  $$A = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\alpha}{3}}\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad B = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\alpha}{3}}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

  Līdz ar to vienādojuma (1.12) saknes šai gadījumā ir

[13] Gerolamo Cardano, ⋆1501.24.IX, Pāvija, Itālija, †1576.21.IX, Roma, Itālija, itāļu matemātiķis, mediķis, fiziķis un astrologs, Pāvijas universitātes jurisprudences un matemātikas profesora Fazio Cardano un Chiaras Micherijas ārlaulības dēls. Viņš bija arī Pavijas un Boloņas universitātes profesors medicīnā. 1545. gadā publicēja kubiskā vienādojumu atrisinājumu. Nozīmīgi darbi varbūtību teorijā. 1570. gadā Cardano apsūdzēja ķecerībā un uz dažiem mēnešiem ieslodzīja cietumā, jo publicēja Jēzus Krista horoskopu. Pēc cietuma viņš devās uz Romu, kur tika necerēti silti sagaidīts un pāvests Gregorijs XIII 1571. gadā Cardano piešķīra mūža renti

$$w_1 = A + B = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}$$

un

$$w_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm \mathrm{i}\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

□

Piezīme 1.2. Dažreiz ir nepieciešams noskaidrot cik reālas un kompleksas saknes ir vienādojumam (1.11) neizmantojot kuba vienādojuma kanonisko formu. Atrodam, ka

$$Q = -\frac{\Delta}{108a^2},$$

kur *diskriminants* Δ ir

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2.$$

Ja $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tad iegūstam:

- ja $\Delta > 0$, tad vienādojumam (1.11) ir trīs atšķirīgas reālas saknes;
- ja $\Delta = 0$, tad vienādojumam (1.11) ir trīs reālas saknes pie kam vismaz divas ir sakrītošas;
- ja $\Delta < 0$, tad vienādojumam (1.11) ir viena reāla un divas kompleksi saistītas saknes.

Piezīme 1.3. Diferenciālvienādojumu stabilitātes teorijā ir jāatrod nosacījumi pie kuriem n-tās kārtas polinoma ar reāliem koeficientiem visu sakņu reālās daļas ir negatīvas. Atbildi dod Rausa[14] – Hurvica[15] kritērijs.

Kubiska vienādojuma (1.11) *visu sakņu reālās daļas ir negatīvas, ja* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ *un* $bc > ad$.

[14] Edward John Routh, ⋆1831.20.I, Kvebeka, Kanāda, †1907.7.III Kembridža, Lielbritānija; angļu matemātiķis

[15] Adolf Hurwitz, ⋆1859.26.III, Hildesheim, Vācija, †1919.18.XI, Cirihe, Šveice; vācu matemātiķis, profesors Kenigsbergas universitātē un ETH Cirihē

1.7 Kvaternioni

Kvaternionus atklāja Hamiltons[16] un tos definē analoģiski kompleksiem skaitļiem.

Definīcija 1.2. Par *kvaternionu* kopu $\mathbb{H}$ sauc sakārtotu reālu skaitļu kvartetu kopu

$$\mathbb{H} = \{(x;y;u;v) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\},$$

ja katriem diviem kvartetiem $(x_1;y_1;u_1;v_1)$ un $(x_2;y_2;u_2;v_2)$ ir definēti divi kompozīcijas likumi – saskaitīšana un reizināšana:

- $(x_1;y_1;u_1;v_1)+(x_2;y_2;u_2;v_2) = (x_1+x_2;y_1+y_2;u_1+u_2;v_1+v_2)$
- $(x_1;y_1;u_1;v_1)\times(x_2;y_2;u_2;v_2) = (x_1x_2-y_1y_2-u_1u_2-v_1v_2;x_1y_2+x_2y_1+u_1v_2-u_2v_1;x_1u_2+x_2u_1-y_1v_2+y_2v_1;x_1v_2+x_2v_1+y_1u_2-y_2v_1)$.

Ievērojam, ka kvaternionu reizināšana nav komutatīva.

Teorēma 1.3. *Kvaternioni veido algebrisku struktūru - ķermeni.*

Pierādījums. Katram kvaternionam $(x;y;u;v)$ var piekārtot 4×4 matricu formā

$$\begin{pmatrix} x & y & u & v \\ -y & x & -v & u \\ -u & v & x & -y \\ -v & -u & y & x \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

kur $x,y,u,v \in \mathbb{R}$. Šāda atbilstība starp kvaternioniem un (1.14) tipa matricām ir savstarpēji viennozīmīga. Kvaternionu saskaitīšanai un reizināšanai atbilst parastā matricu saskaitīšana un reizināšana pie kam saskaitot vai reizinot (1.14) tipa matricas iegūstam atkal (1.14) tipa matricas. Seko $\mathbb{H}$ un (1.14) tipa matricu kopas ir izomorfas un tātad $\mathbb{H}$ ir nekomutatīvs gredzens.

Ja $|p|^2 = x^2+y^2+u^2+v^2 \neq 0$, tad

---

[16] Sers William Rowan Hamilton, ⋆1805.4.VIII, Dublina, Īrija, †1865.2.IX, Dublina, Īrija; īru matemātiķis, fiziķis un astronoms. 1843. gada 16. oktobrī pastaigājoties gar Dublinas Karalisko kanālu atklāja kvaternionu fundamentālās reizināšanas identitātes. Kopš 1989. gada Īrijas Nacionālā Universitāte Maynooth atzīmējot šo notikumu organizē svētceļojumu no Dunsinkas observatorijas uz Broome tiltu pa Hamiltona pastaigas ceļu. Pie Broome tilta novietota akmens piemiņas plātne

$$\begin{pmatrix} x & y & u & v \\ -y & x & -v & u \\ -u & v & x & -y \\ -v & -u & y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{|p|^2} & -\frac{y}{|p|^2} & -\frac{u}{|p|^2} & -\frac{v}{|p|^2} \\ \frac{y}{|p|^2} & \frac{x}{|p|^2} & \frac{v}{|p|^2} & -\frac{u}{|p|^2} \\ \frac{u}{|p|^2} & -\frac{v}{|p|^2} & \frac{x}{|p|^2} & \frac{y}{|p|^2} \\ \frac{v}{|p|^2} & \frac{u}{|p|^2} & -\frac{y}{|p|^2} & \frac{x}{|p|^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{|p|^2} & -\frac{y}{|p|^2} & -\frac{u}{|p|^2} & -\frac{v}{|p|^2} \\ \frac{y}{|p|^2} & \frac{x}{|p|^2} & \frac{v}{|p|^2} & -\frac{u}{|p|^2} \\ \frac{u}{|p|^2} & -\frac{v}{|p|^2} & \frac{x}{|p|^2} & \frac{y}{|p|^2} \\ \frac{v}{|p|^2} & \frac{u}{|p|^2} & -\frac{y}{|p|^2} & \frac{x}{|p|^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & u & v \\ -y & x & -v & u \\ -u & v & x & -y \\ -v & -u & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katram nenulles kvaternionam eksistē inversais elements attiecībā pret reizināšanu. Tātad kvaternionu kopa $\mathbb{H}$ ir ķermenis. $\square$

Katru kvaternionu izmantojot reizināšanas un saskaitīšanas likumus var uzrakstīt formā

$$\begin{gathered}(x;y;u;v) = (x;0;0;0) + (y;0;0;0) \times (0;1;0;0) \\ +(u;0;0;0) \times (0;0;1;0) + (v;0;0;0) \times (0;0;0;1).\end{gathered}$$

Kvartetu $(x;0;0;0)$ identificējam ar reālu skaitli $x \in \mathbb{R}$. Ievedam apzīmējumus $\mathrm{i} = (0;1;0;0)$, $\mathrm{j} = (0;0;1;0)$ un $\mathrm{k} = (0;0;0;1)$. Līdz ar to katru kvaternionu var uzrakstīt algebriskā formā $p = x + y\mathrm{i} + u\mathrm{j} + v\mathrm{k}$. Izmantojot reizināšanas likumu var pārbaudīt kvaternionu fundamentālās reizināšanas identitātes

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

No šīm formulām iegūstam reizināšanas bāzes tabulu

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k},\ \mathrm{jk} = \mathrm{i},\ \mathrm{ki} = \mathrm{j},\ \mathrm{ji} = -\mathrm{k},\ \mathrm{kj} = -\mathrm{i},\ \mathrm{ik} = -\mathrm{j}.$$

Piemēram, tā kā $-1 = \mathrm{ijk}$, tad reizinot vienādības abas puses ar k iegūstam

$$-\mathrm{k} = \mathrm{ijkk} = \mathrm{ij}(-1).$$

Seko, $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$.

Kvaternionu $\overline{p} = x - y\mathrm{i} - u\mathrm{j} - v\mathrm{k}$ sauc par kvaterniona $p = x + y\mathrm{i} + u\mathrm{j} + v\mathrm{k}$ *saistīto kvaternionu*. Reālu skaitli $|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2 + v^2}$ sauc par kvaterniona p *absolūto vērtību*. Atzīmējam, ka $p\overline{p} = |p|^2$.

Piezīme 1.4. Analogi kvaternioniem var definēt *oktonionus* $\mathbb{O}$ – sakārtotu 8 reālu skaitļu kopu. Oktonioniem reizināšana nav asociatīva un nav komutatīva. Matemātiskā literatūrā dažreiz oktonionus sauc arī par *Kelī skaitļiem*[17].

[17] Arthur Cayley, ⋆1821.16.VIII, Richmond, Lielbritānija, †1895.26.I Kembridža, Lielbritānija; britu matemātiķis, Kembridžas universitātes profesors. Ieveda grupas jēdzienu, formulēja Kelī – Hamiltona teorēmu, ka katra kvadratiska matrica ir tās raksturīgā vienādojuma sakne

Nodaļa 2
Kompleksā mainīgā funkcija un tās atvasinājums

Šajā nodaļā ievedam kompleksā mainīgā funkcijas jēdzienu un tālāk atrodam nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai kompleksā mainīgā funkcija būtu diferencējama, definējam analītiskas funkcijas jēdzienu un dodam kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājuma moduļa un argumenta ģeometrisko interpretāciju.

2.1 Komplekso skaitļu virknes

Komplekso skaitļu $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ virknes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ robežas definīcija formāli ir tāda pati kā reālo skaitļu virknes robežas definīcija.

Definīcija 2.1. Komplekso skaitli $a \in \mathbb{C}$ sauc par *komplekso skaitļu virknes* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *robežu*, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu veselo skaitli $N = N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība

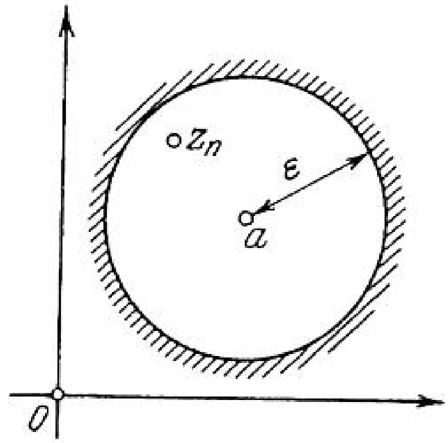
$$|z_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Virkni, kurai eksistē robeža, sauc par *konverģentu* virkni, bet virkni, kurai robeža neeksistē sauc par *diverģentu* virkni. Robežai lieto standarta apzīmējumu

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Nevienādības (2.1) ģeometriskā interpretācija ir sekojoša: punkts z_n, ja $n > N(\varepsilon)$, kompleksajā plaknē atrodas riņķa ar rādiusu $\varepsilon > 0$ un centru punktā a iekšienē. Atbilstošo riņķi, t.i. $z \in \mathbb{C}$ punktu kopu, kuri apmierina nevienādību $|z - a| < \varepsilon$ un $\varepsilon > 0$, sauc par punkta $a \in \mathbb{C}$ ε-*apkārtni* (zīm. 2.1). Citiem vārdiem skaitlis $a \in \mathbb{C}$ ir virknes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Zīm. 2.1 Punkta $a \in \mathbb{C}$ ε apkārtne kompleksajā plaknē



robeža, ja jebkura punkta $a \in \mathbb{C}$ apkārtne satur visus, izņemot galīga skaita dotās virknes punktus. Tādā veidā virknes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ robežas definīcija ir parastā plaknes punktu robežas definīcija izteikta kompleksо skaitļu terminos.

Katrai komplekso skaitļu virknei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ atbilst divas reālo skaitļu virknes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kur $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$.

Teorēma 2.1. *Komplekso skaitļu virknei eksistē robeža* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$*, kur* $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ *tad un tikai tad, ja eksistē abas robežas*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Pierādījums. Nepieciešamība. Pieņemam, ka komplekso skaitļu virknei eksistē robeža $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, t.i. izpildās nosacījums (2.1). Tad no nevienādībām $|x_n - \alpha| \le |z_n - a|$ un $|y_n - \beta| \le |z_n - a|$ izriet robežu $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ un $\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ eksistence

Pietiekamība. Apgrieztais apgalvojums izriet no trīsstūra nevienādības

$$|z_n - a| = |(x_n - \alpha) + \mathrm{i}(y_n - \beta)| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|.$$

□

Dotā teorēma atļauj reālo skaitļu virkņu teoriju pārnest uz komplekso skaitļu virknēm. Atzīmējam tomēr, ka nav pārnesamas uz komplekso plakni teorēmas par robežpāreju nevienādībās, teorēma, ka ierobežotai monotonai virknei eksistē galīga robeža, jo kompleksie skaitļi savā starpā nav salīdzināmi.

Atzīmēsim sekojošas komplekso skaitļu virkņu īpašības. Pieņemam, ka $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ un $\lim_{n\to\infty} \xi_n = b$. Tad

- $\lim_{n\to\infty}(z_n \pm \xi_n) = a \pm b$,
- $\lim_{n\to\infty}(z_n \xi_n) = ab$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\xi_n} = \frac{a}{b}$, ($\xi_n \neq 0$, ja $n \in \mathbb{N}$ un $b \neq 0$).

No virknes robežas definīcijas un nevienādības $||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|$ izriet sekojoša īpašība: ja

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \text{tad arī} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|.$$

Apgrieztais apgalvojums vispārīgā gadījumā nav pareizs. Virknei $\{e^{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ neeksistē robeža, kaut gan moduļu virknes $\{|e^{in}|\}_{n\in\mathbb{N}}$ robeža ir 1. Turpretī, ja $a = 0$, tad $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, ja $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

Definīcija 2.2. Komplekso skaitļu virkni $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sauc par *fundamentālu virkni*, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu veselu skaitli $N = N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$ un $m > N$ izpildās nevienādība

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Analoģiski kā reālo skaitļu virknei pierāda *Košī nepieciešamo un pietiekamo komplekso skaitļu virknes konverģences kritēriju.*

Teorēma 2.2. *Komplekso skatļu virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir konverģenta tad un tikai tad ja tā ir fundamentāla virkne.*

Definīcija 2.3. Komplekso skaitļu virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir *ierobežota*, ja eksistē tāds skaitlis $R > 0$, ka visiem $n \in \mathbb{N}$ izpildās nevienādība $|z_n| \leq R$.

No komplekso skaitļu virknes robežas Definīcijas 2.1 izriet, ka katra konverģenta virkne ir ierobežota. Ievērojam, ka

$$|z_n| \leq |z_n - a| + |a| \leq \varepsilon + |a|,$$

ja tikai $n > N(\varepsilon)$. Seko visiem $n \in \mathbb{N}$ izpildās novērtējums

$$|z_n| \leq |a| + \max\left\{\varepsilon, \max_{1\leq k\leq N(\varepsilon)} |z_k - a|\right\} = R < +\infty.$$

Apgrieztais apgalvojums vispārīgā gadījumā nav pareizs. Tomēr var pierādīt Bolcano[1]-Veierštrāsa[2] teorēmas analogu komplekso skaitļu virknēm.

Teorēma 2.3. *No katras ierobežotas komplekso skaitļu virknes var izdalīt konverğentu apakšvirkni.*

Pierādījums. Lai pierādītu šo teorēmu atliek ievērot, ka no virknes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kur $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, ierobežotības izriet virkņu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ierobežotība. Vispirms, izlietojot Bolcano-Veierštrāsa teorēmu, no virknes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ izdalam konverğentu apakšvirkni $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tālāk apskatām atbilstošo virkni $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ un no tās savukārt izdalām konverğentu apakšvirkni. Līdz ar to esam no virknes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ izdalījuši konverğentu apakšvirkni, kas arī bija jāpierāda. □

Parasti, lai pierādītu konkrētas komplekso skaitļu virknes diverğenci rīkojās sekojoši. No virknes izdala divas konverğentas apakšvirknes ar atšķirīgām robežām. Bet tas nozīmē, ka dotā virkne ir diverğenta.

2.2 Paplašinātā kompleksā plakne

Ievedam "bezgalības" jēdzienu ar sekojošas definīcijas palīdzību.

Definīcija 2.4. Komplekso skaitļu virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverğē uz bezgalību*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{2.2}$$

Dotā definīcija formāli sakrīt ar atbilstošo definīciju reālo skaitļu virknēm, jo nevienādība (2.2) nozīmē, ka katram $R > 0$ eksistē tāds vesels skaitlis $N = N(R)$, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība

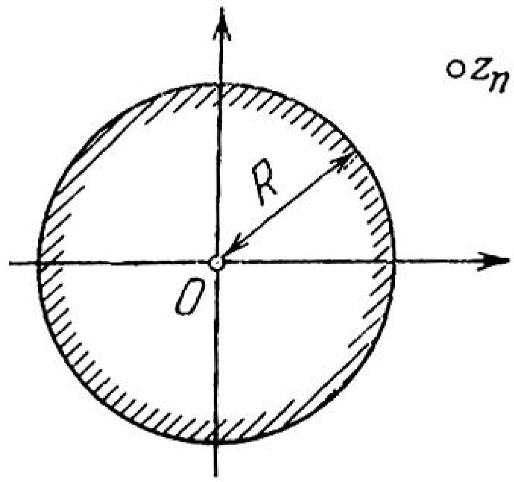
$$|z_n| > R. \tag{2.3}$$

Apskatam virkni $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kur $z_n \neq 0$. Atzīmēsim, ka šajā gadījumā $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ tad un tikai tad, kad

[1] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, ⋆1781.5.X, Prāga, Čehija, †1848.18.XII, Prāga, Čehija; čehu matemātiķis un teologs

[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, ⋆1815.31.X, Ostenfelde, Vācija, †1897.19.II, Berlīne, Vācija; vācu matemātiķis, modernās funkciju teorijas izveidotājs

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{z_n} = 0.$$



Zīm. 2.2 Bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ ε apkārtne kompleksajā plaknē

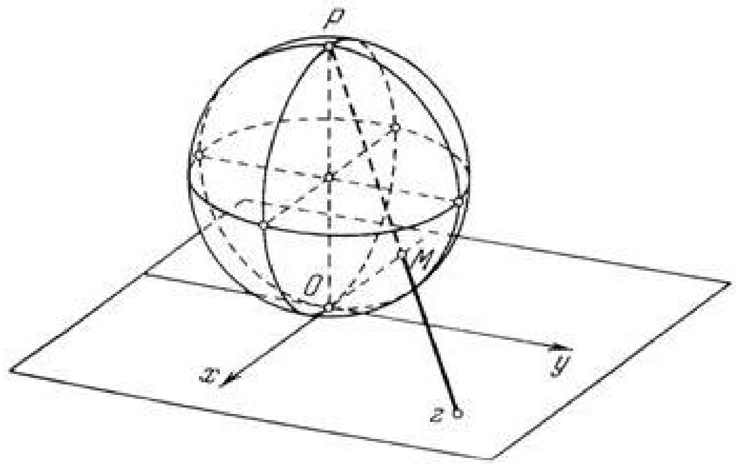
Vienādību (2.2) var ģeometriski interpretēt (zīm. 2.2). Nevienādība (2.3) nozīmē, ka punkts z_n, visiem $n > N$, kompleksajā plaknē atrodas riņķa ar rādiusu R un centru koordinātu sākuma punkta O ārpusē. Šo kopu sauc par *bezgalīgi tālā punkta* $z = \infty$ *apkārtni*. Seko, bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir virknes $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ robeža, ja katra bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ apkārtne satur visus, izņemot galīgu skaitu, dotās virknes punktus.

Tādā veidā "skaitlim" $z = \infty$ atbilst simboliskais bezgalīgi tālais punkts. Komplekso plakni, kas papildināta ar bezgalīgi tālo punktu, sauc par *paplašināto komplekso plakni* un apzīmē ar $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Atzīmēsim, ka bezgalīgi tālam punktam $z = \infty$ netiek definēts kompleksā skaiļa arguments, reālā un imaginārā daļa.

2.3 Stereogrāfiskā projekcija

Dosim ģeometrisko interpretāciju paplašinātai kompleksai plaknei. Apskatīsim sfēru $\mathbb{S}^2$, kura pieskaras kompleksai plaknei punktā O (zīm. 2.3). Ar P apzīmēsim sfēras $\mathbb{S}^2$ punktu, diametrāli pretēju punk-



Zīm. 2.3 Stereografiskā projekcija

tam O. Katram kompleksās plaknes punktam z piekārtojam sfēras $\mathbb{S}^2$ punktu M, kurš ir nogriežņa, savienojoša kompleksās plaknes punktu z ar P, krustpunkts ar sfēru $\mathbb{S}^2$. Acīmredzot uz bezgalību konverğējošas virknes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktiem atbilst sfēras $\mathbb{S}^2$ punkti konverğējoši uz punktu P. Tādēļ bezgalīgi tālam punktam $z = \infty$ piekārtosim punktu P.

Tāda atbilstība starp paplašinātās kompleksās plaknes punktiem un sfēras $\mathbb{S}^2$ punktiem ir savstarpēji viennozīmīga. Šo atbilstību sauc par *stereogrāfisko projekciju* un sfēru $\mathbb{S}^2$ par *Rīmana*[3] *sfēru*.

Kompleksos skaitļus, ieskaitot bezgalīgi tālo punktu $z = \infty$, var attēlot par Rīmana sfēras punktiem. Pie kam konverğējoša komplekso skaitļu virkne attēlojās par konverğējošu punktu virkni uz Rīmana sfēras.

Teorēma 2.4. *Paplašinātā kompleksā plakne $\overline{\mathbb{C}}$ ir kompakta, t.i. no katras komplekso skaitļu virknes var izdalīt konverğējošu (iespējams uz bezgalību) apakšvirkni.*

Pierādījums. Pieņemam, ka virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir ierobežota. Saskaņā ar Bolcano-Veierštrāsa teorēmu no šīs virknes var izdalīt konverğentu

[3] Georg Friedrich Bernhard Riemann, ⋆1826.17.IX, Breselenz, Vācija, †1866.20.VII Selasca, Itālija; vācu matemātiķis, kurš izveidoja matemātisko pamatu Alberta Einšteina relativitātes teorijai, nozīmīgi pētījumi funkciju teorijā, kompleksajā analīzē un skaitļu teorijā

apakšvirkni. Ja virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir neierobežota, tad katram veselam skaitlim $k > 0$ eksistē n_k tāds, ka $|z_{n_k}| > k$. Seko, $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$. $\square$

2.4 Komplekso skaitļu rindas

Definīcija 2.5. Komplekso skaitļu rindu

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \tag{2.4}$$

sauc par *konverğentu*, ja konverğē tās parciālo summu $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ virkne.

Parciālo summu virknes $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ robežu $s \in \mathbb{C}$ sauc par *rindas summu*, t.i. $s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Rinda (2.4) ir *absolūti konverğenta*, ja konverğē rinda $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$. Tādā veidā jautājums par rindu konverğenci reducējās uz parciālo summu virknes konverğenci. No konverğentu virkņu īpašībām izriet sekojoša teorēma

Teorēma 2.5. *Komplekso skatļu rinda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konverğē tad un tikai tad, ja konverğē reālo skaitļu rindas $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ un $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, kur $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$. Pie tam*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Analoğiski kā reālā mainīgā funkciju teorijā pierāda *Košī nepieciešamo un pietiekamo konverğences kritēriju komplekso skaitļu rindām.*

Teorēma 2.6. *Rinda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ir konverğenta tad un tikai tad ja tās parciālsummu*

$$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

virkne ir fundamentāla.

Bez tam atzīmēsim sekojošas rindu īpašības:

- Lai rinda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konverğētu ir nepieciešami, ka $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.
- Ja konverğē rinda $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$, tad arī konverğē rinda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

2.5 Ceļi un līnijas kompleksajā plaknē

Vieni no kompleksā mainīgā funkcijas teorijas pamata topoloģiskiem objektiem ir ceļš un līnija.

Definīcija 2.6. Nepārtrauktu attēlojumu kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$

$$\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$$

sauc par *ceļu* (*path*) (arī par *līnijas parametrisko vienādojumu*), kur $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ un $\alpha < \beta$. Ja $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, tad ceļš ir *slēgts*.

Ja $z_1 = \sigma(t_1)$ un $z_2 = \sigma(t_2)$, kur $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$, tad saka, ka punkts z_2 seko aiz punkta z_1. Punktu $a = \sigma(\alpha)$ sauc par ceļa *sākuma punktu*, bet punktu $b = \sigma(\beta)$ par ceļa *gala punktu*.

Definīcija 2.7. Divi ceļi $\sigma_1\colon [\alpha_1,\beta_1] \to \mathbb{C}$ un $\sigma_2\colon [\alpha_2,\beta_2] \to \mathbb{C}$ ir *ekvivalenti*, ja eksistē tāda nepārtraukta, stingri monotoni augoša sirjektīva funkcija (homeomorfisms) $\tau\colon [\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha_2,\beta_2]$, ka $\sigma_2(\tau(t)) = \sigma_1(t)$ visiem $t \in [\alpha_1,\beta_1]$.

Var viegli pārbaudīt, ka ekvivalenti ceļi apmierina visas trīs ekvivalences aksiomas:

- $\sigma_1 \sim \sigma_1$;
- ja $\sigma_1 \sim \sigma_2$, tad $\sigma_2 \sim \sigma_1$;
- ja $\sigma_1 \sim \sigma_2$ un $\sigma_2 \sim \sigma_3$, tad $\sigma_1 \sim \sigma_3$.

Izmantojot minēto ekvivalences attiecību definējam faktorkopu, kuras elementus (ekvivalences klases) saucam par *līnijām*. Punkta $z(t) = \sigma(t)$ kustība kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$ parametra $t \in [\alpha,\beta]$ augšanas virzienā definē *pozitīvo orientāciju* uz līnijas. Tātad līniju varam viennozīmīgi idenficēt ar *lineāri sakarīgu, pozitīvi orientētu punktu kopu* $\sigma([\alpha,\beta]) \subset \mathbb{C}$ kompleksajā plaknē un līniju apzīmēsim ar γ. Atzīmējam, ka ekvivalenti ceļi definē vienu un to pašu ģeometrisko objektu - līniju γ kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$.

Apskatām līniju γ, kuras ceļš ir $\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Apzīmējam ar γ^{-1} līniju, kura iegūta no līnijas γ mainot orientāciju uz pretējo. Tad, piemēram, ceļš $\sigma_1\colon [-\beta,-\alpha] \to \mathbb{C}$, kur $\sigma_1(t) = \sigma(-t)$ ir līnijai γ^{-1} atbilstošais ceļš. Atzīmējam, ka ceļi σ un σ_1 savā starpā nav ekvivalenti jo orientācija ir pretēja.

Bieži, neierobežojot vispārīgumu, ir lietderīgi pieņemt, ka ceļš ir definēts kopā $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Tiešām ceļi $\sigma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, kur $\sigma_2(\tau) = \sigma_1(\alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)\tau)$ un $\sigma_1\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ ir ekvivalenti.

Definētais līnijas jēdziens ir ļoti plašs. Eksistē tādas "līnijas", kuras neatbilst parastajam intuitīvajam priekšstatam par līniju. Tā, piemēram, eksistē nepārtraukta sirjektīva funkcija $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ tā sauktā *Peāno*[4] *līnija*.

Svarīgu ceļu klasi veido tādi ceļi, kuri paši sevi nekrusto.

Definīcija 2.8. Ceļu $\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, sauc par *vienkāršu* jeb *Žordāna*[5] *ceļu*, ja katram $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta)$ un $t_1 \neq t_2$ ir spēkā nevienādība $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$. Ja Žordāna ceļš apmierina vienādību $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, tad šādu ceļu sauc par *slēgtu Žordāna ceļu*. Atbilstošās līnijas sauc par *Žordāna līnijām*.

Līnijas γ daļu starp punktiem $z = \sigma(t_1)$ un $z_2 = \sigma(t_2)$, kur $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ sauc par *līnijas γ loku*.

Pieņemam, ka $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ un γ_k ir līnijas γ loks no punkta $z_{k-1} = \sigma(t_{k-1})$ līdz punktam $z_k = \sigma(t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Tad sakām, ka *līnija γ satāv no lokiem* vai *sadalīta lokos* γ_1, γ_2, …, γ_n. Gabaliem lineāru līniju ar virsotnēm punktos $z_k = \sigma(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sauc par *līnijā γ ievilktu lauztu līniju*.

Apskatīsim visu līnijā γ ievilkto lauzto līniju kopu. Ja visu līnijā γ ievilkto lauzto līniju garumu kopa ir ierobežota no augšas, tad līniju γ sauc par *iztaisnojumu* vai *rektificējamu* un visu ievilkto lauzto līniju garumu kopas suprēmu sauc par *līnijas γ garumu*.

Līnija γ ir rektificējama tad un tikai tad, ja ceļš $\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta funkcija ar ierobežotu variāciju.

Piezīme 2.1. Ceļš $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $t \in [0, 1/\pi]$, kur $\xi(t) = t$ un

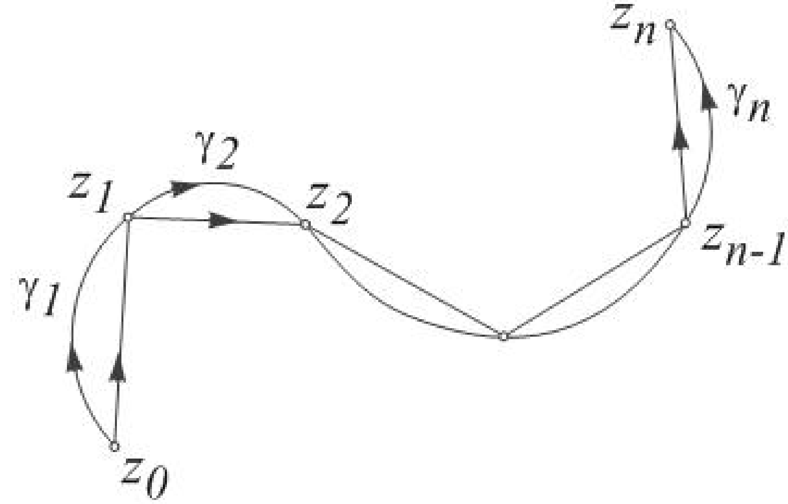
$$\eta(t) = \begin{cases} t\cos\frac{1}{t}, & \text{ja } t > 0, \\ 0, & \text{ja } t = 0, \end{cases}$$

ir neiztaisnojams Žordāna ceļš.

Ievērojam, ka punkti $\left(\frac{1}{n\pi}, \frac{(-1)^n}{n\pi}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ atrodas uz ceļam atbilstošās līnijas. Savienojam šos punktus ar lineāriem nogriežņiem un

[4] Giuseppe Peano, ⋆1858.27.VIII, Cuneo, Itālija, †1932.20.IV, Turina, Itālija; itāļu matemātiķis, simboliskās loģikas izveidotājs, nozīmīgi darbi matemātikas pamatos

[5] Marie Ennemond Camille Jordan, ⋆1838.5.I, La Croix-Rousse, Francija, †1922.22.I, Parīze, Francija; franču matemātiķis, École Polytechnique Parīzē profesors, nozīmīgi darbi ģeometrijā



Zīm. 2.4 Līnijas garuma definīcija

aprēķinām dotā līnijā ievilktās lauztās līnijas garumu

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{(n+1)\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} > \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tā kā harmoniskā rinda diverģē, tad ievilktās lauztās līnijas garums nav ierobežots no augšas un līdz ar to dotā līnija ir neiztaisnojama Žordana līnija. □

Ceļu sauc par *gludu*, ja funkcija $\sigma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukti diferencējama un $\sigma'(t) \neq 0$, pie kam ja ceļš ir slēgts, tad arī $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$.

Līnija ir *gabaliem gluda*, ja to var sadalīt galīga skaita gludos lokos. Gabaliem gludas līnijas gadījumā funkcija σ ir nepārtraukti diferencējama izņemot galīga skaita punktus, kuros eksistē labais un kreisais atvasinājums. Šos punktus sauc par *līnijas stūra punktiem*. Saskaņā ar reālā mainīgā funkcijas teoriju gabaliem gluda līnija plaknē ir iztaisnojama un tās garumu $l(\gamma)$ var aprēķināt pēc formulas

$$l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

kur $|\sigma'(t)|\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}l$ – līnijas loka diferenciālis.

Piemērs 2.1. Ceļš $\sigma\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, kur $\sigma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ definē kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$ pusriņķi $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ un pozitīvā orientācija uz pusriņķa ir pretēja pulksteņa rādītāja virzienam. Atzīmējam, ka dotā līnija ir gluda, tātad iztaisnojama Žordāna līnija.

Piemērs 2.2. Ceļš $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, kur $\sigma(t) = z_0 + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ un $\rho > 0$ definē kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$ riņķa līniju

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho\}$$

ar centru punktā $z_0 \in \mathbb{C}$ un rādiusu $\rho > 0$. Pozitīvā orientācija uz riņķa līnijas ir pretēja pulksteņa rādītāja virzienam. Atzīmējam, ka dotā līnija ir slēgta Žordāna līnija ar kopīgu sākumu un galu punktu $z = z_0 + \rho$.

Ievedīsim neierobežota ceļa jēdzienu.

Definīcija 2.9. Ceļu $\sigma\colon [\alpha,\infty) \to \mathbb{C}$, sauc par *neierobežotu vienkāršu* jeb *neierobežotu Žordāna ceļu*, ja

- $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$;
- katram $\beta > \alpha$ ceļs $\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ ir Žordāna ceļš.

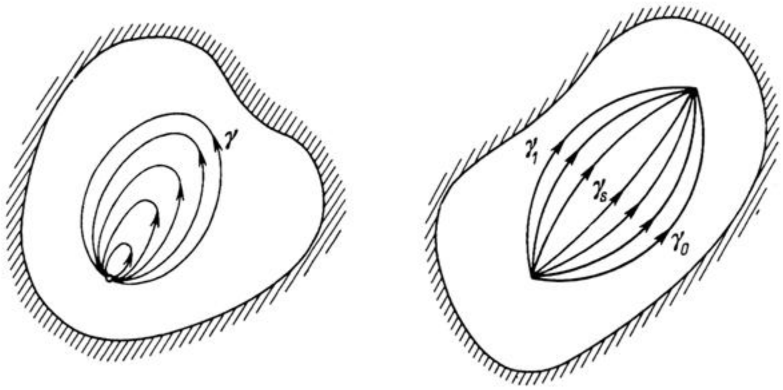
Analoģiski definējam neierobežotu gabaliem gludu ceļu.

2.6 Homotopi ceļi un līnijas

Apskatām divus ceļus $\sigma_1\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ un $\sigma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ar kopīgu sākuma punktu $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$ un kopīgu gala punktu $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$.

Definīcija 2.10. Ceļi σ_1 un σ_2 ir *homotopi* kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$, ja eksistē tāda nepārtraukta funkcija $\sigma\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$, ka:

- $\sigma(t,0) = \sigma_1(t)$ un $\sigma(t,1) = \sigma_2(t)$, ja $t \in [0,1]$,
- $\sigma(0,s) = \sigma_1(0)$ un $\sigma(1,s) = \sigma_1(1)$, ja $s \in [0,1]$.



Zīm. 2.5 Homotopas līnijas

Ja $\sigma_1(0) = \sigma_1(1)$, tad ceļš σ_1 ir slēgts un ja vēl visiem $t \in [0,1]$ izpildās vienādība $\sigma(t,1) = \sigma_1(0)$, tad ceļš σ_1 ir *homotops nullei*.

Homotopijas jēdzienu var arī uzskatāmi ğeometriski interpretēt. Divas līnijas γ_1 un γ_2, kuras atbilst ceļiem σ_1 un σ_2 ir homotopas kopā $E \subset \mathbb{C}$, ja līniju γ_1 var nepārtraukti deformēt par līniju γ_2 paliekot kopā E un saglabājot nemainīgus līnijas sākuma punktu $\sigma_1(0) \in E$ un gala punktu $\sigma_1(1) \in E$. Ievedam sekojošu apzīmējumu $\gamma_0 \approx \gamma_1$. Slēgta līnija γ ir homotopa nullei kopā E, ja šo līniju var nepārtraukti deformēt punktā paliekot kopā E (apzīmējums $\gamma \approx 0$).

Homotopijai ir sekojošas īpašības:

- Vienkārtsakarīgā apgabalā jebkuras divās līnijas ar kopīgu sākuma un kopīgu gala punktu ir savstarpēji homotopas. Jebkura slēgta līnija ir homotopa nullei.
- Pieņemam, ka līnijas $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ un $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2$ atrodas kopā E. Ja $\gamma_1 \approx \tilde{\gamma}_1$ kopā E un $\gamma_2 \approx \tilde{\gamma}_2$ kopā E, tad $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ kopā E.
- Līnija $\gamma\gamma^{-1} \approx 0$ jebkurā kopā, kas satur līniju γ.

2.7 Apgabals kompleksajā plaknē

Definīcija 2.11. Paplašinātās kompleksās plaknes $\overline{\mathbb{C}}$ punktu kopu $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ sauc par *apgabalu*, ja

- kopa G ir *vaļēja*, t.i. katram $z \in G$ eksistē tāda šī punkta apkārtne kura pieder G,
- kopa G ir *lineāri sakarīga*, t.i. jebkurus divus G punktus var savienot ar ceļu (arī neierobežotu), kura visi punkti pieder G.

Piezīme 2.2. Tā kā matemātiskajā literatūrā ir sastopami dažādi kopu sakarības jēdzieni, tad precizēsim šos jēdzienus un sakarības starp tiem. Saka, ka topoloģiska telpa $\mathbb{X}$ *nav sakarīga*, ja tā ir divu netukšu vaļēju kopu ar tukšu šķēlumu apvienojums. Pretējā gadījumā topoloģiska telpa $\mathbb{X}$ ir *sakarīga*. Topoloģiskas telpas apakškopa ir sakarīga, ja tā ir sakarīga apakškopā inducētajā topoloģijā.

Saka ka topoloģiska telpa $\mathbb{X}$ ir *lineāri sakarīga*, ja jebkuriem diviem šīs telpas punktiem $a, b \in \mathbb{X}$ eksistē nepārtraukts attēlojums $f\colon [0,1] \to \mathbb{X}$ tāds, ka $f(0) = a$ un $f(1) = b$. Katra lineāri sakarīga topoloģiska telpa ir arī sakarīga. Pretējais apgalvojums ne vienmēr ir spēkā. *Topoloģiskā sīnusa līnija* ir piemērs topoloģiskai telpai, kura ir sakarīga, bet nav lineāri sakarīga. Tomēr var pierādīt, ka telpu $\mathbb{R}^n$ vai $\mathbb{C}^n$ vaļējas kopas ir sakarīgas tad un tikai tad, kad tās ir lineāri sakarīgas.

Saka ka topoloģiska telpa $\mathbb{X}$ ir *lokveida sakarīga*, ja jebkuriem diviem šīs telpas punktiem $a, b \in \mathbb{X}$ eksistē homeomorfisms $f\colon [0,1] \to \mathbb{X}$ tāds, ka $f(0) = a$ un $f(1) = b$. Var pierādīt, ka jebkura lokveida sakarīga Hausdorfa topoloģiska telpa ir arī lineāri sakarīga. $\square$

Par apgabala G *robežpunktu* sauc punktu, kura jebkura apkārtne satur kā kopas G punktus, tā arī punktus, kuri nepieder kopai G. Visu robežpunktu kopu sauc par apgabala G robežu un apzīmē ∂G. Kopu $\overline{G} = G \cup \partial G$ sauc par apgabala G *slēgumu*.

Apgabala robežai var būt ļoti sarežģīta struktūra. Tālāk kursā mēs apskatīsim tikai tādus apgabalus, kuru robežas sastāv no galīga skaita iztaisnojamiem Žordāna lokiem un izolētiem punktiem. Bez tam uzskatīsim, ka visas robežlīnijas ir tā orientētas, ka ja punkts pārvietojās pa robežlīniju pozitīvās orientācijas virzienā, tad apgabals G paliek pa kreisi.

Apgabals G ir *ierobežots*, ja eksistē tāds riņķis

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\},$$

ka $G \subset D$.

Kompleksās plaknes apgabalu G sauc par *vienkārtsakarīgu*, ja jebkuru slēgtu līniju, kuras visi punkti pieder G var nepārtraukti deformēt punktā paliekot visu laiku apgabalā G. Citiem vārdiem, jebkura vienkārtsakarīgā apgabalā G slēgta līnija γ ir *homotopa nullei*.

Atzīmēsim vēl sekojošu *Žordāna teorēmu*.

Teorēma 2.7. *Slēgta vienkārša līnija sadala paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$ divos vienkārtsakarīgos apgabalos.*

Ierobežotai slēgtai līnijai šos apgabalus attiecīgi sauc par *līnijas iekšpusi* – apgabalu, kurš nesatur bezgalīgi tālo punktu, un *līnijas ārpusi* – atlikušo apgabalu. Sacīsim, ka vienkārša slēgta līnija γ *orientēta pozitīvi*, ja pārvietojoties pa šo līniju tās orientācijas virzienā līnijas iekšpuse paliek pa kreisi.

Acīmredzot apgabals G ir vienkārtsakarīgs tad un tikai tad, kad jebkuras vienkāršas slēgtas līnijas $\gamma \subset G$ iekšpuse pieder G.

Lemma 2.1. *Katru apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ nepārtrauktu līniju $\gamma \subset G$ var pārklāt ar vienāda rādiusa galīga skaita riņķiem D_k tā, lai*

$$\gamma \subset \bigcup_{k=0}^{n} \overline{D}_k \subset G$$

un riņķa D_k centrs $z_k \in D_{k-1}$, kur $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pierādījums. Pieņemam, ka nepārtrauktā līnija γ ir uzdota ar ceļu $\sigma\colon [\alpha, \beta] \to G$ un

$$\rho = \inf_{z\in\gamma,\ \zeta\in\partial G} |z - \zeta|$$

ir attālums starp līniju γ un apgabala G robežu ∂G. Tā kā γ ir kompakta kopa, tad $\rho > 0$. Funkcijas σ vienmērīgās nepārtrauktības dēļ (nepārtraukta funkcija slēgtā intervalā) katram $\dfrac{\rho}{3}$ eksistē $\delta > 0$ tāds, ka

$$|\sigma(t) - \sigma(t')| < \frac{\rho}{3},$$

ja tikai $|t - t'| < \delta$.

