Andrejs Reinfelds

Nelineāru vienādojumu atrisināmība

Latvijas Universitāte

Saturs

Nodaļa 1
Saspiedošo attēlojumu (Banaha) princips

Banaha saspiešanas princips ir viens no vienkāršākiem un reizē vispārīgākiem elementāriem rezultātiem nekustīgo punktu teorijā. Tas balstās uz iterāciju procesu, ļauj atrast aproksimāciju ar vēlamo precizitāti un, vēl vairāk, aprēķināt nepieciešamo iterāciju skaitu vēlamās precizitātes iegūšanai.

1.1 Pilna metriska telpa

Aplūkosim dažus pamatjēdzienus un to īpašības, kas ir nepieciešamas tālākajā izklāstā.

Definīcija 1.1. *Metriska telpa* ir tāda kopa $\mathbf{E}$, kurā jebkuriem diviem tās elementiem (punktiem) $x, x' \in \mathbf{E}$ ir definēts attēlojums[1]

$$\rho : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$$

ar īpašībām:

1. $\rho(x,x') = 0$ tad un tikai tad, ja $x = x'$;
2. $\rho(x,x') = \rho(x',x)$ – *simetrijas aksioma*;
3. jebkuriem trīs kopas $\mathbf{E}$ elementiem $x, x', x'' \in \mathbf{E}$ izpildās nevienādība – *trīsstūra aksioma*

$$\rho(x,x') \leq \rho(x,x'') + \rho(x',x'').$$

Attēlojumu ρ sauc par *attālumu* (*metriku*).

[1] $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Piemērs 1.1. Eiklīda[2] telpā $\mathbb{R}^n$ – n dimensionālā lineāra (vektoru) telpā ar elementiem (punktiem) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ metriku var ievest vairākos veidos:

a) $\rho(x,x') = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_j')^2}$– *standarta Eiklida metrika*,

b) $\rho(x,x') = \max_{1\leq j\leq n} |x_j - x_j'|$ – *maksimuma metrika*,

c) $\rho(x,x') = \sum_{j=1}^n |x_j - x_j'|$ – *Manhetenas* (*taxicab*) *metrika*.

Visas trīs minētās metrikas ir ekvivalentas, tās inducē n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$ vienu un to pašu topoloģiju. Vispārīgā gadījumā dotā kopā var definēt arī neekvivalentas metrikas.

Attālums ρ atļauj metriskā telpā ievest robežas jēdzienu. Apskatam bezgalīgu metriskas telpas elementu virkni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$.

Definīcija 1.2. Metriskas telpas elementu $x \in \mathbf{E}$ sauc par metriskas telpas bezgalīgas elementu virknes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$ *robežu*, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu naturālo skaitli $N = N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Elementu virkni, kurai eksistē robeža sauc par *konverģentu* virkni.

Teorēma 1.1. *Katrai konverģentai virknei ir tikai viena vienīga robeža.*

Pierādījums. Pieņemam pretējo, tas ka virknei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$ ir divas atšķirīgas robežas $x, x' \in \mathbf{E}$, $x \neq x'$. Tad katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu N, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādības $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ un $\rho(x_n, x') < \varepsilon/2$. Izlietojot trīsstūra aksiomu iegūstam

$$\rho(x,x') \leq \rho(x_n,x) + \rho(x_n,x') < \varepsilon$$

ja tikai $n > N$. Ievērojot, ka $\varepsilon > 0$ var būt pēc patikas mazs, iegūstam, ka $\rho(x,x') = 0$ jeb $x = x'$. □

Tātad metriska telpa ir Hausdorfa tipa topoloģiska telpa.

Definīcija 1.3. Metriskas telpas $\mathbf{E}$ elementu virkni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$ sauc par *fundamentālu*, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast tādu naturālo skaitli $N = N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$ un $m > N$ izpildās nevienādība

[2] Eiklīds arī Aleksandrijas Eiklīds, ⋆ap 330. g. p.m.e. Atēnās, †ap 280. g. p.m.e., sengrieķu matemātiķis, ģeometrijas kā zinātnes pamatlicējs. Darbojās Aleksandrijā, kur izveidojis matemātikas skolu. Nozīmīgākais Eiklīda darbs ir "Elementi" (13 grāmatas), kur aplūkota planimetrija, stereometrija un skaitļu teorija

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorēma 1.2. *Konverģenta elementu virkne ir fundamentāla.*

Pierādījums. Pierādījums izriet no trīsstūra nevienādības

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m).$$

□

Definīcija 1.4. Metriska telpa $\mathbf{E}$ ir *pilna metriska telpa*, ja katrai fundamentālai virknei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$ eksistē robeža x un šī robeža $x \in \mathbf{E}$.

Piemērs 1.2. n-dimensiju Eiklīda telpa $\mathbb{R}^n$ ar standarta Eiklīda metriku ir pilna metriska telpa.

Piemērs 1.3. Visu racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$ ar standarta Eiklīda metriku nav pilna metriska telpa. Piemēram, var konstruēt fundamentālo virkni, sastāvošu no decimāldaļām, kuras robeža ir iracionāls skaitlis $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Piemērs 1.4. Banaha[3] telpa ir pilna metriska telpa. Attālumu definē ar normas palīdzību $\rho(x, x') = \|x - x'\|$.

Piemērs 1.5. Hilberta telpa ir pilna metriska telpa. Normu Hilberta telpā definē ar skalārā reizinājuma palīdzību $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Piemērs 1.6. Visu slēgtā galīgā intervālā $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definēto nepārtraukto funkciju $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kopu apzīmējam ar $\mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$. Dotā kopa ir pilna metriska telpa, ja attālumu ieved ar suprēma normu, t.i.

$$\rho(x, x') = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - x'(t)|.$$

Šajā gadījumā konverģence ir vienmērīga attiecībā pret $t \in [a,b]$ un tādēļ arī robežfunkcija ir nepārtraukta slēgtā galīgā intervālā $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Teorēma 1.3. *Katru metrisku telpu var papildināt līdz pilnai metriskai telpai saglabājot doto metriku.*

Pierādījums. Skat. [4]. □

[3] Stefan Banach, ⋆1892.30.III, Krakova, Polija, † 1945.31.VIII, Ļvova, Ukraina, poļu matemātiķis modernās funkcionālanalīzes izveidotājs, Ļvovas universitātes profesors matemātikā

1.2 Banaha princips

Apskatam attēlojumu $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$.

Definīcija 1.5. Attēlojumu $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ sauc par *Lipšica*[4], ja eksistē tāda nenegatīva konstante $q \geq 0$ (Lipšica konstante), ka visiem $x, x' \in \mathbf{E}$

$$\rho(f(x), f(x')) \leq q\rho(x, x').$$

Definīcija 1.6. Lipšica attēlojumu $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ sauc par *saspiedošu*, ja Lipšica konstante $q < 1$.

Atzīmējam, ka jebkurš Lipšica attēlojums f ir vienmērīgi nepārtraukts attēlojums metriskā telpā $\mathbf{E}$.

Definīcija 1.7. Punktu $x^* \in \mathbf{E}$ sauc par attēlojuma f *nekustīgo punktu*, ja izpildās vienādība $f(x^*) = x^*$.

Tādā veidā attēlojuma f nekustīgie punkti ir vienādojuma

$$x = f(x)$$

atrisinājumi.

Piemērs 1.7. Eksistē nepārtraukti attēlojumi, kuriem nav nekustīgu punktu. Piemēram, translācija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur

$$f(x) = x + x_0, \quad x_0 \neq 0.$$

Teorēma 1.4 (Banaha princips). *Saspiedošam attēlojumam $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ pilnā metriskā telpā $\mathbf{E}$ ir viens un tikai viens nekustīgais punkts un šo nekustīgo punktu var atrast ar pakāpenisko tuvinājumu metodi pie jebkura sākuma elementa $x_0 \in \mathbf{E}$.*

Pierādījums. Izvēlamies patvaļīgu metriskās telpas $\mathbf{E}$ elementu $x_0 \in \mathbf{E}$. Definējam pakāpenisko tuvinājumu virkni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekurenti ar sakarībām $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tā kā f ir saspiedošs attēlojums, tad

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}).$$

---

[4] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, ⋆1832.14.V, Königsberg, Prūsija, †1903.7.X, Bonna, Vācija, vācu matemātiķis, profesors Bonnas universitātē. Nozīmīgi darbi matemātiskajā analīzē, diferenciālvienādojumos, teorētiskajā mehānikā un algebrā

Atkārtojot šo procedūru n reizes, iegūstam

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \rho(x_1, x_0).$$

Pierādām, ka iegūtā virkne ir fundamentāla. Pieņemam, ka $m > n$. Tad

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^n)\rho(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0). \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Seko $\rho(x_m, x_n) \to 0$, ja $m \to +\infty$ un $n \to +\infty$. Iegūstam, ka pakāpenisko tuvinājumu virkne $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$ ir fundamentāla virkne pilnā metriskā telpā $\mathbf{E}$ un tā konverģē uz robežu x^* un šī robeža $x^* \in \mathbf{E}$.

Attēlojums f ir definēts visā metriskā telpā, un tātad arī elements $f(x^*) \in \mathbf{E}$. Atzīmējam, ka

$$\rho(x_{n+1}, f(x^*)) = \rho(f(x_n), f(x^*)) \leq q\rho(x_n, x^*).$$

Nevienādības labā puse tiecas uz nulli, kad $n \to +\infty$, seko

$$\rho(x_{n+1}, f(x^*)) \to 0,$$

ja $n \to +\infty$. No šejienes izriet, ka arī $f(x^*)$ ir pakāpenisko tuvinājumu virknes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbf{E}$ robeža. Tā kā konverģentai virknei pilnā metriskā telpā ir tikai viena vienīga robeža, tad

$$x^* = f(x^*)$$

vai citiem vārdiem elements x^* ir attēlojuma f nekustīgais punkts.

Nekustīgā punkta unitāte izriet no saspiešanas nosacījuma. Ja $x^*, \tilde{x} \in \mathbf{E}$ ir divi attēlojuma f nekustīgie punkti, tad

$$\rho(x^*, \tilde{x}) = \rho(f(x^*), f(\tilde{x})) \leq q\rho(x^*, \tilde{x}).$$

No šejienes $\rho(x^*, \tilde{x}) = 0$, t.i. $x^* = \tilde{x}$. $\square$

Definīcija 1.8. Metriskas telpas $\mathbf{E}$ apakškopa $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir *slēgta*, ja katras konverģentas virknes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \Omega \subset \mathbf{E}$ robeža x arī pieder Ω, t.i. $x \in \Omega$.

Sekas 1.1. *Ja $f\colon \Omega \to \mathbf{E}$ ir saspiedošais attēlojums, $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir pilnas metriskas telpas $\mathbf{E}$ slēgta apakškopa un $f(\Omega) \subset \Omega$, tad attēlojumam f ir viens un tikai viens nekustīgais punkts $x^* \in \Omega$.*

Pierādījums. Pierādījums izriet no fakta, ka jebkura pilnas metriskas telpas slēgta apakškopa arī ir pilna metriska telpa. Bez tam par sākuma tuvinājumu var ņemt jebkuru $x_0 \in \Omega$.