Izvēlamies augošu parametra virkni

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

tā, lai $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, kur $k = 1, 2, \ldots, n$. Apskatām riņķu

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_k| < \frac{\rho}{2} \right\}$$

sistēmu ar centriem punktos $z_k = \sigma(t_k)$. Saskaņā ar konstrukciju riņķu sistēma pārklāj līniju γ, pie kam katra nākošā riņķa D_k centrs z_k atradīsies iepriekšējā riņķī D_{k-1} un attālums starp apgabala G robežu ∂G un slēgtu kopu $\cup_{k=0}^{n} \overline{D}_k$ nav mazāks par $\dfrac{\rho}{2}$. $\square$

2.8 Funkcijas robeža

Pieņemsim, ka kompleksās plaknes kopā $E \subset \mathbb{C}$ ir definēta kompleksa funkcija $f\colon E \to \mathbb{C}$, tas ir katram kompleksam skaitlim $z = x + \mathrm{i}y \in E$ tiek piekārtots kompleksais skaitlis $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$. Šo funkciju var uzrakstīt formā $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, kur $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y)$. Tādā veidā kompleksā mainīgā komplekso funkciju var uzskatīt kā divu argumentu reālā mainīgā funkciju pāri.

Tālāk pieņemam, ka punkts $z = a$ ir kopas E *akumulācijas punkts*, tas ir katra punkta $z = a$ apkārtne satur bezgalīgi daudz kopas E punktu.

Definīcija 2.12. Skaitli $A \in \mathbb{C}$ sauc par *funkcijas f robežu*, kad z tiecās uz a, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ka visiem $z \in E$, kuri apmierina nosacījumu $0 < |z - a| < \delta$ izpildās nevienādība

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Funkcijas f robežas apzīmēšanai lietojam standarta apzīmējumu

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z) = A$$

vai $f(z) \to A$, ja $z \to a$ un $z \in E$.

Dotā funkcijas robežas definīcija ir ekvivalenta sekojošai definīcijai.

Definīcija 2.13. Skaitli $A \in \mathbb{C}$ sauc par *funkcijas f robežu*, kad z tiecās uz a, ja katrai virknei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in E$, $z_n \neq a$, kura konverģē uz a, virkne $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverģē uz A, t.i. $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A$.

Tālāk īsuma dēļ visur apzīmējuma $\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z)$ vietā lietosim apzīmējumu $\lim_{z \to a} f(z)$.

Teorēma 2.8. *Robeža* $\lim_{z \to a} f(z)$*, kur* $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ *un* $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$*, eksistē tad un tikai tad, ja eksistē robežas* $\lim_{\substack{x \to \alpha \\ y \to \beta}} u(x,y)$ *un*

$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ y\to\beta}} v(x,y)$, *pie kam*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{\substack{x\to\alpha \\ y\to\beta}} u(x,y) + \mathrm{i} \lim_{\substack{x\to\alpha \\ y\to\beta}} v(x,y).$$

Pēdējais apgalvojums ļauj reālā mainīgā funkciju robežu teoriju pārnest uz kompleksā mainīgā funkciju robežām.

Atzīmēsim vēl sekojošas komplekso funkciju robežu īpašības: pieņemam, ka $\lim_{z\to a} f(z) = A$ un $\lim_{z\to a} g(z) = B$, tad

- $\lim_{z\to a}(f(z) \pm g(z)) = A \pm B$,
- $\lim_{z\to a} f(z)g(z) = AB$,
- $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$, $(B \neq 0)$.

2.9 Kompleksā mainīgā funkcijas nepārtrauktība

Līdzīgi kā reālā mainīgā funkciju teorijā svarīga loma ir nepārtrauktas funkcijas jēdzienam. Pieņemam, ka dota kompleksā mainīgā funkcija $f\colon E \to \mathbb{C}$ un $a \in E \subset \mathbb{C}$.

Definīcija 2.14. Funkcija f ir *nepārtraukta punktā* $a \in E$, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ka visiem $z \in E$, kuri apmierina nosacījumu $|z-a| < \delta$ izpildās nevienādība

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ja bez tam punkts $a \in E$ ir arī kopas E akumulācijas punkts, tad funkcijas f nepārtrauktība punktā $a \in E$ nozīmē, ka

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(\lim_{z\to a} z) = f(a).$$

Ja $a \in E$ ir kopas E izolēts punkts, tad saskaņā ar Definīciju 2.14 funkcija f šajā punktā ir nepārtraukta.

Definīcija 2.15. Funkcija f ir *nepārtraukta kopā* E, ja tā ir nepārtraukta katrā šīs kopas punktā.

Teorēma 2.9. *Funkcija f, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ ir nepārtraukta punktā $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, tad un tikai tad, ja funkcijas u un v ir nepārtrauktas punktā $(\alpha;\beta)$.*

Acīmredzot nepārtrauktu kompleksā mainīgā funkciju summa, starpība un reizinājums ir nepārtraukta, bet divu nepārtrauktu kompleksā mainīgo funkciju f un g dalījums ir nepārtraukts tajos punktos, kuros $g(z) \neq 0$.

Nepārtraukta ir arī divu nepārtrauktu funkciju kompozīcija, t.i. ja funkcija g ir nepārtraukta punktā $z = a$ un funkcija f ir nepārtraukta punktā $\zeta = g(a)$, tad funkcija fg ir nepārtraukta punktā $z = a$.

Piemērs 2.3. Funkcijas $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \arg z$ ir nepārtrauktas.

Piemērs 2.4. Polinoms $z \mapsto P_n(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, kura koeficienti ir kompleksi skaitļi, ir nepārtraukta funkcija visā kompleksā plaknē $\mathbb{C}$.

Racionāla funkcija R, kur $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, P_n un Q_m polinomi, ir nepārtraukta tajos kompleksās plaknes punktos, kuros $Q_m(z) \neq 0$.

Definīcija 2.16. Funkcija $f\colon E \to \mathbb{C}$ ir *vienmērīgi nepārtraukta kopā* E, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu $\delta(\varepsilon) > 0$, ka

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

visiem $z_1, z_2 \in E$, kuri apmierina nevienādību $|z_1 - z_2| < \delta$.

Tā kā funkcijas $f\colon E \to \mathbb{C}$, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, vienmērīgā nepārtrauktība ir ekvivalenta funkciju u un v vienmērīgai nepārtrauktībai, tad no reālā mainīgā funkciju teorijas seko, ka ja f ir nepārtraukta slēgtā ierobežotā kopā E, tad tā ir arī vienmērīgi nepārtraukta šajā kopā.

Tālāk bieži apskatīsim funkcijas nepārtrauktas apgabalā un nepārtrauktas slēgtā apgabalā. Tad pareizi sekojoši divi apgalvojumi:

- Ja funkcija ir nepārtraukta apgabalā G, tad tā ir vienmērīgi nepārtraukta katra ierobežotā slēgta apgabalā $\overline{G}_1$, kur $\overline{G}_1 \subset G$;
- Ja funkcija f ir vienmērīgi nepārtraukta ierobežotā apgabalā G, tad to var nepārtraukti turpināt uz $\overline{G}$.

2.10 Funkciju virknes un rindas

Definīcija 2.17. Funkciju virkne $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, kur $f_n\colon E \to \mathbb{C}$ kopā E *konverğē vienmērīgi uz funkciju* f, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu veselu skaitli $N(\varepsilon)$, ka nevienādība

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

izpildās visiem $n > N$ un visiem $z \in E$.

Definīcija 2.18. Funkciju rinda $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, kur $f_k\colon E \to \mathbb{C}$, ir *vienmērīgi konverğenta kopā* E, ja atbilstošā parciālo summu virkne $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ konverğē vienmērīgi kopā E.

Ir spēkā sekojoši Koši nepieciešamie un pietiekamie vienmērīgās konverğences kritēriji:

Teorēma 2.10. *Lai funkciju virkne $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vienmērīgi konverğētu kopā E, nepieciešami un pietiekami, ka katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu veselu skaitli $N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$, $m > N$ un visiem $z \in E$ izpildās nevienādība*

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Teorēma 2.11. *Lai funkciju rinda $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ vienmērīgi konverğētu kopā E nepieciešami un pietiekami, ka katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu veselu skaitli $N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$, $m \geq n > N$ un visiem $z \in E$ izpildās nevienādība*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

Atzīmēsim vēl Veierštrāsa pietiekamo vienmērīgās konverğences kritēriju

Teorēma 2.12. *Ja kompleksu funkciju rindas $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ visi locekļi apmierina nevienādības $|g_k(z)| \leq c_k$, $k \in \mathbb{N}$ kopā $z \in E$, un skaitļu rinda $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konverğē, tad funkciju rinda $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ konverğē vienmērīgi kopā E.*

Teorēma 2.13. *Pieņemam, ka $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, kur $f_n\colon E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{C}$ ir nepārtrauktas funkcijas. Ja virkne $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverğē vienmērīgi kopā E, tad funkcija $f\colon E \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta kopā E.*

Teorēma 2.14. *Pieņemam, ka* $g_n\colon E \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{C}$ *ir nepārtrauktas funkcijas. Ja funkciju rinda* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *konverğē vienmērīgi kopā* E, *tad tās summa* $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *ir nepārtraukta funkcija kopā* E.

2.11 Kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājums

Kompleksā mainīgā funkcijas atvasinājuma definīcija neatšķiras no reālā mainīga skalāras funkcijas atvasinājuma definīcijas.

Apskatām kompleksā mainīgā funkciju $f\colon E \to \mathbb{C}$ definētu un nepārtrauktu kopas E akumulācijas punktā $z_0 \in E$ un pieņemam, ka funkcijas f pieauguma $\Delta f(z,z_0) = f(z) - f(z_0)$ un argumenta pieaugumu $\Delta z = z - z_0$ attiecībai eksistē galīga robeža, kad $z \to z_0$.

Definīcija 2.19. Par *funkcijas* $f\colon E \to \mathbb{C}$ *atvasinājumu* (arī $\mathbb{C}$–*atvasinājumu*) punktā $z_0 \in E$ sauc robežu

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z,z_0)}{\Delta z} \tag{2.5}$$

un saka, ka funkcija f ir *diferencējama* (arī $\mathbb{C}$–*diferencējama*) punktā $z_0 \in E$.

Definīcija 2.20. Funkcija $f\colon E \to \mathbb{C}$ ir *diferencējama kopā* $E \subset \mathbb{C}$, ja tā ir diferencējama katrā kopas E punktā.

No atvasinājuma definīcijas izriet, ka funkcijas f pieaugumu punktā $z_0 \in E$ var uzrakstīt formā

$$\Delta f(z,z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z,z_0)\Delta z,$$

kur $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z,z_0) = 0$.

Pareizs ir arī apgrieztais apgalvojums, ja funkcijas f pieaugums $\Delta f(z,z_0)$ punktā z_0 ir formā

$$\Delta f(z,z_0) = A\Delta z + \varepsilon(z,z_0)\Delta z, \tag{2.6}$$

kur $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z,z_0) = 0$ un $A \in \mathbb{C}$ ir kompleksa konstante neatkarīga no Δz, tad funkcija f ir diferencējama punktā $z_0 \in E$ un tās atvasinājums ir $f'(z_0) = A$.

Tādejādi vienādība (2.6) ir nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai funkcija f būtu diferencējama punktā $z_0 \in E$.

Piezīme 2.3. Ja vienargumenta funkcijai galīga atvasinājuma eksistence punktā ir ekvivalenta funkcijas diferencējamībai šai punktā, tad vairākargumentu funkcijas gadījumā situācija ir sarežģītāka. Ja funkcija ir diferencējama kādā apgabala punktā, tad šai punktā tā ir nepārtraukta un tai eksistē galīgi parciālie atvasinājumi. Turpretī apgrieztais apgalvojums vispārīgā gadījumā nav pareizs t.i., ja funkcija kādā apgabala punktā ir nepārtraukta un tai eksistē galīgi parciālie atvasinājumi, tad ne vienmēr tā ir diferencējama šajā punktā.

Apskatām funkciju $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kur

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{ja } x^2+y^2>0; \\ 0, & \text{ja } x=y=0. \end{cases}$$

Acīmredzot funkcija u ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama visos paknes $\mathbb{R}^2$ izņemot koordinātu sākuma punktu. Turpretī, ja $x^2+y^2 > 0$, tad $2|xy| \le x^2+y^2$. Seko

$$|u(x,y)| \le \frac{|x|}{2}$$

un

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = 0.$$

Tātad funkcija u visā plaknē $\mathbb{R}^2$ ir nepārtraukta. Ievērojam, ka funkcija u uz koordinātu asīm anulējās, t.i. $u(x,0) = u(0,y) = 0$. Tad funkcijas u parciālie atvasinājumi koordinātu sākumu punktā ir sekojoši:

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = 0$$

un

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{x} = 0.$$

Tas nozīmē, ka arī koordinātu sākuma punktā eksistē abi parciālie atvasinājumi. Funkcijas u pieaugums koordinātu sākuma punkta apkārtnē ir

$$\Delta u(x,y) = u(x,y) - u(0,0) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Tā kā abi parciālie atvasinājumi koordinātu sākuma punktā anulējās, tad arī funkcijas u pieauguma lineārā daļa koordinātu sākuma punktā ir 0. Lai pierādītu, ka funkcija u nav diferencējama koordinātu sākuma punktā pietiek kaut vai pārliecināties, ka neeksistē robeža

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\Delta u(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\Delta u(x,y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{2.7}$$

Pārejot uz polārajām koordinātēm iegūstam

$$\frac{\Delta u(x,y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Pēdējā izteiksme ir atkarīga no φ, tas ir no virziena kādā punkts $(x;y)$ tiecās uz koordinātu sākuma punktu. Līdz ar to neeksistē robeža (2.7) un tātad funkcija u koordinātu sākuma punktā nav diferencējama. $\square$

No funkcijas atvasinājuma definīcijas un funkcijas robežas īpašībām seko, ka kompleksā mainīgā funkcijai izpildās analogās reālā mainīga funkcijas atvasinājuma īpašības.

Pieņemam, ka funkcijas f un g ir diferencējamas punktā z. Tad ir spēkā vienādības;

- $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$;
- $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
- $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z))}{g^2(z)}$, ja $g(z) \neq 0$;
- $f(g(z))' = f'(g(z))g'(z)$, ja funkcija f ir diferencējama punktā $w = g(z)$ un funkcija g diferencējama punktā z.

Piemērs 2.5. Funkcijas $z \mapsto c$, kur $c \in \mathbb{C}$ ir kompleksa konstante, atvasinājums pēc definīcijas

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z} = 0.$$

Piemērs 2.6. Funkcijas $z \mapsto z$ atvasinājums pēc definīcijas

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1.$$

Piemērs 2.7. Izmantojot matemātisko indukciju un divu funkciju reizinājuma atvasinājuma formulu pierāda, ka funkcijas $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$ atvasinājums ir
$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Piemērs 2.8. Polinoms $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ ir diferencējams visā kompleksā plaknē un tā atvasinājums ir
$$P_n'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Piemērs 2.9. Racionāla funkcija R, kur $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ un P_n un Q_m ir polinomi, ir atvasināma visos punktos, kuros $Q_m(z) \neq 0$ un atvasinājuma formula ir tāda pati, kā reālā mainīgā funkcijai.

Funkcijas atvasinājuma definīcija satur prasību, ka robeža (2.5) nav atkarīga no veida kā z tiecas uz z_0. Šī prasība uzliek kompleksā mainīga funkcijas diferencēšanai daudz stingrākus ierobežojumus nekā reālā mainīgā funkcijas atvasināšanai. Vēlāk pierādīsim, ka ja kompleksā mainīgā funkcija ir diferencējama apgabalā, tad tai šajā apgabalā eksistē visu kārtu atvasinājumi.

Tālāk apskatīsim piemēru nepārtrauktai kompleksā mainīgā funkcijai f, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, kurai neeksistē atvasinājums kompleksā mainīgā nozīmē, lai gan funkcijas u un v ir bezgalīgi daudz reižu diferencējamas kā divu argumentu skalāras funkcijas.

Piemērs 2.10. Apskatām funkciju $z \mapsto \bar{z}$. Acīmredzot $u(x,y) = x$ un $v(x,y) = -y$ ir bezgalīgi daudz reižu diferencējamas. Atzīmējam, ka $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$. Tad iegūstam
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - \mathrm{i}\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}.$$
Pierādam, ka robeža neeksistē. Ja izvēlamies $\Delta y = \lambda \Delta x$ un $\lambda \in \mathbb{R}$, tad
$$\frac{\Delta x(1 - \mathrm{i}\lambda)}{\Delta x(1 + \mathrm{i}\lambda)} = \frac{1 - \mathrm{i}\lambda}{1 + \mathrm{i}\lambda}.$$
Seko, atkarībā no veida kā $\Delta z \to 0$, iegūstam dažādus rezultātus, kas ir pretrunā ar atvasinājuma definīciju.

Uzdevums 2.1. Pierādīt, ka nepārtrauktai kompleksā mainīgā funkcijai $z \mapsto z\bar{z} = |z|^2$ eksistē atvasinājums tikai vienā kompleksās plaknes $\mathbb{C}$ punktā $z = 0$.

Uzdevums 2.2. Pierādīt, ka nepārtrauktās kompleksā mainīgā funkcijas $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto |z|$ un $z \mapsto \arg z$ nav atvasināmas nevienā kompleksās plaknes punktā $z \in \mathbb{C}$.

2.12 Atvasinājuma eksistences nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi

Apskatām kompleksā mainīgā funkciju f definētu punkta $z_0 \in \mathbb{C}$ apkārtnē. Atšķirībā no reālā mainīgā gadījuma kompleksajā plaknē iespējams dot nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus atvasinājuma eksistencei.

Kompleksā mainīgā funkcijas f, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, nepārtrauktība punktā $z = x + \mathrm{i}y$ ir ekvivalenta reālā mainīgā funkciju u un v nepārtrauktībai punktā (x,y). Analoģisks apgalvojums nav spēkā kompleksā mainīgā funkciju diferencējamībai. Lai kompleksā mainīgā funkcija būtu diferencējama nepietiek ar prasību par funkciju u un v diferencējamību, jāuzliek vēl papildus nosacījumi funkciju u un v parciālajiem atvasinājumiem.

Šāda atšķirība izskaidrojama ar to, ka funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robeža, kad $z \to z_0$, ir viena un tā pati un nav atkarīga no veida, kā kompleksajā plaknē punkts z tiecas uz punktu z_0. Turpretī reālā mainīgā gadījumā iespējami tikai divi tiekšanās veidi – no labās un no kreisās puses, tādēļ ierobežojumu ir mazāk.

Teorēma 2.15. *Kompleksā mainīgā funkcijai $f\colon E \to \mathbb{C}$, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, punktā $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in E$ eksistē atvasinājums tad un tikai tad, ja:*

- *funkcijas u un v ir diferencējamas punktā (x_0, y_0);*
- *punktā $(x_0; y_0)$ izpildās nosacījumi*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Pēdējos nosacījumus sauc par *Košī-Rīmana nosacījumiem*. (Vēsturiski pareizāk tos būtu saukt par Eilera-Dalambēra[6] nosacījumiem).

Pierādījums. Nepieciešamība. Pieņemsim, ka punktā $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ funkcijai f eksistē galīgs atvasinājums

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \mathrm{i}B.$$

Saskaņā ar robežas definīciju

$$\Delta f(z, z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z, \tag{2.8}$$

kur $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$ un

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0.$$

Tā kā $\Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v$, tad atdalot izteiksmē (2.8) reālo un imagināro daļu iegūstam

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \mathrm{Re}(\varepsilon(z, z_0)\Delta z),$$

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \mathrm{Im}(\varepsilon(z, z_0)\Delta z).$$

Tas nozīmē, ka funkcijas u un v punktā $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ ir diferencējamas (t.i., to pilnajā pieaugumā ir izdalāma galvenā daļa, kas ir lineāra homogēna Δx un Δy funkcija). Funkciju u un v pilnie diferenciāļi ir attiecīgi

$$\mathrm{d}u = A\,\mathrm{d}x - B\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v = B\,\mathrm{d}x + A\,\mathrm{d}y.$$

No otras puses funkciju u un v pilnie diferenciāļi izsakās ar formulām

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Salīdzinot atrodam, ka

---

[6] Jean Le Rond d'Alambert, ⋆1717.17.XI, Parīze, Francija, †1783.29.X, Parīze, Francija; franču matemātiķis, filozofs un rakstnieks, franču Encyclopédie redaktors

$$A = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$B = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

No šejienes izriet Koši-Rīmana nosacījumi.

Pietiekamība. Pieņemam, ka punktā $(x_0; y_0)$ funkcijas u un v ir diferencējamas un izpildās Koši-Rīmana nosacījumi. Saskaņā ar funkcijas diferencējamības definīciju punktā $(x_0; y_0)$ ir spēkā sakarības

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)|\Delta z|,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)|\Delta z|,$$

kur $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varepsilon_j(x, y, x_0, y_0) = 0$, $j = 1, 2$ un $|\Delta| = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$. Pareizinot otro vienādību ar i un saskaitot to ar pirmo vienādību iegūstam

$$\Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v$$
$$= \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\right)\Delta y$$
$$+\varepsilon(x, y, x_0, y_0)\Delta z,$$

kur

$$\varepsilon(x, y, x_0, y_0) = \frac{(\varepsilon_1(x, y, x_0, y_0) + \mathrm{i}\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0))|\Delta z|}{\Delta z}$$

un tātad

$$|\varepsilon(x, y, x_0, y_0)| \le |\varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)| + |\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)|.$$

Seko

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varepsilon(x, y, x_0, y_0) = 0.$$

Ievērojot Koši-Rīmana nosacījumus pēc pārveidojuma iegūstam

$$\Delta f$$

$$= \left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)\Delta x + \mathrm{i}\left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + \varepsilon(x,y,x_0,y_0)\Delta z$$

jeb

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} + \varepsilon(x,y,x_0,y_0).$$

No šejienes seko, ka eksistē robeža

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

vai citiem vārdiem funkcijai f punktā z_0 eksistē atvasinājums.

Izlietojot Košī-Rīmana nosacījumus iegūstam ekvivalentas formulas

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

□

No atvasinājuma formulas izriet, ka

$$f'(z_0) = \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} = -\mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}.$$

Piemērs 2.11. Apskatām funkciju $z \mapsto \bar{z}$. Acīmredzot $u(x,y) = x$ un $v(x,y) = -y$. Atrodam

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1 \text{ un } \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -1,$$

vai citiem vārdiem katrā kompleksās plaknes punktā neizpildās Košī-Rīmana nosacījumi. Seko dotā funkcija nav diferencējama nevienā kompleksās plaknes $\mathbb{C}$ punktā.

Definīcija 2.21. Funkciju $f\colon G \to \mathbb{C}$ sauc par *analītisku* apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, ja tai katrā apgabala G punktā eksistē atvasinājums.

Atzīmēsim, ka saskaņā ar šo definīciju analītiska funkcija ir vienvērtīga funkcija apgabalā $G \subset \mathbb{C}$. Ir būtiski svarīgi atzīmēt, ka definīcijā ir norādīts analītiskās funkcijas f definīcijas apgabals G un parasti nevar runāt par analītisku funkciju nekonkretizējot definīcijas apgabalu. Tomēr ir gadījumi, kad definīcijas apgabals ir netieši skaidri saprotams no konteksta, un nav nepieciešamības atklāti uzrādīt funkcijas f definīcijas apgabalu.

Definīcija 2.22. Funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir *analītiska punktā* $z_0 \in G \subset \mathbb{C}$, ja tai eksistē tāda šī punkta apkārtne, kurā tā ir analītiska.

Parasti šo jēdzienu lietosim gadījumos, kad funkcija f ir vienvērtīgā un atvasināma kaut kādā punkta $z_0 \in G$ apkārtnē un nav nepieciešamības konkretizēt punkta $z = z_0$ apkārtni.

Lai funkcija f būtu analītiska punktā $z = z_0$ nepietiek tikai ar nosacījumu, ka šai punktā funkcijai eksistē atvasinājums (skat. uzdevumu 2.1). Atšķirībā no diferencējamības funkcija ir analītiska punktā, ja eksistē kāda šī punkta apkārtne, kurā funkcija ir analītiska.

Piezīme 2.4. Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska. Apskatām divas līniju saimes $u(x,y) = c$ un $v(x,y) = c$, kuras ir funkcijas f reālās un imaginārās daļas līmeņu līnijas. Tad gradientu

$$\operatorname{grad} u(x,y) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$

un

$$\operatorname{grad} v(x,y) = \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)$$

skalārais reizinājums izlietojot Koši-Rīmana nosacījumus

$$< \operatorname{grad} u(x,y), \operatorname{grad} v(x,y) >= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Tā kā gradients ir perpendikulārs līmeņa līnijai, tad dotās līniju saimes $u(x,y) = c$ un $v(x,y) = c$ ir savstarpēji ortogonālas. Pie reizes atzīmēsim, ka ja $f'(z) \neq 0$, tad arī $\operatorname{grad} u(x,y) \neq 0$ un $\operatorname{grad} v(x,y) \neq 0$. □

Uzdevums 2.3. Atrast Koši-Rīmana nosacījuma analogu gadījumā, ja funkcija f vai mainīgais z ir doti eksponentformā.

Ja funkcija f ir formā $w = f(z) = u(r,\varphi) + \mathrm{i}v(r,\varphi)$, tad Koši-Rīmana nosacījumi ir

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Ja funkcija f ir formā $w = f(z) = R(r,\varphi)\exp(\mathrm{i}\Phi(r,\varphi))$, tad Košī-Rīmana nosacījumi ir

$$\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad r\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \varphi}.$$

Ja funkcija f ir formā $w = f(z) = R(x,y)\exp(\mathrm{i}\Phi(x,y))$, tad Košī-Rīmana nosacījumi ir

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Uzdevums 2.4. Pierādīt, ka funkcijai $z \mapsto f(z)$, kur $f(z) = \sqrt{|xy|}$ punktā $z = 0$ izpildās Košī-Rīmana nosacījumi, bet neeksistē atvasinājums.

2.13 Atvasinājuma argumenta ģeometriskā interpretācija

Pieņemam, ka funkcija $z \mapsto w = f(z)$ ir diferencējama punkta $z = z_0$ apkārtnē un $f'(z_0) \neq 0$[7]. Apskatām patvaļīgu gludu līniju

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \sigma(t),\ \sigma'(t) \neq 0,\ t \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}\},$$

kura iet caur punktu $z_0 = \sigma(t_0)$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Apzīmēsim ar θ leņķi, ko veido līnijas γ pieskare punktā z_0 ar reālās ass pozitīvo virzienu (ar pieskares virzienu saprot to virzienu, kurš vērsts līnijas pozitīvā orientācijas virzienā). Tad $\theta = \arg\sigma'(t_0)$.

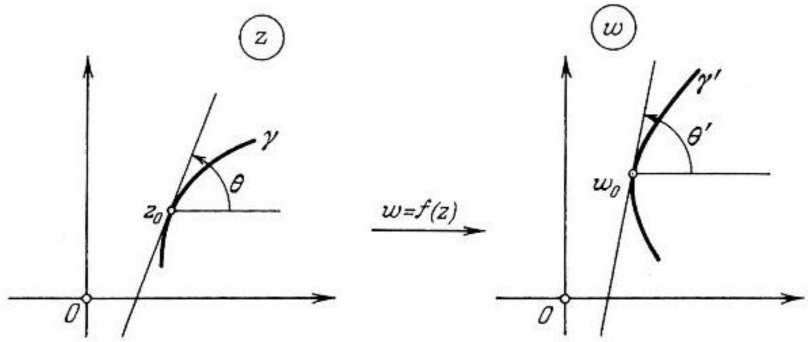
Funkcija $z \mapsto w = f(z)$ attēlo līniju γ par līniju

$$\gamma' = \{w \in \mathbb{C} \mid w = f(\sigma(t)),\ t \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}\}$$

un punktu z_0 par punktu $w_0 = f(z_0)$. Saskaņā ar saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulu

$$w'(t_0) = f'(z_0)\sigma'(t_0).$$

[7] Ja $f'(z_0) = 0$, tad $\arg f'(z_0)$ nav definēts



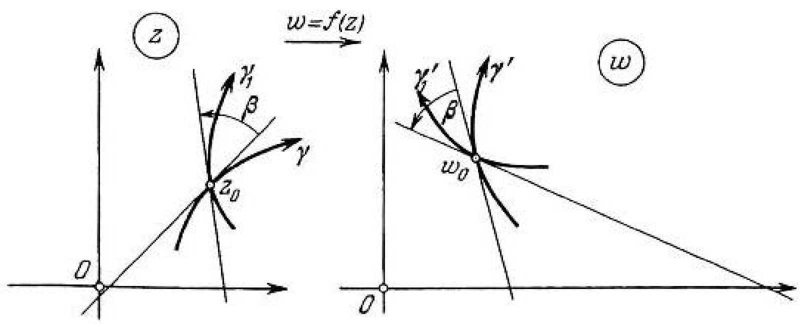
Zīm. 2.6 Atvasinājuma argumenta ģeometriskā interpretācija

Bez tam, no nosacījumiem $f'(z_0) \neq 0$ un $\sigma'(t_0) \neq 0$ seko, ka $w'(t_0) \neq 0$ vai citiem vārdiem līnijai γ' punktā w_0 ir pieskare. Atrodam

$$\theta' = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \sigma'(t_0) \pmod{2\pi}$$

vai

$$\theta' = \theta + \arg f'(z_0) \pmod{2\pi}. \tag{2.9}$$



Zīm. 2.7 Atvasinājuma argumenta ģeometriskā interpretācija

Lielumu $\varphi = \theta' - \theta$ saucam par *līnijas* γ *pagrieziena lenķi punktā* z_0 ko realizē funkcija f. No formulas (2.9) seko, ka ja $f'(z_0) \neq 0$, tad pagrieziena leņķis φ punktā z_0 nav atkarīgs no līnijas un $\varphi = \arg f'(z_0)$, tas ir visas gludās līnijas, kuras iet caur punktu z_0 funkcija

f, ja $f'(z_0) \neq 0$, pagriež par vienu un to pašu leņķi vienādu ar funkcijas f atvasinājuma argumenta vērtību punktā z_0.

Tādā veidā diferencējama funkcija f, kur $f'(z_0) \neq 0$ ne tikai saglabā leņķi β starp līnijām (leņķis starp atbilstošo līniju pieskarēm), kas iet caur punktu z_0, bet arī orientāciju (skat. zīm. 2.7).

2.14 Atvasinājuma moduļa ģeometriskā interpretācija

Pieņemsim, ka funkcija $z \mapsto w = f(z)$ ir diferencējama punkta z_0 apkārtnē un $f'(z_0) \neq 0$. Apskatām patvaļīgu gludu līniju

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \sigma(t),\ \sigma'(t) \neq 0,\ t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}\},$$

kura iet caur punktu $z_0 = \sigma(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ un izvēlamies punktu $z \in \gamma$ pietiekami tuvu punktam z_0. Apzīmējām pieaugumus ar $\Delta z = z - z_0$ un $\Delta w = \Delta f(z, z_0) = f(z) - f(z_0)$. Tā kā

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z, z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

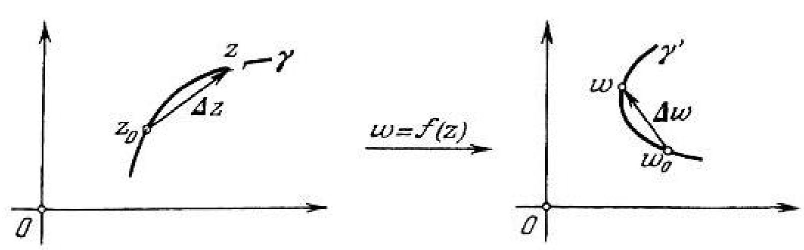
tad arī

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta f(z, z_0)}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|$$

vai

$$|\Delta f(z, z_0)| = |f'(z_0)||\Delta z| + \varepsilon(z, z_0)|\Delta z|,$$

kur arī $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$.



Zīm. 2.8 Atvasinājuma moduļa ģeometriskā interpretācija

Pieņemam, ka $|z-z_0| = |\Delta z| = \rho$, kur $\rho > 0$ pietiekoši mazs. Seko riņķa līniju

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = \rho\}$$

funkcija f attēlo ar precizitāti līdz augstākas kārtas bezgalīgi maziem lielumiem nekā ρ par slēgtu līniju, kura maz atšķiras no riņķa līnijas

$$\gamma' = \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z) - f(z_0)| = \rho |f'(z_0)|\}.$$

Citiem vārdiem funkcija f ar precizitāti līdz augstākas kārtas bezgalīgi maziem lielumiem nekā Δz riņķi

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \rho\}$$

izplēš vai saspiež $|f'(z_0)|$ reizes.

Definīcija 2.23. Lielumu

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = |f'(z_0)| = k$$

sauc par līnijas γ *lineāro deformācijas koeficientu* punktā z_0 ko realizē funkcija f.

Seko lineārais deformācijas koeficients nav atkarīgs no konkrētās līnijas un tās orientācijas un ir vienāds ar $|f'(z_0)|$.

Piezīme 2.5. Nosacījums $f'(z_0) \neq 0$ nozīmē, ka funkcijas $z \mapsto w = f(z)$ Jakobi matricas determinants (jakobiānis) punktā z_0 ir atšķirīgs no nulles. Tiešam ievērojot, ka $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,u)$, iegūstam, ka funkciju pāra

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$$

Jakobi matricas determinants ir

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Izlietojot Koši-Rīmana nosacījumus, iegūstam

$$J(x,y) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)^2.$$

Tā kā

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

tad

$$J(x,y) = |f'(z)|^2.$$

Citiem vārdiem, ja $|f'(z_0)| \neq 0$, tad Jakobī matricas determinants $J(x_0, y_0) \neq 0$.

Funkcija f attēlo apgabalu G par apgabalu $f(G)$. Apgabala $f(G)$ laukumu aprēķina sekojoši

$$S(f(G)) = \iint\limits_{f(G)} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{G} |J(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{G} |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lineārās deformācijas koeficienta kvadrāts raksturo laukumu izplēšanos ko realizē funkcija f un punktā z ir vienāds ar $|f'(z)|^2$. $\square$

Nodaļa 3
Elementārās funkcijas kompleksā plaknē

3.1 Eksponentfunkcija

Eksponentfunkciju $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksā plaknē definē ar formulu

$$\exp z = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Seko,

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\ \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \sin y.$$

No definīcijas izriet sekojošas eksponentfunkcijas īpašības:

- Eksponentfunkcija ir nepārtraukta visā kompleksajā plaknē;
- Funkcijas $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir bezgalīgi daudz reižu diferencējamas un visi parciālie atvasinājumi ir nepārtraukti. Bez tam izpildās Košī-Rīmans nosacījumi

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

  Līdz ar to eksponentfunkcijai eksistē atvasinājums

$$(\mathrm{e}^z)' = \frac{\partial e^z}{\partial x} = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^z.$$

  Seko eksponentunkcija ir diferencējama visā kompleksā plaknē un tātad analītiska. No pēdējās sakarības izriet ka eksponentfunkcija ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama.
- Eksponentfunkcija ir periodiska ar periodu $2\pi\mathrm{i}$

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^z;$$

- Jebkuriem kompleksiem skaitļiem $z_1 \in \mathbb{C}$ un $z_2 \in \mathbb{C}$ izpildās vienādība
$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}; \end{aligned}$$
- Jebkuram kompleksam skaitlim $z = x + iy$ izpildās vienādības
$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y \pmod{2\pi};$$

3.2 Trigonometriskās un hiperboliskās funkcijas

Trigonometriskās un *hiperboliskās* funkcijas $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksā plaknēs definē izlietojot eksponentfunkciju

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

un

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right), \quad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right).$$

No definīcijas izriet sekojošas trigonometrisko un hiperbolisko funkciju īpašības:

- Funkcijas sin, cos, sinh un cosh ir nepārtrauktas visā kompleksajā plaknē;
- Funkcijas sin un cos ir periodiskas ar periodu 2π
$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z,$$
bet hiperboliskās funkcijas sinh un cosh ir periodiskas ar periodu $2\pi i$
$$\sinh(z+2\pi i) = \sinh z, \quad \cosh(z+2\pi i) = \cosh z,$$
- Funkcijas sin un sinh ir nepāra funkcija, bet funkcijas cos un cosh ir pāra funkcijas
$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z,$$
$$\cos(-z) = \cos z, \quad \cosh(-z) = \cosh z.$$

- Tā kā eksponentfunkcija ir bezgalīgi daudz reizu diferencējama, tad arī trigonometriskās funkcijas sin, cos un hiperboliskās funkcijas sinh, cosh ir bezgalīgi daudz reižu diferencējamas. Atrodam trigonometrisko un hiperbolisko funkciju atvasinājumus.

$$(\sin z)' = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)' = \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \cos z.$$

  Analoģiski iegūstam formulas

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

- Kompleksajā plaknē starp trigonometriskām un hiperboliskām funkcijām pastāv sakarības.

$$\sin \mathrm{i}z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right) = \mathrm{i}\sinh z.$$

  Analoģiski iegūstam formulas

$$\cos \mathrm{i}z = \cosh z, \quad \sinh \mathrm{i}z = \mathrm{i}\sin z, \quad \cosh \mathrm{i}z = \cos z.$$

- Visas elementārās trigonometrijas formulas, kuras ir pareizas pie reāliem skaitļiem $x \in \mathbb{R}$ un nesatur absolūto vērtību arī ir pareizas visiem kompleksiem skaitļiem $z \in \mathbb{C}$. Piemēram,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} &\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})}{4\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_2-z_1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_2-z_1)}}{4\mathrm{i}} \\ &+ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_2-z_1)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_2-z_1)}}{4\mathrm{i}} = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

  Tātad

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \tag{3.1}$$

  Atvasinot izteiksmi (3.1) pēc z_1, iegūstam

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \tag{3.2}$$

Līdzīgi iegūstam sakarības starp hiperboliskām funkcijām. Piemēram,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{1}{4}\left(e^z + e^{-z}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^z - e^{-z}\right)^2 = 1,$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2,$$
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

- Ir spēkā formulas

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy,$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

un

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

No šīm formulām izriet, ka vienādojumiem $\sin z = 0$ un $\cos z = 0$ ir atrisinājumi tad un tikai tad, ja $y = 0$, t.i. uz reālās ass. Seko, vienādojuma $\sin z = 0$ atrisinājumi ir $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ un vienādojuma $\cos z = 0$ atrisinājumi ir $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Jebkuriem $z = x + iy$ ir spēkā nevienādības

$$\frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}),$$
$$\frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \leq |\cos z| \leq \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}).$$

Pierādīsim pirmo no nevienādībam. Izmantojot sin funkcijas definīciju un trīsstūra nevienādību, iegūstam

$$\frac{1}{2}||e^{iz}| - |e^{-iz}|| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2}(|e^{iz}| + |e^{-iz}|).$$

No šejienes, ievērojot, ka

$$|e^{iz}| = |e^{-y}e^{ix}| = e^{-y}|e^{ix}| = e^{-y}, \quad |e^{-iz}| = e^y,$$

iegūstam vajadzīgo nevienādību. Analoģiski pierāda otro nevienādību. Pie reizes atzīmējam, ka ja $y \to \infty$, tad ir spēkā asimptotiskās formulas (vienmērīgi attiecībā pret x, kur $z = x + iy$):

$$|\sin z| \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^{|y|}, \quad |\cos z| \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^{|y|}.$$

Tātad trigonometriskās funkcijas sin un cos nav ierobežotas visā kompleksā plaknē $\mathbb{C}$.

Trigonometriskās funkcijas tan un cot definē ar formulām

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Atzīmējam, ka funkcija cot ir nepārtraukta, ja $z \neq k\pi$, bet funkcija tan nepārtraukta, ja $z \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ un $k \in \mathbb{Z}$.

Hiperboliskās funkcijas tanh un coth definē ar formulām

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Funkcija tanh ir nepārtraukta, ja $z \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\mathrm{i}$, bet funkcija coth nepārtraukta, ja $z \neq k\pi\mathrm{i}$, kur $k \in \mathbb{Z}$. Pie reizes atzīmēsim, ka visas trigonometrisko un hiperbolisko funkciju formulas, kuras ir pareizas reāliem skaitļiem x ir pareizas arī kompleksiem skaitļiem z.

Kompleksajā plaknē starp funkcijām tan. cot, tanh un coth pastāv sakarības

$$\tan \mathrm{i}z = \mathrm{i}\tanh z, \quad \cot \mathrm{i}z = -\coth z$$

un

$$\tanh \mathrm{i}z = \mathrm{i}\tan z, \quad \coth \mathrm{i}z = -\mathrm{i}\cot z.$$

Uzdevums 3.1. Aprēķināt $|\sin z|^2 + |\cos z]^2$.

$$\sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y.$$

Seko,

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x)\sinh^2 y \\ &= \sin^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

Analogi

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

Tātad

$$|\sin z|^2 + |\cos z]^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sinh^2 y$$

$$= 1 + 2\sinh^2 y = \cosh 2y.$$

Citiem vārdiem $|\sin z|^2 + |\cos z]^2 > 1$, ja $y \neq 0$.

3.3 Vienlapainas funkcijas

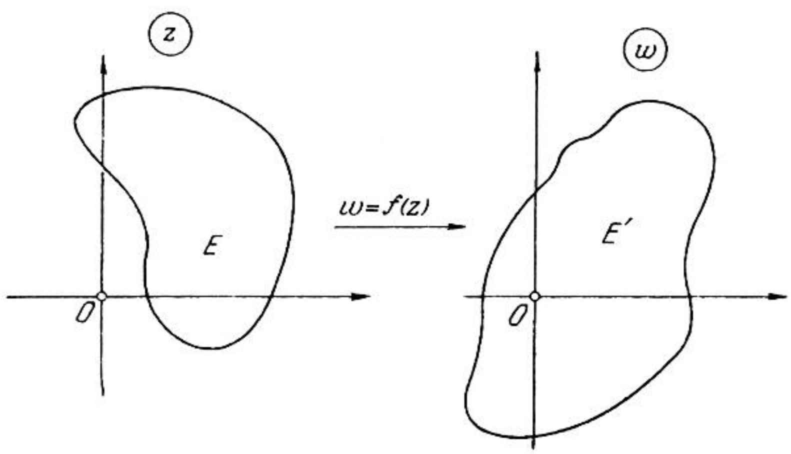
Kompleksā mainīgā funkcijas f jēdzienam var dot arī ģeometrisko interpretāciju.

Pieņemam ka funkcija $f\colon E \subset \mathbb{C}$ ir definēta paplašinātās kompleksās plaknes kopā $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ un $E' = f(E) \subset \mathbb{C}$. Tad saka, ka dots kopas E attēlojums kopā E'. Punktu $w = f(z)$ sauc par punkta z *attēlu* un punktu z par *oriģinālu* pie attēlojuma f.

Var gadīties, ka ir tādi kopas E' punkti, kuriem ir vairāki oriģināli, t.i. attēlojums f var nebūt savstarpēji viennozīmīgs. Ja attēlojums f ir savstarpēji viennozīmīgs, tad funkciju f sauc par *vienlapainu*.

Definīcija 3.1. Funkciju $f\colon E \to \mathbb{C}$ sauc par *vienlapainu kopā* E, ja no $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in E$ seko ka $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Attēlojums, kuru realizē vienlapaina funkcija f ir savstarpēji viennozīmīgs un atbilstošo attēlojumu sauc par *vienlapainu*.



Zīm. 3.1 Vienlapaina funkcija

No definīcijas seko, ka ja funkcija ir vienlapaina kopā E un $E_1 \subset E$, tad funkcija ir vienlapaina kopā E_1. Arī vienlapainu funkciju kompozīcija ir vienlapaina funkcija.

Ja attēlojums $f\colon E \to E'$ ir vienlapains, tad katram attēla punktam $w \in E'$ atbilst tikai viens vienīgs punkts $z \in E$, ka $w = f(z)$. Ar to kopā E' ir definēta funkcija $h\colon E' \to E$, inversā funkcijai f. Ir pareizas identitātes

$$f(h(w)) = w,\ w \in E'; \quad h(f(z)) = z,\ z \in E.$$

Funkcija f ir vienlapaina kopā E tad un tikai tad kad inversā funkcija h ir viennozīmīga kopā E'.

Piemērs 3.1. Lineāra funkcija $z \mapsto w = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ un $a \neq 0$ ir vienlapaina funkcija paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ un tās inversā funkcija ir

$$w \mapsto z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a}.$$

Atzīmēsim, ka bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ attēlojās par bezgalīgi tālo punktu $w = \infty$ un otrādi. $\square$

Piemērs 3.2. Funkcija $z \mapsto w = \dfrac{1}{z}$ ir vienlapaina funkcija paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ un tās inversā funkcija ir $w \mapsto z = \dfrac{1}{w}$. Punktam $z = 0$ atbilst bezgalīgi tālais punkts $w = \infty$ un bezgalīgi tālam punktam $z = \infty$ punkts $w = 0$. $\square$

Piemērs 3.3. Apskatām funkciju $z \mapsto z^2$. Ja $z_1^2 = z_2^2$, tad vai nu $z_1 = z_2$ vai $z_1 = -z_2$. Ievērojam, ka punkti z_1 un $-z_1$ ir simetriski pret koordinātu sākumu O. Tātad funkcija $z \mapsto z^2$ nav vienlapaina $\mathbb{C}$. Ja turpretī funkcijas definīcijas apgabals $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ nesatur simetriskus punktus attiecībā pret koordinātu sākuma punktu O, tad atbilstošā funkcija būs vienlapaina. Piemēram, ja $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, tad funkcija ir vienlapaina. $\square$

Piemērs 3.4. Apskatām funkciju $z \mapsto \mathrm{e}^z$. Ja $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$, tad $z_1 - z_2 = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Lai funkcija $z \mapsto \mathrm{e}^z$ būtu vienlapaina nepieciešami un pietiekami, lai funkcijas definīcijas apgabals D nesaturētu nevienu pāri

$$z_1 = z_2 \pmod{2\pi\mathrm{i}}.$$

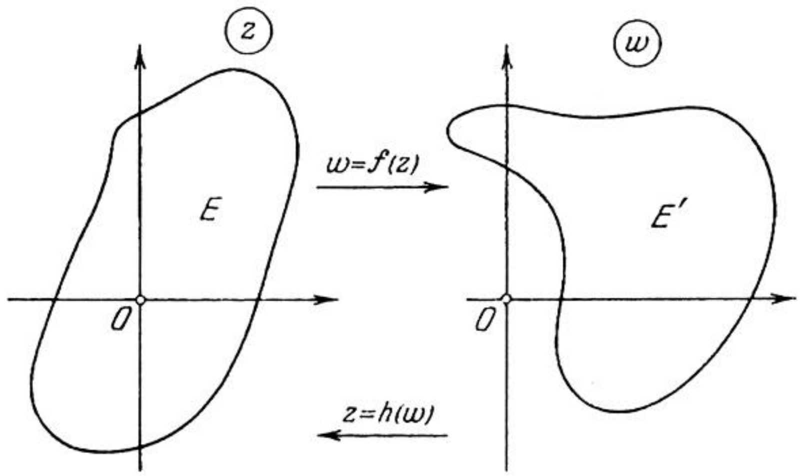
Piemēram, josla $D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z < b,\ 0 < b - a < 2\pi\}$. $\square$

3.4 Inversā funkcija

Apskatām funkciju $f\colon E \to E'$, kur $E \subset \mathbb{C}$ ir funkcijas definīcijas apgabals un $E' \subset \mathbb{C}$ funkcijas vērtību kopa. Tas nozīmē, ka katram $w \in E'$ ir viens vai vairāki tādi $z \in E$, ka $w = f(z)$, t.i. katram $w \in E'$ vienādojumam

$$f(z) = w \tag{3.3}$$

ir viens vai vairāki atrisinājumi. Šie atrisinājumi definē kopā E' funkciju $w \mapsto z = h(w)$, kuru sauc par funkcijas f *inverso funkciju*.



Zīm. 3.2 Inversā funkcija

Tādā veidā, lai atrastu dotās funkcijas inverso funkciju, vajag katram $w \in E'$ atrast visus vienādojuma $f(z) = w$ atrisinājumus. No inversās funkcijas definīcijas izriet identitāte

$$f(h(w)) = w.$$

Atradīsim pietiekamos nosacījumus analītiskas inversās funkcijas eksistencei.

Teorēma 3.1. *Pieņemam, ka funkcija $z \mapsto w = f(z)$ ir analītiska punktā z_0 un $f'(z_0) \neq 0$. Tad*

- *eksistē riņķi*

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$$

un

$$\Lambda' = \{z \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < \rho'\}$$

$w_0 = f(z_0)$ *tādi, katram* $w \in \Lambda'$ *vienādojumam* $f(z) = w$ *ir viens vienīgs atrisinājums* $z = h(w)$*, kur* $z \in \Lambda$*;*
- *funkcijas* $z \mapsto w = f(z)$ *inversā funkcija* $w \mapsto z = h(w)$ *ir analītiska punktā* z_0*;*
- *eksistē tādā punkta* w_0 *apkārtnē, ka ir spēkā formula*

$$h'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(h(w))}.$$

Pierādījums. Pieņemot, ka $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, ievērojam, ka vienādojums (3.3) ir ekvivalents vienādojumu sistēmai

$$u(x,y) = u, \quad v(x,y) = v. \tag{3.4}$$

Attēlojuma f jakobiānis $J(x,y) = J(z) = |f'(z)|^2$ punktā $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ nav nulle, un tātad nav nulle šī punkta mazā apkārtnē.

Saskaņā ar reālā mainīga funkcijas aizklātas funkcijas eksistences teorēmu eksistē tāda punkta $w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ apkārtne un viennozīmīgi nepārtraukti attēlojumi $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$, inversi attēlojumam (3.4). Tas nozīmē, ka eksistē tāds riņķis Λ', ka katram $w \in \Lambda'$ vienādojumam (3.3) ir viens vienīgs atrisinājums

$$z = x(u,v) + \mathrm{i}y(u,v) = h(w),$$

tāds, ka $z \in \Lambda$ un $w \mapsto z = h(w)$ nepārtraukta funkcija.

Atlicis pierādīt, ka funkcija h ir analītiska punktā w_0. Pieņemam, ka $w \in \Lambda'$ un $w + \Delta w \in \Lambda'$. Apskatīsim daļu $\dfrac{\Delta z}{\Delta w}$, kur $\Delta w \neq 0$ un $\Delta z = h(w + \Delta u) - h(w)$. Ievērojam, ka ja $\Delta w \neq 0$, tad $\Delta z \neq 0$, tā kā funkcija f savstarpēji viennozīmīgi pietiekoši mazu punkta z_0 apkārtni attēlo par punkta w_0 apkārtni.

Apskatām identitāti

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}. \tag{3.5}$$

Pieņemam, ka $\Delta w \to 0$, tad funkcijas h nepārtrauktības dēļ $\Delta z \to 0$. Pārejam uz robežu, kad $\Delta z \to 0$ identitātes (3.5) labajā pusē. Dotā robeža eksistē neatkarīgi no veida kā lielums Δz tiecās uz nulli, jo funkcija f ir diferencējama punkta z_0 apkārtnē un atvasinājums ir $\dfrac{1}{f'(z)}$. Seko eksitē robeža identitātes (3.5) kreisajai pusei, ja $\Delta w \to 0$ un ir spēkā atvasinājuma formula. $\square$

3.5 Funkcija $\sqrt{z}$

Apskatām funkciju $z \mapsto w = z^2$. Lai atrastu inverso funkciju jāatrisina vienādojums

$$z^2 = w$$

attiecībā pret z. Vienādojumam, ja $w \neq 0$ ir divi atrisinājumi. Ja vienu atrisinājumu apzīmē ar $\sqrt{w}$, tad otru ar $-\sqrt{w}$.

Tādā veidā inversā funkcija $w \mapsto z = h(w)$ ir divvērtīga. Atzīmēsim, ka funkcija $z \mapsto z^2$ ir definēta visā kompleksajā plaknē un arī funkcijas vērtību kopa sakrīt ar visu komplekso plakni.

Dabiski rodas jautājums par viennozīmīgas nepārtrauktas funkcijas eksistenci un konstruēšanas veidu tā, lai tās vērtība katrā apgabala D punktā sakristu ar vienu no divvērtīgās funkcijas $z \mapsto z^2$ inversās funkcijas vērtību.

Pieņemam, ka $D_\pi \subset \mathbb{C}$ apgabals ar griezumu pa reālās ass negatīvo pusasi. Uzrakstīsim z eksponentformā un apskatām apgabalā D_π funkciju $f_1 : D_\pi \to \mathbb{C}$, kur

$$w = f_1(z) = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\varphi}{2}}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Funkcija f_1 ir viennozīmīga un nepārtraukta apgabalā D_π un apmierina nosacījumu $f_1^2(z) = z$, t.i. funkcija f_1 ir vienādojuma

$$w^2 = z$$

atrisinājums. Funkcijas f_1 vērtību kopa ir labā pusplakne. Tas izriet no funkcijas f_1 definīcijas un arī no fakta, ka f_1 inversais attēlojums attēlo labo pusplakni $\mathrm{Re}\, z > 0$ par plakni ar griezumu pa reālas ass negatīvo pusasi.

Tādā veidā funkcija f_1 ir viennozīmīga un nepārtraukta apgabalā D_π, t.i. plaknē ar griezumu $(-\infty,0]$ un attēlo šo apgabalu par labo pusplakni.

Analoģiski funkcija $f_2\colon D_\pi \to \mathbb{C}$, kur

$$w = f_2(z) = -\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

ir viennozīmīga un nepārtraukta apgabalā D_π, apmierina nosacījumu $f_2^2(z) = z$ un attēlo apgabalu D_π uz kreiso pusplakni.

Sacīsim, ka f_1 un f_2 ir divi nepārtraukti funkcijas $z \to \sqrt{z}$ zari apgabalā D_π. Šīs funkcijas ir diferencējamas un seko analītiskas apgabalā D_π saskaņā ar inversās funkcijas eksistences teorēmu. Atrodam

$$f_k'(z) = \frac{1}{2f_k(z)}, \quad k = 1,2.$$

Funkcijas f_1 un f_2 sauc par divvērtigas funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ *regulāriem zariem* apgabalā D_π. Lai noteiktu kuru no diviem iespējamiem divvērtīgas funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ zariem apskatām, pietiekami norādīt funkcijas vērtību kādā apgabala D_π iekšējā punktā vai norādīt funkcijas vērtību robežpunktā (uz griezuma), pie reizes norādot vai punkts pieder augšējam vai apakšējam griezuma krastam.

Piemēram, ja apskatam funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ analītisku zaru, kurš punktā $z_0 = 1$ pieņem vērtību $w_0 = 1$, tad runa iet par funkciju $f_1\colon D_\pi \to \mathbb{C}$, ja zināms ka $1 \mapsto -1$, tad runa ir par funkciju $f_2\colon D_\pi \to \mathbb{C}$.

Analoģiski funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ analītisks zars, kurš punktā $z_0 = -1 + 0\cdot i$ pieņem vērtību i ir funkcija f_1, un ja $-1+0\cdot i \mapsto -i$, tad runa ir par funkciju f_2.

Viegli pārliecināties, ka funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ analītiskus zarus var izdalīt, ja izdara griezumu pa staru $\arg z = \alpha$. Apzīmējam atbilstošo apgabalu ar D_α. Augstāk veiktie pētījumi atļauj secināt, ka

- divvērtīga funkcija $z \mapsto \sqrt{z}$ sadalās divos analītiskos zaros apgabalā D_α, t.i.laknēs ar griezumu pa staru $\arg z = \alpha$, kurš savieno punktus $z = 0$ un $z = \infty$;
- apgabalā D_α punktā z_0 šie zari pieņem attiecīgi vērtības w un $-w$;
- analītisko zaru vērtības būtiski ir atkarīgas no apgabala D_α, kurā šie zari izdalās;

- funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ zaru apgabalā D_α viennozīmīgi nosaka apgabala iekšējā puntkta attēls vai robežpunkta attēls (pēdējā gadījumā ir jāprecizē kuram krastam pieder punkts).

3.6 Logaritmiskā funkcija

Logaritmisko funkciju $\mathrm{Ln}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ kompleksā plaknē definē kā inverso funkciju eksponentfunkcijai, t.i.,

$$w = \mathrm{Ln}\, z \quad \Longleftrightarrow \quad z = \mathrm{e}^w.$$

Apskatām vienādojumu

$$\mathrm{e}^w = z \tag{3.6}$$

attiecībā pret w. Pieņemam, ka $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ un $w = u + \mathrm{i}v$. Tad no vienādojuma (3.6) iegūstam $u = \ln r$, $v = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Seko

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Tādā veidā vienādojumam (3.6), ja $z \neq 0$ ir bezgala daudz atrisinājumu, t.i. logaritmiskā funkcija katrā punktā $z \neq 0$ pieņem bezgalīgi daudz vērtības. Atzīmējam, ka logaritmiskās funkcijas reālā daļa nosakās viennozīmīgi.

Ja formulā (3.7) izvēlās $k = 0$, tad iegūst logaritma galveno vērtību, kuru apzīmē ar ln, t.i.

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

un redzams, ka

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi\mathrm{i}. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ja $z = x > 0$, tad logaritma galvenā vērtība sakrīt ar $\ln x$. Logaritma vērtība skaitlim $z = 0$ nav definēta. Logaritmiskai funkcijai piemīt sekojošas īpašības:

- $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,
- $\mathrm{Ln}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

Apskatīsim jautājumu par vienvērtīga nepārtraukta logaritma zara izdalīšanu apgabalā D, t.i. nepārtrauktas funkcijas, kuras vērtība katrā apgabala punktā D sakrīt ar vienu no daudzvērtīgas Ln funkcijas vērtībām.

Līdzīgi, ka funkcijas $z \mapsto \sqrt{z}$ gadījumā par apgabalu D ņemam apgabalu D_π, t.i. ar plakni griezumu $(-\infty, 0]$. Šajā apgabalā funkcija $\operatorname{Arg} z$ atļauj izdalīt vienvērtīgu zaru. Pieņemam, ka $\varphi = \arg z$ – nepārtraukts argumenta zars apgabalā D_π, tāds, ka

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

Tad

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z,$$

kur $-\pi < \varphi < \pi$. Funkcija $z \mapsto \ln z$ apmierina vienādojumu (3.7). Bez tam šī funkcija ir vienozīmīga un nepārtraukta apgabalā D_π. Funkcija ln savstarpēji viennozīmīgi attēlo apgabalu D_π par joslu $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$.

Izmantojot teorēmu par inverso funkciju, iegūstam, ka ln ir analītiska apgabalā D_π. Šo funkciju sauc par daudzvērtīgās logaritmiskās funkcijas vienvērtīgo zaru apgabalā D_π, bet atvasinājumu aprēķina pēc formulas

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Atzīmēsim, ka apgabalā D_π ir bezgalīgi daudz vienvērtīgi nepārtraukti zari. Piemēram, fiksējot $k = 1$, iegūstam atbilstošo logaritma zaru

$$w = (\ln z)_1 = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z + 2\pi \mathrm{i} = \ln z + 2\pi \mathrm{i}.$$

Funkcija $\ln_1$ attēlo apgabalu D_π par joslu $\pi < \operatorname{Im} w < 3\pi$.

Analoģiski, ņemot $k = -1$, iegūstam funkciju

$$w = (\ln z)_{-1} = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z - 2\pi \mathrm{i},$$

kura apgabalu D_π attēlo par joslu $-3\pi < \operatorname{Im} w < -\pi$.

Funkcijas $\ln_1$ un $\ln_{-1}$ ir logaritma analītiskie zari apgabalā D_π.

Piemērs 3.5. Atrast $\operatorname{Ln} z$ un $\ln z$, ja $z = 2 - 3\mathrm{i}$.

Uzrakstam komplekso skaitli eksponentformā

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$

$$\arg z = -\arctan\left(\frac{3}{2}\right).$$

Tātad

$$z = \sqrt{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\frac{3}{2}}.$$

Seko,

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln 13 - \mathrm{i}\arctan\frac{3}{2}$$

un

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi\mathrm{i} = \frac{1}{2}\ln 13 + \mathrm{i}\left(2k\pi - \arctan\frac{3}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Uzdevums 3.2. Atrast kļūdu J. Bernulli paradoksā. Tā kā $(-z)^2 = z^2$, tad $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$. Seko, $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$ (!).

3.7 Inversās trigonometriskās un inversās hiperboliskās funkcijas

Inversās trigonometriskās funkcijas $\operatorname{Arcsin}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Arccos}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Arctan}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Arccot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un analogās inversās hiperboliskās $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Arcosh}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{Artanh}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un $\operatorname{Arcoth}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksā plaknē definē kā inversās funkcijas atbilstošajām trigonometriskajām un hiperboliskajām funkcijām, t.i.,

$$\begin{aligned}
w &= \operatorname{Arcsin} z &\iff&& z &= \sin w,\\
w &= \operatorname{Arccos} z &\iff&& z &= \cos w,\\
w &= \operatorname{Arctan} z &\iff&& z &= \tan w,\\
w &= \operatorname{Arccot} z &\iff&& z &= \cot w,\\
w &= \operatorname{Arsinh} z &\iff&& z &= \sinh w,\\
w &= \operatorname{Arcosh} z &\iff&& z &= \cosh w,\\
w &= \operatorname{Artanh} z &\iff&& z &= \tanh w,\\
w &= \operatorname{Arcoth} z &\iff&& z &= \coth w.
\end{aligned}$$

Visas minētās funkcijas ir reducējamas uz logaritmiskām funkcijām un tādēļ ir ir bezgalīgi daudzvērtīgas.

Uzdevums 3.3. Atrisināt vienādojumu

$$\sin z = 2.$$

Funkciju sin aizvieto pēc definīcijas ar eksponentfunkciju un lietojam substitūciju $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \tau$. Tā iegūst kvadrātvienādojumu

$$\tau - \frac{1}{\tau} = 4\mathrm{i}$$

vai

$$\tau^2 - 4\mathrm{i}\tau - 1 = 0.$$

Atrisinot kvadrētvienādojumu atrodam divas saknes

$$\tau_{1,2} = 2\mathrm{i} \pm \sqrt{-4+1} = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}.$$

Tātad

$$\mathrm{i}z = \mathrm{Ln}(\mathrm{i}(2 \pm \sqrt{3})) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Ievērojam, ka

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$$

vai

$$\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln(2+\sqrt{3}).$$

Seko,

$$z = \mathrm{Arcsin}\, 2 = \pm\mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}) + \pi\left(2k + \frac{1}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

3.8 Kompleksā skaitļa kompleksā pakāpe

Pakāpi definē ar formulu

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\, z}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C} \text{ un } z \neq 0.$$

Piemērs 3.6. Aprēķināt i^{i}.

$$\begin{aligned}\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} &= \exp\left(\mathrm{i}\left(\ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + 2k\pi\mathrm{i}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Tātad pakāpei i^{i} ir sanumurējams skaits dažādu vērtību un tās visas ir reālas.

□

Nodaļa 4
Košī integrālā teorēma

Šajā nodaļā definēsim integrāli kompleksajā plaknē un apskatīsim tā īpašības. Tālāk pierādīsim kompleksā mainīgā funkciju teorijas centrālos rezultātus – Košī integrālo teorēmu un Košī integrālo formulu.

4.1 Integrāļa definīcija un īpašības

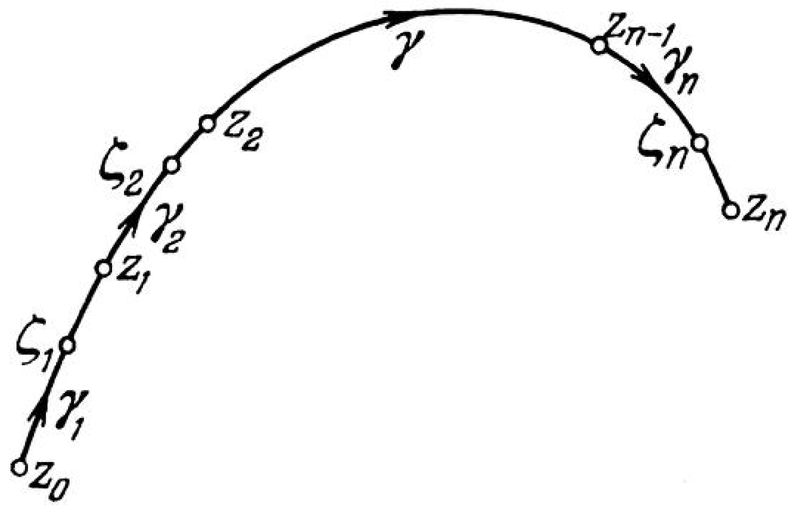
Pieņemam, ka uz līnijas $\gamma \subset \mathbb{C}$, kas uzdota ar nepārtrauktu ceļu $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ kompleksā plaknē $\mathbb{C}$ ir definēta nepārtarukta kompleksā mainīgā funkcija $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$. Sadalām līniju γ lokos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ar punktiem $z_0, z_1, \dots, z_n$, kuri ņemti pēc kārtas līnijas pozitīvā orientācijas virzienā, z_0 un z_n ir līnijas γ sākuma un gala punkti, z_{k-1} un z_k loka γ_k sākuma un gala punkti. Apzīmējam ar

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} |z_k - z_{k-1}|$$

atbilstošās hordas garumu. Uz katra loka γ_k izvēlamies patvaļīgu punktu $\zeta_k \in \gamma_k$ un sastādām integrālsummu

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{4.1}$$

Definīcija 4.1. Ja integrālsummai (4.1) eksistē galīga robeža, kad $\lambda \to 0$, un šī robeža nav atkarīga no punktu z_k un ζ_k izvēles, tad šo robežu sauc par *funkcijas f integrāli pa līniju γ* un apzīmē sekojoši



Zīm. 4.1 Integrāļa definīcija

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

No prasības, lai $\lambda \to 0$, seko, ka $n \to \infty$, bet ne otrādi, tādēļ definīcijā nepietiek prasīt, lai $n \to \infty$.

Pieņemam, ka $z = x + \mathrm{i}y$, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Ievedam apzīmējumus $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, $\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k$, $k = 1,2,\dots,n$. Tad

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k),$$

kur $u_k = u(\xi_k,\eta_k)$, $v_k = v(\xi_k,\eta_k)$. Pārejot pēdējā vienādībā uz robežu, kad $\lambda \to 0$, iegūstam

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Tātad integrāļa $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ eksistence ir ekvivalenta divu reāla mainīgā funkciju otrā veida līklīniju integrāļu

$$\int_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \int_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y$$

eksistencei. Savukārt no reālā mainīgā funkciju teorijas izriet, ka otrā veida līklīniju integrālis eksistē ja funkcijas u un v ir nepātrauktas uz iztaisnojamas līnijas γ.

Ja līnija γ ir uzdota ar ceļu $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, kur $\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ ir gabaliem gluda funkcija, tad $\mathrm{d}x = \xi'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \eta'(t)\,\mathrm{d}t$ un iegūstam

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta (u(\xi(t),\eta(t))\xi'(t) - v(\xi(t),\eta(t))\eta'(t))\,\mathrm{d}t$$

$$+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta (v(\xi(t),\eta(t))\xi'(t) + u(\xi(t),\eta(t))\eta'(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta (u(\xi(t),\eta(t)) + \mathrm{i}v(\xi(t),\eta(t)))(\xi'(t) + \mathrm{i}\eta'(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Līdz ar to integrāļa aprēķināšana reducējās uz Rīmana tipa integrāļa apēķināšanu.

Atzīmēsim integrāļa īpašības, kuras ir analogas reālā mainīgā funkciju gadījumam:

- Integrāļa linearitāte

$$\int_\gamma (af(z) \pm bg(z))\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \pm b\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z,$$

kur $a, b \in \mathbb{C}$ kompleksas konstantes;

-

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

mainot orientāciju, mainās integrāļa zīme. γ^{-1} ir līnija, kura iegūta no līnijas γ mainot orientāciju uz pretējo;

- Integrāļa aditivitāte

$$\int\limits_{\gamma_1\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Aprēķināsim pēc definīcijas tālāk kursā izmantotos integrāļus.

Piemērs 4.1. Pieņemam, ka $f(z) = 1$ un attiecīgi a un b ir līnijas γ sākuma punkts un gala punkts. Sastādām integrālsummu

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = b - a,$$

no kurienes seko, ka $\int_\gamma \mathrm{d}z = b - a$. Tādā veidā integrālis $\int_\gamma \mathrm{d}z$ ir atkarīgs tikai no līnijas γ sākuma un gala punkta un nav atkarīgs no integrācijas ceļa. Ja $a = b$, tad $\oint_\gamma \mathrm{d}z = 0$, vai citiem vārdiem integrālis $\oint_\gamma \mathrm{d}z$ pa jebkuru slēgtu līniju ir vienāds ar nulli. $\square$

Piemērs 4.2. Pieņemam, ka $f(z) = z$ un γ ir iztaisnojama līnija ar sākumu punktā $z = a$ un galu punktā $z = b$. Tā kā funkcija f ir nepārtraukta uz līnijas γ, tad integrālis

$$\int\limits_\gamma z\,\mathrm{d}z$$

eksistē un atbilstošās integrālsummas robeža, kad $\lambda \to 0$, nav atkarīga no punktu z_k, ζ_k izvēles. Ja izvēlamies $\zeta_k = z_{k-1}$, tad integrālsumma ir

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}),$$

un ja izvēlamies $\zeta_k = z_k$, tad integrālsumma ir

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

Aprēķinam

$$S_1 + S_2 = \sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1})$$

$$= z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + \ldots + z_n^2 - z_{n-1}^2 = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2.$$

Seko,

$$\int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0} \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Tādejādi integrālis $\int_\gamma z\,\mathrm{d}z$ nav atkarīgs no integrācijas ceļa. Integrālis $\oint_\gamma z\,\mathrm{d}z$ pa noslēgtu iztaisnojamu līniju ir vienāds ar nulli. $\square$

Piemērs 4.3. Aprēķinam integrāli

$$I_n = \oint\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^n\,\mathrm{d}z,$$

kur $n \in \mathbb{Z}$, $\rho > 0$ un integrācijas ceļš ir riņķa līnija ar orientāciju pretēju pulksteņa rādītāja virzienam.

Riņķa līnijas vienādojumu uzrakstam parametriskā formā $z = a + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Tad $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ un iegūstam

$$I_n = \mathrm{i}\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n+1)}\,\mathrm{d}t,$$

no kurienes pie $n = -1$ seko $I_{-1} = 2\pi\mathrm{i}$ un pie $n \ne -1$ saskaņā ar Ņūtona-Leibnica formulu

$$I_n = \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n+1)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Seko,

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{ja } n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ 2\pi\mathrm{i}, & \text{ja } n = -1. \end{cases}$$

Ievērojam, ka integrālis I_n nav atkarīgs ne no riņķa līnijas rādiusa $\rho > 0$ un ne no riņķa centra koordinātēm a. $\square$

Pie reizes atzīmēsim, ka integrāļiem no kompleksā mainīgā funkcijas nav spēkā integrāļu vidējās vērtības teorēma. Piemēram, integrālis $I_0 = 0$, bet tā kā $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 1$, tad zemintegrāļa funkcija $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ nevienā intervālā $[0, 2\pi]$ punktā nav vienāda ar nulli.

Atzīmēsim vēl sekojošu īpašību: funkciju rindu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

kur $f_n\colon \gamma \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, ir nepārtrauktas funkcijas un rinda vienmērīgi konverğē attiecībā pret $z \in \gamma$, var integrēt pa locekļiem un

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dotais apgalvojums izriet no teorēmas par vienmērīgi konverğentas nepārtrauktu reāla mainīgā funkciju rindas integrēšanu pa locekļiem.

Lemma 4.1. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta uz nepārtrauktas iztaisnojamas līnijas $\gamma \subset \mathbb{C}$. Tad ir spēkā novērtējums*

$$\left| \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| l(\gamma),$$

kur $l(\gamma)$ ir līnijas γ garums.

Pierādījums. Novērtējam integrālsummu izmantojot Košī-Buņakovska nevienādību

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||z_k - z_{k-1}|$$

$$\leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| l(\gamma).$$

Atcerēsimiem, ka līnijas γ garums $l(\gamma)$ ir visu tajā ievilktu lauztu līniju garumu kopas suprēms un, ka $f(\gamma)$ ir slēgta ierobežota kompleksās planes kopa un tātad nepārtrauta funkcija $|f|\colon \gamma \to \mathbb{R}$ sasniedz savu maksimumu uz tās.

Pārejot iegūtajā nevienādība uz robežu, kad $\lambda \to 0$, iegūstam vajadzīgo novērtējumu. $\square$

4.2 Košī integrālā teorēma, ja atvasinājums ir nepārtraukts

Daudzu svarīgu analītisko funkciju īpašību pierādījums balstās uz kompleksā mainīgā funkcijas integrēšanu. Nevienam nav izdevies pierādīt analītiskas funkcijas atvasinājuma nepārtrauktību neizlietojot integrāļu teoriju. Tālāk pierādīsim Košī integrālo teorēmu pie papildus nosacījumiem.

Teorēma 4.1. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukti diferencējama vienkārtsakarīgā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$. Tad integrālis no f pa jebkuru slēgtu iztaisnojamu vienkāršu līniju $\gamma \subset G$ vienāds ar nulli, t.i.*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pierādījums. Ja $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, tad

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Tā kā funkcijai f apgabalā G ir nepārtraukti diferencējama, tad atbilsošajām funkcijām u un v apgabalā G ir nepārtraukti parciālie atvasinājumi un izpildās Košī-Rīmana nosacījumi

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Pēdējais nosacījums reālā mainīgā funkciju teorijā, izlietojot Grīna[1] formulu, nozīmē, ka integrālis nav atkarīgs no integrācijas ceļa. Seko,

$$\oint_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \oint_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

vai

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

[1] George Green, ⋆1793.VII, Sneinton, Nottingham, Anglija, †1841.31.V, Sneinton, Nottingham, Anglija; angļu matemātiķis, modernās matemātiskās fizikas pamatlicējs

Atzīmēsim, ka funkcijas f, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, diferencējamība nodrošina tikai funkciju u un v parciālo atvasinājumu $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ un $\frac{\partial v}{\partial y}$ eksistenci, bet negarantē parciālo atvasinājumu nepārtrauktību. Tādēļ tālāk pierādīsim Košī-Gursā[2] integrālo teorēmu neprasot funkcijas f nepārtraukto diferencējamību.

4.3 Košī-Gursā integrālā teorēma

Lemma 4.2. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un $\gamma \subset G$ ir nepārtraukta iztaisnojama līnija. Tad integrāli no funkcijas f pa līniju γ apgabalā G var pēc patikas labi aproksimēt ar integrāli no funkcijas f pa lauztu līniju $C \subset G$, t.i., katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda lauzta līnija $C \subset G$, ka*

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{C} f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$$

Pierādījums. Apskatām tādu apgabalu G_1, ka $\overline{G}_1 \subset G$ un līnija $\gamma \subset G_1$. Funkcija $f|_{G_1}$ ir vienmērīgi nepārtraukta, t.i. katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta = \delta(\varepsilon)$, ka katram $z \in G_1$, $\zeta \in G_1$ un $|z - \zeta| < \delta$ izpildās nevienādība
$$|f(z) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3l},$$
kur l – līnijas γ garums.

Sadalām iztaisnojamu līniju γ ar pēc kārtas sekojošiem punktiem $z_0, z_1, \dots, z_n$ lokos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tā, lai katra loka γ_k garums l_k būtu mazāks par δ un lai riņķi $|z - z_k| < \delta$, $k = 1, 2, \dots, n$ piederētu apgabalam G_1. Apzīmējam ar C lauztu līniju ar pēc kārtas sekojošām virsotnēm punktos $z_0, z_1, \dots, z_n$, ar c_k hordu, kura savieno puntu z_{k-1} ar z_k, ar $\lambda_k = |z_k - z_{k-1}|$ hordas c_k garumu, $k = 1, 2, \dots, n$.

Tā kā $l_k < \delta$, tad $\lambda_k \le l_k < \delta$, t.i. loks γ_k un nogrieznis c_k atrodas riņķī $|z - z_k| < \delta$, $k = 1, 2, \dots, n$. Seko, visiem $z \in \gamma_k$ un $z_k \in c_k$ vienmērīgās nepārtrauktības dēļ ir spēkā nevienādība

[2] Edouard Jean-Baptiste Goursat, ⋆1858.21.V, Lanzae, Lot, Francija, †1936.25.XI, Parīze, Francija; franču matemātiķis, Parīzes universitātes profesors

$$|f(z)-f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{3l}.$$

Novērtējam integrāļus.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{c_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z\right) - \left(\int_{c_k} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z\right)\right),$$

no kurienes, izlietojot vienādību

$$\int_{\gamma_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z = \int_{c_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z = f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

iegūstam

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\left(\left|\int_{\gamma_k} (f(z)-f(z_k))\,\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{c_k} (f(z)-f(z_k))\,\mathrm{d}z\right|\right).$$

Izlietojot iegūtos novērtējumus galīgi iegūstam

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{3l}l_k + \frac{\varepsilon}{3l}\lambda_k\right) \le \frac{\varepsilon}{3l}2l < \varepsilon.$$

□

Lemma 4.3. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta ierobežotā vienkārtsakarīgā slēgtā apgabalā $\overline{G} = G \cup \partial G$ un apgabala G robeža ∂G ir slēgta iztaisnojama vienkārša līnija. Tad integrāli no funkcijas f pa līniju ∂G var pēc patikas labi aproksimēt ar integrāli no funkcijas f pa slēgtu lauztu līniju, kura pieder vaļējam apgabalam G.*

Skat. [6].

Teorēma 4.2. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$. Tad integrālis no f pa jebkuru slēgtu iztaisnojamu līniju $\gamma \subset G$ vienāds ar nulli*

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pierādījums. Vispirms pierādīsim teorēmu gadījumā kad līnija $\gamma \subset G$ ir trīsstūra kontūra. Pieņemam pretējo, t.i. teorēma nav pareiza. Tad atradīsies tāds trīsstūris $\triangle \subset G$, ka

$$\left| \oint_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \alpha > 0.$$

Savienojot trīsstūra $\triangle$ malu viduspunktus ar nogriežņiem, izveidojās četri jauni trīsstūri $\triangle^{(k)}$, $k = 1,2,3,4$. Ievērojam, ka

$$\sum_{k=1}^{4} \oint_{\partial\triangle^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

jo vienādības kreisā pusē ir summa, kura sastāv no integrāļa pa trīsstūra kontūru $\partial\triangle$ un integrāļiem, kuri ir ņemti divas reizes pretējos virzienos pa katru trīsstūra $\partial\triangle^{(k)}$ malu (šie integrāļi savstarpēji saīsinās).

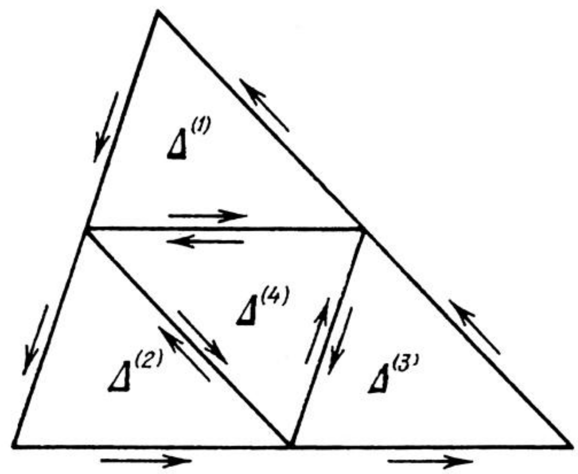
Seko, ka vismaz vienam kreisās puses integrālim ir spēkā nevienādība (atbilstošo trīsstūri apzīmēsim ar $\triangle_1$)

$$\left| \oint_{\partial\triangle_1} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq \frac{\alpha}{4},$$

jo pretējā gadījumā

$$\alpha = \left| \oint_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left| \oint_{\partial\triangle^{(k)}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| < 4\frac{\alpha}{4} = \alpha,$$

t.i. $\alpha < \alpha$, kas nevar būt.



Zīm. 4.2 Košī teorēma

Tālāk trīsstūri $\triangle_1$ atkal sadalām četrās daļās ar iepriekš aprakstīto metodi un atkārtojot iepriekšējos spriedumus pierādām tāda trīsstūra $\triangle_2$ eksistenci, ka

$$\left| \oint\limits_{\partial\triangle_2} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq \frac{\alpha}{4^2}.$$

Turpinot šo procesu iegūstam tādu trīsstūru virkni $\{\triangle_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ka $\triangle_{n+1} \subset \triangle_n$ un izpildās nevienādība

$$J_n = \left| \oint\limits_{\partial\triangle_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq \frac{\alpha}{4^n}.$$

Pēdējā formula dot integrāļu J_n novērtējumu no apakšas. Atrodam integrāļa J_n novērtējumu no augšas. Pieņemam, ka P ir izejas trīsstūra $\triangle$ perimetrs. Tad trīsstūra $\triangle_n$ perimetrs $P_n = \frac{P}{2^n}$ un $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$. Tādā veidā trīsstūru virkne $\{\triangle_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir savelkoša, katrs trīsstūris $\triangle_n$ satur visus sekojošos trīsstūrus $\triangle_{n+1}, \triangle_{n+2}, \ldots$ un trīsstūra $\triangle_n$ perimetrs tiecās un nulli, ja $n \to \infty$. No šejienes seko, ka eksistē viens vienīgs punkts z_0, kurš atrodas vai nu trīsstūra $\triangle$ iekšpusē vai uz trīsstūra $\triangle$ malas un pieder visiem trīsstūriem $\triangle_1, \triangle_2, \ldots$.

Pēc teorēmas nosacījumiem punkts $z_0 \in G$. Tā kā funkcija f ir diferencējama punktā z_0, tad

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z, z_0)(z - z_0),$$

kur $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$. Seko

$$\oint\limits_{\partial \triangle_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= f(z_0) \oint\limits_{\partial \triangle_n} \mathrm{d}z + f'(z_0) \oint\limits_{\partial \triangle_n} z\,\mathrm{d}z - z_0 f'(z_0) \oint\limits_{\partial \triangle_n} \mathrm{d}z$$

$$+ \oint\limits_{\partial \triangle_n} \varepsilon(z, z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z$$

Ievērojot, ka $\oint_{\partial \triangle_n} \mathrm{d}z = 0$ (skat. piemēru 4.1) un $\oint_{\partial \triangle_n} z\,\mathrm{d}z = 0$ (skat. piemēru 4.2) iegūstam

$$\oint\limits_{\partial \triangle_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\partial \triangle_n} \varepsilon(z, z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z.$$

Tā kā $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$, tad katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta = \delta(\varepsilon)$, ka visiem z, kuri apmierina nevienādību $|z - z_0| < \delta$ ir spēkā nevienādība

$$|\varepsilon(z, z_0)| < \varepsilon.$$

Izvēlamies n tik lielu, lai trīsstūris $\triangle_n$ atrastos riņķī $|z - z_0| < \delta$. Tad iegūstam

$$J_n = \left| \oint\limits_{\partial \triangle_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \max_{z \in \partial \triangle_n} |\varepsilon(z, z_0)(z - z_0)| P_n < \frac{\varepsilon P_n^2}{2} = \frac{\varepsilon P^2}{2 \cdot 4^n},$$

t.i.

$$J_n < \frac{\varepsilon P^2}{2 \cdot 4^n},$$

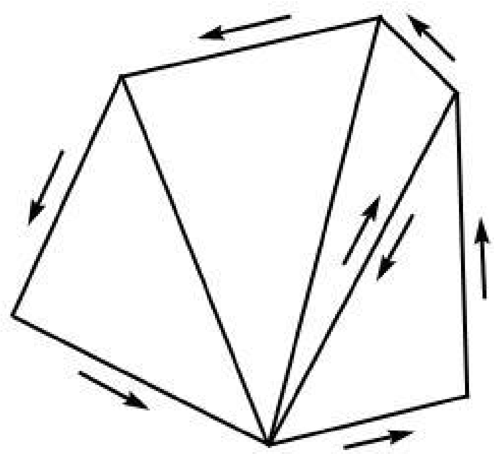
No otras puses, iegūstam

$$\frac{\alpha}{4^n} \leq J_n < \frac{\varepsilon P^2}{2 \cdot 4^n},$$

t.i. $2\alpha < \varepsilon P^2$, kas pie $\alpha > 0$ nav iespējams, jo $\varepsilon > 0$ var izvēlēties pēc patikas mazu. Seko, $\alpha = 0$, t.i. Košī integrālā teorēma ir pareiza jebkuram trīsstūrim, kurš atrodas apgabalā G.

Tālāk apskatām gadījumu, kad integrācijas līnija γ ir patvaļīga slēgta n-stūra kontūra, kura atrodas apgabalā G.