Sekas 1.2. *Pastāv novērtējums*

$$\rho(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0). \tag{1.2}$$

Pierādījums. Pārejot uz robežu (1.1), kad $m \to +\infty$, iegūstam n-tā tuvinājuma kļūdas novērtējumu (1.2). Bez tam no novērtējuma redzams, ka precizitāte uzlabojas, ja veiksmīgi ir izvēlēts sākuma tuvinājums $x_0 \in \mathbf{E}$.

Dažreiz praksē ir lietderīgi lietot sekojošu Banaha principa vispārinājumu. Katram naturālam $p \in \mathbb{N}$ varam definēt apskatāmā attēlojuma $f\colon \Omega \to \Omega$ p-to iterāciju. Apzīmējām ar $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$. Ja f^{p-1} ir jau definēts, tad $f^p = f \circ f^{p-1}$.

Sekas 1.3. *Pieņemam, ka $f\colon \Omega \to \Omega$, kur $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir pilnas metriskas telpas $\mathbf{E}$ slēgta apakškopa un $f^p\colon \Omega \to \Omega$ pie kāda naturāla $p \in \mathbb{N}$ ir saspiedošais attēlojums, tad attēlojumam f ir viens un tikai viens nekustīgais punkts $x^* \in \Omega$.*

Pierādījums. Saskaņā ar Sekām 1.1 saspiedošam attēlojumam f^p ir viens un tikai viens nekustīgais punkts $x^* \in \Omega$. Tā kā attēlojumi f un f^p savstarpēji komutē, tad

$$f^p \circ f(x^*) = f \circ f^p(x^*) = f(x^*).$$

Tas nozīmē, ka arī punkts $f(x^*)$ ir attēlojuma f^p nekustīgais punkts un tā kā attēlojumam f^p ir viens vienīgs nekustīgais punkts, tad

$$f(x^*) = x^*.$$

No šejienes izriet, ka $x^* \in \Omega$ ir arī attēlojuma f nekustīgais punkts. Pierādam, ka x^* ir attēlojuma f vienīgais nekustīgais punkts. Pieņemam pretējo, tas ir $\tilde{x} \in \Omega$, $\tilde{x} \neq x^*$, bet $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$, Seko $f^p(\tilde{x}) = \tilde{x}$ vai citiem vārdiem $\tilde{x}$ ir arī attēlojuma f^p nekustīgais punkts. Seko $x^* = \tilde{x}$.
□

Teorēmā 1.4 saspiešanas nosacījumu vispārīgi nevar aizvietot ar vājāku nosacījumu

$$\rho(f(x), f(x')) < \rho(x, x'). \tag{1.3}$$

Apskatam attēlojumu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur

$$f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Var ievērot, ka attēlojumam f nav nekustīgā punkta $\left(\arctan x \neq \frac{\pi}{2}\right)$. Savukārt, izlietojot vidējās vērtības teorēmu, iegūstam

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') = \frac{c^2}{1+c^2}(x - x'),$$

kur $c \in (x, x')$ un $x < x'$. No šejienes

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

Tomēr, ja izpildās nevienādība (1.3), tad attēlojumam f vispār nav nekustīgo punktu vai ir tikai viens nekustīgais punkts.

1.3 Piemēri

1.3.1 Košī problēma diferenciālvienādojumu sistēmai

Apskatām Košī[5] problēmu diferenciālvienādojumu sistēmai

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.4}$$

kur $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ nepārtraukts attēlojums, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vaļējs apgabals un $(t_0, x_0) \in G$.

Lemma 1.1. *Košī problēmas* (1.4) *atrisināmība ir ekvivalenta integrālvienādojuma*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \tag{1.5}$$

atrisināmībai.

---

[5] Augustin Louis Cauchy, ⋆1789.21.VIII, Parīze, Francija, †1857.23.V, Sceaux (Parīzes apkārtnē), Francija; viens no ievērojamākiem franču matemātiķiem, nozīmīgi darbi reālā un kompleksā mainīgā funkciju teorijā, diferenciālvienādojumos, mehānikā. 789 matemātisku publikāciju autors, viņa kopotie raksti izdoti 27 sējumos

Pierādījums. Skat. [3]. □

Teorēma 1.5 (Pikāra – Lindelēfa teorēma). [6] [7] *Ja attēlojums f ir nepārtraukts un attēlojums $f(t,\cdot)$ ir Lipšica*

$$|f(t,x)-f(t,x')| \le L|x-x'|,$$

tad eksistē tāds pietiekoši mazs skaitlis $h>0$, ka Košī problēmai (1.4) *slēgtā intervālā $[t_0-h, t_0+h]$ ir viens vienīgs atrisinājums.*

Pierādījums. Lemma 1.1 ļauj Košī problēmas (1.4) atrisināmību reducēt uz integrālvienādojuma (1.5) atrisināmību.

Izvēlamies divus pozitīvus skaitļus $a>0$ un $b>0$ tā, lai slēgtais ierobežotais apgabals D piederētu G, t.i.

$$D = \{(t,x) \mid |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b\} \subset G.$$

Saskaņā ar Veierštrāsa[8] teorēmu attēlojuma f nepārtrauktības dēļ slēgtā ierobežotā apgabalā (mūsu gadījumā kompaktā) eksistē

$$M = \max_{(t,x)\in D} |f(t,x)| < +\infty.$$

Apzīmējam ar

$$h = \min(a, bM^{-1}).$$

Apskatām visu slēgtā galīgā intervālā $[t_0-h, t_0+h] \subset \mathbb{R}$ definēto nepārtraukto funkciju $x\colon [t_0-h, t_0+h] \to \mathbb{R}^n$ kopu, kuru apzīmējam ar $\mathbf{C}([t_0-h, t_0+h] \to \mathbb{R}^n)$. Dotā kopa ir pilna metriska telpa, ja attālumu ieved ar formulu

$$\rho_1(x,x') = \sup_{|t-t_0|\le h} \left\{ e^{-L|t-t_0|} |x(t)-x'(t)| \right\}. \qquad (1.6)$$

Šajā metriskajā telpā konverģence ir vienmērīga attiecībā pret t un tādēļ arī robežfunkcija ir nepārtraukta slēgtā galīgā intervālā $[t_0 -$

[6] Charles Émile Picard, ⋆1856.24.VII, Parīze, Francija, †1941.11.XII, Parīze; franču matemātiķis, beidzis Augstāko Normālskolu, Parīzes universitātes profesors, nozīmīgi darbi analīzē, funkciju teorijā, diferenciālvienādojumos, analītiskā ģeometrijā. Viņš attīstīja pakāpenisko tuvinājumu metodi

[7] Ernst Leonard Lindelöf, ⋆1870.7.III, Helsinki, Somija, †1946.4.VI Helsinki; somu matemātiķis, profesors matemātikā, nozīmīgi darbi topoloģijā un diferenciālvienādojumos

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, ⋆1815.31.X, Ostenfelde, Vācija, †1897.19.II, Berlīne, Vācija; vācu matemātiķis, modernās funkciju teorijas izveidotājs

$h, t_0 + h] \subset \mathbb{R}$. Atzīmējam, ka attālums (1.6) ir ekvivalents standarta suprema attālumam

$$\rho(x, x') = \sup_{|t-t_0| \leq h} |x(t) - x'(t)| \tag{1.7}$$

un inducē vienu un to pašu topoloģiju metriskā telpā $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$ un attāluma (1.6) priekšrocība ir tā, ka ļauj teorēmas formulējumā atbrīvoties no tehniskiem ierobežojumiem saistītiem ar Lipšica konstanti L (lielums $h > 0$ nav atkarīgs no Lipšica konstantes L).

Apskatām pilnās metriskās telpas $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$ apakškopu Ω, kur

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \sup_{|t-t_0| \leq h} |x(t) - x_0| \leq b \right\}.$$

Seko Ω ir slēgta apakškopa, un vēl vairāk, Ω ir arī pilna metriskā telpa ar telpas $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$ inducēto topoloģiju.

Apskatam attēlojumu $F\colon \Omega \to \Omega$, kur

$$Fx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Attēlojums $F\colon \Omega \to \Omega$ ir korekti definēts, jo Fx ir nepārtraukts un $|F(x(t)) - x_0| \leq Mh \leq b$. Bez tam

$$\begin{aligned}
e^{-L|t-t_0|}|Fx(t) - Fx'(t)| &= e^{-L|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, x'(s)))\,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq Le^{-L|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^{t} |x(s) - x'(s)|\,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq Le^{-L|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^{t} \rho_1(x, x')|e^{L|s-t_0|}\,\mathrm{d}s \right| \\
&= e^{-L|t-t_0|}\rho_1(x, x')(e^{L|t-t_0|} - 1) = (1 - e^{-L|t-t_0|})\rho_1(x, x')
\end{aligned}$$

$$\leq (1 - e^{-Lh})\,\rho_1(x,x') = q\rho_1(x,x').$$

Tātad

$$\rho_1(Fx,Fx') \leq q\rho_1(x,x')$$

un F ir saspiedošais attēlojums, jo $q = (1 - e^{-Lh}) < 1$. Seko integrālvienādojumam (1.5) eksistē viens vienīgs atrisinājums, kas saskaņā ar Lemmu 1.1 ir arī Košī problēmas (1.4) vienīgais atrisinājums. □

Piezīme 1.1. Precīzāk novērtējot starpību $|Fx(t) - Fx'(t)|$, iegūstam

$$|Fx(t) - Fx'(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,x'(s)))\,\mathrm{d}s\right|$$

$$\leq L\left|\int_{t_0}^{t} |x(s) - x'(s)|\,\mathrm{d}s\right| \leq L\rho(x,x')\left|\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\right| \leq L\rho(x,x')|t-t_0|.$$

Tad

$$|F^2x(t) - F^2x'(t)| \leq L\left|\int_{t_0}^{t} |Fx(s) - Fx'(s)|\,\mathrm{d}s\right|$$

$$\leq L^2\rho(x,x')\left|\int_{t_0}^{t} (s-t_0)\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{L^2|t-t_0|^2}{2!}\rho(x,x').$$

Analoģiski,

$$|F^px(t) - F^px'(t)| \leq \frac{L^p|t-t_0|^p}{p!}\rho(x,x').$$

Seko

$$\rho(F^px, F^px') \leq \frac{(Lh)^p}{p!}\rho(x,x').$$

Tā kā $\lim_{p\to+\infty} \frac{(Lh)^p}{p!} = 0$, tad eksistē pietiekoši liels $p \in \mathbb{N}$ tāds, ka $\frac{(Lh)^p}{p!} \leq q < 1$ un tātad attēlojums $F^p\colon \Omega \to \Omega$ ir saspiedošais attēlojums metriskā telpā Ω, kur attālums definēts ar formulu (1.7). Saskaņā ar Sekām 1.3 integrālvienādojumam (1.5) eksistē viens vienīgs atrisinājums, kas saskaņā ar Lemmu 1.1 ir arī Košī problēmas (1.4) vienīgais atrisinājums. $\square$

1.3.2 Nelineāra integrālvienādojuma atrisinājuma eksistence

Aplūkojam nelineāru integrālvienādojumu

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s, \tag{1.8}$$

kur kodols $K\colon [a,b] \times [a,b] \times \overline{\mathbf{B}_r^n} \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathbf{B}_r^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ ir slēgta rādiusa $r > 0$ n-dimensiju lode ar centru koordinātu sākuma punktā un bez tam kodols apmierina Lipšica nosacījumus attiecībā pret trešo argumentu

$$|K(t,s,x) - K(t,s,x')| \leq L|x - x'|.$$

Saskaņā ar Veierštrāsa teorēmu kodola K nepārtrauktības dēļ slēgtā ierobežotā apgabalā (mūsu gadījumā kompaktā) eksistē

$$M = \max_{(t,s,x)\in[a,b]\times[a,b]\times\overline{\mathbf{B}_r^n}} |K(t,s,x)| < +\infty.$$

Teorēma 1.6 (Ņemicka teorēma). *Ja*

$$|\lambda| \leq \min\left\{\frac{1}{L(b-a)}, \frac{r}{M(b-a)}\right\},$$

tad integrālvienādojumam (1.8) *eksistē viens vienīgs atrisinājums.*

Pierādījums. Apskatām visu slēgtā galīgā intervālā $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definēto nepārtraukto funkciju $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kopu, kuru apzīmējam ar $\mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$. Slēgtā apakškopa Ω, kur

$$\Omega = \{x \in \mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n) \mid |x(t)| \leq r\}$$

ir arī pilna metriskā telpa ar metriskas telpas $\mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ inducēto topoloģiju.