Vispirms apskatām gadījumu, kad n-stūris ir izliekts. Tad n-stūri var sadalīt $n-2$ trīsstūros ar diagonālēm, ko velk no vienas n-stūra virsotnes. Integrālis

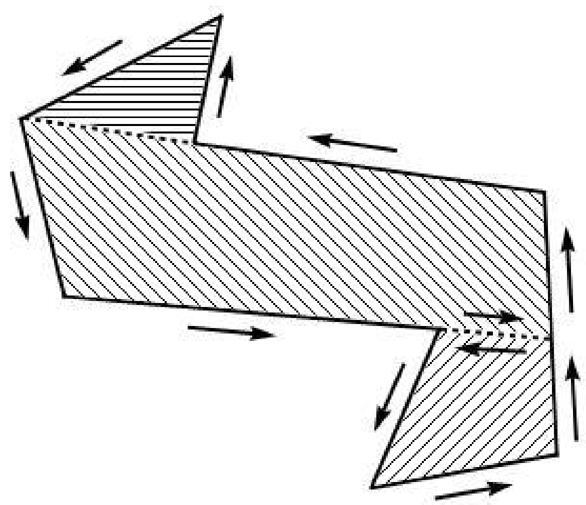


Zīm. 4.3 Košī teorēma izliektam daudzstūrim

$$J = \oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

pa izliektu n-stūra kontūru ir vienāds ar integrāļa pa izliektu $n-1$-stūra kontūru un trīsstūra kontūru summu. Ievērojot, ka integrālis pa trīsstūra kontūru ir vienāds ar nulli, iegūstam, ka integrālis pa izliektu n-stūra kontūru vienāds ar integrāli pa izliektu $n-1$-stūra kontūru. Atkārtojot analogus spriedumus izliektam $n-1$-stūrim pēc galīga skaita soļiem nonākam, ka integrālis pa izliektu n-stūra kontūru ir vienāds ar integrāli pa trīsstūra kontūru. Iegūstam $J = 0$.

Tālāk apskatām gadījumu, kad n-stūris nav izliekts. Tā kā apgabals G ir vienkārtsakarīgs un integrācijas līnija ir slēgta Žordāna līnija, tad integrācijas līnijas iekšpuse arī piederēs apgabalam G. Bet tad atradīsies vismaz viena n-stūra mala, kuru būs iespējams turpināt pa taisni n-stūra iekšienē līdz tā krustosies ar kādu citu n-stūra malu. Konstrukcijas rezultātā iegūstam divus jaunus daudzstūrus, kuru kopējais virsotņu skaits ir n vai $n+1$ vai $n+2$ atkarībā no malas turpinājuma krustojuma ar citu malu. Bet visos gadījumos katra jaunā daudzstūru malu skaits nepārsniegs $n-1$. Ja abi daudzstūri izrādīsies izliekti, tad integrālis saskaņā ar iepriekš pierādīto

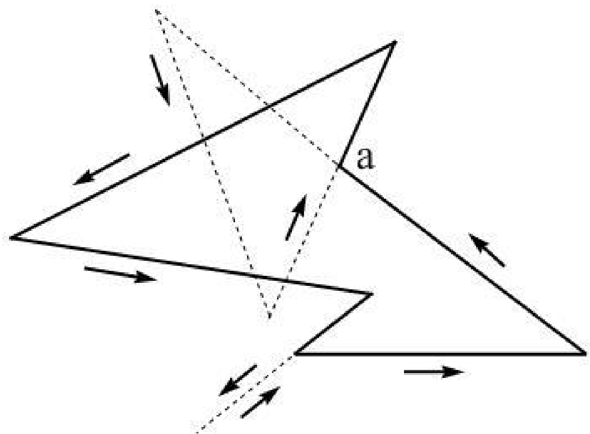


Zīm. 4.4 Košī teorēma neizliektam daudzstūrim

$$J = \oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ja turpretī viens vai abi jaunie daudzstūri nebūs izliekti, tad turpinām attiecīgā daudzstūra sadalīšanu. Pēc galīga skaita soļiem nonāksim pie tāda n-stūra sadalījuma, ka visi dalījuma rezultātā iegūtie daudzstūri būs izliekti. Arī šajā gadījumā iegūstam $J = 0$. Pie reizes atzīmējam, ka arī neizliektu n-stūri var sadalīt ne vairāk kā $n-2$ trīsstūros.

Pieņemam, ka integrācijas kontūra γ ir patvaļīga slēgta lauzta līnija, pie kam netiek izslēgti gadījumi, kad daži līnijas posmi var krustoties, daži posmi var būt citu posmu sastāvdaļas un pat sakrist ar tiem. Tas nozīmē, ka virzoties pa līniju γ, var izrādīties, ka pa dažiem šīs līnijas posmiem vai to daļām pārvietosimies vairākkārt. Izvēlamies patvaļīgu virsotni un virzāmies pa lauzto līniju γ līdz pirmo reizi punktā a sastopam kādu no iepriekš izietiem posmiem. Tad slēgtā lauztā līnija



Zīm. 4.5 Košī teorēma slēgtai lauztai līnijai

γ_1, kuru iegūstam ja virzāmies no punkta a līdz pirmajai atgriešanai šajā pašā punktā būs slēgta Žordana līnija (divstūris, trīsstūris vai daudzstūris). Seko, integrālis pa šo līniju ir vienāds ar nulli. Līdz ar to mēs neizmainīsim integrāļa vērtību pa slēgto lauzto līniju γ, ja izslēgsim no integrācijas kontūra minēto slēgto lauzto līniju γ_1. Jaunajai slēgtai lauztajai līnijai virsotņu skaits būs vismaz par vienu mazāks. Turpinot šo procesu pēc galīga skaita soļiem iegūsim vai nu slēgtu lauztu Žordāna līniju vai vienu punktu. Abos šajos gadījumos integrālis vienāds ar nulli.

Beidzot apskatām vispārīgo gadījumu. Pieņemam, ka $\gamma \in G$ ir patvaļīga slēgta iztaisnojama līnija. Tad integrāli $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ apgabalā G var aproksimēt ar jebkuru precizitāti ar integrāli pa slēgtu lauztu līniju (skat. Lemmu 4.2), t.i. katram $\varepsilon > 0$ eksistē slēgta lauzta līnija C tāda, ka

$$\left| \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$$

Saskaņā ar iepriekš pierādīto $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ un tāpēc pēdējā nevienādība pārveidojās par

$$\left| \oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon,$$

no kurienes $\varepsilon > 0$ patvaļīguma dēļ izriet, ka $\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

Piezīme 4.1. Funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur $f(z) = \dfrac{1}{z}$, ir analītiska gredzenā

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\},$$

bet integrālis saskaņā ar piemēru 4.3

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \neq 0.$$

Dotais piemērs parāda, ka prasība Košī integrālā teorēmā pēc apgabala vienkkārtsakarības ir būtiska.

Sekas 4.1. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, tad integrālis no f nav atkarīgs no integrācijas ceļa. Precīzāk, ja iztaisnojamam līnijām $\gamma_1, \gamma_2 \subset G$ ir kopīgs sākuma punkts un kopīgs gala punkts, tad*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tātad, ja iztaisnojamu līniju γ var nepārtraukti deformēt apgabalā G atstājot fiksētus sākuma un gala punktus, tad integrāļa vērtība nemainās. Košī integrālo teorēmu var formulēt arī sekojoši:

Teorēma 4.3. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un iztaisnojamas līnijas γ_1 un γ_2 ir homotopas apgabalā G, tad*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pēdējā gadījumā apgabals G var arī nebūt vienkārtsakarīgs. Teorēmai ir svarīga praktiska nozīme, jo līniju γ_2 nereti var izvēlēties tā, ka integrāli var vienkārši aprēķināt.

Dažreiz pielietojumos ir nepieciešami apskatīt integrāļus, kad slēgtā līnija γ sakrīt ar apgabala G robežu ∂G. Tad ir spēkā sekojoša teorēma

Teorēma 4.4. *Pieņemam, ka funkcija* $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ *ir analītiska vaļējā ierobežotā vienkārtsakarīgā apgabalā* $G \subset \mathbb{C}$ *un nepārtraukta slēgtā apgabalā* $\overline{G} = G \cup \partial G$. *Ja apgabala* G *robeža* ∂G *ir slēgta iztaisnojama vienkārša līnija, tad*

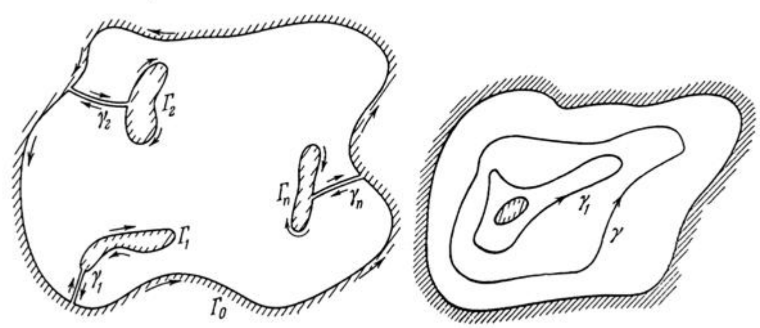
$$\oint\limits_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Koši integrālā teorēma paliek spēkā arī vairākkārtsakarīgam apgabalam.

Teorēma 4.5. *Pieņemam, ka funkcija* $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ *ir analītiska vaļējā ierobežotā vairākkārtsakarīgā apgabalā* $G \subset \mathbb{C}$ *un nepārtraukta slēgtā apgabalā* $\overline{G} = G \cup \partial G$. *Ja apgabala* G *robeža* ∂G *sastāv no galīga skaita slēgtām, iztaisnojamam un vienkāršām līnijām, kuras pa pāriem nešķeļas, tad*

$$\oint\limits_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pierādījums. Apgabala G robeža ∂G sastāv no ārējās slēgtās līnijas Γ_0 un galīga skaita slēgtām līnijām $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, kuras atrodas Γ_0



Zīm. 4.6 Košī integrālā teorēma vairākkārtsakarīgam apgabalam

iekšienē. Līnijas $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ orientētas tā, ka virzoties pa līnijām apgabals G atrodas pa kreisi. Ar griezumiem $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ vairākkārtsakarīgo apgabalu pārvērtīsim pa vienkārtsakarīgu apgabalu $\tilde{G}$. Tad apgabala $\tilde{G}$ robeža $\partial \tilde{G}$ sastāv no ārējās līnijas Γ_0, slēgtām līnijām

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ un griezumu līnijām $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Saskaņā ar Košī integrālo teorēmu vienkārtsakarīgam apgabalam

$$\oint_{\partial \tilde{G}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ievērojot, ka integrēšana pa katru griezumu γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ notiek divas reizes pretējos virzienos, un tātad $\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, iegūstam formulu

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

Atzīmēsim vēl speciālgadījumu. Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ analītiska apgabalā G un pieņemam, ka apgabala $G_1 \subset G$ robežu izveido divas slēgtas iztaisnojamas vienkāršas līnijas $\gamma, \gamma_1 \subset G$, kur viena no līnijām atrodas otras līnijas iekšpusē. Tad

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pēdējā formulā orientācija uz līnijām ir viena un tā pati. No dotās formulas seko, ka ja vienu līniju var nepārtraukti deformēt par otru apgabalā kur funkcija f ir analītiska, tad integrāļa vērtība neizmainās.

4.4 Integrālis ar mainīgu augšējo robežu

Definīcija 4.2. Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir definēta apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un funkcija $F\colon G \to \mathbb{C}$ ir diferencējama tai pašā apgabalā. Ja $F'(z) = f(z)$ visiem $z \in G$, tad funkciju F sauc par funkcijas f *primitīvo funkciju* apgabalā G.

Teorēma 4.6. *Analītiskai funkcijai $f\colon G \to \mathbb{C}$ vienkārtsakarīgā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ eksistē primitīvā funkcija.*

Pierādījums. Apskatām funkciju

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

kur integrācijas līnija ir jebkura iztaisnojama līnija, kas atrodas apgabalā G un kas savieno punktus z_0 un z. Tā kā integrālis no analītiskas funkcijas vienkārtsakarīgā apgabalā nav atkarīgs no integrācijas ceļa, tad funkcija F ir viennozīmīgi definēta apgabalā G. Parādīsim, ka F ir funkcijas f primitīvā funkcija, t.i.

$$F'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right) = f(z).$$

Tā kā punkts $z \in G$ ir apgabala G iekšējs punkts, tad arī nogrieznis, kurš savieno puntus z un $z+\Delta z$, piederēs G, ja tikai $|\Delta z|$ ir pietiekoši mazs. Iegūstam

$$\begin{aligned}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right)\\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

Apskatām starpību

$$\sigma = \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z).$$

Tā kā $\int_z^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta = \Delta z$, tad

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta = f(z)$$

un

$$\sigma = \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} (f(\zeta)-f(z))\,\mathrm{d}\zeta.$$

Novērtējam starpību σ, pieņemot, ka integrācijas līnija ir nogrieznis, kas savieno punktus z un $z+\Delta z$

$$|\sigma| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))\,\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\max_{|z-\zeta|\leq|\Delta z|}|f(\zeta)-f(z)||\Delta z| = \max_{|z-\zeta|\leq|\Delta z|}|f(\zeta)-f(z)|.$$

Saskaņā ar funkcijas f nepārtrauktību punktā z katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tāds, ka ja $|z-\zeta| < \delta$, tad

$$|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon.$$

Ievērojot, ka $|z-\zeta| \leq |\Delta z|$, iegūstam

$$|\sigma| < \varepsilon,$$

ja tikai $|\Delta z| < \delta$. Citiem vārdiem eksistē robeža

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

vai $F'(z) = f(z)$. $\square$

Sekas 4.2. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon\ G\to\mathbb{C}$ ir nepārtraukta vienkārtsakarīgā apgabalā $G\subset\mathbb{C}$ un integrālis pa jebkuru slēgtu iztaisnojamu līniju apgabalā G vienāds ar nulli. Tad funkcija $F\colon\ G\to\mathbb{C}$, kur*

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

ir funkcijas f primitīvā funkcija.

Ja funkcija F ir funkcijas f primitīvā funkcija, tad arī funkcija F_1, kur $F_1(z) = F(z)+C$ un C patvaļīga konstante, ir funkcijas f primitīvā funkcija apgabalā G. Pareizs ir arī apgrieztais apgalvojums.

Teorēma 4.7. *Visas funkcijas f primitīvās funkcijas apgabalā G ir formā $F(z) = F_0(z)+C$, kur F_0 ir kaut kāda funkcijas f primitīvā funkcija un C patvaļīga konstante.*

Pierādījums. Pieņemam, ka F_1 un F_2 ir divas funkcijas f primitīvās funkcijas apgabalā G. Pierādām, ka funkcija $F = F_1 - F_2$ ir konstante apgabalā G. Atvasinot funkciju F, iegūstam

$$F'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

visiem $z \in G$. Tā kā $F(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ un ievērojot, ka funkcijas F atvasinājums vienāds ar nulli, tad saskaņā ar Košī-Rīmaņa nosacījumiem

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \equiv 0$$

apgabalā G. Seko, $F(z) \equiv const$, t.i. $F_2(z) = F_1(z) + C$, kur $C \in \mathbb{C}$ kompleksa konstante. □

Sekas 4.3. *Jebkura funkcijas f primitīvā funkcija ir formā*

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + C, \tag{4.2}$$

kur $C \in \mathbb{C}$ patvaļīga kompleksa konstante.

Sekas 4.4. *Ir pareiza Ņūtona-Leibnica formula*

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z_1) - F(z_0).$$

Pierādījums. Liekot formulā (4.2) $z = z_0$, iegūstam $C = F(z_0)$. Tālāk ņemot $z = z_1$, atrodam

$$F(z_1) = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + C = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + F(z_0),$$

no kurienes arī seko Ņūtona[3]-Leibnica[4] formula. □

---

[3] Sers Isaac Newton, ⋆1643.4.I, Woolsthorpe, Lincolnshire, Anglija, †1727.31.III, Londona, Anglija; angļu fiziķis un matemātiķis

[4] Gottfried Wilhelm von Leibniz, ⋆1646.1.VII, Leipciga, Vācija, †1716.14.XI Hanovera, Vācija; vācu filozofs, matemātiķis un politiķis

Atzīmēsim, ka integrāļus no elementāram analītiskam funkcijām vienkārtsakarīgā apgabalā aprēķina pēc tam pašām metodēm un formulām kā reāla mainīgā funkcijas gadījumā.

4.5 Košī integrālā formula

No Košī integrālās teorēmas izriet viena no svarīgākajām kompleksā mainīgā funkcijas formulām – *Košī integrālā formula*.

Teorēma 4.8. *Pieņemam, ka funkcija* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā* $G \subset \mathbb{C}$ *un ka slēgta iztaisnojama vienkārša līnija* $\gamma \subset G$ *ir pozitīvi orientēta. Tad katram punktam* z*, kas atrodas līnijas* γ *iekšpusē, izpildās formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta. \tag{4.3}$$

Pierādījums. Funkcija g, kur $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$ ir analītiska kompleksā mainīgā ζ funkcija apgabalā G ar izgrieztu punktu z. Izvēlamies riņķa radiusu $\rho > 0$ tādu, lai riņķa līnija $|\zeta - z| = \rho$ atrastos līnijas γ iekšpusē. Izmantojot faktu, ka Košī integrālis nav atkarīgs no integrācijas ceļa (homotopi ceļi), iegūstam

$$J = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = J_1 + \frac{f(z)}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z},$$

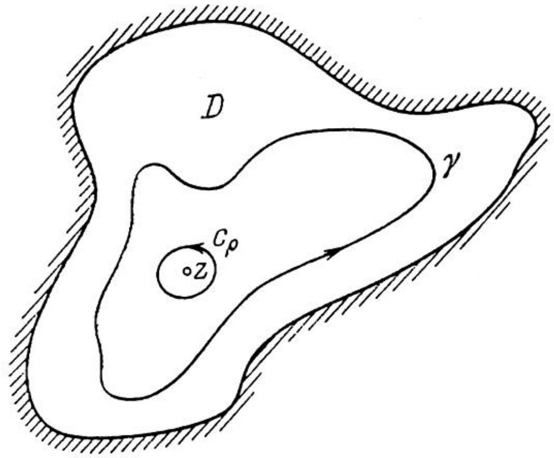
kur

$$J_1 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Tā kā

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 1,$$

tad



Zīm. 4.7 Košī integrālā formula

$$J = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = J_1 + f(z).$$

Tālāk pierādām, ka $J_1 = 0$. Iegūstam novērtējumu

$$|J_1| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|\zeta - z| = \rho} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| 2\pi\rho = \max_{|\zeta - z| = \rho} |f(\zeta) - f(z)|.$$

No funkcijas f ir nepārtrauktības punktā z seko, ka katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ka nevienādība $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ izpildās, ja tikai $|\zeta - z| < \delta$. Iegūstam

$$|J_1| < \varepsilon,$$

ja tikai $|\zeta - z| = \rho < \delta$. Ievērojot, ka J_1 nav atkarīgs no ρ, iegūstam $J_1 = 0$ vai $J = f(z)$. Līdz ar to esam pierādījuši Košī integrālo formulu (4.3). □

Sekas 4.5. *Pieņemam, ka funkcija* $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ *ir analītiska vienkārtsakarīga ierobežotā vaļējā apgabalā* G *un nepārtraukta slēgtā apgabalā* $\overline{G} = G \cup \partial G$. *Ja apgabala* G *robeža* ∂G *ir slēgta iztaisnojama vienkārša līnija, tad jebkuram punktam* $z \in G$ *ir spēkā formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.4}$$

Formulu pierāda analogi formulai (4.3). Ar formulas (4.4) palīdzību funkcijas f vērtības apgabalā izsakās ar tās vērtībām uz apgabala robežas.

Piezīme 4.2. Ja Košī integrālā formulā (4.3) punkts $z \in \overline{G}$, bet atrodas līnijas $\gamma \subset G \subset \mathbb{C}$ ārpusē, tad zemintegrāļa funkcija ir analītiska pēc $\zeta \in G$ un saskaņā ar Koši integrālo teorēmu vienāda ar nulli. Iegūstam

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{ja } z \in G \\ 0, & \text{ja } z \notin \overline{G} \end{cases}$$

Košī integrālo formulu var izlietot, lai aprēķinātu integrāļus pa slēgtu līniju.

Piemērs 4.4. Apskatām integrāli

$$I = \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z,$$

kur

1. γ slēgta līnija, kuras iekšpusē atrodas punkts $z = \mathrm{i}$ un ārpusē $z = -\mathrm{i}$. Integrāli pārveidojam

$$I_1 = \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z + \mathrm{i}} \frac{1}{z - \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.$$

   Funkcija f_1, kur $f_1(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z + \mathrm{i}}$ ir analītiska līnijas γ iekšpusē un saskaņā ar Košī integrālo formulu

$$I_1 = 2\pi \mathrm{i} f_1(\mathrm{i}) = \pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}}.$$

2. γ slēgta līnija, kuras iekšpusē atrodas punkts $z=-\mathrm{i}$ un ārpusē $z=\mathrm{i}$. Par funkciju f_2 izvēlamies $f_2(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z-\mathrm{i}}$, kura ir analītiska līnijas γ iekšpusē. Seko
$$I_2 = 2\pi\mathrm{i} f_2(-\mathrm{i}) = -\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}.$$
3. γ slēgta līnija, kuras iekšpusē atrodas abi punkti $z=\pm\mathrm{i}$. Ar griezuma līniju divkārtsakarīgo apgabalu sadalām divos vienkārtsakarīgos apgabalos tā, lai katrs punkts $z=\mathrm{i}$ un $z=-\mathrm{i}$ atrastos savā vienkārtsakarīgā apgabalā. Izmantojot iepriekšējos rezultātus, iegūstam
$$I_3 = I_1 + I_2 = \pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\sin 1.$$
4. γ slēgta līnija, kuras ārpusē atrodas abi punkti $z=\pm\mathrm{i}$. Funkcija f, kur $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}$, ir analītiska slēgtas līnijas γ iekšpusē un saskaņā ar Košī teorēmu $I_4=0$.

□

4.6 Teorēma par vidējo vērtību

Teorēma 4.9. *Pieņemam, ka funkcija* $f\colon \overline{D}\to\mathbb{C}$ *ir analītiska vaļējā riņķī*
$$D=\{\zeta\in\mathbb{C} \mid |\zeta-z|<\rho\}$$
un nepārtraukta slēgtā riņķī $\overline{D}$. *Tad funkcijas vērtība riņķa centrā* z *ir vienāda ar funkcijas vērtību aritmētisko vidējo uz riņķa līnijas, t.i.*
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho\mathrm{e}^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pierādījums. Izlietojam formulu (4.4), kur ∂D ir riņķa līnija ar rādiusu ρ un centru punktā z. Tad $\zeta=z+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $\mathrm{d}\zeta=\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$,
$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

□

Nodaļa 5
Analītisku funkciju rindas

Šajā nodaļā apskatīsim galvenās īpašības funkciju rindai, kuras locekļi ir kompleksā mainīgā funkcijas. Kompleksā mainīgā funkciju teorijā īpašu lomu spēlē pakāpju rindas. Šo rindu izpēte ir būtiska, lai pierādītu kompleksā mainīgā funkciju bezgalīgu diferencējamību un unitātes teorēmu.

5.1 Pakāpju rindas

Definīcija 5.1. Funkciju rindu, kur $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ un $a, c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ir kompleksi skaitļi, sauc par *pakāpju rindu* un apzīmē

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n. \tag{5.1}$$

Ja $a = 0$, tad pakāpju rinda (5.1) ir vienkāršākā formā

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{5.2}$$

Acīmredzot visas pakāpju rindas (5.1) īpašības ir pareizas arī pakāpju rindai (5.2).

Definīcija 5.2. Par pakāpju rindas (5.1) *konverğences apgabalu* sauc visu to punktu $z \in \mathbb{C}$ kopu, kuros rinda (5.1) konverğē.

Punkts $z = a$ vienmēr pieder rindas (5.1) konverğences apgabalam. Eksistē arī tādas pakāpju rindas, kuras konverğē tikai vienā vienīgā punkta $z = a$. Ar piemēriem ilustrēsim iespējamos gadījumus.

Piemērs 5.1. Rinda $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ konverğē, ja $|z| < 1$, jo $|(-1)^n z^n| \le |z|^n$ un rinda $\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ ir bezgalīga dilstoša ğeometriskā progresija ar kvocientu $|z| < 1$. Ja $|z| \ge 1$, tad rinda diverğē, jo neizpildās nepieciešamais konverğences kritērijs. Mūsu piemēra konverğences apgabals ir vienības riņķa iekšiene $|z| < 1$.

Piemērs 5.2. Apskatām rindu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$. Izvēlamies patvaļīgu $z \in \mathbb{C}$. Tad visiem $n > N$, kur $N > 2|z|$ izpildās novērtējums

$$\left|\frac{z^n}{n^n}\right| = \left|\frac{z}{n}\right|^n < \frac{1}{2^n}.$$

Seko rindas konverğences apgabals ir visa kompleksā plakne $\mathbb{C}$.

Piemērs 5.3. Apskatām rindu $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$. Ja $z \ne 0$ un $n > 1/|z|$, tad izpildās nevienādība $|nz| > 1$ un $|nz|^n > 1$. Dotā rinda diverğē, jo neizpildās nepieciešamais rindas konverğences kritērijs. Seko rindas konverğences apgabals sastāv no viena vienīga punkta $z = 0$.

Tālāk pierādīsim *Ābela teorēmu* par pakāpju rindas konverğences apgabala struktūru.

Teorēma 5.1. *Ja pakāpju rinda* (5.1) *konverğē punktā $z_0 \ne a$, tad tā konverğē absolūti vaļējā riņķī*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < |z_0 - a|\}$$

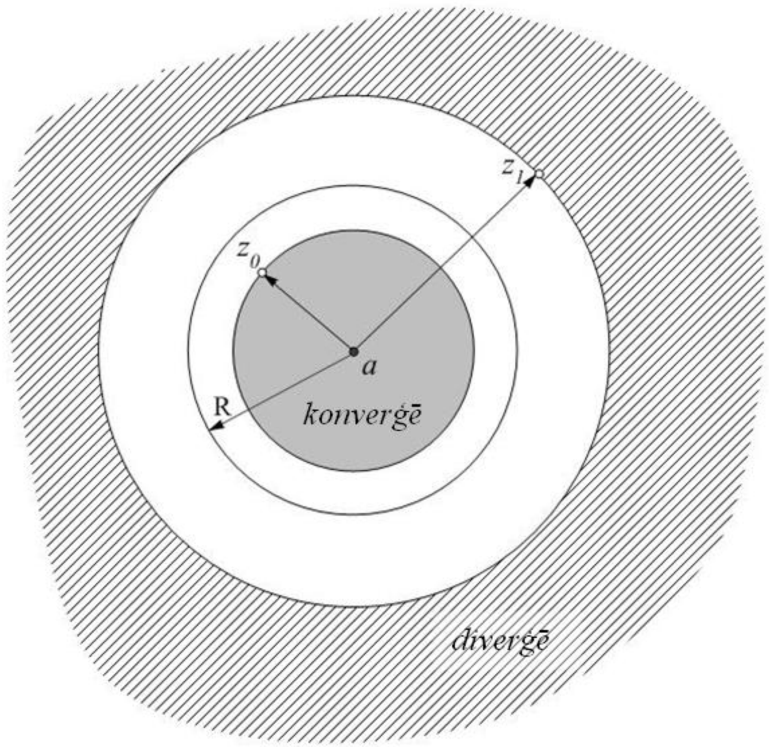
un konverğē vienmērīgi jebkurā mazākā slēgtā riņķī

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \le R_1 < |z_0 - a|\} \subset D.$$

Pierādījums. No rindas (5.1) nepieciešama konverğences nosacījuma punktā z_0 izriet, ka $\lim_{n\to\infty} c_n(z_0 - a)^n = 0$. Tas nozīmē, ka virkne $\{c_n(z_0 - a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir ierobežota un tātad eksistē tāda konstante $M > 0$, ka visiem $n \in \mathbb{N}$ izpildās nevienādība $|c_n(z_0 - a)^n| \le M$. Pieņemam, ka $z \in D$. Tad

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0 - a)^n|\left|\frac{z-a}{z_0 - a}\right|^n \le Mq^n,$$

kur $q = \left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$ un tātad rinda (5.1) absolūti konverğē riņķī D.



Zīm. 5.1 Konverğences riņķis

Ja $z \in D_1$, tad iegūstam novērtējumu $|c_n(z-a)^n| \le M\left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right|^n \le Mq_1^n$ un $q_1 = \dfrac{R_1}{|z_0-a|} < 1$ kurš nav atkarīgs no z. Saskaņā ar Veierštrāsa kritēriju rinda (5.1) konverğē vienmērīgi riņķī D_1.

Pieņemam, ka R ir suprēms visiem attālumiem no punkta $z = a$ līdz punktiem $z \in \mathbb{C}$ kuros rinda (5.1) konverğē. Tad visiem $z \in \mathbb{C}$, kuriem $|z-a| > R$, rinda (5.1) diverğē. Tiešām, pieņemot pretējo, t.i. eksistē tāds punkts $z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_1 - a| > R$ ka rinda (5.1) šajā punktā konverğē, iegūstam pretrunu ar R definīciju. $\square$

Sekas 5.1. *Rinda* (5.1) *konverğē absolūti vaļējā riņķī*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$$

un konverģē vienmērīgi jebkurā mazākā slēgtā riņķī

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq R_1 < R\}.$$

Piemēram, rinda $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverģē absolūti, ja $|z| < 1$, bet nekonverģē vienmērīgi tai pašā riņķī.

Definīcija 5.3. Riņķi D sauc par *konverģences riņķi*, bet tā rādiusu R par rindas (5.1) *konverģences rādiusu*.

Rindas (5.1) izturēšanos riņķa līnijas $|z-a| = R$ punktos jāpētī atsevišķi, jo ar konverģences rādiusu konverģences apgabals nav noteikts pilnīgi. Dažādu konkrētu rindu izturēšanās riņķa līnijas punktos var būt atšķirīga: tā var konverģēt visos riņķa līnijas punktos, diverģēt visos riņķa līnijas punktos un ir arī jauktais gadījums. Ja rinda (5.1) konverģē tikai punktā $z = a$, tad konverģences rādiuss $R = 0$. Ja rinda konverģē visā kompleksā plaknē, tad konverģences rādiuss $R = \infty$.

Lai atrastu rindas (5.1) konverģences rādiusu izlieto *Košī-Adamāra*[1] *formulu*[2]

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Ja eksistē robeža $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ vai tā ir $+\infty$, tad konverģences rādiusu var aprēķināt arī ar *Dalambēra formulu*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Piemērs 5.4. Apskatām rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}, \tag{5.3}$$

kuru iegūst formāli atvasinot rindu (5.1) pa locekļiem. Ievērojot, ka exponentfunkcija ir nepārtraukta funkcija, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}\right) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

[1] Jacques Salomon Hadamard, $\star$1865.8.XII, Versaļa, Francija, †1963.17.X, Parīze, Francija

[2] Ar simbolu $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ saprot skaitļu virknes $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}_{n\in\mathbb{N}}$ augšejo akumulācijas punktu

Izlietojam Košī-Adamāra formulu rindas (5.3) konverğences rādiusa aprēķināšanai

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \times \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R^{-1}.$$

Sekas 5.2. *Rindas* (5.3) *konverğences rādiuss sakrīt ar rindas* (5.1) *konverğences rādiusu.*

5.2 Pakāpju rindu atvasināšana

Teorēma 5.2. *Pieņemam, ka pakāpju rindas*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{5.4}$$

konverğences rādiuss ir $R > 0$. *Tad šo rindu vaļējā riņķī*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$$

var diferencēt pa locekļiem jebkura skaita reižu. Diferencēšanas rezultātā iegūto rindu konverğences rādiuss saglabājās.

Pierādījums. Apskatām rindu

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1}, \tag{5.5}$$

kuru iegūstam formāli atvasinot rindu (5.4). Saskaņā ar Sekām 5.1 un 5.2 rinda (5.5) vienmērīgi konverğē riņķī

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \le R_1 < R\}$$

un tātad rindas summa S ir nepārtraukta funkcija riņķī D_1. Tālāk pierādām, ka funkcija f ir diferencējama riņķī D_1 un

$$S(z) = f'(z).$$

Pieņemam, ka $\gamma \subset D_1$ ir patvaļīga iztaisnojama līnija, kura savieno punktu a ar z. Tad

$$\int_a^z (\zeta - a)^k \,\mathrm{d}\zeta = \frac{(z-a)^{k+1}}{k+1}.$$

Seko,

$$\int_a^z nc_n(\zeta - a)^{n-1}\,\mathrm{d}\zeta = c_n(z-a)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Integrējot pa locekļiem uz iztaisnojamas līnijas γ vienmērīgi konverğentu rindu (5.5) iegūstam

$$\int_a^z S(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^z nc_n(\zeta - a)^{n-1}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n = f(z) - f(a) = f(z) - c_0.$$

Ievērojam, ka integrālis ar mainīgu augšējo robežu $\int_a^z S(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ nav atkarīgs no integrācijas ceļa. Saskaņā ar Sekām 4.2 funkcija $z \mapsto \int_a^z S(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ ir funkcijas S primitīvā funkcija un izpildās vienādība $S(z) = f'(z)$. Tātad funkcija f ir diferencējama riņķī D_1 un rinda (5.5) ir funkcijas f atvasinājums. Citiem vārdiem rindu (5.4) var pa locekļiem diferencēt riņķī D_1. Riņķa D_1 rādiusu R_1 var ņemt pēc patikas tuvu R un tādēļ rindu (5.4) var pa locekļiem diferencēt visā riņķī D.

Acīmredzot diferencēšanas operāciju var pielietot pēc patikas daudz reižu un seko, ka rinda (5.4) ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama rinķī D. $\square$

Sekas 5.3. *Riņķī*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\},$$

kur $R > 0$*, konverğejošas pakāpju rindas* (5.4) *koeficientus* c_n *aprēķina pēc formulām*

$$c_0 = f(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pierādījums. Pielietojam Teorēmu 5.2 rindai (5.4). Iegūstam

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z-a) + \dots \tag{5.6}$$

visiem $z \in D$. Ievietojot formulās (5.4) un (5.6) $z = a$ iegūstam vajadzīgās formulas.

Atzīmējam, ka no rindas koeficientu aprēķināšanas formulām seko funkcijas izvirzījuma pakāpju rindā unitāte. □

Sekas 5.4. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur f ir riņķī D konverģejošas rindas* (5.4) *summa, ir analītiska funkcija šai riņķī.*

Definīcija 5.4. Pakāpju rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

sauc par funkcijas f *Teilora*[3] *rindu*.

Ja $a = 0$, tad Teilora rindu sauc arī par Maklorēna[4] rindu. Tādejādi jebkura pakāpju rinda konverğences riņķī ir tās summas Teilora rinda.

5.3 Analītiskas funkcijas izvirzīšana pakāpju rindā

Iepriekš pierādījām, ka vaļējā riņķī konverğējošas pakāpju rindas summa ir analītiska funkcija. Tālāk pierādīsim sekojošu apgalvojumu.

Teorēma 5.3. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, tad to var izvirzīt pakāpju rindā.*

Pierādījums. Pieņemam, ka a ir patvaļīgs apgabala G punkts. Apskatām riņķi

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho\}$$

un riņķa rādiusu $\rho > 0$ izvēlamies tādu, lai $D \cup \partial D \subset G$. Pieņemam, ka $z \in D$ ir patvaļīgs riņķa D punkts. Saskaņā ar Košī integrālo formulu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Izvirzām izteiksmi $\dfrac{1}{\zeta - z}$ kā ğeometrisko progresiju rindā pēc $z-a$ pakāpēm

[3] Brook Taylor,⋆1685.18.VIII, Edmonton, Anglija, †1731.29.XII, Somerset House, Anglija

[4] Colin Maclaurin, ⋆1698.II, Kilmodan, Skotijā, †1746.14.VI Edinburgā, Skotijā, skotu matemātiķis

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \tag{5.7}$$

Ja $\zeta \in \partial D$, tad

$$|\zeta - a| = \rho, \quad \left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho} < 1.$$

Seko rinda (5.7) saskaņā ar Veierštrāsa konverģences kritēriju konverģē vienmērīgi visiem $\zeta \in \partial D$. Arī rinda

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z-a)^n$$

konverģē vienmērīgi visiem $\zeta \in \partial D$, jo funkcija f ir nepārtraukta un tādejādi ierobežota slēgtā kopā ∂D. Integrējot rindu pa locekļiem saskaņā ar Koší integrālo formulu iegūstam

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{5.8}$$

kur rindas koeficientus aprēķina pēc formulām

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Rinda (5.8) konverģē riņķī

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho\},$$

bet tas nozīmē, ka analītisku funkciju f punkta $a \in G$ apkārtnē var attīstīt pakāpju rindā. Tā kā a ir patvaļīgs apgabala G punkts, tad funkciju f var attīstīt pakāpju rindā jebkurā apgabala G punktā. □

Protams atbilstošo rindu konverģences rādiusi var atšķirties un to lielumu precizē sekojošas sekas.

Sekas 5.5. *Rinda* (5.8) *konverģē riņķī*

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R_1\},$$

kur R_1 attālums starp punktu a un apgabala G robežu ∂G.

Piemērs 5.5. Apskatām Maklorēna rindu

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

un noskaidrosim šīs rindas konverģences rādiusu. Funkcija nav analītiska, ja $1+z^2=0$. Atrisinot kvadrātvienādojumu atrodam $z_{1,2} = \pm \mathrm{i}$. Attālums no koordinātu sākuma punkta O līdz tuvākam singulāram punktam, t.i. $\pm \mathrm{i}$ ir 1, līdz ar to Maklorēna rindas konverģences rādiuss ir 1.

5.4 Analītiskas funkcijas bezgalīgā diferencējamība

Teorēma 5.4. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, tad tā ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama apgabalā G,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho\},$$

kur $\rho > 0$ un $D \cup \partial D \subset G$.

Pierādījums. Izvēlamies patvaļīgu $a \in G$. Funkcijas f analītiskuma dēļ to riņķī D izvirzām konverģentā pakāpju rindā

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Saskaņā ar Teorēmu 5.2 iegūto rindu var diferencēt pa locekļiem riņķī D pēc patikas skaitu reižu un

$$c_0 = f(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

No otras puses

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Tā kā $a \in G$ ir patvaļīgs apgabala G punkts, tad iegūstam formulu (5.9). $\square$

No šīs teorēmas seko, ka analītiskas funkcijas atvasinājums arī ir analītiska funkcija.

Piezīme 5.1. Formulu (5.9) var iegūt formāli diferencējot n reizes Košī integrālo formulu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Piezīme 5.2. Ja kompleksā mainīgā funkcija f ir diferencējama punkta a apkārtnē, tad tā ir analītiska punktā a un to var izvirzīt pakāpju rindā. Tādejādi funkcijas f Teilora rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

konverğē punkta a apkārtnē.

Analoğisks apgalvojums nav spēkā reālā mainīgā funkcijām. Piemēram, funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama un visi atvasinājumi punktā $x = 0$ anulējās. Tātad visi atbilstošās Teilora rindas koeficienti punktā $x = 0$ ir vienādi ar nulli, bet $f(x) \not\equiv 0$.

5.5 Harmoniskās funkcijas

Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ ir analītiska apgabalā $G \subset \mathbb{C}$. Saskaņā ar iepriekšējo funkcija f ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama. Tātad arī funkcijas u un v ir bezgalīgi daudz reižu diferencējamas. Diferencējot Košī-Rīmana nosacījumus pēc x un y, iegūstam

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Saskaitot šīs vienādības iegūstam

$$\triangle u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{5.10}$$

Analoģiski iegūstam

$$\triangle v(x,y) = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Definīcija 5.5. Reālu mainīgo funkciju $u\colon G \to \mathbb{R}$, kurai apgabalā $G \subset \mathbb{R}^2$ ir nepārtraukti otrās kārtas parciālie atvasinājumi un kura apmierina vienādojumu (5.10), sauc par *harmonisku funkciju* apgabalā G, bet atbilstošo vienādojumu par *Laplasa*[5] *vienādojumu*.

Arī funkcija $z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$ ir harmoniska apgabalā G.

Definīcija 5.6. Harmonisko funkciju u un v pāri sauc par *saistītām harmoniskām funcijām*, ja tās apmierina Košī-Rīmana nosacījumus.

Arī apgrieztais apgalvojums ir pareizs. Ja apgabalā $G \in \mathbb{R}^2$ dotas divas saistītās harmoniskās funkcijas $u\colon G \to \mathbb{R}$ un $v\colon G \to \mathbb{R}$, tad funkcija f, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ ir analītiska apgabalā G. Iegūstam teorēmu:

Teorēma 5.5. *Lai funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$, kur $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ būtu analītiska apgabalā $G \in \mathbb{C}$ nepieciešami un pietiekami, lai funkcijas u un v būtu saistītās harmoniskās funkcijas šai apgabalā.*

Sekas 5.6. *Harmoniskās funkcijas ir bezgalīgi daudz reižu diferencējamas.*

Zinot vienu no harmoniskam funkcijām u vai v vienkārtsakarīgā apgabalā var atrast tai saistīto harmonisko funkciju.

Teorēma 5.6. *Jebkurai harmoniskai funkcijai $u\colon G \to \mathbb{R}$ vienkārtsakarīgā apgabalā $G \subset \mathbb{R}^2$ var atrast saistīto harmonisko funkciju ar precizitāti līdz patvaļīgam konstantam saskaitāmajam.*

Pierādījums. Ta kā u ir harmoniska funkcija vienkārtsakarīgā apgabalā G, tad

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)$$

[5] Pierre-Simon Laplace, ⋆1749.23.III, Beaumont-en-Ange, Francija, †1827.5.III, Parīze, Francija

un tāpēc izteiksme

$$-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

ir kādas funkcijas v pilnais diferenciālis un šo funkciju var atrast ar formulas

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y+C$$

palīdzību. Šeit $(x_0,y_0)\in G$ un $(x,y)\in G$. Atzīmējam, ka integrālis nav atkarīgs no līnijas, kura savieno punktus (x_0,y_0) un (x,y). No pēdējas formulas iegūstam

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},$$

no kurienes seko, ka v ir saistītā harmoniska funkcija apgabalā G funkcijai u. $\square$

No šīm teorēmām izriet, ka ja ir dota harmoniska funkcija vienkārtsakarīgā apgabalā G, tad ar precizitāti līdz konstantam saskaitāmam var atrast analītisku apgabalā G funkciju f, kur $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, tas ir atrast funkciju pēc funkcijas reālās vai imaginārās daļas.

Atzīmēsim, ka lai atrastu funkciju v, ja zināma funkcija u bieži ērtāk ir izmantot tieši Košī-Rīmana nosacījumus.

Piemērs 5.6. Atrast analītisku funkciju f, ja

$$\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=y^3-3x^2y.$$

Pārbaudam, ka u ir harmoniska funkcija. Tiešām

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y \text{ un } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$$

un tātad

$$\triangle u(x,y)=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0.$$

Seko funkcija $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir harmoniska visā kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$. Seko,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$$

no kurienes integrējot pēc y iegūstam

$$v = -3xy^2 + g(x).$$

Diferencējot pēdējo izteiksmi pēc x, iegūstam

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + g'(x).$$

No otras puses, atrodam

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2.$$

Salīdzinot, atrodam, ka $g'(x) = 3x^2$, no kurienes $g(x) = x^3 + C$ un C – reāla konstante. Seko $v = -3xy^2 + x^3 + C$. Tātad

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = y^3 - 3x^2y + \mathrm{i}(x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}C.$$

Izmantojot sakarības

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ un } y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

atrodam meklējamo funkciju

$$f(z) = \mathrm{i}(z^3 + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

kura ir analītiska visā kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$.