Apskatam attēlojumu $F\colon \Omega \to \Omega$, kur

$$Fx(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Attēlojums $F\colon \Omega \to \Omega$ ir korekti definēts, jo Fx ir nepārtraukts un

$$|Fx(t)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq |\lambda| M(b-a) \leq r.$$

Bez tam

$$|Fx(t) - Fx'(t)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t,s,x(s)) - K(t,s,x'(s))|\,\mathrm{d}s$$

$$\leq |\lambda| L(b-a)\rho(x,x').$$

Tātad

$$\rho(Fx,Fx') \leq |\lambda| L(b-a)\rho(x,x')$$

un F ir saspiedošais attēlojums, jo $|\lambda|L(b-a) < 1$. Seko integrālvienādojumam (1.8) eksistē viens vienīgs atrisinājums. $\square$

Nodaļa 2
Bola–Brauera teorēma simpleksam

2.1 Bola-Brauera teorēma viendimensijas gadījumā

Viendimensijas gadījumā Bola-Brauera teorēmu par nekustīgā punkta eksistenci var pierādīt izlietojot tikai nepārtrauktu funkciju īpašības.

Teorēma 2.1. *Nepārtrauktai skalārai funkcijai* $f\colon [a,b] \to [a,b]$ *eksistē nekustīgais punkts* $x^* \in [a,b]$*, t.i.* $f(x^*) = x^*$ *un* $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Pierādījums. Apskatam funkciju $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kur

$$g(x) = x - f(x).$$

Funkcija g ir nepārtraukta kā divu nepārtrauktu funkciju starpība. Tā kā $a < b$, tad $g(a) \leq 0$ un $g(b) \geq 0$. Ja $g(a) = 0$, tad punkts $a \in [a,b]$ ir nekustīgais punkts, t.i. $a = f(a)$ un pierādījums pabeigts. Ja $g(b) = 0$, tad analogi $b \in [a,b]$ ir nekustīgais punkts, jo $b = f(b)$

Tālāk apskatām atlikušo gadījumu, t.i. $g(a) < 0 < g(b)$. Saskaņā ar Bolcano teorēmu nepārtraukta skalāra funkcija pieņem jebkuru starpvērtību starp divām savām vērtībām, seko eksistē $x^* \in (a,b)$ tāds, ka $g(x^*) = 0$. Bet tas nozīmē, ka

$$x^* = f(x^*),$$

kas arī bija jāpierāda. $\square$

Dotā teorēma nedod atbildi par vienādojuma $f(x) = x$ atrisinājumu skaitu, t.i. nekustīgo punktu skaitu slēgtā intervālā $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

2.2 Simplekss, baricentriskās koordinātes

Bola-Brauera teorēmas pierādījums n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$ ir ievērojami sarežģītāks. Matemātiskajā literatūrā ir pazīstamas vairākas Bola-Brauera teorēmas pierādījuma metodes daudzdimensiju gadījumā. Mēs izlietosim, tā saukto kombinatorisko metodi, kura balstās uz simpleksu teoriju, Špernera un Borsuka lemmām.

Ievedīsim dažus jaunus jēdzienus un noskaidrosim to īpašības. Pieņemam, ka $x_j \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$

Definīcija 2.1. Punkti (elementi) $\{x_j\}_{j=0,1,\ldots,m}$ ir *afīni neatkarīgi*, ja abas vienādības

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 0 \quad \text{un} \quad \sum_{j=0}^{m} \lambda_j x_j = \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

izpildās reizē tikai tad, ja visi $\lambda_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Piemēram, trīs punkti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) ir afīni neatkarīgi, ja tie neatrodās uz vienas taisnes. Pretējā gadījumā tie ir afīni atkarīgi.

Pārveidojot vienādības (2.1), iegūstam, ka

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j x_j = x_0 \sum_{j=0}^{m} \lambda_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (x_j - x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (x_j - x_0) = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

t.i., starpības $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, …, $x_m - x_0$ ir lineāri neatkarīgas. Viegli ievērot, ka arī pārejās starpības

$$x_0 - x_k, \ldots, x_{k-1} - x_k, x_{k+1} - x_k, \ldots, x_m - x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

ir lineāri neatkarīgas, t.i. visi afīni neatkarīgie punkti savā starpā ir līdzvērtīgi.

Tā kā n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$ maksimālais lineāri neatkarīgo vektoru skaits ir n, tad maksimālais iespējamais afīni neatkarīgo punktu skaits n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$ ir $n + 1$.

Definīcija 2.2. Par *n-dimensiju simpleksu* sauc kopu

$$S^n = \left\{ x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j \,\middle|\, \lambda_j \geq 0,\ j = 0, 1, \ldots, n,\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1 \right\},$$

kur punkti $\{x_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ ir afīni neatkarīgi un šos punktus sauc par *simpleksa virsotnēm.*

Simpleksa apzīmēšanai lietosim arī pierakstu $S^n = S^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, kur $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ir apskatāmā simpleksa virsotnes. Savukārt ar $S^k = S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ apzīmējam simpleksa S^n k-dimensiju skaldni, kur x_{j_m}, $m = 0, 1, \ldots, k$ ir skaldnes virsotnes.

Simplekss ir trīsstūra vai tetraedra vispārinājums n-dimensijās, t.i. trīsstūris ir 2-dimensiju simplekss, tetraedrs – 3-dimensiju simplekss. Attiecīgi 1-dimensiju simplekss ir nogrieznis, bet 0-dimensiju simplekss – punkts.

Lemma 2.1. *Katrā simpleksā var ievest baricentriskās koordinātes.*

Pierādījums. Saskaņā ar simpleksa definīciju katru simpleksa punktu $x \in S^n$ var izteikt kā $n+1$ afīni neatkarīgu punktu $\{x_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ t.i. simpleksa virsotņu lineāru kombināciju

$$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, \tag{2.3}$$

kur $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Pierādīsim, ka reprezentācija (2.3) ir korekta. Pieņemam pretējo, t.i.

$$x = \alpha_0' x_0 + \alpha_1' x_1 + \ldots + \alpha_n' x_n, \tag{2.4}$$

kur $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j' = 1$, $\alpha_j' \geq 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$. No (2.3) un (2.4) iegūstam, ka

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \alpha_j') x_j &= \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \alpha_j') x_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_j')(x_j - x_0) \\
&= x_0 \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j' \right) + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_j')(x_j - x_0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_j')(x_j - x_0).
\end{aligned}$$

Tā kā starpības $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, …, $x_n - x_0$ ir lineāri neatkarīgas, tad

$$\alpha_j = \alpha_j', \quad j = 1, \ldots, n.$$

Savukārt, tā kā $\alpha_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ un $\alpha'_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j$, tad arī $\alpha_0 = \alpha'_0$. Skaitļus $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sauc par simpleksa punkta $x \in S^n$ *baricentriskām koordinātēm.* $\square$

Sekas 2.1. Pārrakstām vienādību (2.3) formā

$$x - x_0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_j - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_0$$

$$= \alpha_1(x_1 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_0).$$

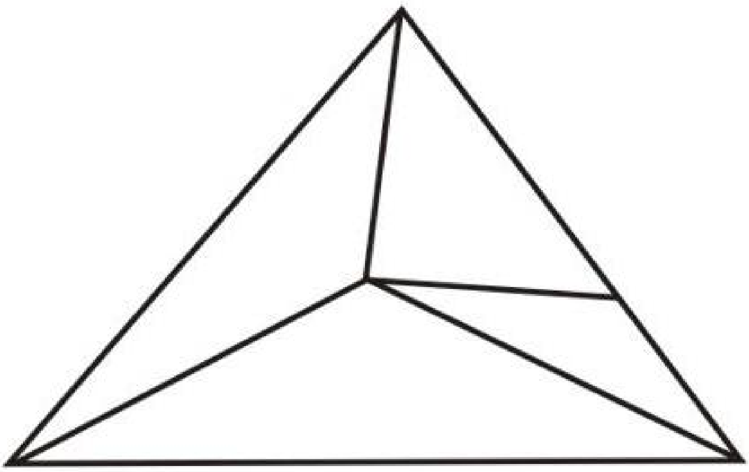
Tad matrica, kuras kolonas $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, ..., $x_n - x_0$ ir lineāri neatkarīgas, ir nesingulāra. Izmantojot Krāmera formulas lielumus α_j, $j = 1, 2, \dots, n$ un pēc tam arī α_0 var izteikt kā mainīgā $x \in \mathbb{R}^n$ nepārtrauktus attēlojumus. Līdz ar to esam atraduši bijektīvu un savstarpēji nepārtrauktu attēlojumu (homeomorfismu) starp simpleksa S^n punktiem un šo punktu baricentriskām koordinātēm.

2.3 Bola-Brauera teorēma simpleksam

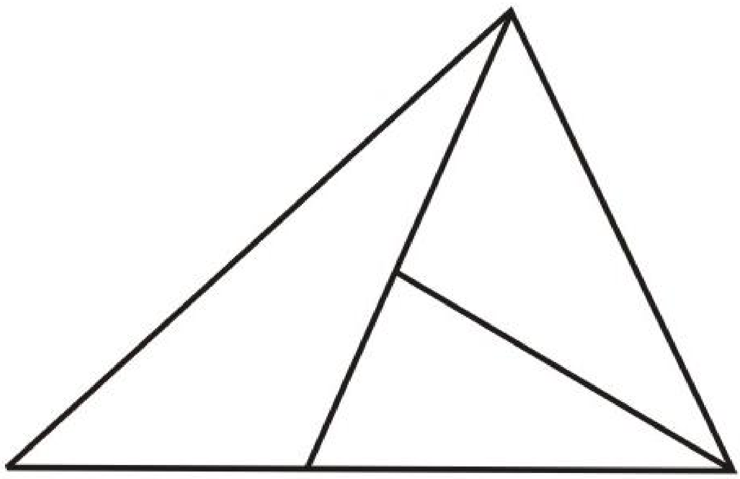
Katru simpleksu var sadalīt sīkākos tādas pašas dimensijas simpleksos un tad dotais simplekss ir galīga skaita tādas pašas dimensijas simpleksu apvienojums. Tālāk apskatīsim simpeksa simplikālo sadalījumu.