5.6 Moduļa maksimuma princips

Pieņemam, ka mums ir nepārtraukta funkcija $u\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$, kur $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$ ir slēgts, ierobežots apgabals. Saskaņā ar Veierštrāsa teorēmu eksistē tādi punkti $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \overline{G}$, ka

$$\min_{(x,y)\in\overline{G}} u(x,y) = u(x_1,y_1) \leq u(x_2,y_2) = \max_{(x,y)\in\overline{G}} u(x,y).$$

Ja mums turpretī ir kompleksā mainīgā funkcija $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ nepārtraukta ierobežotā slēgtā apgabalā $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ un analītiska vaļējā apgabalā G, tad var pierādīt, ka funkcijas f modulis $|f(z)|$ sasniedz maksimālo vērtība un minimālo vērtība, ja $f \neq 0$, uz apgabala G robežas ∂G.

Teorēma 5.7. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska lineāri sakarīgā ierobežotā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, nepārtraukta slēgtā apgabalā $\overline{G} = G \cup \partial G$ un nav identiski vienāda ar konstanti, tad funkcijas f modulis $|f(z)|$ savu maksimālo vērtību sasniedz uz apgabala G robežas ∂G, t.i.*

$$\max_{z \in G \cup \partial G} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, t.i. funkcijas f modulis maksimālo vērtību sasniedz apgabala G kādā iekšējā punktā $a \in G$, t.i.

$$\max_{z \in G} |f(z)| = |f(a)| = M.$$

Tad atradīsies riņķis

$$D = \{z \in G \mid |z - a| < \rho_0\},$$

kur $\rho_0 > 0$ ir attālums no punkta a līdz apgabala G robežai ∂G, ka saskaņā ar vidējās vērtības teorēmu

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho_0 \mathrm{e}^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi.$$

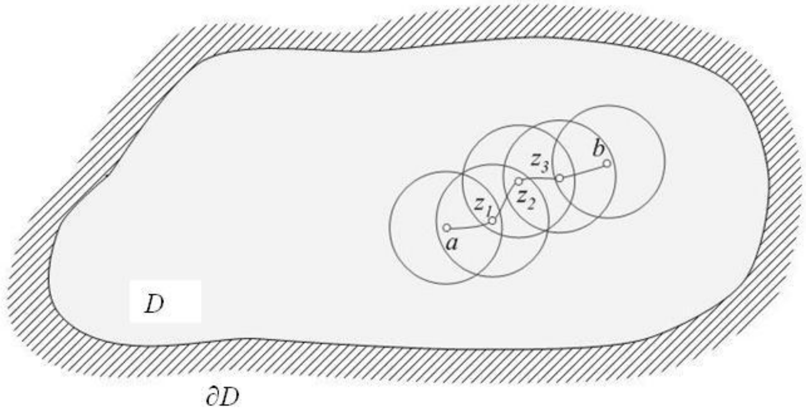
Novērtejam integrāli

$$M = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})| \, \mathrm{d}\varphi.$$

Pierādam, ka

$$|f(z)| = M, \text{ ja } z = a + \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{5.11}$$

Pieņemam pretējo, t.i., ka eksistē tāds $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, ka izpildās nevienādība $|f(a + \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0})| < M$. Moduļa nepārtrauktības dēļ nevienādība $|f(a + \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})| < M$ izpildīsies punta φ_0 apkārtnē, t.i. eksistē intervāls, ka visiem $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ izpildās nevienādība $|f(a + \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})| < M - \varepsilon$,



Zīm. 5.2 Moduļa maksimuma princips

kur $\varepsilon > 0$. Iegūstam precizāku novērtējumu

$$M \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+\rho_0 e^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi_1}|f(a+\rho_0 e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}|f(a+\rho_0 e^{i\varphi})|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_2}^{2\pi}|f(a+\rho_0 e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$\leq M\frac{\varphi_1}{2\pi} + (M-\varepsilon)\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi} + M\left(1-\frac{\varphi_2}{2\pi}\right) < M.$$

Iegūstam pretrunu. Tātad izpildās vienādība (5.11). Nepārtraukti izmainot riņķa rādiusu ρ_0 un atkārtojot iepriekšējos spriedumus, iegūstam, ka visā riņķī D ir pareiza vienādība $|f(z)| = M$.

Pieņemam, ka $b \in G$ ir patvaļīgs apgabala G punkts. Parādīsim, ka $|f(b)| = M$. Savienojam punktus a un b ar iztaisnojamu līniju $\gamma \subset G$. Pieņemam, ka ρ ir attālums starp līniju γ un apgabala G robežu ∂G. Tā kā γ ir kompakts, tad $\rho > 0$. Saskaņā ar Lemmu 2.1 līniju γ var pārklāt ar galīgu rādiusa $\rho/2$ riņķu saimi $\{D_k\}_{k=0,1,\ldots,n}$ tā, lai $\gamma \subset \cup_{k=0}^{n}\overline{D}_k \subset D$ un riņķa D_k centrs $z_k \in D_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Tā kā $\rho_0 \geq \rho$, tad riņķa D_1 centrs z_1 atrodas riņķī $D_0 \subset D$ un $|f(z_1)| = M$. Sekojot tiem pašiem spriedumiem kā iepriekš, var pierādīt, ka $|f(z)| = M$ riņķī D_1. Turpinot šos spriedumus pēc galīga skaita soļiem iegūstam, ka funkcija $|f(z)| = M$ visos riņķos D_k, tā kā $|f(b)| = M$.

Tātad, ja funkcijas f modulis savu maksimālo vērtību sasniedz apgabala G iekšējā punktā, tad $|f(z)| = M$ visā slēgtā apgabalā $\overline{G}$.

Tālāk parādīsim, ka ja $|f(z)| = M$, tad $f(z) = const$. Atvasinām identitāti

$$|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y) = M^2$$

pēc x un y. Iegūstam divas identitātes apgabalā G

$$\begin{cases} u(x,y)\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} + v(x,y)\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ u(x,y)\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} + v(x,y)\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ja $f(z) \not\equiv 0$, tad lai dotai sistēmai būtu netriviāls atrisinājums nepieciešami, lai sistēmas determinants būtu vienāds ar nulli, t.i.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{5.12}$$

Izlietojot Košī-Rīmana nosacījumus, iegūstam

$$\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Seko, funkcijas u un v nav atkarīgas no x. No vienādības (5.12) izlietojot vēlreiz Košī-Rīmana nosacījumus izslēdzam atvasinājumus pēc x un iegūstam

$$\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Seko, funkcijas u un v nav atkarīgas no y. Tādejādi visā apgabalā G funkcija f ir konstanta. Iegūstam pretrunu ar teorēmas nosacījumiem.
□

Analītiskai funkcijai f arī izpildās moduļa minimuma princips.

Teorēma 5.8. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska lineāri sakarīgā ierobežotā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, nepārtraukta slēgtā apgabalā $\overline{G} = G \cup \partial G$, $f(z) \neq 0$ un nav identiski vienāda ar konstanti, tad funkcijas f modulis $|f(z)|$ savu minimālo vērtību sasniedz uz apgabala robežas ∂G, t.i.*

$$\min_{z\in G\cup\partial G}|f(z)| = \min_{z\in\partial G}|f(z)|.$$

Pierādījums. Teorēmu pierāda, pielietojot moduļa maksimuma principu funkcijai $z \mapsto \dfrac{1}{f(z)}$. $\square$

5.7 Morēra teorēma

Morēra[6] *teorēma* dod pietiekamos nosacījumus, lai funkcija f būtu analītiska apgabalā.

Teorēma 5.9. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta vienkārtsakarīgā apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un integrālis*

$$\oint_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

pa katru slēgtu iztaisnojam līniju $\gamma \subset G$. Tad funkcija f ir analītiska apgabalā G.

Pierādījums. Saskaņā ar sekām 4.2 funkcijai f eksistē primitīvā funkcija, t.i. eksistē analītiska funkcija F tāda, ka $F'(z) = f(z)$ visiem $z \in G$. Saskaņā ar teorēmu par analītiskas funkcijas F bezgalīgo diferencējamību apgabalā G tās atvasinājums arī ir analītiska funkcija apgabalā G. Seko funkcija f, kur $f(z) = F'(z)$ eksistē visu kārtu atvasinājumi un tātad tā ir analītiska apgabalā G. $\square$

5.8 Veierštrāsa teorēma

Pierādām Veierštrāsa teorēmu par funkciju rindu analītiskumu.

Teorēma 5.10. *Pieņemam, ka funkcijas $f_n\colon G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ ir analītiskas apgabalā G un rinda*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

[6] Giacinto Morera, ⋆1856.18.VII Novara, Itālija, †1907.8.II, Turina, Itālija

konverğē vienmērīgi katrā slēgtā apgabalā $\overline{G}_1 \subset G$. Tad funkcija f ir analītiska apgabalā G.

Pierādījums. Pieņemam, ka $a \in G$ ir patvaļīgs apgabala G punkts. Apskatām riņķi

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho\},$$

kurš kopā ar savu robežu $D \cup \partial D \subset G$ pieder G. Pēc teorēmas nosacījumiem rinda vienmērīgi konverğē $\overline{D}$. Bez tam funkcijas f_n ir analītiskas un tātad nepārtrauktas. Seko arī rindas summa f ir nepārtraukta funkcija rindas vienmērīgās konverğences dēļ.

Pieņemam, ka $\gamma \subset D$ ir patvaļīga iztaisnojama slēgta līnija. Integrējot pa locekļiem vienmērīgi konverğentu rindu, iegūstam

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \oint\limits_{\gamma} f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Saskaņā ar Košī integrālo teorēmu $\oint_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$, $n \in \mathbb{N}$ un tātad $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Saskaņā ar Morēra teorēmu funkcija f ir analītiska riņķī D, tai skaitā punktā $a \in G$. Tā kā a ir patvaļīgs apgabala G punkts, tad funkcija f ir analītiska apgabalā G. $\square$

5.9 Funkciju attīstīšana pakāpju rindās

Katru funkciju f analītisku riņķī $|z-a| < \rho$ var izvirzīt konverğentā pakāpju rindā

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kur koeficientus aprēķina pēc formulām

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

vai

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta-a|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad \rho_1 < \rho.$$

Dotā rinda ir funkcijas f Teilora rinda punktā $z = a$ apkārtnē.

Izrēķinot elementāro funkciju exp, sin, cos, sinh un cosh atvasinājumus punktā $z = 0$ iegūstam visā kompleksā plaknē konverğentus izvirzījumus

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

un

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n.$$

Pēdējā rinda konverğē, ja $|z| < 1$.

Parasti lai atrastu pakāpju rindas koeficientus neizmanto atvasināšanas formulas, bet izmanto zināmus izvirzījumus un dažādus speciālus paņēmienus.

Piemērs 5.7. Atrodam funkcijas $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$ izvirzījumu punkta $z = 0$ apkārtnē. Izmantojam izvirzījumu

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Atvasinot rindu iegūstam

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Piemērs 5.8. Izvirzam racionālu funkciju

$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$$

Teilora rindā punkta $z = 0$ apkārtnē. Sadalam izteiksmi parciāldaļās. Tā kā

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)}\right)$$

tad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left(1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right) z^{2n},$$

kura konverğē riņķī $|z| < 1$.

Bieži, lai atrastu Teilora rindu lieto *nenoteikto koeficientu metodi*. Apskatīsim uzdevumu atrast Teilora koeficientus punkta $z = a$ apkārtnē funkcijai f, kura ir divu analītisku funkciju g un h dalījums punkta $z = a$ apkārtnē

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

kur $h(a) \neq 0$. Ja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ un $h(z) = \sum_{b=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, tad pielīdzinot koeficientus pie vienādām $z-a$ pakāpēm vienādībā $f(z)h(z) = g(z)$, iegūstam vienādojumus

$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \ldots + c_n b_0 = a_n,$$

no kurienes pakāpeniski atrodam koeficientus c_0, c_1, c_2 utt.

Piemērs 5.9. Izvirzam funkciju $z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$, izmantojot nenoteikto koeficientu metodi, punkta $z = 0$ apkārtnē Teilora rindā

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Iegūstam rekurences formulas

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \frac{c_1}{n!} + \ldots + \frac{c_n}{1!} = 0, \quad c_0 = 1. \quad n \in \mathbb{N}.$$

Skaitļus $B_n = c_n n!$ sauc par *Bernulli*[7] *skaitļiem*. Iegūta rinda konverğē riņķī $|z| < 2\pi$, jo $e^{2\pi i} - 1 = 0$. Ievērojam, ka funkcija

[7] Jacob Bernoulli, ⋆1654.27.XII, Bazele, Šveice, †1705.16.VIII, Bāzele, Šveice

$$z \mapsto \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$$

ir pāru funkcija, un tātad $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ un pārējie nepāra indeksa Bernulli skaitļi $B_{2n+1} = 0$, ja $n \in \mathbb{N}$. Līdz ar to atrodam Teilora rindu

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi.$$

Piemērs 5.10. Meklējam Koši problēmas

$$zw'' + w' + zw = 0, \quad w(0) = 1$$

atrisinājumu kā Teilora rindu formā

$$w(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Iegūstam rekurences formulas

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_n n^2 + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

No šejienes $c_{2k-1} = 0$, ja $k \in \mathbb{N}$ un

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Meklētā rinda ir

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Noskaidrojam rindas konverğences rādiusu. Ievietojam $\left(\frac{z}{2}\right)^2 = t$. Iegūstam rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} t^n.$$

Saskaņā ar Dalambēra kritēriju

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n)!}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} (n+1)^2 = \infty$$

rinda konverģē, ja $|t| < \infty$. Attiecīgi Košī problēmas atrisinājums konverģē, ja $|z| < \infty$. Funkciju

$$w(z) = J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

sauc par *Beseļa*[8] *funkciju* ar indeksu 0.

5.10 Analītiskas funkcijas nulles

Definīcija 5.7. Punkts $z = a$ ir analītiskas funkcijas f *nulle*, ja $f(a) = 0$.

Pieņemam, ka $a \neq \infty$ ir analītiskas funkcijas f nulle. Apskatām funkcijas f izvirzījumu pakāpju rindā punkta $z = a$ apkārtnē

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < R, \quad R > 0.$$

Tā kā punkts $z = a$ ir funkcijas f nulle, tad $c_0 = f(a) = 0$. Pieņemam, ka c_m ir pirmais no nulles atšķirīgais koeficients izvirzījumā ($c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$), t.i.

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots, \quad c_m \neq 0.$$

Tad skaitli m sauc par funkcijas f nulles $z = a$ *kārtu*. Tā kā

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tad funkcijas f nulles $z = a$ kārta ir vienāda ar zemāko dotās funkcijas atvasinājuma kārtu, pie kuras atvasinājums punktā $z = a$ atšķiras no nulles. Iegūstam

$$f(z) = (z-a)^m (c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots).$$

kur rinda $h(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots$ konverģē tai pašā riņķī, kur funkcijas f atbilstošā pakāpju rinda. Seko funkcija h ir analītiska

[8] Friedrich Wilhelm Bessel, ⋆1784.22.VII, Minden, Vācija, †1846.17.III, Königsberg, tagad Kaļiņingrada, Krievija

punkta $z = a$ un $h(a) = c_m \neq 0$ apkārtnē. Tātad, ja $z = a$ ir funkcijas m-tās kārtas nulle, tad ir pareiza formula

$$f(z) = (z-a)^m h(z), \quad h(a) \neq 0, \tag{5.13}$$

kur h analītiska funkcija punkta $z = a$ apkārtnē.

Pareizs ir arī apgrieztais apgalvojums. Pieņemam, ka funkciju f var uzrakstīt formā (5.13), kur funkcija h ir analītiska punkta $z = a$ apkārtnē, tad $z = a$ ir m-tās kārtas nulle.

Pieņemam, ka $z = \infty$ ir funkcijas f nulle. Tā kā funkcija f ir analītiska punktā $z = \infty$ apkārtnē, tad

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Pēc nosacījuma $c_0 = f(\infty) = 0$. Pieņemam, ka c_m ir pirmais no nulles atšķirīgais rindas koeficients, t.i. $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, bet $c_m \neq 0$ (skaitli $m \in \mathbb{N}$ sauc par funkcijas f nulles $z = \infty$ kārtu). Tad

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \frac{1}{z^m}\left(c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \ldots\right).$$

No šejienes

$$f(z) = z^{-m}\psi(z), \quad \psi(\infty) = c_m \neq 0, \tag{5.14}$$

kur funkcija ψ ir analītiska punkta $z = \infty$ apkārtnē.

Pieņemam, ka funkcija f ir formā (5.14), kur $m \in \mathbb{N}$ un ψ ir analītiska funkcija punkta $z = \infty$ apkārtnē. Tad iegūstam, ka $z = \infty$ ir funkcijas f m-tās kārtas nulle. Līdz ar to esam pierādījuši teorēmu

Teorēma 5.11. *Punkts $a \neq \infty$ ir funkcijas f m-tās kārtas nulle tad un tikai tad, ja šo funkciju var uzrakstīt formā $f(z) = (z-a)^m h(z)$, kur h analītiska funkcija punkta a un $h(a) \neq 0$ apkārtnē.*

Analoģiski, punkts $z = \infty$ ir funkcijas f m-tās kārtas nulle tad un tikai tad, ja šo funkciju var uzrakstīt formā $f(z) = z^{-m}\psi(z)$, kur ψ analītiska funkcija punkta $z = \infty$ apkārtnē un $\psi(\infty) \neq 0$.

Piezīme 5.3. Asimptotiskā formula

$$f(z) \sim c_m (z-a)^m, \quad c_m \neq 0, \quad z \to a$$

ir nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai analītiskai punkta $a \neq \infty$ apkārtnē funkcijai punkts a būtu m-tās kārtas nulle.

Analoğiski, ja funkcija f ir analītiska punkta $z = \infty$ apkārtnē, tad tai šai punktā ir m-tās kārtas nulle tad un tikai tad, kad

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m}, \quad A \neq 0, \quad z \to \infty.$$

Teorēma 5.12. *Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska punkta $z = a$ apkārtnē un $f(a) = 0$. Tad eksistē tāda punkta a apkārtne, ka vai nu $f(z) \equiv 0$ šai apkārtnē vai funkcijai f nav citu no a atšķirīgu nuļļu šai apkārtnē.*

Pierādījums. Iespējami divi gadījumi. Pirmajā gadījumā visi Teilora rindas koeficienti punkta a apkārtnē vienādi ar nulli un tātad $f(z) \equiv 0$ punkta a apkārtnē.

Otrajā gadījumā eksistē skaitlis $m \geq 1$, ka $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, bet $c_m \neq 0$. Šajā gadījumā punkts a ir funkcijas f m-tās kārtas nulle un saskaņa ar Teorēmu 5.11 $f(z) = (z-a)^m h(z)$, kur h analītiska funkcija punkta $z = a$ apkārtnē un $h(a) \neq 0$. Funkcijas h nepārtrauktības dēļ seko, ka $h(z) \neq 0$, ja $z \neq a$ pietiekoši mazā punkta a apkārtnē. Līdz ar to eksistē tāda punkta a apkārtne, kurā nav citu no a atšķirīgu funkcijas f nuļļu. Seko analītiskas funkcijas f nulles ir izolētas. □

5.11 Unitātes teorēma

Lemma 5.1. *Pieņemam, ka funkcija $f \colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska apgabalā $G \subset \mathbb{C}$, un pieņemam, ka eksistē tāda konverğenta punktu virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_k \neq z_m$, ja $k \neq m$, $z_n \in G$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, $a \in G$ un $f(z_n) = 0$. Tad $f(z) \equiv 0$ apgabalā G.*

Pierādījums. No funkcijas f nepātrauktības apgabalā G izriet, ka

$$0 = \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to+\infty} z_n) = f(a)$$

un tātad $f(a) = 0$. Izvirzam analītisku funkciju f Teilora rindā pēc $z-a$ pakāpēm

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

Rinda konverğē riņķī $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho_0\}$, kur ρ_0 ir attālums no punkta a līdz apgabala G robežai. Parādam, ka visi šīs rindas koeficienti vienādi ar nulli. Pieņemam pretējo. Tad saskaņā ar Teorēmu 5.12 eksistē tāda punkta a apkārtne U, ka $f(z) \neq 0$, ja $z \in U$ un $z \neq a$. Bet tas ir pretrunā ar teorēmas nosacījumiem. Seko visi funkcijas f Teilora rindas koeficienti c_k vienādi ar nulli. Tā kā rinda konverģē riņķī $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \rho_0\}$, kur ρ_0 ir attālums no punkta a līdz apgabala G robežai, tad arī $f(z) \equiv 0$ riņķī D.

Pieņemam, ka $b \in G$ patvaļīgs apgabala G punkts. Parādīsim, ka $f(b) = 0$. Savienojam punktus a un b ar iztaisnojamu līniju $\gamma \subset G$. Pieņemam, ka ρ ir attālums starp līniju γ un apgabala G robežu ∂G. Tā kā γ ir kompakts, tad $\rho > 0$. Saskaņā ar Lemmu 2.1 līniju γ var pārklāt ar galīgu rādiusa $\rho/2$ riņķu saimi $\{D_k\}_{k=0,1,\ldots,n}$ tā, lai $\gamma \subset \cup_{k=0}^{n} \overline{D}_k \subset G$ un riņķa D_k centrs $z_k \in D_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Tā kā $\rho_0 \geq \rho$, tad riņķis D satur riņķi D_0, seko $f(z) \equiv 0$ riņķī D_0. Bez tam riņķa D_1 centrs z_1 atrodas riņķī D_0, tātad $f(z_1) = 0$. Izvirzām funkciju f Teilora rindā pēc $z - z_1$ pakāpēm. Tā kā riņķis D_1 atrodas apgabalā G, tad šī rinda konverģē riņķī D_1. Arī riņķa D_1 centrs z_1 atrodas riņķī D_0, seko $f(z) \equiv 0$ punkta z_1 apkārtnē un, atkārtojot tos pašus spriedumus kā iepriekš, varam pierādīt, ka $f(z) \equiv 0$ riņķī D_1. Turpinot šos spriedumus iegūstam, ka funkcija f identiska nullei visos riņķos D_k. Seko $f(b) = 0$. Lemma pierādīta. □

Sekas 5.7. *Ja funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un funkcijas f sašaurinājums $f|_E\colon E \to \mathbb{C}$ ir identiski vienāds ar nulli apgabala G apakškopā $E \subset G$ un punkts $a \in E$ ir kopas E akumulācijas punkts. Tad arī $f(z) \equiv 0$ apgabalā G.*

Pierādījums. Saskaņā ar akumulācijas punkta definīciju eksistē punktu virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tāda, ka $z_n \in E$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Tā kā $f(z_n) = 0$ visiem n un $z_n \in G$, tad saskaņā ar unitātes teorēmu $f(z) \equiv 0$. □

Pierādam *Vitāli*[9] *teorēmu*.

Teorēma 5.13. *Ja divas funkcijas $f,g\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiskas apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un sakrīt kopā $E \subset G$, kurai ir akumulācijas punkts $a \in G$, tad $f(z) \equiv g(z)$ apgabalā G.*

Pierādījums. Funkcija h, kur $h(z) = f(z) - g(z)$ ir analītiska apgabalā G un $h(z) \equiv 0$, ja $z \in E$. Saskaņā ar iepriekšējām sekām $h(z) \equiv 0$ apgabalā G. Tāpēc $f(z) \equiv g(z)$, ja $z \in G$. □

[9] Giuseppe Vitali, ⋆1875.26.VIII, Ravenna, Itālija, †1932.29.II, Boloņa, Itālija

Piezīme 5.4. Apskatām funkciju $z \mapsto f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Tad $f(z_n) = 0$, ja $z_n = \frac{1}{\pi n}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ un $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Lai gan $f(z) \not\equiv 0$ dotais piemērs nav pretrunā ar unitātes teorēmu, jo virknes $\{z_n\}$ akumulācijas punktā $a = 0$ funkcija f nav analītiska.

Unitātes teorēma, Vitāli teorēma un sekas paliek spēkā gadījumā ja G ir paplašinātās kompleksās plaknes $\overline{\mathbb{C}}$ apgabals.

Bieži izmanto sekojošu unitātes teorēmas variantu.

Sekas 5.8. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir analītiska apgabalā G un $f(z) \equiv 0$, ja $z \in \gamma \subset G$ vai ja $z \in D \subset G$, kur γ – līnija un D – riņķis. Tad $f(z) \equiv 0$ apgabalā G.*

Unitātes teorēma ir viena no svarīgākajām analītisku funkciju īpašībām un parāda cik stipri atšķiras diferencējamas kompleksā mainīgā funkcijas no diferencējamam reālā mainīga funkcijām. Piemēram, pieņemam, ka reāla mainīgā funkcija funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ ir k reizes, $k \in \mathbb{N}$ vai pat bezgalīgi daudz reižu nepārtraukti diferencējama intervalā $I \subset \mathbb{R}$. Pieņemam, ka $I_1 \subset I$ un funkcija $g\colon I_1 \to \mathbb{R}$ ir ar tām pašam diferencējamības īpašībām kā f. Tad eksistē bezgalīgi daudz funkciju f, kurai ir tās pašas diferencējamības īpašības, ja $x \in I$ un $f = g$, ja $x \in I_1$.

Nodaļa 6
Lorāna rinda un vienvērtīga rakstura singulārie punkti

Dotā nodaļa veltīta vienvērtīgas analītiskas funkcijas izpētei izolēta singulāra punkta apkārtnē. Tā ne tikai pilnīgāk tiek izpētītas analītiskas funkcijas īpašības, bet arī atrasti kompleksā mainīgā funkcijas praktiskie lietojumi. Izšķiroša loma analītisku funkciju izpētē izolēta vienvērtīga singulāra punkta apkārtnē ir Lorāna rindai.

6.1 Lorāna rinda

Definīcija 6.1. Funkciju rindu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{6.1}$$

kur $a, c_n \in \mathbb{C}$, sauc par *Lorāna*[1] *rindu.*

Summācija notiek kā pa nenegatīviem indeksiem, tā arī pa negatīviem indeksiem. Parasto pakāpju rindu var uzskatīt kā Lorāna rindu, kurai visi koeficienti ar negatīviem indeksiem vienādi ar nulli.

Saka ka rinda (6.1) konverğē punktā $z \in \mathbb{C}$, ja šajā punktā konverğē rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{6.2}$$

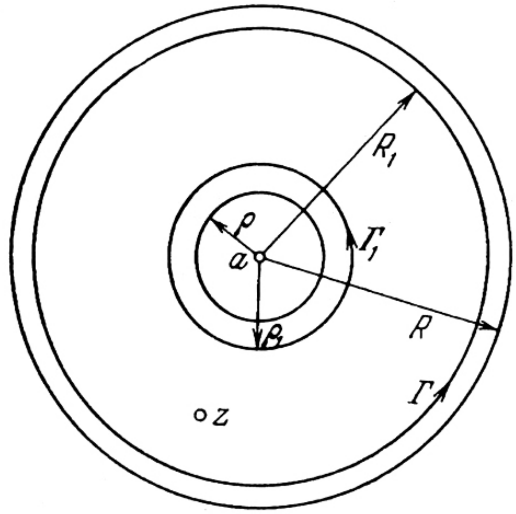
un rinda

[1] Pierre Alphonse Laurent, ⋆1813.18.VII, Parīze, Francija, †1854.2.IX, Parīze, Francija; franču matemātiķis un inženieris. Pateicoties viņa projektam La Havre kļuva par galveno Francijas jūras ostu.

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{6.3}$$

Rindas (6.1) summa ir rindu (6.2) un (6.3) summa.

Zīm. 6.1 Konverğences gredzens



Funkciju rinda (6.2) ir pakāpju rinda un tās konverğences apgabals ir riņķis ar centru punktā $z = a$ un konverğences rādiusu R (ja $R = 0$, tad rinda konverğē tikai punktā $z = a$, bet ja $R = \infty$, tad rinda konverğē visā kompleksā plaknē $\mathbb{C}$). Lai atrastu rindas (6.3) konverğences apgabalu ievedam jaunu mainīgo $t = (z-a)^{-1}$. Iegūstam pakāpju rindu $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n$, kuras konverğences apgabals ir riņķis $|t| < \alpha$. Seko, rinda (6.3) konverğē, ja $|z-a| > \rho$, kur $\rho = \alpha^{-1}$. Ja izpildās nosacījums

$$\rho < R,$$

tad rindām (6.2) un (6.3) ir kopīgs konverğences apgabals

$$\rho < |z-a| < R,$$

t.i. gredzens ar centru punktā $z = a$.

Katrā punktā, kas atrodas ārpus gredzena, Lorāna rinda (6.1) diverğē, jo diverğē vai nu rinda (6.2) vai rinda (6.3). Gredzena robežpunktos rinda (6.1) vai nu konverğē vai arī diverğē. Ja $\rho > R$, tad rindām

(6.2) un (6.3) nav kopīga konverğences apgabala un tāpēc rinda (6.1) diverğē visā kompleksā plaknē.

Pakāpju rindu (6.2) sauc par *Lorāna rindas* (6.1) *regulāro daļu*, bet rindu (6.3) par *Lorāna rindas* (6.1) *galveno daļu*.

Piezīme 6.1. No Ābela teorēmas seko, ka jebkurā slēgtā gredzenā $\rho < \rho_1 \leq |z-a| \leq R_1 < R$ rinda konverğē vienmērīgi un tādēļ saskaņā ar Veierštrāsa teorēmu rindas summa ir analītiska funkcija gredzenā.

Formulā (6.1) ir pieņemts, ka $a \neq \infty$. Lietojumos ir arī nepieciešams apskatīt Lorāna rindas, kuras izvrzītas bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ apkārtnē.

Definīcija 6.2. Funkciju rindu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n, \tag{6.4}$$

kura konverğē bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ gredzenveida apkārtnē, sauc par *Lorāna rindu bezgalīgi tālā punkta* $z = \infty$ apkārtnē.

Rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

sauc par *Lorāna rindas galveno daļu punkta* $z = \infty$ *apkārtnē*, bet rindu

$$\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n.$$

par *Lorāna rindas regulāro daļu punkta* $z = \infty$ *apkārtnē*.

Atzīmēsim, ka Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z = a$ apkārtnē (galīga punkta vai bezgalīgi tāla punkta) ir to Lorāna rindas locekļu, kuri tiecas uz bezgalību ja $z \to a$, summa.

6.2 Analītiskas funkcijas izvirzīšana Lorāna rindā

Tālāk dabiski izvirzās jautājums vai jebkuru analītisku funkciju gredzenā var izvirzīt konverğentā Lorāna rindā. Atbildi dod sekojoša teorēma.

Teorēma 6.1. *Jebkuru gredzenā*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \rho < |z-a| < R\}$$

analītisku funkciju $f\colon D \to \mathbb{C}$ *var izvirzīt konverğentā Lorāna rindā*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kur

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta-a|=R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad 0 \le \rho < R_0 < R, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

Pierādījums. Apskatām jaunu gredzenu

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z-a| < R_1\},$$

kur $0 \le \rho < \rho_1 < R_1 < R$. Apzīmējam ar γ un γ_1 gredzena D_1 ārējo un iekšējo robežu. Pieņemam, ka $z \in D_1$ ir patvaļīgs apgabala D_1 iekšējais punkts. Saskaņā ar Košī integrālo formulu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Integrācijas virziens abos integrāļos ir pretējs pulksteņa rādītā virzienam. Ievērosim, ka

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kur

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Pārveidojot otrā integrāļa zemintegrāļa izteiksmi, iegūstam

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - a - (\zeta - a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}}.$$

Ja $\zeta \in \gamma_1$, tad

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| = \frac{\rho_1}{|z - a|} = q < 1$$

un tātad saskaņā ar Veierštrāsa kritēriju rinda vienmērīgi konverģē pēc $\zeta \in \gamma_1$ visiem $z \in D_1$. Tā kā funkcija f nepārtraukta uz γ_1, tad tā ir ierobežota uz γ_1. No šejienes seko, ka rinda

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}$$

vienmērīgi konverģē pēc ζ uz riņķa līnijas γ_1. Integrējot rindu pa locekļiem un ievietojot $k + 1 = -n$, iegūstam

$$-\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - a)^n,$$

kur

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

Līdz ar to esam ieguvuši funkcijas f izvirzījumu Lorāna rindā.

Saskaņā ar Košī integrālās teorēmas sekām, formulās par integrācijas kontūru var ņemt jebkuru slēgtu iztaisnojamu līniju homotopu riņķa līnijai $|\zeta - a| = R_0$, kur $\rho_1 < R_0 < R_1$.

Tā kā ρ_1 var ņemt pēc patikas tuvu ρ un R_1 tuvu R, tad iegūtā rinda konverģē visā gredzenā D. □

6.3 Lorāna rindas unitāte

Teorēma 6.2. *Analītiskas funkcijas $f\colon D \to \mathbb{C}$ izvirzījums Lorāna rindā gredzenā*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \rho < |z - a| < R\}$$

ir viens vienīgs.

Pierādījums. Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska gredzenā D un tai gredzenā ir divi izvirzījumu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n.$$

Pareizinām rindas ar $(z-a)^{-m-1}$, kur m fiksēts vesels skaitlis. Iegūstam

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^{n-m-1}.$$

Tā kā rindas vienmērīgi konverģē uz riņķa līnijas $|z-a| = R_0$, $0 \leq \rho < R_0 < R$, tad integrējot rindu pa locekļiem pa doto riņķa līniju un ievērojot, ka pie $k \in \mathbb{Z}$

$$\oint\limits_{|z-a|=R_0} (z-a)^k \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi \mathrm{i}, & k = -1, \end{cases}$$

iegūstam $c_m = \tilde{c}_m$ katram $m \in \mathbb{Z}$. $\square$

Citiem vārdiem Lorāna rindas koeficienti nav atkarīgi no to iegūšanas veida.

Piemērs 6.1. Funkcija

$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

ir analītiska apgabalos $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ un $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$. Atrodam funkcijas f Lorāna rindas šajos apgabalos. Sadalām funkciju f parciāldaļās

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right).$$

Ja $|z| < 1$, tad

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

un ja $|z| > 1$, tad

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n.$$

Analoģiski riņķī $|z| < 2$ iegūstam izvirzījumu

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},$$

un ja $|z| > 2$, tad

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n.$$

Apgabalā $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ funkcijas f izvirzījums Lorāna rindā ir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Šajā gadījumā rinda ir Teilora rinda.

Apgabalā $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ funkcijas f izvirzījums Lorāna rindā ir sekojošs:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{3}\right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n.$$

Šī rinda satur kā pozitīvās, tā negatīvās z pakāpes.

Apgabalā $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$ funkcijas f izvirzījums Lorāna rindā satur tikai negatīvās z pakāpes

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

□

Piezīme 6.2. Atzīmēsim vēl Lorāna rindas sakaru ar Furjē[2] rindu. Pieņemam, ka funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ ir analītiska gredzenā

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z| < R, 0 \le \rho < 1 < R\},$$

kurš satur vienības riņķa līniju $|z| = 1$. Tad atbilstošā Lorāna rinda ir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

---

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier, ⋆1768.21.III, Auxerre, Francija, †1830.16.V, Parīze, Francija; franču matemātiķis, ierēdnis un eģiptiologs, bija Napoleona zinātniskais padomnieks Ēgiptes ekspedīcijas laikā. 1809. gadā Napoleons viņam drēbnieka dēlam piešķīra barona titulu

Ievietojam $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ un iegūstam funkcijas F izvirzījumu Furjē rindā

$$F(\varphi) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{6.6}$$

Un otrādi, ja funkcija F ir formā

$$F(\varphi) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}),$$

kur f ir analītiska funkcija gredzenā D, tad rinda (6.6) ir funkcijas F Furjē rinda. □

6.4 Košī nevienādība Lorāna rindas koeficientiem

Teorēma 6.3. *Pieņemam, ka funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ ir analītiska gredzenā*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho < |z - a| < R\}.$$

Tad funkcijas f Lorāna rindas

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

koeficienti gredzenā D apmierina nevienādības

$$|c_n| \leq \frac{M(R_0)}{R_0^n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.7}$$

kur $M(R_0) = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$ un $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R_0,\ 0 \leq \rho < R_0 < R\}$.

Nevienādības (6.7) sauc par *Lorāna rindas koeficientu Košī nevienādībām*.

Pierādījums. Saskaņā ar formulu (6.5), iegūstam novērtējumu

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|\zeta - a| = R_0} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| 2\pi R_0 = \frac{M(R_0)}{R_0^n}.$$

□

6.5 Vienvērtīga rakstura singulāro punktu klasifikācija

Tālāk definēsim un klasificēsim analītiskas funkcijas f vienvērtīga rakstura singulāros punktus $z = a$ gadījumos, kad $a \neq \infty$ un $a = \infty$.

Definīcija 6.3. Punktu $z = a$ ($a \neq \infty$) sauc sauc par funkcijas $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \rho\},$$
vienvērtīga rakstura izolētu singulāru punktu, ja funkcija f ir analītiska gredzenā D.

Gredzenu $0 < |z-a| < \rho$, tas ir riņķi $|z-a| < \rho$ bez riņķa centra $z = a$, dažreiz arī sauc par *punkta* $z = a$ *gredzenveida apkārtni*.

Definīcija 6.4. Bezgalīgi tālo punktu $z = \infty$ sauc par funkcijas $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z| < \infty\},$$
vienvērtīga rakstura izolētu singulāru punktu, ja funkcija f ir analītiska apgabalā D.

Atkarībā no funkcijas f izturēšanās punkta $z = a$ apkārtnē izšķir trīs vienvērtīga rakstura izolētu singulāro punktu tipus.

Definīcija 6.5. Funkcijas f vienvērtīga rakstura izolētu singulāru punktu $z = a$ gadījumos, kad $a \neq \infty$ un $a = \infty$, sauc par

- *novēršamu singulāru punktu*, ja eksistē galīga robeža
$$\lim_{z \to a} f(z) = A \neq \infty;$$
- *polu*, ja
$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$
- *būtiski singulāru punktu*, ja neeksitē robeža
$$\lim_{z \to a} f(z).$$

Doto definīciju ilustrēsim ar vairākiem piemēriem.

Piemērs 6.2. Analītiskai funkcijai $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$$

un

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$$

punkts $z = 0$ ir novēršams singulārs punkts, jo

$$\lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{z - z + \frac{z^3}{3!} + o(z^3)}{z^3} = \frac{1}{6}.$$

Savukārt bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir būtiski singulārs punkts. Tiešām, ja $z = x$, tad

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x^3} = 0,$$

bet ja $z = \mathrm{i}y$, tad

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\mathrm{i}y - \sin \mathrm{i}y}{(\mathrm{i}y)^3} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\sinh y - y}{y^3} = +\infty.$$

Pēdējās divas robežas nozīmē, ka neeksistē $\lim_{z \to \infty} f(z)$.

Piemērs 6.3. Daļveida lineārai funkcijai f, kur

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

punkts $z = -1$ ir pols, jo

$$\lim_{z \to -1} \frac{z}{z+1} = \infty,$$

bet bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir novēršams singulārais punkts

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z}{z+1} = 1.$$

Piemērs 6.4. Bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir funkcijas $z \mapsto \exp z$ būtiski singulārais punkts, jo eksponentfunkcija ir analītiska visā kompleksā plaknē $\mathbb{C}$, bet ja $z = x$, tad

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Pēdējās divas robežas nozīmē, ka neeksistē $\lim_{z \to \infty} \mathrm{e}^z$.

Analoģiski bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir funkciju $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$, $z \mapsto \sinh z$ un $z \mapsto \cosh z$ būtiski singulārais punkts.

Savukārt n-tās kārtas polinomomam bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir pols.

Piemērs 6.5. Analītiskai funkcijai $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$$

un

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}$$

punkts $z = 0$ ir būtiski singulārs punkts, jo ja $z = x$, tad

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

un ja $z = \mathrm{i}y$, tad

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Savukārt bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir novēršams singulārais punkts jo

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}} = 1.$$

6.6 Lorāna rinda singulārā punkta apkārtnē

Piemērs 6.6. Apskatām funkciju

$$z \mapsto z^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}.$$

kur $0 < |z| < \infty$. Atbilstošā Lorāna rinda ir sekojoša

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots\right) \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!z^n}. \end{aligned}$$

Lorāna rindas regulārā daļa punkta $z = 0$ apkārtnē ir

$$f_2(z) = z^2 + z + \frac{1}{2}$$

bet Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z=0$ apkārtnē ir

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!z^n}.$$

Tā kā dotā Lorāna rinda konverğē bezgalīgi tālā punkta $z=\infty$ apkārtnē, tad Lorāna rindas galvenā daļa bezgalīgi tālā punkta $z=\infty$ apkārtnē ir

$$f_1(z)=z^2+z$$

bet Lorāna rindas regulārā daļa bezgalīgi tālā punkta $z=\infty$ apkārtnē ir

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!z^n}.$$

Piemērs 6.7. Apskatam funkciju

$$z\mapsto\cos\frac{z}{z-1}$$

punkta $z=1$ apkārtnē. Nedaudz pārveidojam

$$f(z)=\cos\frac{z}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos1\cdot\cos\frac{1}{z-1}-\sin1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

un izlietojam zināmos funkciju $z\mapsto\sin z$ un $z\mapsto\cos z$ izvirzījumus. Iegūstam Lorāna rindu punkta $z=1$ apkārtnē

$$f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos1}{(2n)!(z-1)^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}.$$

Piemērs 6.8. Atrast funkcijas

$$z\mapsto z^2\cos\frac{z}{z-1}$$

Lorāna rindas regulāro daļu f_2 punkta $z=1$ apkārtnē. Izvirzām funkciju $z\mapsto z^2$ Teilora rindā pēc z_1 pakāpēm. Seko

$$z^2=((z-1)+1)^2=(z-1)^2+2(z-1)+1.$$

Izmantojot iepriekšējā piemēra izvirzījumu, iegūstam

$$f_2(z) = \cos 1(z+1)^2 + (2\cos 1 - \sin 1)(z+1) + \frac{\cos 1}{2} - 2\sin 1.$$

6.7 Novēršamais singulārais punkts

Teorēma 6.4. *Pieņemam, ka $z = a$, $a \neq \infty$ ir analītiskas funkcijas f izolēts singulārais punkts. Sekojošie trīs apgalvojumi ir ekvivalenti:*

(i) *punkts $z = a$ ir funkcijas f novēršams singulārais punkts;*
(ii) *funkcija f mazā punkta $z = a$ gredzenveida apkārtnē ir ierobežota;*
(iii) *funkcijas f Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z = a$ apkārtnē ir vienāda ar nulli.*

Pierādījums. Pieņemam, ka izpildās nosacījums (i), t.i. punkts $z = a$ ir funkcijas f novēršams singulārais punkts. Saskaņā ar novēršama singulāra punkta definīciju eksistē galīga robeža

$$\lim_{z\to a} f(z) = A \neq \infty, \tag{6.8}$$

vai citiem vārdiem katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\rho > 0$ tāds, ka visiem $0 < |z-a| < \rho$ izpildās nevienādība $|f(z) - A| < \varepsilon$. Seko

$$|f(z)| \leq |f(z) - A| + |A| < \varepsilon + |A| = M, \tag{6.9}$$

tātad funkcija f ir ierobežota kādā punkta $z = a$ gredzenveida apkārtnē, t.i. izpildās nosacījums (ii).