Definīcija 2.3. *Simplikālais sadalījums* ir tāds dotā simpleksa sadalījums sīkākos tās pašas dimensijas simpleksos, ka jebkuriem diviem sadalījuma simpleksiem vai nu nav neviena kopīga punkta, vai arī kopīgo punktu kopa ir abu attiecīgo sadalījuma simpleksu kopīgā k-dimensiju, $k = 0, 1, \dots, n-1$ skaldne.

Apskatām n-dimensiju simpleksu $S^n = S^n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ar virsotnēm $x_0, x_1, \dots, x_n$. Vispirms definējam *virsotņu normālo funkciju* ν simplikāli nesadalītam t.i., sākotnējam simpleksam. Simpleksa virsotnē $x_j \in S^n$, $j = 0, 1, \dots, n$ virsotnes normālo funkciju ν ņemam vienādu ar virsotnei atbilstošo indeksu, t.i. $\nu(x_j) = j$, $j = 0, 1, \dots, n$. Tālāk definējam virsotņu normālo funkciju tām jaunajām skaldņu virsotnēm, kuras rodas simplikāli sadalot izejas simpleksu. Izvēlamies patvaļīgu simplikāli sadalītā simpleksa skaldnes virsotni $x \in S^n$ un apskatām mazākās dimensijas skaldni $S^k = S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$ $(x_{j_m},$



Zīm. 2.1 2-dimensiju simpleksa simplikālais sadalījums.

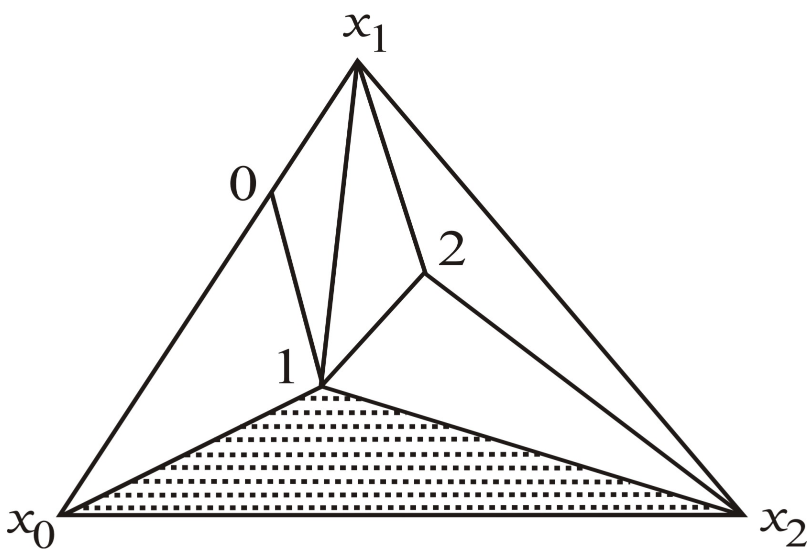


Zīm. 2.2 2-dimensiju simpleksa nesimplikālais sadalījums. Viena sadalījuma simpleksa šķautne ir cita sadalījuma simpleksa šķautnes daļa.

$m = 0, 1, \ldots, k$ ir skaldnes virsotnes), kas satur šo virsotni x. Normālo funkciju ν jaunajā virsotnē x ņemam vienādu ar kādu no indeksiem $j_0, j_1, \ldots, j_k$.

Piemēram, $\nu(x_j) = j$, ja x sakrīt ar sākotnējā simpleksa S^n virsotni x_j. Ja $x \in S^1(x_{j_0}, x_{j_1})$, t.i. jaunā virsotne x atrodas uz viendimensionālās skaldnes, tad $\nu(x)$ var ņemt vai nu j_0 vai j_1, ja jaunā virsotne x nesakrīt ar x_{j_0} vai x_{j_1}. Ja savukārt jaunā virsotne x neatrodas uz nevienas izejas simpleksa S^n skaldnes, tad $\nu(x)$ var būt jebkurš skaitlis no kopas $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Definīcija 2.4. n-dimensiju simpleksu sauc par *reprezentatīvu*, ja tā virsotnēm ir piekārtoti $n+1$ atšķirīgi skaitļi $0, 1, \ldots, n$.



Zīm. 2.3 2-dimensiju simpleksa simplikālais sadalījums. Iepunktētais simplekss ir reprezentatīvais simplekss.

Lemma 2.2 (Špernera lemma). [1] *Lai arī kāds nebūtu simpleksa S^n simplikālais sadalījums un lai arī kāda nebūtu virsotņu normālā funkcija, vienmēr eksistē nepāra skaita reprezentatīvie simpleksi.*

---

[1] Emanuel Sperner, vācu matemātiķis ⋆1905.9.XII, Waltdorf, tagad Nysa, Polijā, †1980.31.I Sulzburg-Laufen, Vācijā, profesors matemātikā no 1934. gada. 1928. gadā viņš pierādīja lemmu, ar kuras palīdzību var pierādīt Bola-Brauera teorēmu tieši neizmantojot homoloģijas teoriju

Pierādījums. Lemmu pierādam ar matemātiskās indukcijas palīdzību atkarībā no simpleksa dimensijas.

Ja $n = 0$, tad apgalvojums ir triviāls, jo simpleksu veido viens vienīgs afīnais punkts.

Pieņemsim, ka lemmas apgalvojums ir pareizs jebkuram $n-1$ dimensiju simplikāli sadalītam simpleksam S^{n-1} un pierādīsim lemmas apgalvojumu n dimensiju simplikāli sadalītam simpleksam S^n. Izejas simpleksu S^n simplikāli sadalām sīkākos simpleksos. Saskaitām jaunos iegūtos n dimensiju reprezentatīvos simpleksus, pie reizes saskaitot arī $n-1$ dimensiju reprezentatīvos simpleksus, kas atrodas simplikāli sadalītā simpleksā S^n. Simplikāli sadalītajā simpleksā iespējami trīs tipu simpleksi:

- Simplekss ir reprezentatīvais, t.i. satur visas virsotnes ar skaitļiem $0,1,\dots,n$. Tad dotais simplekss satur tieši vienu $n-1$ dimensiju reprezentatīvo simpleksu ar virsotņu skaitļiem $0,1,\dots,n-1$ attiecīgi;
- Simplekss satur virsotnes ar skaitļiem $0,1,\dots,n-1$, pie tam vienu no skaitļiem satur divas reizes. Tad dotais simplekss nav reprezentatīvs, bet satur divus $n-1$ dimensiju reprezentatīvos simpleksus ar virsotņu skaitļiem $0,1,\dots,n-1$;
- Simpleksa virsotnēm vēl kāds no skaitļiem $0,1,\dots,n-1$ nav piekārtots. Tad apskatāmais simplekss nav reprezentatīvs un tas arī nesatur nevienu $n-1$ dimensiju reprezentatīvo simpleksu ar virsotņu skaitļiem $0,1,\dots,n-1$.

Seko n dimensiju reprezentatīvo simpleksu skaita paritāte sakrīt ar augstāk uzskaitīto $n-1$ dimensiju reprezentatīvo simpleksu skaita paritāti.

Mēs varam $n-1$ reprezentatīvos simpleksus saskaitīt arī savādāk. Tad ir iespējami divi gadījumi:

- $n-1$ dimensiju reprezentatīvais simplekss atrodas simplikāli sadalītā simpleksa S^n iekšienē. Tad tas tiek saskaitīts divreiz, jo ir kopīgs diviem n dimensiju simpleksiem;
- $n-1$ dimensiju reprezentatīvais simplekss atrodas uz simpleksa S^n skaldnes. Tad tas atrodas uz vienīgās $n-1$ dimensiju reprezentatīvās skaldnes. Simplikāli sadalām šo $n-1$ dimensiju skaldni $n-1$ dimensiju simpleksos. Pēc induktīvā pieņēmuma $n-1$ dimensiju reprezentatīvo simpleksu skaits ir nepāra skaitlis.

Seko, kopējais $n-1$ dimensiju reprezentatīvo simpleksu skaits n-dimensiju simplikāli sadalītā simpleksā ir nepāra skaitlis.

Tātad, vienmēr eksistē nepāra skaita reprezentatīvie simpleksi, vai citiem vārdiem, pie jebkura simplikālā sadalījuma eksistē vismaz viens reprezentatīvais simplekss . □

Lemma 2.3 (Borsuka lemma). [2] *Pieņemam, ka eksistē tādas slēgtas kopas $D_0, D_1, \ldots, D_n$, ka*

$$S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) \subset \bigcup_{m=0}^{k} D_{j_m},$$

lai arī kāda nebūtu indeksu $j_0, j_1, \ldots, j_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ kopa. Tad

$$\bigcap_{k=0}^{n} D_k \neq \emptyset.$$

Pierādījums. Pieņemam, ka dotais simplekss S^n ir simplikāli sadalīts sīkākos tās pašas dimensijas simpleksos (izpildītas simplikālā sadalījuma prasības). Simplikāli sadalītā simpleksa virsotnēs definēsim funkciju ν. Pieņemam, ka x ir virsotne kādam simplikāli sadalītam simpleksam un apskatam elementa x saturošas mazākās dimensijas simpleksa skaldni $S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Saskaņā ar lemmas nosacījumiem $x \in \bigcup_{m=0}^{k} D_{j_m}$. Tad $x \in D_{j_s} \subset \bigcup_{m=0}^{k} D_{j_m}$ kādam indeksam j_s un definējam $\nu(x) = j_s$. No aprakstītās konstrukcijas izriet, ka ν ir virsotņu normālā funkcija. Tad no Špernera lemmas seko, ka eksistē reprezentatīvais simplekss. Tā šķēlums ar katru no kopām D_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ nav tukšs, t.i. satur kādu reprezentatīvā simpleksa virsotni.

Apskatām simpleksa S^n simplikālo sadalījumu virkni $\left\{S_p^n\right\}_{p\in\mathbb{N}}$, kur dotais simplekss S^n simplikāli sadalīts ar vien sīkākos tās pašas dimensijas simpleksos tā, lai S_p^n sadalījuma katra atsevišķā simpleksa diametrs[3] nepārsniegtu $d_p > 0$ un $d_p \to 0$, ja $p \to +\infty$.

[2] Karol Borsuk, poļu matemātiķis, topologs ⋆1905.8.V Varšavā, Polijā, †1982.24.I Varšavā, Polijā, Polijas Zinātņu akadēmijas akadēmiķis, profesors matemātikā. Darbi retraktu teorijā, homotopiju teorijā

[3] Metriskā telpā ierobežotas kopas M diametru $\mathrm{diam}(M)$ definē ar sakarību $\mathrm{diam}(M) = \sup_{x,x'\in M} \rho(x,x')$.