Tālāk pierādām, ka no nosacījuma (ii) seko nosacījums (iii). Ja $0 < \rho_1 < \rho$, tad izlietojot (6.9), saskaņā ar Košī nevienādībām Lorāna rindas koeficientiem, iegūstam

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho_1^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tā kā pēdejās nevienādībās skaitli $\rho_1 > 0$ var ņemt pēc patikas mazu un koeficienti c_n nav atkarīgi no ρ_1, tad $c_n = 0$, ja $n = -1, -2, \ldots$. Citiem vārdiem Lorāna rindas galvenā daļa funkcijai f punkta $z = a$ apkārtnē identiski vienāda ar nulli.

Un beidzot pierādam, ka no nosacījuma (iii) seko nosacījums (i). Ja funkcijas f punkta $z = a$ apkārtnē Lorāna rindas galvenā daļa vienāda ar nulli, tad

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

un dotā pakāpju rinda konverģē gredzenā $0 < |z-a| < \rho$. Bet pakāpju rinda saskaņā ar Ābela teorēmu konverģe visā riņķī $|z-a| < \rho$ un definē nepārtrauktu funkciju. Seko eksistē robeža $\lim_{z\to a} f(z) = c_0$, t.i. punkts $z = a$ ir novēršams singulārs punkts. □

Piezīme 6.3. Teorēma 6.4 paliek spēkā gadījumā, ja singulārais punkts ir bezgalīgi tālais punkts $a = \infty$. Šajā gadījumā punkta $z = \infty$ gredzenveida apkārtne ir $R < |z| < +\infty$. Izmantojot Košī nevienādības Lorāna rindas koeficientiem iegūstam, ka $c_n = 0$, ja $n \in \mathbb{N}$, tas ir Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z = \infty$ apkārtnē ir identiski vienāda ar nulli.

6.8 Pols

Teorēma 6.5. *Pieņemam, ka $z = a$, $a \neq \infty$ ir analītiskas funkcijas f pols. Sekojošie trīs apgalvojumi ir ekvivalenti:*

(i) *punkts $z = a$ ir funkcijas f pols;*
(ii) *funkcija f mazā punkta $z = a$ gredzenveida apkārtnē ir formā*

$$f(z) = (z-a)^{-m}\psi(z), \quad \psi(a) \neq 0, \tag{6.10}$$

kur ψ analītiska funkcija punkta $z = a$ apkārtnē un $m \in \mathbb{N}$;
(iii) *funkcijas f Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z = a$ apkārtnē satur tikai galīga skaita locekļu.*

Naturālo skaitli m sauc par *pola kārtu*.

Pierādījums. Pieņemam, ka izpildās nosacījums (i), t.i. punkts $z = a$ ir analītiskas funkcijas f pols un tātad $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Tad pietiekoši mazā gredzenā $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \rho\}$ izpildās nevienādība

$$|f(z)| > 1. \tag{6.11}$$

Tālāk apskatām funkciju $z \mapsto g(z)$, kur $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Funkcija g ir analītiska gredzenā D, jo funkcija f ir analītiska un neanulējās gredzenā D. Seko, punkts $z = a$ ir funkcijas g izolēts singulārais punkts. No nevienādības (6.11) izriet, ka $|g(z)| < 1$ gredzenā D un no teorēmas 6.4 seko, ka $z = a$ ir novēršams singulārais punkts. Definējot

$$g(a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

iegūstam, ka funkcija g ir analītiska riņķi $|z-a| < \rho$ un punkts $z = a$ ir funkcijas g nulle.

Pieņemam, ka m ir funkcijas g nulles kārta. Tad $g(z) = (z-a)^m h(z)$, kur funkcija h ir analītiska punkta $z = a$ apkārtnē un $h(a) \neq 0$. No šejienes iegūstam

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m}\psi(z),$$

kur $\psi(z) = \dfrac{1}{h(z)}$ analītiska funkcija punkta $z = a$ apkārtnē un $\psi(a) = \dfrac{1}{h(a)} \neq 0$, t.i. izpildās nosacījums (ii).

Tālāk pierādām, ka no nosacījuma (ii) seko nosacījums (iii). Izvirzot funkciju ψ Teilora rindā punkta $z = a$ apkārtnē, iegūstam funkcijas f Lorāna rindu punkta $z = a$ apkārtnē

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots. \tag{6.12}$$

Tās galvenā daļa $f_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ satur tikai galīga skaita (ne vairāk kā m) locekļus, pie kam $c_{-m} \neq 0$, kur m ir pola kārta.

Un beidzot pierādam, ka no nosacījuma (iii) seko nosacījums (i). Ja funkcijas f punkta $z = a$ apkārtnē Lorāna rindas galvenā daļa satur galīga skaita locekļus, tad no vienādības (6.12) seko formula (6.10). Tā kā $\lim_{z\to a} \psi(z) = c_{-m} \neq 0$, tad

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} (z-a)^{-m}\psi(z) = \infty,$$

t.i. punkts $z = a$ ir pols. $\square$

Piezīme 6.4. Teorēma 6.5 paliek spēkā gadījumā, ja singulārais punkts ir bezgalīgi tālais punkts $a = \infty$. Šajā gadījumā punkta $z = \infty$ gredzenveida apkārtne ir $R < |z| < +\infty$. Analoģiski, ka galīga punkta gadījumā, punkts $z=\infty$ ir funkcijas $z\mapsto g(z)$, kur $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ nulle. Formula (6.10) tiek aizvietota ar formulu

$$f(z)=z^m h(z), \quad \lim_{z\to\infty} h(z)\neq 0,$$

kur funkcija h ir analītiska punktā $z=\infty$ apkārtnē, $m\in\mathbb{N}$ (m funkcijas f pola $z=\infty$ kārta). Lai pabeigtu teorēmas pierādījumu, izlietojam Teorēmu 5.11.

Piemērs 6.9. Apskatām funkciju f, kur

$$f(z)=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Punkti $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k=\pm1,\pm2,\dots$ ir pirmās kārtas poli, jo funkcija g, kur $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ir analītiska ja $z\neq 0$, bet punkti z_k ir tās pirmās kārtas nulles ($g'(z_k)\neq 0$). Savukārt punkts $z=0$ ir neizolēts singulārais punkts – polu $\{z_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ akumulācijas punkts. Punkts $z=\infty$ ir funkcijas f pirmās kārtas pols, jo $f(z)=zh(z)$ un

$$\lim_{z\to\infty} h(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{z}}{\sin(\frac{1}{z})}=1\neq 0.$$

Piemērs 6.10. Apskatām funkciju f, kur

$$f(z)=\frac{1}{(\mathrm{e}^z+1)^2}.$$

Punkti $z_k=(2k+1)\pi\mathrm{i}$, $k\in\mathbb{Z}$ ir otrās kārtas poli, jo funkcija $z\mapsto g(z)$, kur $g(z)=\frac{1}{f(z)}=(\mathrm{e}^z+1)^2$ ir analītiska, ja $z\in\mathbb{C}$ un punkti z_k ir tās otrās kārtas nulles ($g'(z_k)=0$, $g''(z_k)\neq 0$). Punkts $z=\infty$ ir neizolēts singulārais punkts – polu $\{z_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ akumulācijas punkts.

6.9 Būtiski singulārais punkts

Teorēma 6.6. *Lai izolēts singulārais punkts $z=a$ būtu funkcijas f būtiski singulārais punkts, nepieciešami un pietiekami, lai funkcijas f Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z=a$ apkārtnē saturētu bezgalīgi daudz locekļu.*

Pierādījums. Nepieciešamība. Pieņemsim, ka punkts $z = a$ ir būtiski singulārais punkts. Jāpierāda, ka Lorāna rindas galvenajā daļā punkta $z = a$ apkārtnē ir bezgalīgi daudz atšķirīgu no nulles koeficientu. Pieņemsim pretējo, ka Lorāna rindas galvenā daļa satur galīgu skaitu no nulles atšķirīgu koeficientu. Tad saskaņā ar Teorēmām 6.4 un 6.5 punkts $z = a$ ir vai nu novēršams singulārais punkts vai pols. Saskaņā ar šo punktu definīcijām iegūstam, ka $\lim_{z\to a} f(z) = A \neq \infty$ vai $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, kas ir pretrunā ar būtiski singulāra punkta definīciju, ka neeksistē $\lim_{z\to a} f(z)$.

Pietiekamība. Pieņemam, ka Lorāna rindas galvenajā daļā punkta $z = a$ apkārtnē ir sanumurējams skaits no nulles atšķirīgu koeficientu. Jāpierāda, ka punkts $z = a$ ir būtiski singulārs punkts. Pieņemsim pretējo, t.i., ka $\lim_{z\to a} f(z) = A$ eksistē. Ja $A \neq \infty$, saskaņā at Teorēmu 6.4 visi galvenās daļas koeficienti ir nulles, kas ir pretrunā ar doto. Ja $A = \infty$, tad saskaņā ar Teorēmu 6.5 Lorāna rindas galvenajā daļā atšķirīgi no nulles ir tikai galīgs skaits koeficientu, kas arī ir pretrunā ar doto. Teorēma ir pierādīta. □

Piemērs 6.11. Funkcijas $f\colon D \to \mathbb{C}$, kur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ un

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n},$$

singulārais punkts $z = 0$ ir būtiski singulārs punkts, jo Lorāna rindas galvenā daļā punkta $z = 0$ apkārtnē satur bezgalīgi daudz locekļu. Pie reizes atzīmēsim, ka punkts $z = \infty$ ir novēršams singulārais punkts, jo

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1.$$

Piemērs 6.12. Funkcijas $z \mapsto \cos z$ singulārais punkts $z = \infty$ ir būtiski singulārs, jo funkcijas Lorāna rindas galvenā daļa

$$f(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n!)}$$

punkta $z = \infty$ apkārtnē satur bezgalīgi daudz locekļu.

Funkcijas izturēšanos būtiski singulāra punkta apkārtnē ir sarežģīta. To raksturo *Sohocka*[3]*-Kazorati*[4]*-Veieršträsa teorēma*.

Teorēma 6.7. *Pieņemam, ka punkts $z = a$ ir funkcijas f būtiski singulārais punkts. Tad katram kompleksam skaitlim A (gadījums $A = \infty$ netiek izslēgts) eksistē tāda punktu virkne $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kura konverğē uz punktu $z = a$ un tāda, ka $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Pierādījums. Vispirms apskatām gadījumu, kad $A = \infty$. Ievērojam, ka funkcija f nav ierobežota nevienā punkta $z = a$ apkārtnē. Pretējā gadījumā saskaņā ar Teorēmu 6.4 punkts $z = a$ būtu novēršams singulārais punkts. No šejienes izriet, ka katram $n \in \mathbb{N}$ gredzenā $D_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \frac{1}{n}\}$ atradīsies tāds punkts z_n, ka $|f(z_n)| > n$, t.i. $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Apskatām gadījumu $A \neq \infty$. Ievērosim, ka ja katram $\varepsilon > 0$ un katram $\delta > 0$ eksistē punkts z_δ $(0 < |z_\delta - a| < \delta)$ tāds, ka $|f(z_\delta) - A| < \varepsilon$, tad teorēma būtu pierādīta. Atliktu ņemt $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pieņemam, ka šis nosacījums neizpildās. Tad eksistē $\varepsilon_0 >$ un $\delta_0 > 0$ tādi, ka visiem z, kuriem izpildās nevienādības $0 < |z-a| < \delta_0$ ir spēkā nevienādība

$$|f(z) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Apskatām funkciju g, kur

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

Tad iegūstam

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad 0 < |z-a| < \delta_0.$$

Tā kā $z = a$ ir izolēts funkcijas f singulārais punkts, tad punkts $z = a$ ir arī funkcijas g izolēts singulārais punkts ($g(z) \neq 0$ gredzenā $0 < |z-a| < \delta_0$).

Saskaņā ar Teorēmu 6.4 punkts a ir funkcijas g novēršams singulārais punkts un tātad eksistē robeža

$$\lim_{z\to a} g(z) = B.$$

[3] Yullian-Karl Vasilievich Sokhotsky, ⋆1842.2.II Varšava, Polija, †1927.14.XII, Ļeņingrada, PSRS (tagad St. Pēterburga, Krievija); krievu matemātiķis, profesors St. Pēterburgas univeristātē

[4] Felice Casorati, ⋆1835.17.XII Pāvija, Itālija, †1890.11.IX Casteggio, Itālija; itāļu matemātiķis, profesors Pāvijas universitātē

Bet tad iegūstam

$$f(z) = A + \frac{1}{g(z)}, \quad 0 < |z-a| < \delta_0,$$

un līdz ar to eksistē robeža $\lim_{z\to a} f(z)$ galīga, ja $B \neq 0$ un bezgalīga, ja $B = 0$. Citiem vārdiem punkts $z = a$ funkcijai f ir vai no novēršams singulārais punkts vai pols, kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu. □

Vēl precizāk funkcijas izturēšanos būtiski singulāra punkta apkārtnē raksturo *Pikāra*[5] *teorēma*.

Teorēma 6.8. *Funkcija f būtiski singulāra punkta apkārtnē pieņem jebkuru kompleksu vērtību, varbūt izņemot vienu, bezgalīgi daudz reižu.*

Pierādījumu skat. [6].

Vērtību, kuru funkcija f nepieņem būtiski singulāra punkta apkārtnē sauc par *izņēmuma vērtību*.

Piemērs 6.13. Eksponentfunkcijas $z \mapsto \mathrm{e}^z$ bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir būtiski singulārais punkts. Apskatām vienādojumu

$$\mathrm{e}^z = A, \quad A \neq 0.$$

Dotajam vienādojumam ir bezgala daudz atrisinājumu

$$z_k = \ln|A| + \mathrm{i}(\arg A + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

kuru akumulācijas punkts ir $z = \infty$. Seko jebkura punkta $z = \infty$ apkārtnē ir bezgala daudz punktu z_k, kur $\mathrm{e}^{z_k} = A$, $A \neq 0$. Vērtība $A = 0$ ir eksponentfunkcijas izņēmuma vērtība.

6.10 Liuvilla teorēma

Definīcija 6.6. Analītisku funkciju $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sauc par *veselu*, ja tās vienīgais singulārais punkts paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ ir bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$.

---

[5] Charles Emile Picard, ⋆1856.24.VII, Parīze, Francija, †1941.11.XII, Parīze, Francija; franču matemātiķis, profesors Parīzes universitātē

Izvirzam veselu funkciju $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Teilora rindā

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Pakāpju rinda konverğē visiem $z \in \mathbb{C}$ un ir arī funkcijas f Lorāna rinda punkta $z = \infty$ apkārtnē. Vienīgais singulārais punkts ir $z = \infty$ un konverğences rādiuss $R = \infty$. No Košī-Adamāra formulas seko, ka nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai analītiska funkcija f būtu vesela funkcija ir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Veselas funkcijas, kurām punkts $z = \infty$ ir būtiski singulārs punkts sauc par *veselām transcendentām funkcijām*. Piemēram, $z \mapsto \exp z$, $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$.

Ja vesela funkcija f ir konstante, tad bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ novēršams singulārais punkts un ja funkcija f ir n-tās kārtas polinoms, tad bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir n-tās kārtas pols. Pareizi ir arī apgrieztie apgalvojumi. Pierādām *Liuvilla*[6] *teorēmu*.

Teorēma 6.9. *Pieņemam, ka vesela funkcija*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

apgabalā $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_1\}$ *apmierina nevienādību*

$$|f(z)| < M|z|^n, \quad n \geq 0.$$

Tad f ir polinoms ar kārtu ne augstāku par n.

Pierādījums. Izlietojot Košī nevienādību Lorāna rindas koeficientiem, iegūstam novērtējumu veselas funkcijas izvirzījuma koeficientiem

$$|c_k| \leq \frac{MR^n}{R^k} = MR^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

[6] Joseph Lioville, ⋆1809.24.III, Saint-Omer, Francija, †1882.8.IX, Parīze, Francija; franču matemātiķis, profesors vairākās Parīzes universitātēs

gadījumā ja $R > R_1$. Ja $k > n$, tad seko, ka $c_k = 0$, jo R var būt pēc patikas liels, bet koeficienti nav atkarīgi no R. Seko, $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$, t.i. f ir polinoms ar kārtu ne augstāku par n. $\square$

Sekas 6.1. *Ja vesela funkcija $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir ierobežota visā kompleksajā plaknē, tad tā ir konstante, t.i. $f(z) \equiv const$.*

Plašāku funkciju klasi kā veselās funkcijas veido meromorfās funkcijas.

Definīcija 6.7. Funkcija f ir *meromorfa*, ja katrā kompleksās plaknes $\mathbb{C}$ ierobežotā apgabalā tā ir analītiska izņemot galīga skaita polu.

Visā kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$ meromorfai funkcijai var būt bezgalīgi daudz polu. Piemēram, $z \mapsto \tan z$. Racionāla funkcija ir meromorfa un tai paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ ir galīgs skaits polu. Pareizs ir arī apgrieztais apgalvojums.

Teorēma 6.10. *Meromorfa funkcija f, kurai paplašinātājā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ ir galīgs skaits polu $a_1, a_2, \ldots, a_s$ (arī punkts $z = \infty$ var būt pols), ir racionāla un to var uzdot formā*

$$f(z) = A + f_0(z) + \sum_{k=1}^{s} f_k(z), \tag{6.13}$$

kur $f_0(z)$ un $f_k(z)$ ir funkcijas f Lorāna rindas galvenās daļas atbilstoši punktu $z = \infty$ un $z = a_k$ apkārtnēs un

$$A = \lim_{z \to \infty} (f(z) - f_0(z)).$$

Pierādījums. Pieņemam, ka

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(z - a_k)^j}$$

un

$$f_0(z) = A_1 z + \ldots + A_m z^m$$

ir funkcijas f Lorāna rindu galvenās daļas punktos $z = a_k$ un $z = \infty$ attiecīgi. Tad funkcija g, kur

$$g(z) = f(z) - f_0(z) - \sum_{k=1}^{s} f_k(z)$$

ir analītiska visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ un seko, $g(z) = A = const$. Tā kā $\lim_{z\to\infty} f_k(z) = 0$, kur $k = 1,2,\ldots,s$, tad arī $A = \lim_{z\to\infty}(f(z) - f_0(z))$. $\square$

Piezīme 6.5. Formula (6.13) reālā mainīgā funkciju teorijā ir pazīstama ar nosaukumu par racionālās funkcijas sadalīšanu vienkāršās parciāldaļās.

Vēl atzīmēsim sakaru starp veselām un meromorfām funkcijām.

Teorēma 6.11. *Katra meromorfa funkcija f ir izsakāma kā divu veselu funkciju dalījums, pie kam skaitītājam ir tās pašas nulles kā funkcijai f, bet saucējam nulles sakrīt ar funkcijas f poliem.*

Pierādījumu skat. [6].

Meromorfam funkcijām ir pareiza sekojoša *Pikāra teorēma*.

Teorēma 6.12. *Meromorfa funkcija, kura nav konstante, pieņem visas kompleksās vērtības, varbūt izņemot divas.*

Pierādījumu skat. [6].

Tās vērtības ko meromorfās funkcija nepieņem, sauc par *Pikāra izņēmuma vērtībām*. Tā piemēram, funkcija $z \mapsto \tan z$ nepieņem divas vērtības i un $-$i, t.i. vienādojumam $\tan z = \pm$i nav atrisinājumu.

Nodaļa 7
Analītiskais turpinājums

7.1 Analītiskais turpinājums

Definīcija 7.1. Pieņemam, ka izpildīti sekojoši nosacījumi:

- funkcija f ir definēta kopā $E \subset D$;
- funkcija F ir analītiska apgabalā D un $E \subset D$;
- $F(z) = f(z)$, ja $z \in E$.

Tad funkciju F sauc par funkcijas f *analītisko turpinājumu*.

Pierādam analītiskā turpinājuma principu.

Teorēma 7.1. *Pieņemam, ka kopai E ir akumulācijas punkts $a \in D$. Tad analītiskais turpinājums no kopas E uz apgabalu D ir viens vienīgs.*

Pierādījums. Pieņemam, ka funkcijai f definētai kopā E ir divi analītiskie turpinājumi F_1 un F_2 apgabalā D. Tā kā $F_1(z) \equiv F_2(z)$, ja $z \in E$, tad saskaņā ar unitātes teorēmu $F_1(z) \equiv F_2(z)$ apgabalā D.

Gadījumā ja E ir līnija apgabalā D vai E ir D apakšapgabals, tad eksistē ne vairāk kā viens funkcijas f analītiskais turpinājums apgabalā D. $\square$

Piemērs 7.1. Atrodam analītisko turpinājumu funkcijai

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Dotā rinda konverģē un ir analītiska funkcija riņķī $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Rindu summējot atrodam $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, ja $|z| < 1$.

Funkcija $F\colon D \to \mathbb{C}$, kur $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ir analītiska apgabalā $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1\}$ un $F(z) = f(z)$, ja $|z| < 1$. Seko, funkcija F ir funkcijas f vienīgais analītiskais turpinājums no riņķa Λ uz apgabalu D.

7.2 Esponentfunkcijas, trigonometrisko un hiperbolisko funkciju analītiskais turpinājums

Eksponentfunkcija, trigonometriskās un hiperboliskās funkcijas kompleksiem skaitļiem tika jau definētas iepriekš. Parādam, ka šīs funkcijas var arī definēt kā atbilstošo reālā mainīgā funkciju analītisko turpinājumu uz komplekso plakni. Apskatām rindu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Dotā rinda konverğē visiem z, tāpēc tās summa f ir analītiska funkcija visiem $z \in \mathbb{C}$. Ja $z = x$, tad $f(x) = \mathrm{e}^x$. Seko f ir eksponentfunkcijas analītiskais turpinājums no reālās ass uz visu komplekso plakni.

Definīcija 7.2. Analītisku funkciju $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kuras definīcijas apgabals ir visa kompleksā plakne sauc par *veselu funkciju*.

Atzīmēsim, ka polinomi un eksponentfunkcija ir veselas funkcijas.

Teorēma 7.2. *Pieņemam, ka $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir veselas funkcijas. Tad $f \pm g$, $f \times g$, $f \circ g$ ir veselas funkcijas.*

Definēsim funkcijas sin, cos, sinh un cosh ar pakāpju rindām

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Tā kā dotās rindas konverğē visiem $|z| < \infty$, tad funkcijas sin, cos, sinh un cosh ir veselas. Bez tam šīs funkcijas ir funkciju $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sinh x$ un $x \mapsto \cosh x$ analītiskie turpinājumi no reālas ass uz komplekso plakni.

Funkcijas tan, cot, tanh un coth definējam ar formulu

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

palīdzību.

Funkcija tan ir analītiska visiem $z \neq \infty$, pie kuriem $\cos z \neq 0$, t.i. pie $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcija cot ir analītiska pie $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Savukārt funkcija tanh ir analītiska pie $z \neq \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ un funkcija coth ir analītiska pie $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.3 Pilnā analītiskā funkcija

Analītiskais turpinājums noved pie analītiskas funkcijas vispārinājuma – pie daudzvērtīgas analītiskās funkcijas.

Pieņemam, ka ir divi apgabali D_0 un D_1 un pieņemam, ka to šķēlums $D_0 \cap D_1 \neq 0$ nav tukšs un arī ir apgabals. Pieņemam, ka funkcijas $f_0 \colon D_0 \to \mathbb{C}$ un $f_1 \colon D_1 \to \mathbb{C}$ ir analītiskas apgabalos D_0 un D_1 atbilstoši un

$$f_0(z) = f_1(z), \quad z \in D_0 \cap D_1.$$

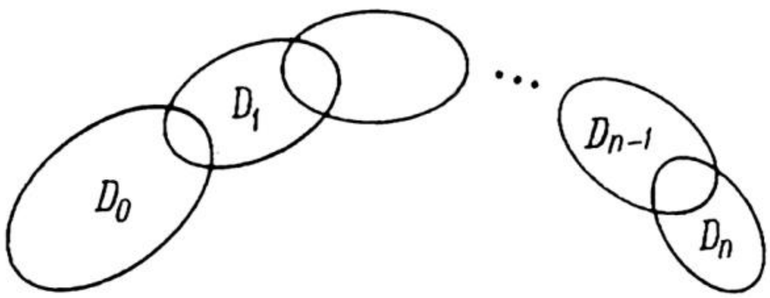
Tad funkciju f_1 ir funkcijas f_0 analītiskais turpinājums no apgabala D_0 uz apgabalu D_1. Šis analītiskais turpinājums saskaņā ar unitātes teorēmu ir viens vienīgs.

Pieņemam, ka mums ir tāda apgabalu $D_0, D_1, \ldots, D_n$ ķēde, ka visi šķēlumi $D_j \cap D_{j+1} \neq 0$, $0 \leq j \leq n-1$ ir apgabali. Pieņemam, ka eksistē funkcijas $f_0, f_1, \ldots, f_n$ tādas, ka katra nākošā funkcija f_{j+1} ir iepriekšējās funkcijas f_j analītiskais turpinājums no apgabala D_j uz apgabalu D_{j+1}. Tas nozīmē, ka funkcijas f_j ir analītiskas apgabalos D_j un $f_j(z) = f_{j+1}(z)$ ja $z \in D_j \cap D_{j+1}$.

Tad funkcija f_n ir funkcijas f_0 analītiskais turpinājums pa apgabalu ķēdi $D_0, D_1, \dots, D_n$. Šis turpinājums ir viens vienīgs.

Iegūtais analītisko funkciju kopums $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ definē funkciju F. Tās vērtības nosaka formula

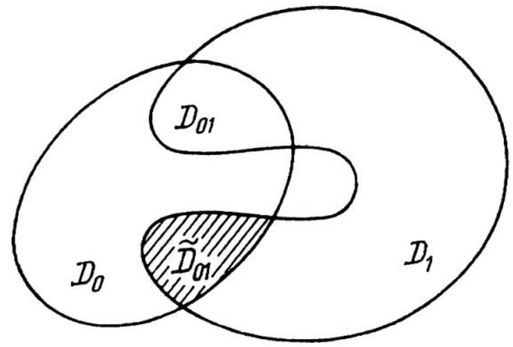
$$F(z) = f_j(z), \quad z \in D_j.$$



Zīm. 7.1 Analītiskais turpinājums

Atzīmēsim, ka var izrādīties, ka funkcija F vairs nav viennozīmīga. Tiešām apgabalu ķēde $D_0, D_1, \dots, D_n$ var noslēgties, tas ir apgabals D_0 var šķelties ar apgabalu D_n. Funkciju f_0 un f_n vērtībām šķēluma vispārīgā gadījumā nav jāsakrīt. Funkcijas F neviennozīmība var rasties jau pirmajā solī, ja šķēlums $D_0 \cap D_1$ sastāv no vairāk nekā viena apgabala.

Vispārīgi daudzvērtīga funkcija F ir "salīmēta" no vienvērtīgiem elementiem – analītiskām funkcijām $f_0, f_1, \dots, f_n$. Par *pilno analītisko funkciju F* sauc tādu elementu sistēmu, kurus iegūst no izejas elementa f_0 ar analītisko turpinājumu pa visām apgabalu virknēm, pa kurām turpināšana ir iespējama. Tādā veidā analītiska funkcija ir salīmēta no analītiskiem elementiem vai regulāriem zariem. Būtiski ir tas, ka pēc izejas elementa konstruē analītisko funkciju.



Zīm. 7.2 Analītiskais turpinājums

7.4 Analītiskais turpinājums pa līniju

Analītisko turpināšanu var izdarīt pa līniju. Par elementu punktā z_0 saucam funkciju f, kura ir analītiska kādā šī punkta apkārtnē. Divi elementi ir ekvivalenti, ja tie definēti vienā un tai pašā punktā un sakrīt kādā punkta apkārtnē. Ekvivalences attiecība ir refleksīva, simetriska un tranzitīva. Tālāk katru elementu apskatām ar precizitāti līdz ekvivalencei. Ievedīsim elementu analītiskā turpinājuma jēdzienu pa līniju.

Definīcija 7.3. Pieņemam, ka uz līnijas γ ir dota nepārtraukta funkcija $\varphi\colon \gamma \to \mathbb{C}$, katrā līknes γ punktā ζ dots elements f_ζ un šis elements sakrīt ar φ kādā līnijas γ lokā (vaļējā, ja ζ ir līnijas γ iekšējs punkts), kurš satur ζ.

Tad elementu f_{z_1} līnijas γ gala punktā z_1 sauc par līnijas γ sākuma punkta z_0 elementa f_{z_0} *analītisko turpinājumu pa līniju* γ.

Saka arī ka elements f_{z_0} *analītiski turpināts pa līniju* γ vai dotais elements atļauj to *analītiski turpināt*. pa līniju γ.

Piezīme 7.1. Funkcija, definēta uz līnijas γ ir viennozīmīga līnijas punkta funkcija. Ja līnija γ ir uzdota ar vienādojumu $z = \sigma(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, tad katram līnijas γ punktam $z_t = \sigma(t)$ atbilst viens skaitlis $\varphi(z_t)$ – funkcijas φ vērtība līnijas γ punktā z_t. Tomēr funkcijai φ, kā plaknes punkta z funkcijai nav jābūt viennozīmīgai, ja līnija γ pati sevi krusto.

Piezīme 7.2. Ja elementu f_{z_0} var analītiski turpināt pa līniju γ, tad to var analītiski turpināt pa kādu apgabalu ķēdi, kura pārklāj līniju γ. Tālāk, elementu f_{z_0} var analītiski turpināt pa jebkuru līniju γ', kura ir pietiekami tuvu līnijai γ un kurai ir tie paši gala punkti. Otrādi, ja doto elementu var analītiski turpināt pa apgabalu ķēdi, tad nav grūti pierādīt, ka to var turpināt pa jebkuru līniju, kura atrodās šajā ķēdē.

Teorēma 7.3. *Dotā elementa analītiskais turpinājums pa doto līniju ir viens vienīgs.*

Pierādījums. Pieņemsim, ka dota līnija

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \sigma(t),\ t \in [0,1]\}$$

un pieņemam, ka elementu f_0, kurš uzdots šīs līnijas sākuma punktā $z_0 = \sigma(0)$, var analītiski turpināt pa līniju γ. Tad katrā punktā $z_t = \sigma(t)$ ir uzdots elements f_t un nepārtraukta funkcija $\varphi\colon [0,1] \to \gamma$, kur $\varphi(t) = f_t(z_t)$. Pieņemam, ka dotais turpinājums nav viens vienīgs. Tad eksistē tāda elementu $\tilde{f}_t$ kopa līnijas γ punktos z_t, nepārtraukta funkcija $\tilde{\varphi}\colon [0,1] \to \gamma$, kur $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}_t(z_t)$, ka elementi f_1 un $\tilde{f}_1$ nav ekvivalenti līnijas gala punktā. Pierādīsim, ka $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)$, ja $t \in [0,1]$, līdz ar to pierādot teorēmu. Tiešām, elementi f_1 un $\tilde{f}_1$ sakrīt uz kādā līnijas γ loka, kurš satur punktu z_1, jo pēc definīcijas šie elementi sakrīt ar funkcijām φ un $\tilde{\varphi}$ atbilstoši uz kāda loka; pēc unitātes teorēmas šie elementi ir identiski vienādi kādā punkta z_1 apkārtnē.

Apzīmējam ar M kopu

$$M = \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)\}.$$

Kopa M satur nogriezni $[0,\delta]$, ja $\delta > 0$ pietiekoši mazs. Tiešām elementi f_0 un $\tilde{f}_0$ punktā z_0 ir ekvivalenti un tāpēc sakrīt kādā šī punkta apkārtnē, un tātad uz kāda līnijas γ loka

$$\tilde{\gamma} = \{z \in \gamma \mid z = \sigma(t),\ t \in [0,\delta]\}.$$

Pieņemsim, ka $M \neq [0,1]$. Tad eksistē $t^* > 0$ tāds, ka $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)$, ja $0 \le t \le t^*$, bet jebkurā punkta t^* apkārtnē ir punkti, kuri nepieder kopai M. No funkciju φ un $\tilde{\varphi}$ nepārtrauktības izriet, ka $\varphi(t^*) = \tilde{\varphi}(t^*)$, tā kā $t^* \in M$ un ja $t^* = 1$, tad teorēma ir pierādīta. Pieņemam, ka $t^* < 1$. Funkcijas φ un $\tilde{\varphi}$ sakrīt ja $t \le t^*$ pēc nosacījuma, elementi f_{t^*} un $\tilde{f}_{t^*}$ sakrīt ar funkcijām φ un $\tilde{\varphi}$ atbilstoši uz kāda līnijas γ loka, kurš satur punktu z_{t^*} saskaņā ar analītiskā turpinājuma definīciju. Seko, $f_{t^*}(z) = \tilde{f}_{t^*}(z)$ uz kāda loka $z = \sigma(t)$, $t^* - \alpha \le t \le t^*$ un saskaņā ar unitātes teorēmu šie elementi ir identiski vienādi kādā punkta z_{t^*} apkārtnē.

Tāpēc kopa M satur kādu nogriezni $[t^*, t^* + \alpha]$, kas ir pretrunā ar t^* definīciju. $\square$

Pieņemam, ka punktā z_0 dots elements f. Turpinām to analītiski pa visām līnijām ar sākuma punktu z_0, pa kurām tāds turpinājums ir iespējams. Iegūto elementu kopu sauc par *analītisko funkciju, kuru izveido elements* f, Visu šo līniju kopu sauca par *pieļaujamo līniju kopu*.

Doto analītiskās funkcijas definīciju ieveda K.Veierštrāss. Divas analītiskās funkcijas pēc definīcijas ir vienādas tad un tikai tad, ja to sākuma elementi ir ekvivalenti. Saskaņā ar Teorēmu 7.3 eksistē tikai viena analītiskā funkcija, ko izveido dotais elements. Šo elementu sauc arī par analītiskās funkcijas *kodolu*. Ekvivalentie elementi ģenerē vienu un to pašu analītisko funkciju. Pilnās analītiskās funkcijas F vērtību kopa punktā z sakrīt ar visu elementu vērtību kopu dotajā punktā.

Līdz šim apskatījām veidu, kā realizēt analītisko turpinājumu pa līniju. Dosim analītiskā turpinājuma algoritmu, kurš balstās uz pakāpju rindām. Apskatām rindu

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < R_0.$$

Dotā funkcija ir analītiska riņķī

$$\Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R_0\}$$

tā kā f_0 ir elements punktā a. Izvēlamies punktu $b \in \Lambda_0$ un izvirzām f_0 rindā pēc $z-b$ pakāpēm. Tad

$$(z-a)^n = ((z-b)+(b-a))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\Lambda} (b-a)^{n-k} (z-b)^k.$$

Ievietojot šo izteiksmi sākuma rindā un savelkot locekļus pie vienādām $z-b$ pakāpēm, iegūstam rindu

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n.$$

Pieņemam, ka jaunās rindas konverğences rādiuss ir R_1 un

$$\Lambda_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-b| < R_1\}$$

kur $R_1 \geq R_0 - |b-a|$, tā kā R_1 nav mazāks par attālumu no punkta b līdz riņķa Λ_0 robežai. Ja $R_1 = R_0 - |b-a|$, tad $\Lambda_1 \subset \Lambda_0$ un analītisko turpinājumu nevar iegūt. Pieņemam, ka $R_1 > R_0 - |b-a|$, tad riņķis Λ_1 neatrodas riņķī Λ_0. Saskaņā ar unitātes teorēmu

$$f_1(z) = f_2(z), \quad z \in \Lambda_0 \cap \Lambda_1.$$

Seko, rinda f_1 ir rindas f_0 analītiskais turpinājums no riņķa Λ_0 uz Λ_1.

Pieņemsim, ka eksistē elementu (pakāpju rindu) virkne $f_0, f_1, \ldots, f_n$ tāda, ka elements f_j ir elementa f_{j-1}, $j = 1,2,\ldots,n$, analītiskais turpinājums. Pieņemam, ka $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ ir rindu $f_0, f_1, \ldots, f_n$ konverģences riņķi ar centriem punktos $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Tad elements f_n ir elementa f_0 analītiskais turpinājums pa riņķu $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ ķēdi.

Tomēr analītiskais turpinājums ar pakāpju rindām ir mazefektīvs. Lai turpinātu konkrētas funkcijas ērtāk izmantot citus paņēmienus. Biežāk izmanto funkciju integrālo reprezentāciju.

7.5 Robežas singulārie punkti

Pieņemam, ka $f\colon D \to \mathbb{C}$ apgabalā $D \subset \mathbb{C}$ ir analītiska, apgabala robeža ∂D ir vienkārša iztaisnojama līnija un $\zeta \in \partial D$. Punktu ζ sauc par funkcijas f *singulāru punktu*, ja šo funkciju nevar analītiski turpināt pa līniju $\gamma \subset D$ un līnijas γ gala punkts ir ζ.

No šīs definīcijas un analītiskā turpinājuma definīcijas seko, ka iespēja analītiski turpināt funkciju f uz apgabala D robežpunktu nav atkarīga no līnijas γ izvēles.

Pierādīsim, ka ja izpildās nosacījums

$$\lim_{z \to \zeta, z \in \gamma} f^{(k)}(z) = \infty \tag{7.1}$$

pie kāda $k \geq 0$, tad punkts $\zeta \in \partial D$ ir funkcijas f singulārais punkts (ja $k = 0$, tad $f^{(0)} = f$). Tiešām, ja funkciju f var analītiski turpināt uz apgabala D robežpunktu ζ pa līniju γ, tad saskaņā ar analītiskā turpinājuma definīciju eksistē funkcija f_ζ, kura ir analītiska kādā riņķī

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\zeta| < \rho\}$$

un tāda, ka $f_\zeta(z) = f(z)$, ja $z \in \Lambda \cap \gamma$. No šejienes seko, ka jebkuram $k \geq 0$

$$\lim_{z \to \zeta, z \in \gamma} f^{(k)}(z) = f_\zeta^{(k)}(\zeta) \neq \infty,$$

kas ir pretunā ar pieņēmumu.

Apskatīsim jautājumu par singulāriem robežpunktiem gadījumā, kad D ir riņķis. Pierādīsim teorēmu

Teorēma 7.4. *Uz konverğences riņķa robežas atrodas vismaz viens pakāpju rindas*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

summas singulārais punkts.

Pierādījums. Pieņemam, ka $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ ir rindas konverğences riņķis, $0 < R < \infty$ un uz riņķa līnijas $\partial\Lambda$ nav funkcijas f singulārie punkti. Tad šo funkciju var analītiski turpināt katrā riņķa līnijas $\partial\Lambda$ punktā. Analītiskā turpinājuma rezultātu apzīmējam ar F un $F(z) = f(z)$, ja $z \in \Lambda$. Saskaņā ar analītiskā turpinājuma definīciju katram $\zeta \in \partial\Lambda$ ir riņķis Λ_ζ ar centru punktā ζ, kurā funkcija F ir analītiska. Tādejādi riņķa līnija $\partial\Lambda$ pārklāta ar bezgalīga skaita riņķiem, kuru centri atrodas uz $\partial\Lambda$.

Saskaņā ar Heines-Borela lemmu, no jebkura bezgalīga kompakta pārklājuma var izdalīt galīgu pārklājumu, t.i. eksistē tāda riņķu sistēma $\Lambda_{\zeta_1}, \Lambda_{\zeta_2}, \ldots, \Lambda_{\zeta_n}$, $\zeta_j \in \Lambda_{\zeta_j}$, ka katrs riņķa līnijas punkts $\zeta \in \partial\Lambda$ pieder vismaz vienam no šiem riņķiem. Pieņemam, ka z_j divu blakus riņķu Λ_{ζ_j} un $\Lambda_{\zeta_{j+1}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\Lambda_{\zeta_{n+1}} = \Lambda_{\zeta_1}$ ir krustpunkts, kurš nepieder riņķim Λ un $R_0 = \min_{1 \leq j\ n} |z_j - a|$. Tad funkcija F sakrīt ar f riņķī Λ, analītiska riņķī

$$\Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R_0,\ R_0 > R\}.$$

No šejienes seko, ka funkcija F riņķī ir konverğējoša pakāpju rinda un tās konverğences riņķa rādiuss ir lielāks par R, kas ir pretrunā ar sākuma pieņēmumu. $\square$

Piemērs 7.2. Rindas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

konverğences rādiuss. Uz konverğences riņķa robežas atrodas divi rindas summas

$$z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

singulārie punkti – i un −i.

Atzīmēsim, ka reālā mainīgā funkcija $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama uz reālās ass $\mathbb{R}$, tomēr rindas

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

konverğences rādiuss ir 1. Šīs parādības cēlonis kļūst skaidrs tikai pārejot uz komplekso plakni.

Sekas 7.1. *Pakāpju rindas konverğences rādiuss ir vienāds ar attālumu starp punktu a un tuvāko funkcijas f singulāro punktu.*

Šis secinājums daudzos gados ļauj efektīvi atrast rindas konverğences rādiusu neizmantojot Košī-Adamāra kritēriju.

Piemērs 7.3. Rinda

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$

konverğē visos vienības riņķa līnijas punktos, konverğences riņķa rādiuss arī ir 1. Rinda ir funkcijas $x \mapsto 1 + \frac{1-z}{z} \ln(1-z)$ Teilora rinda un punkts $z = 1$ ir logaritmiskais sazarojuma punkts.

Konstruēsim piemēru funkcijai, kurai katrs konverğences riņķa līnijas punkts ir singulārs.

Piemērs 7.4. Apskatām rindu

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}.$$

Rindas konverğences rādiuss ir 1. Vispirms parādīsim, ka punkts $z = 1$ ir funkcijas f singulārais punkts. Ņemsim par γ nogriezni $[0,1]$. Ja $z \in \gamma$, tad $z^{2^k} = x^{2^k} \to 1$, kad $z = x \to 1-0$, $k = 0,1,2,\dots$ un tātad ,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2^k} = \infty.$$

Seko, saskaņā ar formulu (7.1) punkts $z = 1$ ir funkcijas f singulārais punkts.

Tālāk no vienādības

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \left(\left(z^{2^n}\right)^2 + \left(z^{2^n}\right)^4 + \ldots \right)$$

iegūstam sekojošu funkcionālu sakarību priekš f

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f\left(z^{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tā ka'punkts $z = 1$ ir funkcijas f singulārais punkts, tad no pēdējās vienādības izriet, ka katram $n \in \mathbb{N}$ visi punkti, kuri apmierina nosacījumu

$$z^{2^n} = 1 \tag{7.2}$$

arī ir funkcijas f singulārie punkti. Bet visas vienādojuma (7.2) saknes izveido blīvu kopu uz vienības riņķa līnijas. No šejienes seko, ka visi vienības riņķa līnijas punkti ir funkcijas f singulārie punkti. Tiešām, ja kāds vienības riņķa līnijas punkts ζ nebūtu singulārs, tad eksistētu šo punktu saturošs vienības riņķa līnijas loks, kura visi punkti būtu nesingulāri. Bet tā ir pretruna ar mūsu pieņēmumu.