Apzīmējam ar $x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}$ simpleksa S_p^n reprezentatīvā simpleksa virsotnes, kur $x_k^{(p)} \in D_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tā kā S^n ir kompakta kopa, tad var atrast tādu augošu naturālo skaitļu virkni $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, ka atbilstošā virsotņu virkne $\{x_0^{(p_j)}\}$ konverģē, t.i. $x_0^{(p_j)} \to x^*$, ja $j \to +\infty$. Ievērojot, ka

$$|x_k^{(p_j)} - x^*| \leq |x_k^{(p_j)} - x_0^{(p_j)}| + |x_0^{(p_j)} - x^*| \leq d_{p_j} + |x_0^{(p_j)} - x^*| \to 0,$$

ja $j \to +\infty$, iegūstam, ka arī pārejās reprezentatīvā simpleksa virsotnes konverģē uz to paša $x^* \in S^n$, t.i.

$$x_k^{(p_j)} \to x^*.$$

Tā kā $x_k^{(p_j)} \in D_k, k = 0, 1, \ldots, n, j = 0, 1, \ldots$, un, ka kopas D_k ir slēgtas, iegūstam

$$x^* \in \bigcap_{k=0}^{n} D_k,$$

kas arī bija jāpierāda. □

Teorēma 2.2 (Bola-Brauera teorēma). *Nepārtrauktam attēlojumam $f \colon S^n \to S^n$ eksistē nekustīgais punkts $x^* \in S^n$, t.i. $f(x^*) = x^*$.*

Pierādījums. Ar $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, kur $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1$, apzīmējam simpleksa patvaļīga punkta $x \in S^n$ baricentiskās koordinātes. Nepārtrauktais attēlojums f attēlo $x \mapsto f(x)$ un ar $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, kur $\sum_{j=0}^{n} \beta_j = 1$, apzīmējām attiecīgā punkta $f(x) \in S^n$ baricentriskās koordinātes. No attēlojuma f nepārtrauktības, ievērojot Sekas 2.1, izriet, ka β_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ ir nepārtrauktas mainīgo α_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ funkcijas.

Aplūkojam elementu kopas

$$D_j = \{x \in S^n \mid \alpha_j \geq \beta_j\}, \quad j = 0, 1 \ldots, n.$$

Tā kā attēlojums f ir nepārtraukts, tad visa kopas D_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ ir slēgtas un netukšas.

Pieņemam, ka simpleksa S^n patvaļīgi izvēlēts punkts x atrodas uz k-dimensiju skaldnes $x \in S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$, kur $k = 0, 1, \ldots, n$. Pārbaudām, ka kopas D_j apmierina Borsuka lemmas nosacījumus. Pieņemam pretējo, t.i. $x \notin \bigcup_{m=0}^{k} D_{j_m}$. Tad punkta x un tam atbilstošā punkta $f(x)$ baricentriskās koordinātes apmierina nevienādības

$$\alpha_{j_m} < \beta_{j_m}, \quad m = 0, 1, \ldots, k.$$

Ja turpretī indekss $j \neq j_m$, $m = 0, 1, \ldots, k$, tā kā $x \in S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$, kur $k = 0, 1, \ldots, n$, seko $\alpha_j = 0$ un šim indeksam atbilstošās punktu x un $f(x)$ baricentriskās koordinātes apmierina nevienādības $\alpha_j \leq \beta_j$. Summējot iegūtās nevienādības pa visiem indeksiem dabūjam, ka

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j < \sum_{j=0}^{n} \beta_j = 1,$$

kas nav iespējams. Seko,

$$S^k(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) \subset \bigcup_{m=0}^{k} D_{j_m}.$$

Tātad izpildās visi Borsuka lemmas nosacījumu, un tāpēc eksistē

$$x^* \in \bigcap_{k=0}^{n} D_k.$$

Ja punktu x^* un $f(x^*)$ baricentiskās koordinātes ir $(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ un $(\beta_0^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ attiecīgi, tad izpildās nevienādības

$$\alpha_j^* \geq \beta_j^*, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Summējot nevienādības (2.5) iegūstam, ka

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^* \geq \sum_{j=0}^{n} \beta_j^* = 1. \tag{2.6}$$

No (2.5) un (2.6) seko, ka

$$\alpha_j^* = \beta_j^*, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

vai citiem vārdiem $x^* = f(x^*)$, kas arī bija jāpierāda. $\square$

Nodaļa 3
Bola–Brauera teorēma vispārīgā gadījumā

Vispirms aplūkosim dažus pamatjēdzienus un to īpašības, kuras ir nepieciešamas tālākajā izklāstā.

3.1 Daži lineāras, lineāras normētas, Banaha telpas pamatjēdzieni

Definīcija 3.1. Par *lineāru telpu* (vektoru telpu) virs lauka $\mathbb{K}$ (parasti $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$) sauc kopu $\mathbf{E}$, kurā jebkuriem diviem tās elementiem (punktiem) $x \in \mathbf{E}$ un $x' \in \mathbf{E}$ ir definēta to summa $x + x' \in \mathbf{E}$ un jebkuriem $x \in \mathbf{E}$ un $\lambda \in \mathbb{K}$ (skalāram) ir definēts reizinājums $\lambda x \in \mathbf{E}$, pie kam šīs operācijas apmierina sekojošas astoņas aksiomas:

1. $(x+x')+x'' = x+(x'+x'')$ – saskaitīšana ir asociatīva;
2. $x+x' = x'+x$ – saskaitīšana ir komutatīva;
3. eksitē nulles elements $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ tāds, ka $x+\mathbf{0} = x$ visiem $x \in \mathbf{E}$;
4. katram $x \in \mathbf{E}$ eksistē elements $-x \in \mathbf{E}$ tāds, ka $x+(-x) = \mathbf{0}$;
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, kur $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
6. $1x = x$, kur $1 \in \mathbb{K}$;
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$;
8. $\lambda(x+x') = \lambda x + \lambda x'$.

Definīcija 3.2. Apakškopu $M \subset \mathbf{E}$ sauc par *izliektu*, ja jebkuriem diviem tās elementiem $x', x'' \in M$ tos savienojošais nogrieznis

$$\left\{x \in \mathbf{E} \mid x = \lambda x' + (1-\lambda)x'', \quad 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

arī pieder kopai M.

Definīcija 3.3. Par kopas $M \subset \mathbf{E}$ *izliektu čaulu* $\operatorname{co} M$ sauc visu iespējamo galīgo lineāro kombināciju $\sum \lambda_j x_j$ kopu, kur $\lambda_j \geq 0$, $\sum \lambda_j = 1$ un $x_j \in M$.

Atzīmējam, ka $\operatorname{co} M$ ir mazākā izliektā kopa, kas satur kopu $M \subset \operatorname{co} M$. Bez tam $k+1$ afīni neatkarīgu punktu $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $k \leq n$ izliekta čaula ir k-dimensiju simplekss.

Definīcija 3.4. Apakškopu $M \subset \mathbf{E}$ sauc par *absorbējošu*, ja jebkuram $x \in \mathbf{E}$ eksistē $\lambda > 0$ tāds, ka $x \in \mu M$ visiem μ kuriem $|\mu| \geq \lambda$.

Ģeometriski šī īpašība nozīmē, ka uz jebkura stara, kas iziet no nulles elementa $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ ir intervāls ar sākumu nulles elementā $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$, kas viss pieder kopai M.

Definīcija 3.5. Par *lineāru normētu telpu* sauc lineāru telpu $\mathbf{E}$, kurā definēta funkcija $\|\cdot\| : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ ar īpašībām

1. $\|x\| = 0$ tad un tikai tad, ja $x = \mathbf{0}$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$ – *trīsstūra nevienādība*.

Šo funkciju sauc par *normu*.

Definīcija 3.6. Pilnu lineāru normētu telpu sauc par *Banaha telpu*.

Atzīmējam, ka Banaha telpa ir arī pilna metriska telpa ar normas inducēto metriku $\rho(x, x') = \|x - x'\|$.

Definīcija 3.7. Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopu $M \subset \mathbf{E}$ sauc par *ierobežotu*, ja eksistē tāda konstante $c \geq 0$, ka visiem tās elementiem $x \in M$ izpildās nevienādība $\|x\| \leq c$.

Definīcija 3.8. Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopu $M \subset \mathbf{E}$ sauc par *vaļēju*, ja katram tās elementam $x \in M$ eksistē vaļēja lode $\mathbf{B}_r(x)$ ar centru elementā $x \in M$ un rādiusu $r > 0$ tāda, ka $\mathbf{B}_r(x) \subset M$.

Visi vaļējas kopas elementi ir *iekšējie elementi*.

Definīcija 3.9. Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopas $M \subset \mathbf{E}$ *slēgums* $M \subset \overline{M}$ ir visu to telpas $\mathbf{E}$ elementu $x \in \mathbf{E}$ kopa, ka katram $x \in \overline{M}$ eksistē kāda kopas M elementu virkne konverģējoša uz x.

3.2 Kalibrējošā funkcija lineārā telpā

Vispirms apskatām gadījumu, kad $\mathbf{E}$ ir patvaļīga lineāra telpa.

Definīcija 3.10. Funkcija $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ ir *pusaditīva*, ja

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$$

kur $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$.

Definīcija 3.11. Funkcija $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ ir *pozitīvi homogēna*, ja

$$p(\lambda x) = \lambda p(x),$$

kur $\lambda \in \mathbb{R}_+$ un $x \in \mathbf{E}$.

Atzīmējam, ka jebkurai pozitīvi homogenai funkcijai $p(\mathbf{0}) = 0$.

Definīcija 3.12. Funkcija $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ ir *homogēna*, ja

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$$

kur $\lambda \in \mathbb{R}$ un $x \in \mathbf{E}$.

Definīcija 3.13. Funkcija $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ ir *kalibrējošā funkcija*, ja tā reizē ir pusaditīva un pozitīvi homogēna.

Piezīme 3.1. Homogēnu kalibrējošo funkciju sauc par *pusnormu*. Pusnormu, kurai no vienādības $p(x) = 0$ seko $x = \mathbf{0}$, sauc par *normu*.

Lemma 3.1 (Minkovska funkcionālis). [1] *Pieņemam, ka $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir izliekta, absorbējoša kopa. Tad eksistē nenegatīva kalibrējošā funkcija $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ pie kam*

$$\{x \in \mathbf{E} \mid p(x) < 1\} \subset \Omega \subset \{x \in \mathbf{E} \mid p(x) \leq 1\}.$$

Pierādījums. Definēsim funkciju $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ ar sakarību

$$p(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in t\Omega\}.$$

Saskaņā ar absorbējošas kopas Ω definīciju $p(x) < +\infty$. No funkcija p definīcijas izriet, ka $\{x \in \mathbf{E} \mid p(x) < 1\} \subset \Omega \subset \{x \in \mathbf{E} \mid p(x) \leq 1\}$.

[1] Herman Minkowsky, vācu matemātiķis ⋆1864.22.VI, Aleksotā (tagad Kauņas rajons), Lietuvā, †1909.12.I Getingenā, Vācijā, beidzis Kenigsbergas universitāti Prūsijā. Profesors matemātikā Bonnā, Cirihē un Getingenā. Darbi ģeometriskā skaitļu teorijā, funkcionālanalīzē, viens no A.Einšteina skolotājiem

Ģeometriski $p(x)$ vienāds ar stara, kas iet no nulles elementa $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ caur elementu $x \in \mathbf{E}$, daļas, kas ietilpst Ω, garumu un inf funkcijas p definīcijā jālieto, jo jāiekļauj arī gadījums $x = \mathbf{0}$.