7.6 Logaritmiskā funkcija

Reālā mainīgā funkciju teorijā logaritmiskā funkcija $x \mapsto \ln x$ ir definēta tikai pozitīviem skaitļiem $x > 0$. Dabiski ir definēt logaritmisko funkciju kompleksiem skaitļiem z kā funkcijas $x \mapsto \ln x$ analītisko turpinājumu. Funkcija $x \mapsto \ln x$ ir izvirzāma Teilora rindā

$$\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x - 1)^n,$$

kura konverğē ja $0 < x < 2$. Apskatām šo rindu pie kompleksa z, t.i. apskatām funkciju

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n. \tag{7.3}$$

Rinda konverğē riņķī $\Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$, jo funkcija f_0 ir analītiska šajā riņķī un $f_0(x) = \ln x$, ja $0 < x < 2$. Seko funkcija f_0 ir viens vienīgais funkcijas $x \mapsto \ln x$ analītiskais turpinājums no intervala $0 < x < 2$ uz riņķi Λ_0.

Apzīmēsim ar ln analītisko funkciju, kuru ğenerē elements f_0 punktā $z = 1$.

Mūsu uzdevums ir noskaidrot pa kādiem elementiem ir iespējams analītiski turpināt elementu f_0 un iegūt efektīvas formulas logaritmiskās funkcijas aprēķināšanai. Analītisko turpinājumu ir iespējams iegūt ar pakāpju rindu palīdzību. Tomēr ērtāk izmantot logaritma integrālo reprezentāciju

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad 0 < t < \infty.$$

Pierādīsim, ka analoğiska integrālā reprezentācija ir pareiza arī izejas elementam f_0.

Lemma 7.1. *Riņķī* $\Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ *ir pareiza formula*

$$f_0(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}, \tag{7.4}$$

kur integrācijas ceļš jebkura līnija $\gamma \in \Lambda_0$.

Pierādījums. Funkcija f_0 (7.3) ir analītiska riņķī Λ_0. Arī integrālis vienādības (7.4) labajā pusē ir analītisks riņķī Λ_0, jo zemintegrāļa funkcija ir analītiska riņķī Λ_0. Ja $0 < x < 2$, tad integrālis ir vienāds ar $\ln x$, t.i. sakrīt ar rindu (7.3). Saskaņā ar unitātes teorēmu šis integrālis sakrīt ar rindu (7.3), ja $z \in \Lambda_0$. $\square$

Lemma 7.2. *Elementu* f_0 *var analītiski turpināt pa jebkuru līniju* γ, *kura sākās punktā* $z = 1$ *un neiet caur punktu* $z = 0$.

Pierādījums. Apzīmējam

$$w(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta},$$

kur integrācijas ceļš ir līnijas γ loks. Izvēlamies riņķi Λ ar centru punktā $z_0 \in \gamma$, kurš nesatur punktu $z = 0$ un definējam f punktā $z \in \Lambda$

$$f(z) = \int_1^{z_0} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = w(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

kur pēdējā integrāļa integrācijas ceļš ir loks riņķī Λ. Šis integrālis ir analītiska funkcija riņķī Λ, jo zemintegrāļa funkcija ir analītiska riņķī Λ. Seko, funkcija f ir līnijas γ elements punktā z_0. Elements sākuma punktā $z = 1$ saskaņā ar konstrukciju sakrīt ar izejas elementu f_0. Lai pabeigtu lemmas pierādījumu, atliek pārbaudīt, ka funkciju w un f vērtības sakrīt kādā līnijas γ lokā γ_0, kurš satur punktu z_0. Var uzskatīt, ka šis loks atrodas riņķī Λ. Tad ja $z \in \gamma_0$, seko

$$w(z) = \int_1^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = w(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

kur integrācijas ceļš ir loks γ_1. Tā kā integrācijas lokus formulās var ņemt vienādus, tad $f(z) = w(z)$, $z \in \gamma_0$, kas arī bija jāpierāda. $\square$

Pieņemam, ka $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ir apgabals paplašinātajā kompleksajā plaknē un f elements punktā $z_0 \in D$. Pieņemam, ka elements pieļauj analītisko turpinājumu pa visām apgabala D līnijām. Tāda turpinājuma rezultātā iegūstam elementu kopu, kuru sauc par *pilno analītisko funkciju apgabalā* D. Iegūstam teorēmu

Teorēma 7.5. *Funkcija* Ln *ir analītiska apgabalā* $0 < |z| < \infty$.

Nodaļa 8
Rezidiju teorija un lietojumi

Noteikto integrāļa aprēķināšanai var izlietot Ņūtona-Leibnica formulu. Šajā gadījumā vispirms ir jāatrod primitīvā funkcija, kas var izrādīties pietiekoši sarežģīts vai pat neiespējams uzdevums. Izmantojot rezidiju teoriju daudzu veidu noteiktos integrāļus var efektīvi izrēķināt neatrodot primitīvo funkciju.

8.1 Rezidijs galīgā punktā

Apskatām vienvērtīgu funkciju $f\colon D \to \mathbb{C}$ analītisku punkta $z = a$, $a \neq \infty$ gredzenveida apkārtnē, kur

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$$

un $R > 0$. Punkts $z = a$ ir vai nu funkcijas f vienvērtīga rakstura izolēts singulārais punkts vai arī funkcija f šai punktā ir analītiska. Tad funkciju f gredzenā D var izvirzīt konverğentā Lorāna rindā

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R.$$

Definīcija 8.1. Par funkcijas f *rezidiju* punktā $z = a$ sauc koeficientu c_{-1} funkcijas f izvirzījuma Lorāna rindā punkta $z = a$ apkārtnē.

Ievedam apzīmējumu

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{8.1}$$

No formulas (6.5)

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

kur integrācijas kontūrs

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = \rho,\ 0 < \rho < R\}$$

ir pozitīvi orientēta riņķa līnija $\gamma \subset D$, iegūstam

$$\oint\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=a} f(z). \tag{8.2}$$

Ja punkts $z = a$ ir funkcijas f izolēts singulārais punkts, tad integrālis no funkcijas pa pietiekoši mazas punktā $z = a$ riņķveida apkārtnes (punkta $z = a$ apkārtne ir tāda, ka tajā nav citu funkcijas f singulāro punktu) robežu vienāds ar rezidiju šajā punktā pareizinātu ar 2πi. Acīmredzot, ja funkcija f ir analītiska punktā $z = a$ vai arī punkts $z = a$ ir novēršams singulārais punkts, tad $\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = 0$.

Piemērs 8.1. Atrodam rezidiju funkcijai $z \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ punktā $z = 0$. Izvirzam funkciju Lorāna rindā izlietojot eksponentfunkcijas izvirzījumu pakāpju rindā

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots, \quad |z| > 0.$$

Atzīmējam, ka punkts $z = 0$ ir būtiski singulārs punkts funkcijai f, jo funkcijas f Lorāna rindas galvenā daļa punkta $z = 0$ apkārtnē satur bezgala daudz locekļu. Seko, $c_{-1} = 1$ un $\mathrm{Res}_{z=0}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1$. Pie reizes atzīmējam, ka

$$\oint\limits_{|z|=1} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=0}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Piemērs 8.2. Atrodam rezidiju funkcijai $z \mapsto \dfrac{\sin z}{z^6}$ punktā $z = 0$ – 5-tās kārtas polā. Izvirzām funkciju Lorāna rindā

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} + \ldots,\ 0 < |z| < +\infty.$$

Seko, $c_{-1} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$. Vēl atzīmējam, ka

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^6}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi \mathrm{i}}{60}.$$

Piemērs 8.3. Atrodam rezidiju funkcijai $z \mapsto z\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)$ būtiski singulārā punktā $z=-1$. Izvirzam funkciju Lorāna rindā

$$z\cos\left(\frac{1}{z+1}\right) = ((z+1)-1)\left(1 - \frac{1}{2(z+1)^2} + \ldots\right)$$
$$= (z+1) - 1 - \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z+1)^2} + \ldots, \quad 0 < |z+1| < \infty.$$

Seko, $c_{-1} = -\frac{1}{2}$.

8.2 Rezidija aprēķināšana galīgā polā

Lai aprēķinātu funkcijas f rezidīju polā var rīkoties sekojoši. Vispirms apskatām gadījumu, kad $z=a$, $a \neq \infty$ ir funkcijas f pirmās kārtas pols. Tad funkcijas f Lorāna rinda punkta $z=a$ apkārtnē ir formā

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

No šejienes

$$(z-a)f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+1}$$

un seko

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Rezidija aprēķināšana vienkāršojās, ja funkcija f ir formā

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

kur φ un ψ ir analītiskas funkcijas punkta $z=a$ apkārtnē, $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$ un $\psi'(a)\neq 0$. Tad punkts $z=a$ ir funkcijas f pirmās kārtas pols un

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Tālāk apskatām gadījumu, kad punkts $z=a$, $a\neq\infty$ ir funkcijas f m-tās kārtas pols. Tad atbilstošā Lorāna rinda punkta $z=a$ apkārtnē ir formā

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots.$$

Pareizinām vienādības abas puses ar $(z-a)^m$ un iegūstam

$$(z-a)^m f(z)=c_{-m}+\ldots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+c_0(z-a)^m+\ldots.$$

Diferencējam vienādību $m-1$ reizi un pārejām uz robežu, kad $z\to a$. Atrodam

$$(m-1)!c_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)$$

no kurienes iegūstam formulu rezidija aprēķināšanai m-tās kārtas polā

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right).$$

Gadījumā, ja funkcija f ir formā $f(z)=\dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, kur funkcija h ir analītiska punktā $z=a$ un $h(a)\neq 0$, tad no pēdejās izteiksmes iegūstam sekojošu formulu

$$\operatorname{Res}_{z=a}\frac{h(z)}{(z-a)^m}=\frac{1}{(m-1)!}h^{(m-1)}(a).$$

Piemērs 8.4. Aprēķināt rezidijus funkcijai $z\mapsto\cot z$ izolētos singulāros punktos. Meklējamie punkti ir vienādojuma $\sin z=0$ saknes, t.i. $z_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Tā kā $\cos z_k\neq 0$, tad punkti z_k ir funkcijas $z\mapsto\cot z$ pirmās kārtas poli. Seko

$$\operatorname{Res}_{z=k\pi}\cot z=\left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=z_k}=\frac{\cos z_k}{\cos z_k}=1.$$

Bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir polu akumulācijas punkts, tātad nav izolēts singulārais punkts un tajā rezidijs nav definēts.

Piemērs 8.5. Aprēķināt rezidijus funkcijai $z \mapsto \dfrac{1}{z^2 + z^4}$ galīgos singulāros punktos. Punkts $z = 0$ ir otrās kārtas pols, bet punkti $z = \mathrm{i}$ un $z = -\mathrm{i}$ ir pirmās kārtas poli.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2+z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = -\lim_{z\to 0} \frac{2z}{(1+z^2)^2} = 0,$$

$$\operatorname{Res}_{z=\mathrm{i}} \frac{1}{z^2+z^4} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{1}{z^2(z+\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{i}}{2},$$

$$\operatorname{Res}_{z=-\mathrm{i}} \frac{1}{z^2+z^4} = \lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})} = -\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

Piemērs 8.6. Aprēķināt rezidiju funkcijai $z \mapsto \dfrac{\cot \pi z}{z^{2m}}$ punktā $z = 0$, ja $m = 0, 1, 2, \ldots$. Atzīmējam, ka punkts $z = 0$ ir funkcijas $2m+1$ kārtas pols. Izvirzam funkciju $z \mapsto z \cot \pi z$ Teilora rindā

$$z \cot \pi z = \frac{z \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{\mathrm{i}z(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z}+1)}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z}-1} = \mathrm{i}z + \frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z}-1}$$

$$= \mathrm{i}z + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(2\mathrm{i}\pi z)^k = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}(2\pi)^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

kur B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ir Bernulli skaitļi (skat. piemēru 5.9) un rinda konverģē, ja $|z| < 1$. Seko

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cot \pi z}{z^{2m}} = \frac{(-1)^m B_{2m}(2\pi)^{2m}}{\pi (2m)!}.$$

8.3 Rezidija aprēķināšana bezgalīgi tālā punktā

Apskatām funkciju $f\colon D \to \mathbb{C}$, analītisku apgabalā

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_0 < |z| < \infty\},$$

t.i. bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ gredzenveida apkārtnē. Pieņemam, ka bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir funkcijas f izolēts viennozīmīga rakstura singulārais punkts. Atbilstošā konverğentā Lorāna rinda apgabalā D ir formā

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots, \quad |z| > \rho.$$

Definīcija 8.2. Par funkcijas f rezidiju bezgalīgī tālā punktā $z = \infty$ sauc skaitli $-c_{-1}$, kur c_{-1} funkcijas f Lorāna rindas koeficients pie $\frac{1}{z}$ bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ apkārtnē.

Tātad

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

No formulas (6.5) iegūstam, ka

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

kur riņķa līnija $|z| = \rho,\ \rho > \rho_0$ ir orientēta pretēji pulksteņa rādītāja virzienam. No šejienes seko

$$\oint_{|z|=\rho} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Ja bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir funkcijas f k-tās kārtas nulle, tad funkcijas f Lorāna rinda bezgalīgi tālā punkta $z = \infty$ apkārtnē ir formā

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-(k+1)}}{z^{k+1}} + \dots = z^{-k} h(z),$$

kur $c_{-k} \neq 0$ un $\lim_{z\to\infty} h(z) = c_{-k} \neq 0$. Ja $k = 1$, tad $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_1$ un ja $k \geq 2$, tad $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Piemērs 8.7. Aprēķināt rezidiju funkcijai $z \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$. Izvirzam funkciju Lorāna rindā

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots, \quad |z| > 0.$$

Seko, $c_{-1} = 1$ un tātad $\operatorname{Res}_{z=\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = -1$. Atzīmējam, ka mūsu piemērā bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir funkcijas novēršams singulārs punkts, bet rezidijs šai punktā nav nulle, kā tas bija galīga novēršama singulāra punkta gadījumā.

Piemērs 8.8. Aprēķināt rezidiju funkcijai $z \mapsto \dfrac{1}{z+1}\cos\dfrac{1}{z}$ bezgalīgi tālā punktā $z=\infty$. Bezgalīgi tālais punkts $z=\infty$ ir dotās funkcijas pirmās kārtas nulle un $f(z)=z^{-1}h(z)$, kur

$$h(z)=\frac{z}{z+1}\cos\frac{1}{z}$$

un $\lim_{z\to\infty}h(z)=1$. Seko, $\operatorname{Res}_{z=\infty}\dfrac{1}{z+1}\cos\dfrac{1}{z}=-1$.

8.4 Košī rezidiju teorēma

Teorēma 8.1. *Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska apgabalā D izņemot galīga skaita punktus $z_1,z_2,\dots,z_n$ un pieņemam, ka $\gamma\subset D$ ir slēgta iztaisnojama vienkārša līnija kuras iekšienē atrodas punkti $z_1,z_2,\dots,z_n$. Tad*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k}f(z). \tag{8.3}$$

Pierādījums. Pieņemam, ka γ_k, $k=1,2,\dots,n$, ir pietiekoši maza rādiusa riņķa līnijas ar centru punktā z_k, orientētas pretēji pulksteņa rādītāja virzienam un atbilstošie riņķi ir tādi, ka tajos nav citu singulāro punktu izņemot z_k un šīs riņķa līnijas savstarpēji nekrustojās. Saskaņā ar Teorēmu 4.5, iegūstam

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k}f(z)\,\mathrm{d}z,$$

no kurienes, izmantojot formulu (8.2) iegūstam formulu (8.3). □

Sekas 8.1. *Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$, izņemot galīga skaitu singulāru punktu. Tad funkcijas f visu rezidiju summa, ieskaitot rezidiju bezgalīgi tālā punktā $z=\infty$ ir vienāda ar nulli, t.i.*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Šeit z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ ir visi funkcijas f galīgie singulārie punkti.

Pierādījums. Pieņemam, ka γ ir pozitīvi orientēta riņķa līnija $|z| = R$, kur R izvēlēts tāds, lai visi punkti z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ atrastos riņķa līnijas γ iekšpusē. Saskaņā ar Teorēmu 8.1

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

No otras puses, t.i. rezidija definīcijas bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$ seko, ka

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

No abām vienādībām seko vajadzīgais rezultāts. □

Vispārinam Teorēmu 8.1.

Teorēma 8.2. *Pieņemam, ka funkcija f, izņemot galīga skaita singulārus punktus, ir analītiska paplašinātās kompleksās plaknes $\overline{\mathbb{C}}$ apgabalā $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un nepārtraukta slēgtā apgabalā $\overline{D} = D \cup \partial D$. Pieņemam, ka apgabala D robeža ∂D sastāv no galīga skaita slēgtām iztaisnojamam vienkāršām līnijām. Tad*

- *ja apgabals D nesatur bezgalīgi tālo punktu $z = \infty$, tad*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z); \tag{8.4}$$

- *ja bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ pieder apgabalam D, tad*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \right). \tag{8.5}$$

Šeit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ visi funkcijas f galīgie singlārie punkti, kuri atrodās apgabalā D.

Pierādījums. Pieņemam, ka $D \subset \mathbb{C}$ ir ierobežots apgabals. Apskatām daudzkārtsakarīgu apgabalu $\tilde{D}$, kuru iegūstam no apgabala D izgriežot pietiekoši maza rādiusa riņķus Λ_j ar centriem punktos z_j un $j = 1,2,\ldots,n$. Saskaņā ar Teorēmu 4.4 integrālis no funkcijas f pa apgabala $\tilde{D}$ robežu $\partial\tilde{D}$ vienāds ar nulli, t.i.

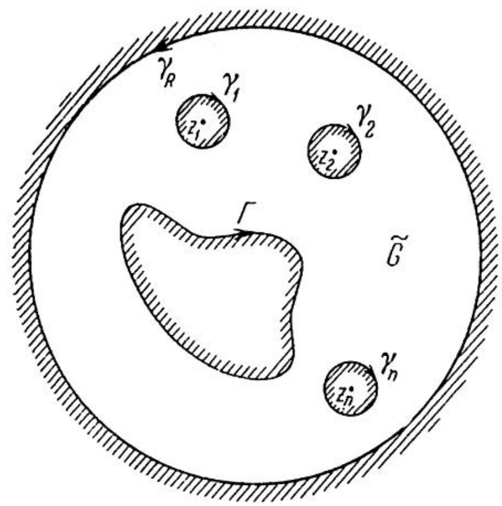
$$\oint\limits_{\partial\tilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{n} \oint\limits_{\partial\Lambda_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

kur $\partial\Lambda_j$ orientēti pulksteņu rādītāju kustības virzienā. Tā kā

$$\oint\limits_{\partial\Lambda_j} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=z_j} f(z),$$

tad iegūstam teorēmas formulu (8.4).

Zīm. 8.1 Košī rezidiju teorēma



Pieņemam, ka riņķis $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ satur sevī apgabala D robežu ∂D un visus funkcijas f galīgos singulāros punktus. Apskatām apgabalu $\tilde{G}$ kuru iegūst no apgabala $G = D \cap \Lambda$ izgriežot visus augstāk minētos riņķus Λ_j. Apgabala $\tilde{G}$ robeža $\partial\tilde{G}$ sastāv no apgabala D robežas ∂D, rinķu līnijām $\partial\Lambda_j$ un riņķa līnijas $\partial\Lambda$. Iegūstam

$$\oint\limits_{\partial\tilde{G}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{n} \oint\limits_{\partial\Lambda_j} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{\partial\Lambda} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

kur līnijas $\partial\Lambda_j$ orientētas pozitīvi. Tā kā

$$\oint_{\partial\Lambda} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z),$$

tad iegūstam formulu (8.5). $\square$

Teorēma par rezidijiem ir viena no svarīgākajām kompleksā mainīga funkciju teorijas teorēmām. Ar tās palīdzību varam efektīvi aprēķināt daudzus noteiktos integrāļus.

8.5 Integrāļu aprēķināšana pa slēgtu kontūru

Apskatām piemērus integrāļu aprēķināšanai pa slēgtu kontūru izmantojot rezidijus. Piemēros uz kontūra γ izvēlēta pozitīvā orientācija, t.i. apgabals atrodas pa kreisi, ja pārvietojamies pa kontūru pozitīvajā virzienā.

Piemērs 8.9. Pieņemam, ka $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$. Saskaņā ar rezidiju teorēmu

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=0} f(z),$$

jo funkcija f riņķa $|z| < 1$ iekšienē ir tikai viens singulārais punkts – 3-kārtas pols $z = 0$. Izvirzam funkciju f Lorāna rindā punkta $z = 0$ apkārtnē

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} + \dots .$$

Seko, $\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = -\frac{1}{2}$. Tātad

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}.$$

Piemērs 8.10. Aprēķināt integrāli

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z-1}\,\mathrm{d}z.$$

Zemintegrāļa funkcijai riņķī $|z| < 2$ ir divi singulārie punkti: $z = 0$ – būtiski singulārs punkts un $z = 1$ – pirmās kārtas pols. Seko,

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} + \operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} \right).$$

Izvirzām zemintegrālā funkciju Lorāna rindā punkta $z = 0$ apkārtnē. Tā kā

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

un

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tad funkcijas $z \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ Lorāna rindas koeficients $c_{-1} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} =$ $1 - e$. Seko, $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = 1 - e$. Bez tam $\operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = e$. Iegūstam $I = 2\pi i$.

Integrāli var aprēķināt ievērojot, ka bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ atrodas riņķa $|z| < 2$ ārpusē. Bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir zemintegrāļa funkcijas pirmās kārtas nulle. Ievērojot, ka

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = \frac{1}{z} h(z),$$

kur $h(z) = \frac{z}{z-1} e^{\frac{1}{z}}$ un $\lim_{z\to\infty} h(z) = 1$, seko ka $\operatorname{Res}_{z=\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = -1$ un

$$I = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = 2\pi i.$$

8.6 Integrāļi $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$

Teorēmas par rezidijiem atļauj uzdevumu par integrāļa aprēķināšanu no kompleksā mainīgā funkcijas pa slēgtu kontūru reducēt uz zemintegrāļa funkcijas rezidiju aprēķināšanu kontūra iekšpusē. Ar doto metodi var arī aprēķināt daudzus reālā mainīga funkcijas noteiktos integrāļus un daudzos gadījumos rezidiju metode izrādās efektīvāka.

Integrāļi aprēķināšana, kuri ir formā

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi,$$

un R racionāla divargumentu funkcija, reducējās uz integrāļu aprēķināšanu pa slēgtu kontūru. Pieņemam, ka $z = e^{i\varphi}$. Tad

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad d\varphi = -i\frac{dz}{z}.$$

Ja φ mainās no 0 līdz 2π, tad z pārvietojās pa vienības riņķa līniju $|z| = 1$ pozitīvā virzienā. Līdz ar to integrālis reducējās uz integrāli pa slēgtu kontūru

$$I = \oint\limits_{|z|=1} R_1(z)\, dz,$$

kur

$$R_1(z) = -\frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

ir racionāla z funkcija. Saskaņā ar rezidiju teorēmu

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} R_1(z),$$

kur $z_1, z_2, \ldots, z_n$ racionālās funkcijas R_1 poli, kuri atrodās riņķa $|z| < 1$ iekšienē.

Piemērs 8.11. Aprēķinam integrāli

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \quad |a| \neq 1.$$

Ievedot jaunu mainīgo $z = e^{i\varphi}$, iegūstam

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{i\, dz}{az^2 - (a^2+1)z + a}.$$

Vienādojumam $az^2-(a^2+1)z+a=0$ ir divas saknes $z_1=a$ un $z_2=\frac{1}{a}$. Ja $|a|<1$, tad riņķa $|z|<1$ iekšpusē atrodas tikai punkts $z_1=a$ – pirmās kārtas pols zemintegrāļa funkcijai f. Aprēķinam rezidiju punktā $z=a$

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\mathrm{i}}{(2az-(a^2+1))_{z=a}}=\frac{\mathrm{i}}{a^2-1}.$$

Seko, $I=\dfrac{2\pi}{1-a^2}$.

Ja $|a|>1$, tad riņķa $|z|<1$ iekšpusē atrodas tikai punkts $z_2=\frac{1}{a}$. Izdarot analogus aprēķinus iegūstam $I=\dfrac{2\pi}{a^2-1}$.

8.7 Integrāļi no racionālām funkcijām

Apskatām integrāli

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8.6}$$

kur R – racionāla funkcija. Pieņemam, ka integrālis konverģē.

Apskatamajam integrālim nevar tiešā veidā pielietot teorēmu par rezidijiem, jo integrācijas kontūrs ir bezgalīga nenoslēgta līnija. Lai izmantotu rezidiju teorēmu apskatām integrāli

$$\oint_{\gamma_R} R(z)\,\mathrm{d}z,$$

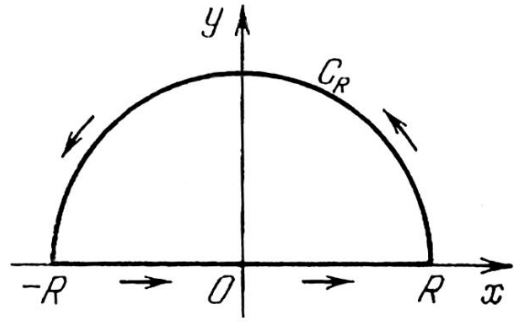
kur integrācijas kontūrs γ_R ir slēgta līnija sastāvoša no nogriežņa $[-R,R]$ un pusriņķa $C_R=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=R, \operatorname{Im} z>0\}$.

Vispirms pierādām lemmu.

Lemma 8.1. *Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska apgabalā* $\operatorname{Im} z>0$*, izņemot galīga skaita singulāros punktus, un nepārtraukta līdz apgabala robežai. Ja integralis*

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zīm. 8.2 Integrācijas kontūrs



konverğē un

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

kur pusriņķis $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$*, tad*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0}\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Pēdejā formulā aprēķina rezidijus visos funkcijas f augšējās pusplaknes singulāros punktos.

Pierādījums. Apskatam kontūru γ un izvēlamies R tik lielu, lai funkcijas f visi augšējās pusplaknes singulārie punkti atrastos kontūra iekšpusē. Saskaņā ar rezidiju teorēmu iegūstam

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0}\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Pārejam šajā vienādībā uz robežu kad $R \to \infty$. Pateicoties integrāļa konverğencei

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bez tam

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Līdz ar to esam pierādījuši lemmu. □

Apskatām integrāli (8.6). Pieņemam, ka $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kur P_n un Q_m ir n-tās un m-tās kārtas polinomi attiecīgi. No integrāļa konverģences izriet, ka $m \geq n+2$ un funkcijai R nav polu uz reālās ass. Seko,

$$R(z) = \frac{h(z)}{z^{m-n}}, \text{ kur } \lim_{z\to\infty} h(z) \neq 0,$$

un tādēļ $|R(z)| \leq c|z|^{-2}$ pie pietiekoši liela $|z|$. Tā kā uz pusriņķa γ_R izpildās nevienādība $|R(z)| \leq cR^{-2}$, tad seko

$$\left|\int_{\gamma_R} R(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq cR^{-2}\pi R \to 0, \text{ ja } R \to \infty.$$

Līdz ar to saskaņā ar lemmu

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}_{z=z_k} R(z).$$

Formulā rezidijus aprēķina pa visiem augšējās pusplaknes punktiem.

Piemērs 8.12. Aprēķinam integrāli

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4}$$

Tā kā funkcijai $z \mapsto R(z)$, kur

$$R(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^4(z+\mathrm{i})^4}$$

augšējā pusplaknē ir viens 4-tās kārtas pols punktā $z = \mathrm{i}$, tad rezidijs šajā singulārajā punktā ir

$$\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}} R(z) = \frac{1}{3!}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^4}\right]^{(3)}_{z=\mathrm{i}} = -\frac{5\mathrm{i}}{32}$$

un rezultatā iegūstam

$$I = 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}} R(z) = \frac{5\pi}{16}.$$

8.8 Integrāļi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\, dx$

Lai aprēķinātu integrāļus

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\, dx, \tag{8.7}$$

kur R racionāla funkcija izlietojam *Žordāna lemmu*.

Lemma 8.2. *Pieņemam, ka $\alpha > 0$ un izpildās sekojoši nosacījumi:*

- *funkcija $g\colon D \to \mathbb{C}$ ir nepārtraukta apgabalā $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$;*
- *$M(R) = \max_{z\in\gamma_R} |g(z)| \to 0$ ja $R \to \infty$, kur $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ ir pusriņķis.*

Tad

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0.$$

□

Pierādījums. Pieņemam, ka $z \in \gamma_R$, $R > R_0$. Tad $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}| = e^{-\alpha R \sin\varphi}.$$

Tā kā $\alpha > 0$, tad $|e^{i\alpha z}| \leq 1$. Lai varēt iegūt precīzāku $|e^{i\alpha z}|$ novērtējumu uz γ_R izlietojam nevienādību

$$\sin\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Novērtējam integrāli

$$I_1 = \int_{\gamma_R} g(z) e^{i\alpha z}\, dz.$$

Iegūstam

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \max_{z\in\gamma_R} |g(z)| \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha R\sin\varphi} R\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2RM(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha R\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
\le 2RM(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{2R\alpha\varphi}{\pi}\right)}\,\mathrm{d}\varphi &= M(R)\left(-\frac{\pi}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\left(-\frac{2R\alpha\varphi}{\pi}\right)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= M(R)\frac{\pi}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha R}) \le \frac{\pi M(R)}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Līdz ar to Žordana lemma ir pierādīta □

Tālāk apskatām integrāli (8.7). Dotais integrālis konverğē, ja funkcijai R uz reālās ass nav polu, $|R(x)| \le \dfrac{c}{|x|^k}$, ja x ir pietiekoši liels un $k \ge 1$. Tāpēc saskaņā ar Žordāna lemmu

$$
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} R(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \alpha > 0.
$$

Izlietojot rezidiju teorēmu iegūstam

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}_{z=z_k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} R(z)).
$$

Piezīme 8.1. Ja funkcija $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $\alpha > 0$, tad atdalot reālo un imagināro daļu iegūstam formulas

$$
\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -2\pi \operatorname{Im}\left(\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}_{z=z_k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} R(z))\right)
$$

un

$$
\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \operatorname{Re}\left(\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}_{z=z_k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} R(z))\right).
$$

Piemērs 8.13. Aprēķinam integrāli

$$I=\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\quad a\neq 0,\quad a\in\mathbb{R}.$$

Vispirms ievērojam, ka zemintegrāļa funkcija ir pāra funkcija un tādēļ

$$I=\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zemintegrāļa funkcijai augšējā pusplaknē ir viens 1-ās kārtas pols punktā $z=\mathrm{i}|a|$ un rezidijs šajā singulārajā punktā ir

$$\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}|a|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}=\frac{\mathrm{e}^{-|a|}}{2|a|\mathrm{i}}.$$

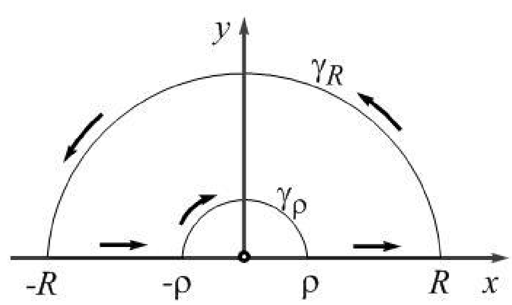
Seko, $I=\dfrac{\pi}{2|a|}\mathrm{e}^{-|a|}$.

Apskatam gadījumu, kad racionālai funkcijai ir singulārs punkts uz reālās ass.

Piemērs 8.14. Aprēķinam integrāli

$$I=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Zīm. 8.3 Integrācijas kontūrs



Izvēlamies slēgtu integrācijas kontūru γ sastāvoša no nogriežņiem $[-R,-\rho]$, $[\rho,R]$ un pusriņķiem $\gamma_R=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=R,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ un

$\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Apskatam integrāli $I = \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z$. Tā kā kontūra iekšpusē zemintegrāļa funkcija ir analītiska, tad $I = 0$. Tātad

$$0 = \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z. \tag{8.8}$$

Ievērojam, ka

$$\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

un saskaņā ar Žordāna lemmu.

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0$$

Bez tam

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2.$$

Integrāļa I_1 zemintegrāļa funkcijai punkts $z = 0$ ir novēršams singulārs punkts, tātad tā ir ierobežota punkta $z = 0$ apkārtnē un tādēļ

$$\lim_{\rho\to 0} I_1 = \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Aprēķinam I_2. Pārejam uz jaunu mainīgo $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ un ievērojam, ka integrācija notiek negatīvā, t.i. pulksteņa rādītāju virzienā. Tad $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ un

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int\limits_{\pi}^{0} \mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\pi.$$

Pārejot uz robežu izteiksmē (8.8), kad $R \to \infty$ un $\rho \to 0$ iegūstam

$$0 = 2\mathrm{i}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi$$

no kurienes

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

8.9 Logaritmiskais rezidijs

Teorēma 8.3. *Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska apgabalā G izņemot polus un pieņemam, ka D ir ierobežots vienkārtsakarīgs apgabals, apgabala D robeža ∂D ir slēgta iztaisnojama vienkārša līnija un $D \cup \partial D \subset G$.*

Ja funkcijai f nav nulles un polu uz ∂D, tad

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = N - P, \tag{8.9}$$

kur N funkcijas f nuļļu skaits un P – polu skaits apgabalā D, pie kam katru nulli un katru polu skaita tik reizes, kāda ir tā kārta.

Pierādījums. Vispirms ievērosim, ka funkcijai f apgabalā D var būt tikai galīgs skaits polu. Pretējā gadījuma apgabalā G eksistētu polu akumulācijas punkts – neizolēts singulārais punkts. Arī funkcijas f nuļļu skaits apgabalā D galīgs. Ja būtu bezgalīgi daudz nuļļu, tad arī apgabalā G atrastos nuļļu akumulācijas punkts un saskaņā ar unitātes teorēmu $f(z) \equiv 0$ apgabalā D.

Zemintegrāļa funkcijas F, kur $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ singulārie punkti ir tikai funkcijas f nulles un poli.

Pieņemam, ka $z = a$ ir funkcijas f n-tās kārtas nulle. Tad

$$f(z) = (z-a)^n g(z),$$

kur g analītiska funkcija punktā $z = a$ un $g(a) \neq 0$. Seko,

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

no kurienes atrodam $\operatorname{Res}_{z=a} F(z) = n$, t.i. funkcijas F rezidijs punktā $z = a$ vienāds ar funkcijas f nulles $z = a$ kārtu.

Analoģiski, ja $z = b$ ir funkcijas f p-tās kārtas pols, tad

$$f(z) = (z-b)^{-p} h(z),$$

kur funkcija h ir analītiska punktā $z = b$ un $h(b) \neq 0$. No šejienes iegūstam

$$F(z) = -\frac{p}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

un seko $\operatorname{Res}_{z=b} F(z) = -p$, t.i. funkcijas F rezidijs punktā $z = b$ vienāds ar funkcijas f pola $z = b$ kārtu ņemtu ar pretēju zīmi.

Tādā veidā izteiksmes (8.9) kreisā puse saskaņā ar rezidiju teorēmu vienāda ar visu funkcijas F rezidiju summu apgabalā D. $\square$

Teorēmu 8.3 sauc arī *logaritmiskā rezidija teprēmu*. Savukārt *logaritmisko rezidiju* definē sekojoši:

Definīcija 8.3. Par funkcijas f logaritmisko rezidiju punktā $z = a$ sauc funkcijas F, kur $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ izvirzījuma Lorāna rindā punkta $z = a$ apkārtnē koeficientu c_{-1} pie locekļa $(z-a)^{-1}$.

8.10 Argumenta princips

Sekas 8.2. *Pieņemam, ka izpildās Teorēmas 8.3 nosacījumi. Tad formulu* (8.9) *var pārrakstīt formā*

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = N - P. \tag{8.10}$$

$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$ *ir funkcijas* f *argumenta pieaugums pa slēgtu iztaisnojamu vienkāršu līniju* γ *pozitīvā virzienā.*

Pierādījums. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem funkcija f ir analītiska līnijas γ apkārtnē un $f(z) \neq 0$, ja $z \in \gamma$. Seko $f(z) \neq 0$ līnijas γ apkārtnē. Tā kā $(\operatorname{Ln} f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$, tad

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \mathrm{d}(\operatorname{Ln} f(z)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \Delta_\gamma \operatorname{Ln} f(z),$$

kur $\Delta_\gamma \mathrm{Ln}\, f(z)$ funkcijas $\mathrm{Ln}\, f$ pieaugums punktam z pārvietojoties pa slēgtu iztaisnojamu līniju γ pozitīvā virzienā. Ievērojam, ka $\mathrm{Ln}\, f(z) = \ln|f(z)| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, f(z)$ un

$$\Delta_\gamma \ln|f(z)| = 0,$$

jo $z \mapsto \ln z$ ir vienvērtīga funkcija. Iegūstam

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f(z).$$

no kurienes izriet formula (8.10). □

Vienādība (8.10) pazīstama, ka *argumenta princips*. Saskaņā ar formulu (8.10) starpība starp funkcijas f nullēm un poliem slēgta kontūra γ iekšienē vienāda ar šīs funkcijas argumenta izmaiņu dalītu ar 2π. Jāievēro, ka funkcija f kontūra iekšpusē ir analītiska izņemot galīga skaita polu un neanulējās uz γ.

Atzīmēsim, ka gadījumā ja funkcijai nav polu apgabalā D ($P = 0$), tad formula (8.10) pieņem vienkāršu formu

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f(z) = N.$$

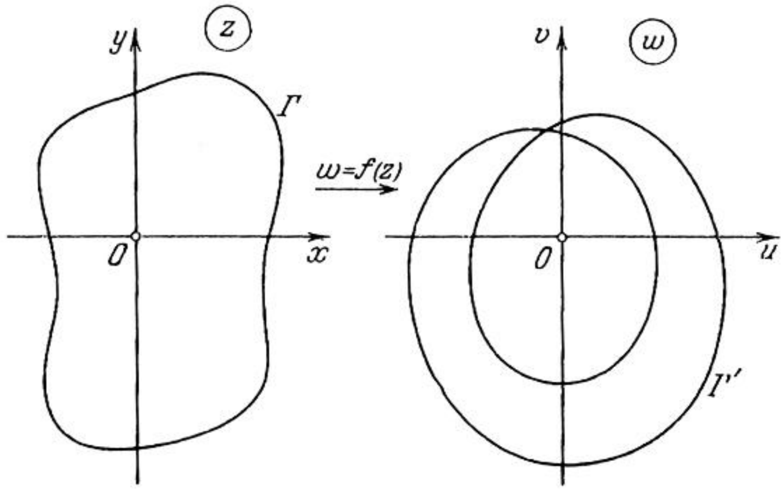
Noskaidrosim nosacījuma $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f(z)$ ģeometrisko interpretāciju. Pieņemam, ka $f(\gamma)$ ir slēgtās līnijas γ attēls pie attēlojuma $z \mapsto w = f(z)$. Ja punkts z pārvietojoties pa slēgtu līniju γ izdara pilnu apiešanu, tad atbilstošais punkts $w = f(z)$ pārvietojās pa slēgto līniju $f(\gamma)$. Funkcijas f argumenta izmaiņa nosaka vektora w pilno apgriezienu skaitu, ja punkts w pārvietojās pa $f(\gamma)$. Ja vektors w neizdara nevienu pilnu apgriezienu ap punktu $w = 0$, tad $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f(z) = 0$.

8.11 Rušē teorēma

Lai noskaidrotu funkcijas pilno nuļļu skaitu dotajā apgabalā bieži izmanto sekojošu *Rušē*[1] *teorēmu*.

---

[1] Eugene Rouche, ⋆1832.18.VIII, Sommiéres, Francija, †1910.19.VIII, Lunel, Francija; franču matemātiķis



Zīm. 8.4 Argumenta princips

Teorēma 8.4. *Pieņemam, ka funkcijas $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ un $g\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ ir analītiskas vienkārtsakarīgā ierobežotā apgabalā D un nepārtrauktas slēgtā apgabalā $\overline{D} = D \cup \partial D$, kur apgabala D robeža ∂D ir slēgta iztaisnojama vienkārša līnija. Ja visiem $z \in \partial D$ izpildās nevienādība*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

tad funkcijām f un F, kur $F(z) = f(z) + g(z)$ apgabalā D ir vienāds nuļļu skaits.

Pierādījums. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem $f(z) \neq 0$ visiem $z \in \partial D$. Bez tam arī $F(z) \neq 0$, ja $z \in \partial D$, jo $|F(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$. Pieņemam, ka N_F un N ir funkciju F un f pilnais nuļļu skaits apgabalā D atbilstoši. Saskaņā ar logaritmiskā rezidija teorēmu

$$N_F = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} F(z).$$

Tā kā $f(z) \neq 0$, ja $z \in \partial D$, tad visiem $z \in \partial D$ no vienādības

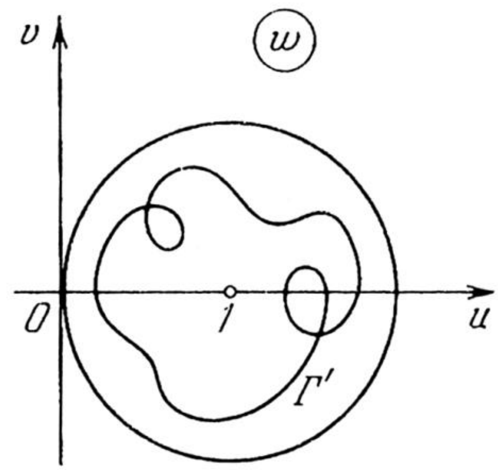
$$F(z) = f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

seko, ka

$$\Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} F(z) = \Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} f(z) + \Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right). \tag{8.11}$$

Pierādīsim, ka otrais saskaitāmais vienādībā (8.11) vienāds ar nulli. Patiešam, punktam z izdarot pilnu apiešanu pa slēgtu kontūru ∂D punkts $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ apraksta slēgtu līniju Γ', kura atrodas riņķa $|w-1| < 1$ iekšienē, jo $|w-1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ teorēmas nosacījumu dēļ, ja $z \in \partial D$. Seko vektors w, kura gals pārvietojās pa līniju Γ' neizdara nevienu pilnu apgriezienu ap punktu $w = 0$. Seko,

Zīm. 8.5 Rušē teorēma



$$\Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Līdz ar to $N_F = N$. $\square$

Piemērs 8.15. Atrast vienādojuma

$$z^6 - 6z^4 + 3z - 1 = 0$$

pilno nuļļu skaitu riņķī $|z| < 1$. Apzīmējam ar $f(z) = -6z^4$ un $g(z) = z^6 + 3z - 1$. Ja $|z| = 1$, tad $|f(z)| = 6$ un $|g(z)| \leq |z|^6 + 3|z| + 1 = 5$. Ievērojam, ka $|f(z)| > |g(z)|$, ja $|z| = 1$. Saskaņā ar Rušē teorēmu izejas vienādojumu sakņu skaits riņķī $|z| < 1$ sakrīt ar vienādojuma $6z^4 = 0$ sakņu skaitu šai pašā riņķī, t.i. vienāds ar 4.

8.12 Algebras pamatteorēma

Izmanojot Rušē teorēmu var iegūt vienkāršu algebras pamatteorēmas pierādījumu.

Teorēma 8.5. *Katram n-tās kārtas polinomam ar kompleksiem koeficientiem ir n nulles un visas tās atrodās riņķa ar radiusu*

$$R = \frac{\max_{1\le i\le n}|a_i|}{|a_0|} + 1$$

iekšienē kompleksajā plaknē.

Pierādījums. Pieņemam, ka

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$$

ir patvaļīgs n-tās kārtas polinoms, kur $a_0 \neq 0$. Apzīmējam ar $f(z) = a_0 z^n$ un $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$. Tad

$$P_n(z) = F(z) = f(z) + g(z).$$

Ja $R = |z| = \dfrac{\max_{1\le i\le n}|a_i|}{|a_0|} + 1$, tad $|f(z)| = |a_0|\left(\dfrac{\max_{1\le i\le n}|a_i|}{|a_0|} + 1\right)^n$ un

$$|g(z)| \le |a_1||z|^{n-1} + |a_2||z|^{n-2} + \ldots + |a_n| \le \max_{1\le i\le n}|a_i|\left(\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}\right)$$

$$\le |a_0|\left(\left(\frac{\max_{1\le i\le n}|a_i|}{|a_0|} + 1\right)^n - 1\right).$$

Ievērojam, ka $|f(z)| > |g(z)|$, ja $|z| = R$. Saskaņā ar Rušē teorēmu nuļļu skaits $N_F = N_f$. Bet $N_f = n$, jo funkcijai f ir n nulles riņķī $|z| < R$, $z = 0$ ir funkcijas f n-tās kārtas nulle. Tādā veidā riņķī $|z| < R$ funkcijas $F = P_n$ nuļļu skaits ir n, tas ir polinomam P_n ir n nulles šajā riņķī. Tā kā funkcijai f nav nuļļu, ja $|z| > R$, tad teorēma ir pierādīta. □

Piemērs 8.16. Apskatām n-tās kārtas polinomus

$$P_n(z) = z^n \pm z^{n-1} \pm \ldots \pm z \pm 1.$$

Saskaņā ar tikko pierādīto teorēmu jebkura šāda veida polinoma visas saknes atrodās riņķī $|z| < 2$.

Piemērs 8.17. Noskaidrosim polinoma $P_7(z) = z^7 + 5z^4 + z + 2$ sakņu izvietojumu. Apzīmējam ar $f(z) = z^7$ un ar $g(z) = 5z^4 + z + 2$. Tad $|f(z)| = [z]^7$ un $|g(z)| \leq 5|z|^4 + |z| + 2$. Ja $|z| = 2$, tad $|f(z)|_{|z|=2} = 128$ un $|g(z)|_{|z|=2} \leq 84$. Saskaņā ar Rušē teorēmu polinoma P_7 un polinoma f sakņu skaits riņķī $|z| < 2$ ir vienāds. Polinomam f ir septiņkārtīga sakne $z = 0$ riņķī $|z| < 2$. Seko, arī polinoma P_7 septiņas nulles atrodas riņķī $|z| < 2$. Saskaņā ar algebras pamatteorēmu polinomam P_7 pavisam ir septiņas nulles, tātad visas polinoma saknes atrodas riņķī $|z| < 2$.

Noskaidrosim cik polinoma P_7 saknes atrodās vienības riņķa $|z| < 1$ iekšienē. Tagad apzīmējam ar $f(z) = z^7 + 5z^4$ un ar $g(z) = z + 2$. Tad $|f(z)| = |z^7 + 5z^4| = |z|^4|z^3 + 5| \geq |z|^4||5 - |z|^3|$ un $|g(z)| = |z + 2| \leq |z| + 2$. Ja $|z| = 1$, tad $|f(z)|_{|z|=1} \geq 4$ un $|g(z)|_{|z|=1} \leq 3$. Saskaņā ar Rušē teorēmu polinomam P_7 un polinomam f vienības riņķa iekšienē ir vienāds sakņu skaits. Ievērojam, ka $f(z) = z^4(z^3 + 5)$. Kubiska vienādojuma $z^3 + 5 = 0$ visas trīs saknes atrodas uz riņķa līnijas ar centru punktā $z = 0$ un radiusu $\rho = \sqrt[3]{5} > 1$, seko tikai polinoma f četrkārtīga sakne $z = 0$ atrodās vienības riņķa iekšienē. Tātad polinoma P_7 četras saknes atrodās vienības riņķa iekšienē.

Apvienojot rezultātus secinam, ka četras polinoma P_7 saknes atrodās riņķa $|z| < 1$ iekšienē, un pārējās trīs saknes atrodās gredzenā $1 < |z| < 2$.

8.13 Rezidiju lietošana summu aprēķināšanai

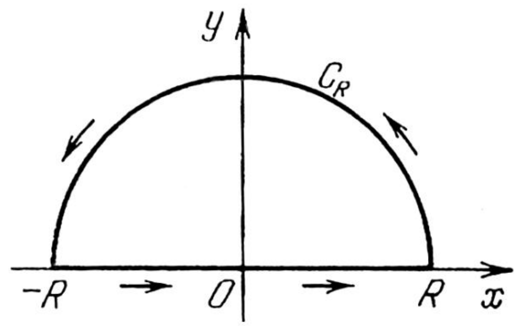
Teorēma 8.6. *Pieņemam, ka funkcija f ir analītiska visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ izņemot galīga skaita polu un apmierina sekojošus nosacījumus:*

- *neviens no funkcijas f poliem $z_1, z_2, \ldots, z_m$ nav vesels skaitlis;*
- *bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir funkcijas f k-tās kārtas nulle, $k \geq 2$. Tad*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}_{z=z_m} f(z) \cot \pi z. \tag{8.12}$$

Pierādījums. Vispirms pierādam, ka funkcija $z \mapsto \cot\pi z$ ir ierobežota uz slēgta līnijas γ_n, kur γ_n ir kvadrāts $A_nB_nC_nD_n$ ar centru punktā $z=0$, malām paralēlām koordinātu asīm, malu garumi ir $2\alpha_n$ un $\alpha_n = n+\frac{1}{2}$, $n=0,1,2,\ldots$. Pieņemam, ka $z \in C_nD_n$, tad $z=\alpha_n+\mathrm{i}y$, kur $-\alpha_n \leq$

Zīm. 8.6 Integrācijas kontūrs



$y \leq \alpha_n$. Iegūstam

$$|\cot\pi z| = \left|\cot\pi\left(n+\frac{1}{2}+\mathrm{i}y\right)\right| = |\tan \mathrm{i}\pi y| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\pi y}-\mathrm{e}^{-\pi y}}{\mathrm{e}^{\pi y}+\mathrm{e}^{-\pi y}}\right|,$$

un tātad

$$|\cot\pi z| \leq 1, \quad z \in C_nD_n, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Pieņemam, ka $z \in B_nC_n$, tad $z = x+\mathrm{i}\alpha_n$, $-\alpha_n \leq x \leq \alpha_n$,

$$|\cot\pi z| \leq \left|\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}+1}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1}\right| = \left|\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi\alpha_n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\alpha_n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}}\right| \leq \frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi\alpha_n}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\alpha_n}},$$

no kurienes atrodam

$$|\cot\pi z| \leq \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}, \quad z \in B_nC_n, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Tā kā $|\cot(-\pi z)| = |\cot\pi z|$, tad analogas nevienādības ir spēkā uz kvadrāta $A_nB_nC_nD_n$ malām A_nB_n un D_nA_n. Seko,

$$|\cot\pi z| \leq M, \quad z \in \gamma_n, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Apskatam integrāli $\oint_{\gamma_n} f(z)\cot\pi z\,\mathrm{d}z$. Integrācijas kontūru γ_n izvēlamies tādu, lai visi funkcijas f poli atrastos kontūra γ_n iekšienē. Bez tam tā kā funkcijai f bezgalīgi tālais punkts $z=\infty$ ir k-tās kārtas nulle, kur $k \geq 2$, tad eksistē tāda konstante $c>0$ un skaitlis $n>0$, ka visiem $|z|>n$ izpildās novērtējums $|f(z)| \leq c|z|^{-2}$. Novērtējam integrāli

$$\left|\oint\limits_{\gamma_n} f(z)\cot \pi z \,\mathrm{d}z\right| \leq cM \oint\limits_{\gamma_n} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} = cM\frac{16}{2n+1}$$

un tātad

$$\lim_{n\to\infty} \oint\limits_{\gamma_n} f(z)\cot \pi z \,\mathrm{d}z = 0.$$

Saskaņā ar Košī rezidiju teorēmu

$$\oint\limits_{\gamma_n} f(z)\cot \pi z \,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \mathrm{i} \sum_n \mathrm{Res}_{z=n} f(z)\cot \pi z + 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{z=z_j} f(z)\cot \pi z, \qquad (8.13)$$

kur integrācijas kontūrs γ_n izvēlēts tāds, lai visi funkcijas f poli atrastos integrācijas kontūra iekšpusē un neviens punkts $z=n$, $n\in\mathbb{Z}$ neatrastos uz kontūra. Aprēķinam

$$\mathrm{Res}_{z=n} f(z)\cot \pi z = \mathrm{Res}_{z=n} \frac{f(z)\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{f(n)\cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = \frac{f(n)}{\pi}.$$

Izpildot vienādībā (8.13) robežpāreju $n\to\infty$, iegūstam formulu (8.12).

Piezīme 8.2. Ja kāds no funkcijas f poliem ir vesels skaitlis $z_j = l$, tad vienādības (8.12) kreisajā pusē ir summa $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq l}}^{+\infty} f(n)$, bet labā puse paliek iepriekšējā, tikai punktā $z=l$, kas ir arī funkcijas f pols, mainās pola kārta funkcijai $z\mapsto f(z)\cot \pi z$. Līdzīgi rīkojās gadījumā, ja vairāki z_j ir veseli skaitļi.

Piemērs 8.18. Aprēķināt summu $S_{2m} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$, kur $m\in\mathbb{N}$. Saskaņā ar formulu (8.12)

$$S_{2m} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^{2m}} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cot \pi z}{z^{2m}}.$$

Tā kā

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cot \pi z}{z^{2m}} = \frac{(-1)^m B_{2m} (2\pi)^{2m}}{\pi (2m)!},$$

tad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1} B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2(2m)!}.$$

Piemēram, tā kā $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, tad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Nodaļa 9
Konformie attēlojumi

9.1 Konforma attēlojuma definīcija un īpašības

Pieņemam, ka funkcija f ir definēta punkta z_0 apkārtnē.

Definīcija 9.1. Attēlojumu $f\colon E \to \mathbb{C}$ sauc par *konformu punktā* $z_0 \in E$, ja tas punktā z_0 saglabā leņķus starp līnijām un saglabā deformācijas koeficientu.

Ja kompleksā mainīgā funkcija f ir diferencējama punkta z_0 apkārtnē un $f'(z_0) \neq 0$, tad attēlojums f punktā z_0 ir konforms.

Definīcija 9.2. Pieņemam, ka funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir vienlapaina apgabalā G un attēlojums f ir konforms katrā apgabala $G \subset \mathbb{C}$ punktā, tad attēlojums ir *konforms apgabalā* G.

No definīcijas izriet, ka ja vienlapaina funkcija $f\colon G \to \mathbb{C}$ ir diferencējama apgabalā $G \subset \mathbb{C}$ un tās atvasinājums nav nulle, tad attēlojums f ir konforms.

Piemērs 9.1. Lineārais attēlojums $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, kur $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ ir konforms visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$.

Funkcija $f\colon G \to \overline{\mathbb{C}}$, kur $f(z) = z^2$ ir konforma, ja

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Funkcija f attēlo apgabalu G par komplekso plakni, no kuras izgriezta nenegatīvā abscisu ass $[0, \infty)$.

Eksponenfunkcija f, kur $f(z) = \mathrm{e}^z$ ir konforma joslā $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$.

Piezīme 9.1. Ja funkcija f ir analītiska punktā z_0 un $f'(z_0) = 0$, tad attēlojums f nav konforms punktā z_0. Paskaidrosim šo faktu ar piemēru. Apskatām funkciju f, kur $f(z) = z^2$. Punktā $z_0 = 0$ atvasinājums $f'(0) = 0$. Apskatām divus starus $\arg z = \alpha$ un $\arg z = \beta$ izejošus no punkta $z = 0$. To attēli pie attēlojuma $w = f(z)$ ir stari $\arg w = 2\alpha$ un $\arg w = 2\beta$. Oriģinālu stari veido leņķi $\beta - \alpha$, bet staru attēli veido leņķi $2(\beta - \alpha)$. Seko, leņķi punktā $z = 0$ divkāršojās, t.i. attēlojums f nav konforms punktā $z = 0$.

Paplašinātās kompleksās plaknes $\overline{\mathbb{C}}$ apgabaliem definēsim konforma attēlojuma jēdzienu.

Definīcija 9.3. Attēlojums $f\colon G \to G_1$, kur apgabali $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, $G_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ ir paplašinātās kompleksās plaknes apgabali, ir konforms, ja

- funkcija f ir savstarpēji viennozīmīga, t.i. funkcija ir vienlapaina apgabalā G;
- funkcija f ir analītiska apgabalā G, varbūt izņemot vienu punktu, kurā tai ir pirmās kārtas pols.

Apskatīsim konforma attēlojuma f lokālās īpašības punkta z_0 apkārtnē, kurā tā ir analītiska. Tā kā funkcijas vienlapainības kritērijs ir nosacījums $f'(z_0) \neq 0$, tad no atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas seko divas konforma attēlojuma īpašības:

- Saglabājās izplešanās koeficients. Izplešanās koeficients punktā z_0 ir vienāds visām gludām līnijām, kuras iet caur šo punktu, un vienāds ar $|f'(z_0)|$.
- Saglabājās leņķi. Visas gludas līknes, kuras iet caur punktu z_0, pagriežas pa vienu un to pašu leņķi vienādu ar $\arg f'(z_0)$.

Atzīmēsim vēl sekojošas konforma attēlojuma īpašības:

- Konformam attēlojumam inversais attēlojums arī ir konforms;
- Divu konformu attēlojumu kompozīcija arī ir konforms attēlojums.

Ievedīsim lenķa jēdzienu starp divām līnijām bezgalīgi tālā punktā.

Definīcija 9.4. Par lenķi starp divām līnijām γ_1 un γ_2, kuras iet caur bezgalīgi tālo punktu $z = \infty$, sauc leņķi starp šo līniju attēliem pie attēlojuma g punktā $z = 0$, kur

$$g(z) = \frac{1}{z}$$

No šīs definīcijas izriet, ka attēlojums f, kur $f(z) = \dfrac{1}{z}$ saglabā leņķus starp līnijām visā kompleksā plaknē.

Piemērs 9.2. Pieņemam, ka divi stari γ_1 un γ_2 iziet no viena un tā paša galīga punkta z_0. Tad leņķis starp šiem stariem bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$ ir vienāds ar leņķi punktā z_0 ņemtu ar pretējo zīmi.

Pierādījums. Vienkāršības dēļ pieņemsim, ka $z_0 = 0$. Pieņemsim, ka

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \varphi_1\}$$

un

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \varphi_2\}.$$

Lenķis starp stariem γ_1 un γ_2 punktā $z = 0$ vienāds ar $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Pie attēlojuma f, kur $f(z) = \dfrac{1}{z}$ staru attēli ir stari $f(\gamma_1)$ un $f(\gamma_2)$, kur

$$f(\gamma_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = -\varphi_1\}$$

un

$$f(\gamma_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = -\varphi_2\}.$$

Tad leņķis starp attēlu stariem ir $(-\varphi_2) - (-\varphi_1) = -\alpha$. Pēc definīcijas leņķis starp stariem γ_1 un γ_2 bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$ ir $-\alpha$. $\square$

Līdz ar to izpildās sekojoša konforma attēlojuma īpašība

Teorēma 9.1. *Paplašinātās kompleksās plaknes apgabalam G konforma attēlojuma gadījumā saglabājās leņķi starp līnijām katrā apgabala punktā.*

Pierādījums. Tatad jāapskata divi gadījumi.

- Ja funkcija f bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$ apkārtnē ir analītiska, $c_{-1} \neq 0$ un
$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| > R,$$
tad attēlojums f saglabā leņķus starp līnijām bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$;
- Ja funkcijai f punktā $z = z_0$ ir pirmās kārtas pols, tad attēlojums f saglabā leņķus starp līnijām punktā $z = z_0$.

Pierādīsim pirmo apgalvojumu. Otrais apgalvojumu pierāda analoģiski.

Funkciju f var uzskatīt, kā divu funkciju h un g kompozīciju, kur $h(z) = \frac{1}{z}$ un $g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$. Attēlojums h saglabā leņķus starp līnijām bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$. Attēlojums g saglabā leņķus starp līnijām punktā $z = 0$, jo $g'(0) = c_{-1} \neq 0$. Seko, attēlojums f saglabā leņķus starp līnijām bezgalīgi tālā punktā $z = \infty$.

Pieņemam, ka $G \subset \mathbb{C}$ un $G_1 \subset \mathbb{C}$ ierobežoti vienkārtsakarīgi apgabali, kuru robežas ∂G un ∂G_1 ir vienkāršas, slēgtas, iztaisnojamas līnijas. Tad spēkā sekojoša teorēma par robežu atbilstību:

Teorēma 9.2. *Ja funkcija $f\colon G \to G_1$ konformi attēlo apgabalu G uz G_1, tad*

- *funkciju f var nepārtraukti turpināt uz apgabala G slēgumu, t.i. funkciju f var definēt uz ∂G tā, ka f ir nepārtraukta funkcija slēgtā apgabalā $\overline{G} = G \cup \partial G$;*
- *funkcija f attēlo savstarpēji viennozīmīgi ∂G par ∂G_1 saglabājot orientāciju.*

Pareizs ir arī apgrieztais apgalvojums.

Teorēma 9.3. *Pieņemam, ka funkcija $f\colon \overline{G} \to G_1$ analītiska vaļējā apgabalā G un nepārtraukta slēgtā apgabalā $\overline{D}$ attēlo savstarpēji viennozīmīgi līniju ∂G par ∂G_1 saglabājot orientāciju. Tad funkcija f ir vienlapaina apgabalā G un konformi attēlo apgabalu G par apgabalu G_1.*

Pierādījums. Nepieciešams pierādīt, ka

- katram punktam $w_0 \in G_1$ eksistē viens vienīgs punkts $z_0 \in G$, tāds ka $f(z_0) = w_0$, t.i. vienādojumam $f(z) - w_0 = 0$ ir viens vienīgs atrisinājums apgabalā G;
- katram $w_0 \notin G_1$, vienādojumam $f(z) = w_0$ nav atrisinājums, ja $z \in G$.

Pierādīsim pirmo apgalvojumu. Saskaņā ar teorēmas nosacījumiem vienādojumam $f(z) - w_0 = 0$ nav atrisinājumu, ja $z \in \partial G$. Ja $z \in \partial G$, tad punkts $w = f(z) \in \partial G_1$, bet $w_0 \in G_1$. Saskaņā ar argumenta principu funkcijas g, kur $g(z) = f(z) - w_0$, nuļļu skaits apgabalā G vienāds ar

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\operatorname{Arg}(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\operatorname{Arg}(w - w_0).$$

Tā kā punkts w_0 atrodas līnijas ∂G_1 iekšpusē, tad $\Delta_{\partial G_1}\arg(w - w_0) = 2\pi$ un $N = 1$. Analoģiski, ja punkts w_0 atrodas līnijas ∂G_1 ārpusē, tad $\Delta_{\partial G_1}\arg(w - w_0) = 0$ un vienādojumam $f(z) = w_0$ nav atrisinājumu apgabalā G. □

Konformo attēlojumu teorijas pamatteorēma ir *Rīmana teorēma*.

Teorēma 9.4. *Pieņemam, ka $G \in \mathbb{C}$ ir vienkārtsakarīgs apgabals, kura robeža satur vairāk kā vienu punktu paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$. Tad*

- *eksistē funkcija $f\colon G \to D$, kura konformi attēlo apgabalu G par riņķi*
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\};$$
- *funkcija f ir viena vienīga, ja izpildās nosacījumi*
$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha,$$
kur $z_0 \in G$, $w_0 \in D$ un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Izņēmuma gadījumi ir sekojoši:

- visa paplašinātā kompleksā plakne;
- visa paplašinātā kompleksā plakne bez viena punkta.

Šos apgabalus nevar konformi attēlot uz riņķi D. Tiešām, pieņemam, ka funkcija f konformi attēlo visu paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$ uz riņķi D. Tad šī funkcija ir analītiska un ierobežota visā paplašinātā kompleksā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ un tātad saskaņā ar Liuvila teorēmu $f(z) = const$. Analoģiski, ja funkcija f attēlo visu paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$ bez viena punkta z_0 uz riņķi D, tad šī funkcija ir analītiska un ierobežota, ja $z \neq z_0$. Tad z_0 ir funkcijas f novēršams singulārs punkts, seko funkcija f ir analītiska un ierobežota visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ un tātad saskaņā ar Liuvilla teorēmu $f(z) = const$.

9.2 Lineāra funkcija

Definīcija 9.5. Funkciju $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, kur

$$w = f(z) = az + b \tag{9.1}$$

un $a, b \in \mathbb{C}$ sauc par *lineāru*.

Attēlojumu, kuru realizē funkcija f sauc par *lineāru attēlojumu*.

Apskatīsim speciālgadījumu, kad $b = 0$. Tad

$$w = az, \tag{9.2}$$

kur $|w| = |a||z|$ un $\arg w = \arg a + \arg z$. No vienādības (9.2) izriet, ka attēlojums reducējās uz homotētiju pret punktu $z = 0$ ar koeficientu $|a|$ un sekojošu rotāciju par leņķi $\alpha = \arg z$. Pie šī attēlojuma stars $\varphi = \arg z$ pāriet starā $\arg w = \varphi + \alpha$, bet riņķa līnija $|z| = r$ attēlojās par riņķa līniju $|w| = |a|r$. Rīņķis $|z| < R$ attēlojās par riņķi $|w| < |a|R$.

Atzīmēsim, ka ja $|a| = 1$, t.i. $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, tad attēlojums ir rotācija ap punktu $z = 0$ pa leņķi α. Gadījumā, ja $w = \mathrm{i}z$, tad pagrieziena leņķis ir $\frac{\pi}{2}$, bet savukārt attēlojums $w = -z$ ir rotācija pa leņķi π.

Lineārs attēlojums ir trīs attēlojumu kompozīcija

$$\zeta = |a|z, \quad \tau = \zeta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg\alpha}, \quad w = \tau + b.$$

Tāpēc lineāru attēlojumu $z \mapsto w = az + b$ var izpildīt sekojošā kārtībā

1. Homotētija pret punktu $z = 0$ ar koeficientu $|a|$;
2. Rotācija ap punktu $\zeta = 0$ pa leņķi $\alpha = \arg a$;
3. Paralēlā pārnese pa vektoru b.

9.3 Daļveida lineārā funkcija

Daļveida lineāru funkciju sauc arī par *Mebiusa*[1] *transformāciju*.

Definīcija 9.6. Funkciju $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, kur

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \tag{9.3}$$

un $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sauc par *daļveida lineāru*.

Attēlojumu, kuru realizē funkcija f sauc par *daļveida lineāru attēlojumu*.

[1] August Ferdinand Möbius, ⋆1790.17.XI, Schulpforta, Vācija, †1868.26.IX, Leipciga, Vācija

Nosacījums $ad - bc \neq 0$ nozīmē, ka $f(z) \neq const$. Formulā (9.3) pieņem, ka ja $c \neq 0$, tad $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, bet ja $c = 0$, tad $f(\infty) = \infty$. Tādā veidā daļveida lineārā funkcija definēta visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$. Gadījumā, ja $c = 0$, tad funkcija f ir lineāra un atbilstošais attēlojumu arī sauc par *lineāru*.

Apskatīsim daļveida lineāra attēlojuma pamatīpašības.

Teorēma 9.5. *Daļveida lineāra funkcija konformi attēlo paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$ uz paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$.*

Pierādījums. Funkcija f ir analītiska paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ izņemot punktu $z = -\frac{d}{c}$ – pirmās kārtas polu un bezgalīgi tālais punkts $z = \infty$ ir novēršams singulārais punkts.

Atrisinot vienādojumu (9.3) attiecībā pret z, iegūstam funkciju g, kur

$$g(w) = z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0,$$

un kura ir inversa funkcijai f. Funkcija g ir viennozīmīga visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$ un arī ir daļveida lineāra. Seko daļveida lineārā funkcija ir vienlapaina visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$. $\square$

Piezīme 9.2. Ir spēkā arī apgrieztais apgalvojums, ja funkcija f konformi attēlo paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$ par paplašināto komplekso plakni $\overline{\mathbb{C}}$, tad atbilstošā funkcija ir daļveida lineāra.

Saskaņā ar konforma attēlojuma definīciju funkcija f ir analītiska paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$, varbūt izņemot vienu punktu – pirmās kārtas polu. Ja atbilstošais punkts z_0 ir galīgs un $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = A$, tad funkcija g, kur

$$g(z) = f(z) - \frac{A}{z - z_0}$$

ir analītiska visā paplašinātajā kompleksajā plaknē $\overline{\mathbb{C}}$. Seko, saskaņā ar Liuvila teorēmu $g(z) = const$, t.i. f ir daļveida lineāra funkcija. Ja $z = \infty$, tad f ir vesela funkcija un $f(z) = O(z)$, kad $z \to \infty$. Saskaņā ar Liuvila teorēmu $f(z) = az + b$.

Teorēma 9.6. *Visu daļveida lineāro attēlojumu kopa ir grupa, t.i.*

- *daļveida lineāru attēlojumu kompozīcija ir daļveida lineārs attēlojums;*
- *daļveida lineārā attēlojuma inversais attēlojums arī ir daļveida lineārs attēlojums.*

Pierādījums. Otrā īpašība ir pierādīta agrāk. Pierādām pirmo īpašību. Pieņemam, ka

$$\zeta = \frac{a_1 z + d_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,$$

$$w = \frac{a_2 \zeta + d_2}{c_2 \zeta + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0.$$

No šejienes iegūstam

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0,$$

t.i., attēlojums ir daļveida lineārs. □

Piezīme 9.3. Daļveida lineāro attēlojumu kopa ir nekomutatīva grupa. Piemēram, ja

$$w(z) = \frac{1}{z}, \quad \zeta(z) = z + 1,$$

tad

$$w(\zeta(z)) = \frac{1}{z+1}, \quad \zeta(w(z)) = \frac{1}{z} + 1, \quad w(\zeta(z)) \neq \zeta(w(z)).$$

Teorēma 9.7. *Daļveida lineārais attēlojums attēlo riņķa līniju vai taisni par riņķa līniju vai taisni.*

Pierādījums. Vispirms apskatām lineāru attēlojumu $w = az + b$, $a \neq 0$. Dotais attēlojums reducējās uz paralēlo pārnesi, rotāciju un homotētiju. Seko, lineārais attēlojums attēlo riņķa līniju par riņķa līniju un taisni par taisni.

Ja daļveida lineārais attēlojums ir formā

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

un nav lineārs attēlojums ($c \neq 0$), tad to var uzrakstīt formā

$$w = A + \frac{B}{z + z_0},$$

kur

$$A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c^2} \text{ un } z_0 = \frac{d}{c}.$$

Tāpēc daļveida lineāro attēlojumu ir sekojošu trīs attēlojumu kompozīcija

$$\zeta = z + z_0, \quad \eta = \frac{1}{\zeta}, \quad w = a + b\eta.$$

Pirmajam un trešajam attēlojumam ir riņķa īpašības. Atliek pierādīt, ka otram attēlojumam, t.i. attēlojumam

$$w = \frac{1}{z}$$

ir riņķa īpašība.

Jebkuras riņķa līnijas vai taisnes vienādojums kompleksajā plaknē, kur $z = x + \mathrm{i}y$, ir formā

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0.$$

Ja $\alpha = 0$, tad iegūstam taisnes vienādojumu. Tā kā

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}, \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

tad vienādojumu var uzrakstīt formā

$$\alpha z\bar{z} + Dz + \overline{Dz} + \delta = 0,$$

kur $D = \dfrac{\beta - \mathrm{i}\gamma}{2}$. Ievietojot pēdējā vienādojumā $z = \dfrac{1}{w}$ iegūstam

$$\delta w\overline{w} + \overline{D}w + D\overline{w} + \alpha = 0.$$

Seko, riņķa līnija (taisne, ja $\alpha = 0$ attēlojās), par riņķa līniju (taisni, ja $\delta = 0$). $\square$

Atzīmēsim, ka daļveida lineārais attēlojums, kur

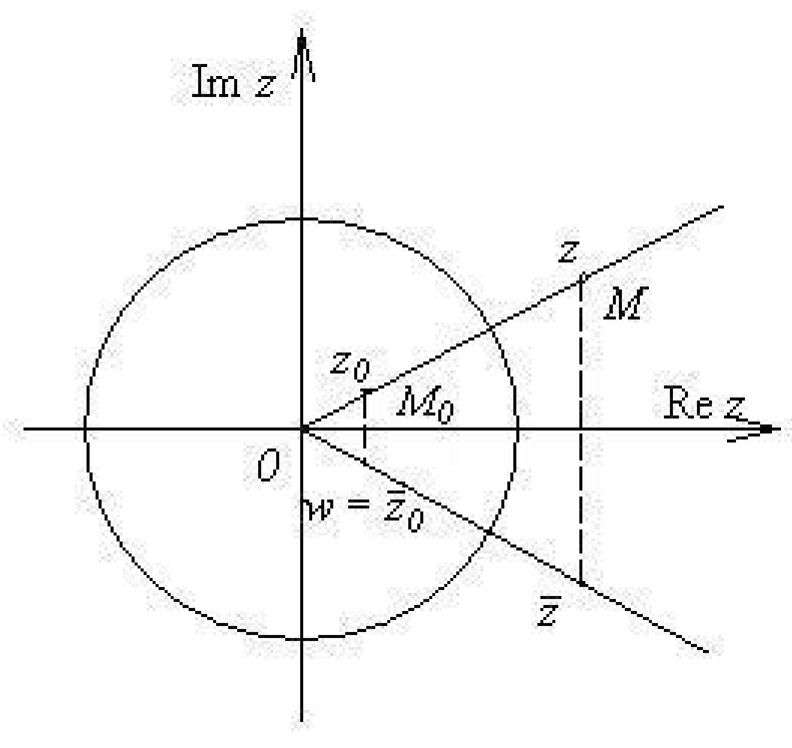
$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

attēlo riņķa līnijas un taisnes, kuras iet caur punktu $z = -\frac{d}{c}$, taisnēs, bet pārējās riņķa līnijas un taisnes par riņķa līnijām.

Tālāk uzskatīsim, ka taisne ir riņķa līnija ar bezgalīgi lielu rādiusu. Tāpēc riņķveida īpašību var īsāk formulēt sekojoši: daļveida lineārais attēlojums attēlo riņķa līnijas par riņķa līnijām.

Simetriju pret riņķa līniju elementārajā ģeometrijā definē sekojoši. Pieņemam, ka γ ir riņķa līnija ar rādiusu R un centru koordinātu sākuma punktā O.

Definīcija 9.7. Punkti M un M^* ir *simetriski attiecībā pret riņķa līniju* γ, ja tie atrodas uz viena stara, kas iziet no punkta O un $OM \cdot OM^* = R^2$.



Zīm. 9.1 Simetriskie punkti pret riņķa līniju

Katrs riņķa līnijas γ punkts ir pats sev simetrisks.

Tādā veidā kompleksajā plaknē punkti z un z^* ir simetriski attiecībā pret riņķa līniju

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R\}$$

ja tie atrodas uz viena stara, kurš iziet no punkta a un $|z-a| \cdot |z^*-a| = R^2$. Punkts $z = \infty$ attiecība pret riņķa līniju γ ir simetrisks ar punktu $z = a$ – riņķa līnijas centru.

No simetrisko punktu definīcijas izriet, ka simetriskie pret riņķa līniju $|z| = R$ punkti z un z^* ir saistīti ar vienādību

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}},$$

tai skaitā simetriskie punkti attiecībā pret vienības riņķa līniju apmierina sakarību

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Tā kā punkti z un $\bar{z}$ ir simetriski pret reālo skaitļu asi, tad punktu $\dfrac{1}{z}$ no punkta iegūst divu simetriju rezultātā: simetrija attiecībā pret reālo asi un simetrija pret vienības riņķa līniju.

Tātad simetriskie pret riņķa līniju $|z-a| = R$ punkti z un z^* ir saistīti ar sakarību

$$z^* = a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}.$$

Teorēma 9.8. *Eksistē viens vienīgs daļveida lineārs attēlojums, kurš trīs dažādus punktus z_1, z_2, z_3 attēlo atbilstoši par punktiem w_1, w_2, w_3. Šo attēlojumu var atrast ar formulas*

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \tag{9.4}$$

palīdzību.

Pierādījums. Formula (9.4) definē daļveida lineāru funkciju f. Bez tam $f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$.

Pierādīsim, ka ja daļveida lineāra funkcija f_1 apmierina tos pašus nosacījumus, ko funkcija f, t.i. $w_k = f_1(z_k)$, $k = 1,2,3$, tad $f(z) = f_1(z)$. Pieņemam, ka ψ ir funkcijas f inversā funkcija. Tad $\psi \circ f_1$ arī ir daļveida lineāra funkcija

$$\psi(f_1(z)) = \frac{az+b}{cz+d}$$

un $\psi(f_1(z_k)) = z_k$, t.i.

$$\frac{az_k+b}{cz_k+d} = z_k, \quad k = 1,2,3.$$

No šejienes iegūstam

$$cz_k^2 + (d-a)z_k - b = 0,$$

t.i., kvadrātvienādojumam $cz^2+(d-a)z-b=0$ ir trīs dažādas saknes. Seko, $c=0$, $d=a$, $b=0$ un $\psi(f_1(z)) = z$, no kurienes $f_1 = f$. □

Sekas 9.1. *Funkcija f, kuru definē formula* (9.4)*, konformi attēlo riņķi, kura robeža iet caur punktiem z_1, z_2, z_3 par riņķi, kura robeža iet caur punktiem w_1, w_2, w_3.*

Šeit un turpmāk "riņķis" - riņķa līnijas iekšiene vai riņķa līnijas ārpuse vai pusplakne.

Piezīme 9.4. No teorēmas pierādījuma izriet, ka daļveida lineāram attēlojumam f ir ne vairāk kā divi nekustīgi punkti z_1, z_2 tādi, ka $f(z_k) = z_k$, $k = 1,2$, ja $f(z) \neq z$. Atbilstošo daļveida lineāro attēlojumu nosaka formula

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = A\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

kur A ir komplekss skaitlis.

Piemērs 9.3. Jebkurš daļveida lineārs attēlojums, kurš punktu z_1 attēlo par $w=0$ un punktu z_2 par bezgalīgi tālo punktu $w=\infty$ ir formā

$$w = A\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Piemērs 9.4. Daļveida lineārs attēlojums

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$$

attēlo augšējo komplekso pusplakni $\operatorname{Im} z > 0$ par riņķi $|w| < 1$, kur $\operatorname{Im} z_0 > 0$ un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pierādījums. Pieņemam, ka daļveida lineārais attēlojums f attēlo pusplakni $\operatorname{Im} z > 0$ par riņķi $|w| < 1$ tā, ka $w(z_0) = 0$ un $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Tad saskaņā ar simerijas saglabāšanās īpašību $f(\overline{z_0}) = \infty$ un tātad

$$w = f(z) = A\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}.$$

Pierādīsim, ka $|A| = 1$. Tā kā reālās ass punkti pāriet par vienības riņķa līniju, t.i. $|w| = 1$ pie reāliem $z = x$, tad

$$1 = \left|A\frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}}\right| = |A|\frac{|x - z_0|}{|x - \overline{z_0}|} = |A|,$$

jo $|x - z_0| = |x - \overline{z_0}|$. Seko, $A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

Atrodam

$$f'(z) = A\frac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})^2}, \quad f'(z_0) = \frac{A}{z_0 - \overline{z_0}}.$$

Seko, $\arg f'(z_0) = \alpha - \frac{\pi}{2}$. $\square$

Piezīme 9.5. Katrs konforms augšējās pusplaknes $\operatorname{Im} z > 0$ attēlojums uz vienības riņķi $|w| < 1$ ir formā

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}.$$

Tiešām. saskaņā ar Rīmana teorēmu eksistē viens vienīgs konforms pusplaknes $\operatorname{Im} z > 0$ attēlojums $z \mapsto w$ uz riņķi $|w| < 1$, kurš apmierina nosacījumus $w(z_0) = 0$ un $\arg w'(z_0) = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Seko, šis attēlojums sakrīt ar konstruēto daļveida lineāro attēlojumu.

Piemērs 9.5. Daļveida lineārs attēlojums $z \mapsto w$, kurš attēlo vienības riņķi $|z| < 1$ par vienības riņķi $|w| < 1$ ir formā

$$w = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$

kur $|z_0| < 1$ un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pierādījums. Pieņemam, ka daļveida lineāra funkcija $z \mapsto w$ attēlo vienības riņķi $|z| < 1$ par vienības riņķi $|w| < 1$ tā, ka $w(z_0) = 0$ un $|z_0| < 1$. Tad saskaņā ar simetrijas likumu $w\left(\frac{1}{\overline{z_0}}\right) = \infty$. Seko attēlojums ir formā

$$w = A\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}.$$

Pierādīsim, ka $|A| = 1$. Tā kā vienības riņķa līnijas punkti pāriet vienības riņķa līnijas punktos, t.i. $|w| = 1$ ja $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, tad

$$1 = \left|A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_0}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z_0}}\right| = |A|\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_0|}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-\overline{z_0}|} = |A|,$$

jo $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_0| = |\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_0}| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-\overline{z_0}|$. Seko $A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ un iegūstam vajadzīgo formulu. □

Piemērs 9.6. Daļveida lineārs attēlojums $z \mapsto w$, kurš attēlo pusplakni $\operatorname{Im} z >$ par pusplakni $\operatorname{Im} w > 0$ ir formā

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

kur $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ un $ad-bc > 0$.

Pierādījums. Pieņem, ka daļveida lineārais attēlojums $z \mapsto w$ attēlo pusplakni $\operatorname{Im} z >$ par pusplakni $\operatorname{Im} w > 0$. Apskatām trīs dažādus punktus z_1, z_2, z_3 uz apgabala $\operatorname{Im} z >$ robežas, t.i. z_k dažādi reāli skaitļi. Šo punktu attēli ir apgabala $\operatorname{Im} w > 0$ punkti, t.i. $w_k = w(z_k)$ - reāli skaitļi. Tā kā daļveida lineāras funkcijas koeficientus nosaka reāli skaitļi $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$, tad a,b,c,d ir reāli skaitļi.

Pierādīsim, ka $ad-bc > 0$. Saskaņā ar konformu attēlojumu robežu atbilstības principu attēlojums f reālo asi $\operatorname{Im} z = 0$ attēlo par reālo asi $\operatorname{Im} w = 0$ saglabājot orientāciju. Seko, pie reāliem $z = x$ iegūstam $\arg w'(x) > 0$, jo

$$w'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0,$$

no kurienes $ad-bc > 0$. □

9.4 Kvadratiskā funkcija

Apskatīsim funkcijas $z \mapsto w = z^2$ īpašības.

Atgādinam, ka funkcija $z \mapsto z^2$ ir vienlapaina apgabalā D tad un tikai tad, ja nav divi atšķirīgi punkti $z_1 \neq z_2$ tādi, ka

$$z_1 = -z_2.$$

Vienādība nozīmē, ka punkti z_1 un z_2 ir simetriski pret $z = 0$. Tādejādi funkcija $z \mapsto z^2$ ir vienlapaina apgabalā D tad un tikai tad, ja dotais apgabals nesatur nevienu pāri simetrisku pret $z = 0$ punktu.

Piemērs 9.7. Funkcija $z \mapsto z^2$ konformi attēlo augšējo pusplakni $\operatorname{Im} z > 0$ par apgabalu G – plakni ar griezumu pa staru $[0, \infty)$.

Apskatām par ko $z \mapsto z^2$ attēlo polāro koordinātu tīklu. Līnijas $\arg z = const$ un $|z| = const$ izveido koordinātu tīklu z plaknē. Attēlojums $z \mapsto z^2$ savstarpēji viennozīmīgi attēlo:

- staru $\arg z = \alpha$ par staru $\arg w = 2\alpha$;
- riņķa līnijas loku $|z| = \rho$, $\alpha \le \arg z \le \beta$, kur $\beta - \alpha < \pi$ par riņķa līnijas loku $|w| = 2\rho$, $2\alpha \le \arg z \le 2\beta$.

Piemērs 9.8. No šīm īpašībām izriet, ka funkcija $z \mapsto z^2$ attēlo gredzena sektoru

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z| < \rho_2,\ 0 < \arg z < \alpha \le \pi,\ 0 \le \rho_1 < \rho_2 \le \infty\}$$

par gredzena sektoru

$$f(S) = \{w \in \mathbb{C} \mid \rho_1^2 < |w| < \rho_2^2,\ 0 < \arg z < 2\alpha\}.$$

Literatūra

1. Lūsis, A. Kompleksā mainīgā funkciju teorija. I. - VII. Rīga, LVU, (1966-1977)
2. Riekstiņš, E. Matemātiskās fizikas metodes. Rīga, Zvaigzne, (1969)
3. Cīrulis, T., Cīrule, D. Kompleksā mainīgā funkciju teorija. I, II. Rīga, LU, (2003)
4. Freitag, E., Busam, R. Complex analysis. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, (2005)
5. Agarwal, R, A., Perera, K., Pinelas, S., An Introduction to Complex Analysis. Springer, (2011)
6. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. Москва, Наука, (1967, 1968)
7. Сидоров, Ю.В., Федорюк, М.В., Шабанин, М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва, Наука, (1989)
8. Свешников, А.Г., Тихонов, А.Н. Теория функцй комплексной переменой. Москва, Наука, (1979)
9. Волковыский, Л.И., Лунц, Г.Л., Араманович, И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Москва, Физматлит, (2002)
10. Ефграфов, М.А., Сидоров, Ю.В., Федорюк, М.В., Шабанин, М.И., Бежанов, К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. Москва, Наука, (1972)