Pārbaudām, ka funkcija p ir pozitīvi homogēna. No definīcijas

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\{t > 0 \mid \lambda x \in t\Omega\} \\ &= \lambda \inf\{t > 0 \mid x \in t\Omega\} = \lambda p(x). \end{aligned}$$

Pierādam funkcijas p pusaditivitāti. Izvēlamies skaitļus $\lambda_1 > 0$ un $\lambda_2 > 0$ tādus, ka $p(x_1) < \lambda_1$ un $p(x_2) < \lambda_2$. No

$$p\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right) = \frac{p(x_1)}{\lambda_1} < 1$$

un

$$p\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right) = \frac{p(x_2)}{\lambda_2} < 1,$$

seko, ka $\frac{x_1}{\lambda_1} \in \Omega$ un $\frac{x_2}{\lambda_2} \in \Omega$. Ievērojam, ka

$$\frac{x_1 + x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{x_2}{\lambda_2},$$

kas kā divu izliektas kopas Ω elementu lineāra kombinācija arī pieder kopai Ω. Tātad

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} p(x_1 + x_2) = p\left(\frac{x_1 + x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \le 1.$$

Seko

$$p(x_1 + x_2) \le \lambda_1 + \lambda_2.$$

Pārejot pēdējā nevienādībā uz robežu, kad $\lambda_1 \to p(x_1) + 0$ un $\lambda_2 \to p(x_2) + 0$, iegūstam, ka funkcija p ir pusaditīva. □

3.3 Homeomorfisms

Definīcija 3.14. Nepārtraukts bijektīvs (injektīvs un sirjektīvs) attēlojums $T\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ir *homeomorfisms*, ja tā inversais attēlojums ir nepārtraukts.

Teorēma 3.1. *Nepārtraukts attēlojums $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ir homeomorfisms, ja eksistē tāds nepārtraukts attēlojums $T' : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, ka visiem $x \in \mathbf{E}$ izpildās vienādība*

$$T \circ T'(x) = T' \circ T(x) = x. \tag{3.1}$$

Pierādījums. Pierādām, ka T ir injektīvs, t.i. no $x \neq x'$ seko $T(x) \neq T(x')$. Pieņemam pretējo, t.i. eksistē $x \neq x'$, ka $T(x) = T(x')$ un tātad $T' \circ T(x) = T' \circ T(x')$. No vienādības (3.1) seko $x = x'$. Iegūstam pretrunu ar pieņēmumu.

No vienādības $T \circ T'(x) = x$ seko, ka ka attēlojuma T vērtību kopa ir $\mathbf{E}$, tātad tas ir arī sirjektīvs. Tātad attēlojums T ir bijektīvs un tam eksistē inversais attēlojums $T^{-1} = T'$. Pēc teorēmas nosacījumiem attēlojums T' ir nepārtraukts un tātad T ir homeomorfisms. □

Teorēma 3.2. *Ja nepārtrauktam attēlojumam $f : \Omega \to \Omega$ ir nekustīgais punkts un attēlojums $h : \Omega \to D$ ir homeomorfisms, tad arī nepārtrauktam attēlojumam $F : D \to D$, kur $F = h \circ f \circ h^{-1}$ ir nekustīgais punkts.*

Pierādījums. No teorēmas nosacījumiem izriet, ka eksistē $x^* \in \Omega$, ka $f(x^*) = x^*$. Izvēlamies punktu $h(x^*) \in D$. Tad

$$F \circ h(x^*) = h \circ f \circ h^{-1} \circ h(x^*) = h(x^*).$$

Tātad punkts $h(x^*)$ ir attēlojuma F nekustīgais punkts. □

Piezīme 3.2. Teorēmas 3.1 un 3.2 ir spēkā vispārīgā topoloģiskā telpā.

3.4 Kalibrējošā funkcija Banaha telpā

Atrodam pietiekamos nosacījumus pie kuriem kalibrējošā funkcija ir nepārtraukta. Pieņemam, ka $\mathbf{E}$ ir Banaha telpa un $\mathbf{B}_r \subset \mathbf{E}$ ir vaļēja lode ar rādiusu $r > 0$ un centru nulles elementā $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$.

Lemma 3.2. *Ja $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir izliekta, absorbējoša kopa Banaha telpā $\mathbf{E}$ un nulles elements $\mathbf{0} \in \Omega$ ir kopas Ω iekšējais elements, tad kalibrējošā funkcija $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ ir nepārtraukta.*

Pierādījums. Tā kā nulles elements $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ ir kopas Ω iekšējais elements, tad eksistē pozitīvs skaitlis $d > 0$ tāds, ka slēgta lode $\overline{\mathbf{B}_d} \subset \Omega$.

Pieņemam, ka $x \neq \mathbf{0}$ ir patvaļīgs $\mathbf{E}$ elements. Tad $d\frac{x}{\|x\|} \in \overline{\mathbf{B}_d} \subset \Omega$. Seko,

$$p\left(d\frac{x}{\|x\|}\right) \leq 1.$$

Iegūstam novērtējumu

$$p(x) \leq \frac{\|x\|}{d},$$

kurš, protams ir pareizs, ja $x = \mathbf{0}$.

Savukārt, no funkcijas p pusaditivitātes izriet

$$p(x_1) = p(x_2 + x_1 - x_2) \leq p(x_2) + p(x_1 - x_2) \leq p(x_2) + \frac{\|x_1 - x_2\|}{d},$$

$$p(x_2) = p(x_1 + x_2 - x_1) \leq p(x_1) + p(x_2 - x_1) \leq p(x_1) + \frac{\|x_2 - x_1\|}{d}.$$

Seko,

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{d}, \tag{3.2}$$

tātad kalibrējošā funkcija p ir nepārtraukta Banaha telpā $\mathbf{E}$. □

Teorēma 3.3. *Pieņemam, ka $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir izliekta, ierobežota, slēgta apakškopa un nulles elements $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ ir kopas Ω iekšējais elements. Tad kopa Ω ir homeomorfa slēgtai vienības lodei $\overline{\mathbf{B}_1} \subset \mathbf{E}$.*

Pierādījums. Tā kā kopā Ω ir ierobežota un slēgta, tad eksistē pozitīvs skaitlis $r > 0$ tāds, ka kopa $\Omega \subset \mathbf{B}_r$, kur $\mathbf{B}_r \subset \mathbf{E}$ ir vaļēja lode ar centru nulles elementā $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ un rādiusu $r > 0$. Tad elements $r\frac{x}{\|x\|} \notin \mathbf{B}_r$ lai kāds arī nebūtu $x \neq \mathbf{0}$. Tāpēc arī $r\frac{x}{\|x\|} \notin \Omega$. Seko,

$$p\left(r\frac{x}{\|x\|}\right) > 1.$$

Iegūstam, iekļaujot arī gadījumu $x = \mathbf{0}$, nevienādību

$$p(x) \geq \frac{\|x\|}{r}.$$

Definējam attēlojumu $T\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ar izteiksmi

$$T(x) = \begin{cases} x\frac{p(x)}{\|x\|} & \text{, ja } x \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} & \text{, ja } x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

un attēlojumu $T^{-1}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ar izteiksmi

$$T^{-1}(x) = \begin{cases} x\frac{\|x\|}{p(x)} & \text{, ja } x \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} & \text{, ja } x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Tā kā kopa Ω sakrīt ar visu to $x \in \mathbf{E}$ kopu, kuriem $p(x) \leq 1$, tad $T(\Omega) = \overline{\mathbf{B}_1}$. Pārbaudam, ka

$$T \circ T^{-1}(x) = T^{-1} \circ T(x) = x.$$

Tiešām, ja $x \neq \mathbf{0}$, tad

$$T \circ T^{-1}(x) = \frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|} p(T^{-1}(x)) = \frac{x}{\|x\|}\|x\| = x,$$

jo $p(T^{-1}(x)) = \|x\|$ un $\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|} = \frac{x}{\|x\|}$.

Analoģiski,

$$T^{-1} \circ T(x) = \frac{T(x)}{p(T(x))}\|T(x)\| = \frac{x}{p(x)} p(x) = x,$$

jo $\|T(x)\| = p(x)$ un $\frac{T(x)}{p(T(x))} = \frac{x}{p(x)}$. Tā kā $T(\mathbf{0}) = T^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tad attēlojums $T\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ir bijektīvs.

Bez tam, ja $x \neq \mathbf{0}$, tad attēlojums T ir nepārtraukts, jo nepārtraukta ir kalibrējošā funkcija p. Savukārt, ja $x_n \to \mathbf{0}$, kad $n \to +\infty$, tad ievērojot, ka

$$\|T(x_n)\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| p(x_n) = p(x_n),$$

bet $p(x_n) \to 0$, seko, ka $T(x_n) \to \mathbf{0}$ un $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Ja $x \neq \mathbf{0}$, tad attēlojums T^{-1} ir nepārtraukts, jo nepārtraukta ir kalibrējošā funkcija p un $p(x) \geq \frac{\|x\|}{r} > 0$. Savukārt, ja $x_n \to \mathbf{0}$, kad $n \to +\infty$, tad ievērojot, ka

$$\|T^{-1}(x_n)\| = \frac{\|x_n\|}{p(x_n)}\|x_n\| \leq \frac{r\|x_n\|}{\|x_n\|}\|x_n\| = r\|x_n\|,$$

seko ka $T^{-1}(x_n) \to 0$ un $T^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka attēlojums T ir homeomorfisms Banaha telpā $\mathbf{E}$ un attiecīgi attēlo kopu Ω par slēgtu vienības lodi $\overline{\mathbf{B}_1}$. □

Piezīme 3.3. Nesamazinot vispārīgumu var pieņemt, ka nulles elements $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ pieder kopai Ω. Pretējā gadījumā ar translāciju $h\colon \Omega \to \Omega'$, kur $h(x) = x - x^*$, $x^* \in \Omega$ ir brīvi izvēlēts kopas Ω elements un

$$\Omega' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x - x^* \text{ un } x \in \Omega\}$$

mēs iegūstam gadījumu, kurā nulles elements $\mathbf{0} \in \Omega'$. Ja kopa Ω satur iekšējos elementus, tad par x^* var ņemt vienu no tiem. Saskaņā ar Teorēmu 3.2 jāmeklē nekustīgais punkts attēlojumam $F\colon \Omega' \to \Omega'$, kur $F(y) = f(y + x^*)$.

n-dimensionāls simplekss $S^n \subset \mathbb{R}^n$ ir slēgta, ierobežota un izliekta kopa un saskaņā ar Teorēmu 3.3 un Piezīmi 3.3 iegūstam

Sekas 3.1. *n-dimensiju simplekss S^n ir homeomorfs slēgtai n-dimensionālai vienības lodei $\overline{\mathbf{B}_1^n}$.*

Iegūstam Bola-Brauera teorēmas vispārinājumu gadījumā, ja eksistē $x' \in \Omega$ un $r > 0$, ka $\mathbf{B}_r^n(x') \subset \Omega$.

Teorēma 3.4. *Nepārtrauktam attēlojumam $f\colon \Omega \to \Omega$, kur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ir izliekta, ierobežota, slēgta apakškopa un eksistē $x' \in \Omega$ un $r > 0$, ka $\mathbf{B}_r^n(x') \subset \Omega$, eksistē nekustīgais punkts $x^* \in \Omega$, t.i. $f(x^*) = x^*$.*

3.5 Bola–Brauera teorēma vispārīgā gadījumā

Nobeigumā apskatīsim vispārīgo gadījumu. Apzīmēsim ar $m+1$ kopas Ω maksimāli afīni neatkarīgo punktu skaitu ($m \leq n$, jo maksimālais afīni neatkarīgo punktu skaits nepārsniedz $n+1$ n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$). Afīni neatkarīgie punkti $\{x_j\}_{j=0,1,\ldots,m}$ izveido m-dimensiju simpleksu $S^m = S^m(x_0, x_1, \ldots, x_m) \subset \Omega$. Neierobežojot vispārīgumu un ievērojot Piezīmi 3.3 varam uzskatīt, ka nulles punkts $\mathbf{0} \in S^m$ ir simpleksa S^m iekšējais punkts. Ievērojot, ka starpības

$$x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_m - x_0$$

ir lineāri neatkarīgas, iegūstam, ka kopa Ω pieder starpību lineārai čaulai, t.i.

$$\Omega \subset \mathrm{Lin}\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_m - x_0\}.$$

No algebras ir zināms, ka tad eksistē lineārs izomorfisms (lineārs, bijektīvs attēlojums)

$$L\colon\ \mathrm{Lin}\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_m - x_0\} \to \mathbb{R}^m,$$

kas attēlo kopu Ω par slēgtu, izliektu un ierobežotu kopu $L\Omega \subset \mathbb{R}^m$, kura satur iekšēju punktu. Kopai $L\Omega$ ir spēkā Bola-Brauera teorēmas apgalvojums un tā kā tā ir homeomorfa kopai Ω, tad arī kopai Ω ir spēkā teorēmas apgalvojums. Apvienojot iegūtos rezultātus varam formulēt Bola-Brauera teorēmu vispārīgā gadījumā.

Teorēma 3.5. *Nepārtrauktam attēlojumam $f\colon \Omega \to \Omega$, kur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ir izliekta, ierobežota, slēgta apakškopa, eksistē nekustīgais punkts $x^* \in \Omega$, t.i. $f(x^*) = x^*$.*

Ievērojot Terorēmu 3.2 iegūstam sekojošu teorēmu

Teorēma 3.6. *Nepārtrauktam attēlojumam $f\colon \Omega \to \Omega$, kur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ir homeomorfs izliektai, ierobežotai, slēgtai apakškopa, eksistē nekustīgais punkts $x^* \in \Omega$, t.i. $f(x^*) = x^*$.*

Nodaļa 4
Monotono attēlojumu metode

Apskatām nepārtrauktu skalāru funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un pieņemam, ka $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ un $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Tā kā funkcija f ir nepārtraukta un $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, tad katram $a \in \mathbb{R}$ vienādojumam

$$f(x) = a, \tag{4.1}$$

ir vismaz viens atrisinājums. Ja bez tam funkcija f ir stingri monotona, tad vienādojumam (4.1) ir tikai viens vienīgs atrisinājums. Vispārināsim šo matemātisko faktu uz n-dimensiju Eiklida telpu $\mathbb{R}^n$.

4.1 Monotoni attēlojumi

Definīcija 4.1. Attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir *monotons*, ja[1]

$$< f(x) - f(y), x - y >\geq 0 \text{ visiem } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definīcija 4.2. Attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir *stingri monotons*, ja

$$< f(x) - f(y), x - y >> 0 \text{ visiem } x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y.$$

Definīcija 4.3. Attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir *stipri monotons*, ja eksistē pozitīva konstante $\nu > 0$ tāda, ka

$$< f(x) - f(y), x - y >\geq \nu |x - y|^2 \text{ visiem } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

[1] Ar $< x, x' >$ apzīmējam divu n-dimensiju vektoru x un x' skalāro reizinājumu

Definīcija 4.4. Attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir *vienmērīgi monotons*, ja eksistē stingri augoša funkcija $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\gamma(0) = 0$ tāda, ka

$$< f(x) - f(y), x - y > \geq \gamma(|x - y|) \text{ visiem } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definīcija 4.5. Attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir *koercitīvs*, ja eksistē funkcija $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tāda, ka

$$\gamma(t) \to +\infty, \text{ ja } t \to +\infty$$

un

$$< f(x), x > \geq \gamma(|x|)|x| \text{ visiem } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ievērojam, ka no stiprās monotonitātes seko vienmērīgā monotonitāte, no vienmērīgās monotonitātes seko stingrā monotonitāte, bet no stingrās monotonitātes seko monotonitāte.

Pierādam, ka no vienmērīgās monotonitātes (tātad, arī no stiprās monotonitātes) seko koercitivitāte.

Lemma 4.1. *Ja attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir vienmērīgi monotons, tad tas ir arī koercitīvs.*

Pierādījums. Patvaļīgam fiksētam $x \in \mathbb{R}^n$ apzīmēsim ar $[x]$ moduļa $|x|$ veselo daļu.

Novērtējam lielumu $< f(x), x >$

$$< f(x), x > = < f(x) - f([x]|x|^{-1}x), x > + < f([x]|x|^{-1}x), x > .$$

Ja $|x| > [x]$, tad pirmais saskaitāmais ir nenegatīvs, jo

$$< f(x) - f([x]|x|^{-1}x), x >$$

$$= \frac{|x|}{|x| - [x]} < f(x) - f([x]|x|^{-1}x), x - [x]|x|^{-1}x > \geq 0$$

attēlojuma f monotonitātes dēļ. Gadījumā, ja $|x| = [x]$ pirmais saskaitāmais ir identiski vienāds ar 0.

Tāpēc

$$< f(x), x > \geq < f([x]|x|^{-1}x), x >$$

$$= |x| \sum_{j=1}^{j=[x]} < f(j|x|^{-1}x) - f((j-1)|x|^{-1}x), |x|^{-1}x > + < f(\mathbf{0}), x >$$

$$\geq |x|([x]\gamma(1) - |f(\mathbf{0})|) \geq |x|(|x|\gamma(1) - \gamma(1) - |f(\mathbf{0})|),$$

ievērojot, ka $|x| < [x] + 1$. Seko

$$|x|\gamma(1) - \gamma(1) - |f(\mathbf{0})| \to +\infty, \text{ ja } |x| \to +\infty.$$

jo $\gamma(1) > 0$ ir pozitīvs lielums saskaņā ar vienmērīgās monotonitātes definīciju. $\square$

4.2 Teorēma par nekustīgo punktu koercitīvam attēlojumam

Pierādam teorēmu par nekustīgo punktu koercitīvam attēlojumam.

Teorēma 4.1. *Ja attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un koercitīvs, tad katram $a \in \mathbb{R}^n$ vienādojumam*

$$f(x) = a \tag{4.2}$$

attiecībā pret $x \in \mathbb{R}^n$ eksistē vismaz viens atrisinājums.

Ja papildus attēlojums f ir stingri monotons, tad ir atrisinājuma unitāte.

Pierādījums. Pierādījuma ideja ir vienādojuma (4.2) atrisināmību reducēt uz situāciju, kurā var pielietot Bola-Brauera teorēmu. Šim nolūkam vispirms apskatīsim attēlojumu $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kur

$$g(x) = f(x) - a.$$

Acīmredzot attēlojums g ir nepārtraukts. Ievērojam, ka

$$< g(x), x > = < f(x), x > - < a, x > \geq \gamma(|x|)|x| - |a||x|$$

$$\geq (\gamma(|x|) - |a|)|x|$$

un tātad attēlojums g ir koercitīvs ar funkciju $x \mapsto \gamma(|x|) - |a|$. No funkcijas $x \mapsto \gamma(|x|) - a$ augšanas īpašībām izriet, ka eksistē pozitīva konstante $r > 0$ tāda, ka ja $|x| \geq r$, tad

$$< g(x), x > \geq 0. \tag{4.3}$$

Pierādam, ka vienādojumam

$$g(x) = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

eksistē atrisinājums. Pieņemam pretējo, t.i., ka $g(x) \neq \mathbf{0}$ visiem $x \in \overline{\mathbf{B}_r^n} \subset \mathbb{R}^n$. No slēgtās lodes $\overline{\mathbf{B}_r^n}$ kompaktības un attēlojuma g nepārtrauktības izriet, ka eksistē pozitīva konstante $d > 0$ tāda, ka visiem $|x| \leq r$

$$|g(x)| \geq d$$

un tāpēc attēlojums $F: \overline{\mathbf{B}_r^n} \to \mathbb{R}^n$, kur

$$F(x) = -r\frac{g(x)}{|g(x)|}$$

arī ir nepārtraukts. Tā kā $|F(x)| = r$, tad attēlojums F attēlo slēgto lodi $\overline{\mathbf{B}_r^n}$ sevī. Seko F apmierina Bola-Brauera teorēmas nosacījumus, un tātad eksistē $x^* \in \overline{\mathbf{B}_r^n}$ tāds, ka $F(x^*) = x^*$ vai

$$x^* = -r\frac{g(x^*)}{|g(x^*)|}. \tag{4.5}$$

Bet tad no attēlojuma F konstrukcijas izriet, ka $|x^*| = r$ un pareizinot sakarības (4.5) abas puses skalāri ar x^* iegūstam

$$r^2 = -r\frac{< g(x^*), x^* >}{|g(x^*)|}.$$

Seko, $< g(x^*), x^* >< 0$, kur $|x^*| = r$. Iegūstam pretrunu ar (4.3).

Iegūtā pretruna parāda, ka pieņēmums par to, ka vienādojumam (4.4) slēgtā lodē $\overline{\mathbf{B}_r^n}$ neeksistē atrisinājums, bija aplams. Tāpēc slēgtā lodē $\overline{\mathbf{B}_r^n}$ eksistē elements $x^* \in \overline{\mathbf{B}_r^n}$ tāds, ka $g(x^*) = \mathbf{0}$. No šejienes un no attēlojuma g konstrukcijas seko, ka $f(x^*) = a$.

Pieņemam, ka attēlojums f ir stingri monotons, bet mūsu vienādojumam eksistē divi atrisinājumi $x^* \neq x^{**}$. Atņemot vienu no otras sakarības

$$f(x^*) = a \text{ un } f(x^{**}) = a$$

un pareizinot iegūto rezultātu skalāri ar $x^* - x^{**}$ iegūstam

$$< f(x^*) - f(x^{**}), x^* - x^{**} >= 0.$$

Bet no attēlojuma f stingrās monotonitātes seko, ka $x^* = x^{**}$. Iegūtā pretruna pierāda teorēmu. $\square$

Sekas 4.1. *Ja attēlojums $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un eksistē pozitīva konstante $r > 0$ tāda, ka*

$$< f(x), x > \geq 0, \ ja \ |x| = r,$$

tad vienādojumam

$$f(x) = \mathbf{0}$$

eksitē vismaz viens atrisinājums. □

Teorēma 4.2. *Ja attēlojums $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un stipri monotons, tad f ir homeomorfisms.*

Pierādījums. Tā kā attēlojums f ir arī vienmērīgi monotons, tad tas, saskaņā ar Lemmu 4.1, ir arī koercitīvs un no Teorēmas 4.1 un Sekām 4.1 uzreiz seko, ka f attēlo $\mathbb{R}^n$ uz $\mathbb{R}^n$ savstarpēji viennozīmīgi. Ja $f(x) = a$ un $f(x') = a'$, tad no f stiprās monotonitātes seko

$$\nu|x-x'|^2 \leq < f(x) - f(x'), x - x' > = < a - a', x - x' > \leq |a-a'||x-x'|,$$

no kurienes iegūstam

$$|f^{-1}(a) - f^{-1}(a')| = |x - x'| \leq \frac{1}{\nu}|a - a'|.$$

Tātad inversais attēlojums f^{-1} ir nepārtraukts. □

Piemērs 4.1. Koercivitātes nepieciešamība.

Aplūkojam attēlojumu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Pēc konstrukcijas attēlojums f ir nepārtraukts un stingri monotons. Tajā pašā laikā vienādojumam $f(x) = a$ ar negatīvu $a < 0$ neeksistē atrisinājuma.

Nodaļa 5
Potenciālo attēlojumu metode

5.1 Potenciālo attēlojumu metode

Potenciālo attēlojumu metodes (vai enerģijas funkcionāļu metodes) pamatā ir ideja, ka gludas funkcijas minuma punktā tās atvasinājums (gradients) ir vienāds ar 0.

Visvienkāršākajā vienas dimensijas gadījumā, pētot vienādojuma

$$f(x) = 0$$

atrisināmību, aplūko funkcionāli

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

un meklē pietiekamos nosacījumus, kuri garantē funkcionāļa I minima eksistenci. Ja funkcija f ir nepārtraukta, tad I ir nepārtraukti diferencējama un I minuma punktā x^*, ja tāds eksistē, ir

$$0 = I'(x^*) = f(x^*),$$

t.i., elements x^* ir mūsu vienādojuma atrisinājums.

Šajā piemērā viegli redzēt, ka ja funkcija f ir nepārtraukta un koercitīva, t.i.,

$$f(x)x/(1+|x|)) \to +\infty, \text{ ja } |x| \to +\infty,$$

tad funkcionālis I ir korekti definēts un tas sasniedz savu minumu pa $x \in \mathbb{R}$.

Potenciālo attēlojumu metodi (nedaudz vispārīgā gadījumā – kritiskā punkta metodi) galvenokārt lieto tāpēc, ka daudzos gadījumos vieglāk ir konstatēt minuma eksistenci attiecīgajam funkcionālim, nekā ar citām metodēm pierādīt vienādojuma atrisināmību.

Metodes abi nosaukumi nosacīti nāk no fizikas un mehānikas minimālās enerģijas principa, t.i., ka sistēma atrodas līdzsvara stāvoklī, ja tās enerģija ir minimāla (vai, mazākais, nesamazinās pie mazām sistēmas perturbācijām). Matemātiskos terminos šis princips pierakstās kā

$$E(u^*) \leq E(u) \text{ visiem pieļaujamiem } u,$$

kur lielums u apraksta sistēmas stāvokli, bet funkcionālis $E = E(u)$ izsaka sistēmas enerģiju, kura atbilst sistēmas stāvoklim u.

Ekstrēma nepieciešamais nosacījums $E'(u^*) = 0$ (parasti tas ir Eilera vienādojums variāciju rēķinu funkcionālim E) dod sistēmas stāvokļa vienādojumu.

Termins "potenciāls" saistās ar to, ka fizikā par potenciālu lauku parasti sauc lielumu $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kuram eksistē funkcija $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tāda, ka

$$v = \operatorname{grad} \varphi.$$

Šo funkciju φ sauc par lauka v potenciālu.

5.2 Teorēma par nekustīgo punktu potenciālam attēlojumam

Aplūkotās īpašības vispārinājums ir sekojoša definīcija.

Definīcija 5.1. Attēlojumu $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sauc par *potenciālu attēlojumu*, ja eksistē nepārtraukta un nepārtraukti diferencējama funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tāda, ka

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) \equiv \nabla f(x) \text{ visiem } x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorēma 5.1. *Ja attēlojums $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts un potenciāls un tam atbilstošā, saskaņā ar Definīciju 5.1, funkcija f ir tāda, ka*

$$f(x) \to +\infty, \text{ ja } |x| \to +\infty,$$

tad vienādojumam

$$F(x) = \mathbf{0}$$

eksistē vismaz viens atrisinājums.

Pierādījums. Tā kā $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$, tad eksistē pozitīvs skaitlis $r > 0$ tāds, ka

$$f(x) \geq f(\mathbf{0}), \text{ ja } |x| \geq r.$$

Attēlojums f ir nepārtraukts un slēgta lode $\overline{\mathbf{B}^n_r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ ir kompakta, seko eksistē punkts $x^* \in \overline{\mathbf{B}^n_r}$ tāds, ka visiem $|x| \leq r$

$$f(x^*) \leq f(x).$$

No kopas $\overline{\mathbf{B}^n_r}$ konstrukcijas seko, ka $\mathbf{0} \in \overline{\mathbf{B}^n_r}$ un, tātad,

$$f(x) \geq f(\mathbf{0}) \geq f(x^*) \text{ visiem } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}^n_r}.$$

Apvienojot šos novērtējumus iegūstam, ka $f(x^*) \leq f(x)$ visiem $x \in \mathbb{R}^n$.

Visbeidzot, no ekstrēma nepieciešamajiem nosacījumiem seko

$$\mathbf{0} = \operatorname{grad} f(x^*) \equiv F(x^*).$$

□

Aplūkojot potenciālo attēlojumu metodi ir jārisina vairākas problēmas, jo n-dimensiju telpā $\mathbb{R}^n$ tikai daļa no attēlojumiem ir potenciāli. Tādejādi, pirmā problēma ir noskaidrot vai dotais attēlojums F ir potenciāls attēlojums?

Teorēma 5.2. *Lai nepārtraukts un nepārtraukti diferencējams attēlojums $F = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definētu potenciālu attēlojumu, nepieciešami un pietiekami, lai attēlojuma F Jakobi matrica $J_F(x)$ būtu simetriska, t.i.,*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_k(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} F_j(x), \quad j,k = 1,\ldots,n; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pierādījums. Ja $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ kādai funkcijai f, tad no matemātiskās analīzes zināms, ka

$$\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_k},$$

kas dod matricas $J_F(x)$ simetriskumu.

Tālāk pieņemam, ka matrica $J_F(x)$ ir simetriska un definējam funkciju $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ar izteiksmi

$$f(x) = \int_0^1 < F(tx), x > \,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pēc konstrukcijas, funkcija f ir nepārtraukta un nepārtraukti diferencējama un diferencēšanu var ienest zem integrāļa zīmes (Teorēma par integrāļiem, kas atkarīgi no parametra). Aplūkosim f parciālo atvasinājumu pēc x_j

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{k=1}^{n} F_k(tx)x_k\right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} t\frac{\partial F_k(tx)}{\partial x_j} x_k + F_j(tx)\right] \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} t\frac{\partial F_j(tx)}{\partial x_k} x_k + F_j(tx)\right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \left[t\frac{\partial}{\partial t} F_j(tx) + F_j(tx)\right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[tF_j(tx)\right] \mathrm{d}t = tF_j(tx)\Big|_0^1 = F_j(x).$$

Tā kā indekss j bija patvaļīgs, tad

$$F_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \quad j = 1, \ldots, n;$$

t.i., $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$. $\square$

Otrs jautājums ir par funkcijas f izturēšanās pie lieliem argumentiem. Labi zināms, ka ja $f(x) \to +\infty$, ja $|x| \to \infty$, tad no f nepārtrauktības seko, ka funkcija f sasniedz savu minimālo vērtību kādā punktā x^*. Ja bez tam $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, tad $F(x^*) = 0$. Viegli redzēt, ka ir spēkā sekojošs rezultāts.

Teorēma 5.3. *Ja attēlojums $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukti diferencējams un potenciāls un eksistē $r > 0$ un $c > 0$ tādi, ka*

$$< F(x), x > \geq c|x|, \; ja \; |x| \geq r,$$

tad Teorēmā 5.2 definētā funkcija f ir tāda, ka

$$f(x) \to +\infty, \; ja \; |x| \to +\infty.$$

Pierādījums. Izvēlamies $x \in \mathbb{R}^n$ tādu, ka $|x| > r$. Apzīmējam ar $h = r|x|^{-1}$. Tad pie $|x| > r$ iegūstam novērtējumu

$$f(x) = \int_0^1 < F(tx), x > \,\mathrm{d}t = \int_0^h < F(tx), x > \,\mathrm{d}t + \int_h^1 < F(tx), x > \,\mathrm{d}t$$

$$\geq - \int_0^h \max_{|y| \leq r} |F(y)| \cdot |x| \,\mathrm{d}t + \int_h^1 ct|x| \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$$

$$\geq c \left(1 - \frac{r}{|x|} \right) |x| - \max_{|y| \leq r} |F(y)| \cdot |x| \frac{r}{|x|}$$

$$= c|x| - r \left(c + \max_{|y| \leq r} |F(y)| \right) \to \infty, \text{ ja } |x| \to \infty.$$

□

Teorēmas 5.3 nosacījumi uzliek attēlojumam F lielākas prasības nekā, piemēram, Sekas 4.1, tomēr Teorēma 5.3 nosacījumi ir pietiekoši vienkārši pārnesami uz bezgalīgu dimensiju uzdevumiem Banaha telpās un var tikt izmantoti attiecīgo potenciālu novērtēšanai.

Nodaļa 6
Šaudera princips

6.1 Kompaktas kopas

Kompaktas kopas jēdziens n-dimensiju Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$ ir ekvivalents ierobežotas un slēgtas kopas jēdzienam un šis fakts bija būtisks Bola-Brauera teorēmas pierādījumā. Banaha telpā ne katra ierobežota un slēgta kopa ir kompakts un tāpēc nevar sagaidīt, ka pilnīgi analogs apgalvojums būs spēkā bezgalīgu dimensiju telpās.

Piemērs 6.1. Aplūkojam kopu $M = \mathbf{C}([0,\pi] \to [-1,1])$ un attēlojumu $F: M \to M$, kur $f \in M$ un

$$F \circ f(t) = \begin{cases} f(t) + \cos t, \text{ ja } |f(t) + \cos t\,| < 1, \\ \quad 1, \qquad \text{ja } f(t) + \cos t \quad \geq 1, \\ \quad -1, \qquad \text{ja } f(t) + \cos t \quad \leq -1. \end{cases}$$

Viegli pārliecināties, ka kopa M ir ierobežota, izliekta un slēgta, attēlojums F ir nepārtraukts un $F(M) \subset M$,.

Tā kā vienādība
$$f(t) + \cos t = f(t)$$
izpildās tikai punktā $t = \pi/2$, tad iespējamajam attēlojuma F nekustīgajam elementam – funkcijai f^* jāapmierina viena no sakarībām

$$f^*(t) + \cos t \geq 1, \text{ ja } t \in [0,\pi]$$

vai
$$f^*(t) + \cos t \leq -1, \text{ ja } t \in [0,\pi],$$

jo funkcijai f^* jābūt nepārtrauktai slēgtā segmentā $[0,\pi] \subset \mathbb{R}$, bet neviena no šīm sakarībām nevar izpildīties, ja $f^* \in M$.

Tāpēc Bola-Brauera teorēmas analogam bezgalīgas dimensiju telpā nepieciešams uzlikt papildus prasības vai nu uz attēlojumu, vai arī uz kopu, kuru attēlojums attēlo sevī.

Definīcija 6.1. Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopa $M \subset \mathbf{E}$ ir *kompakta*, ja jebkura kopas M elementu virkne satur apakšvirkni, kas konverģē uz kādu kopas M elementu.

Definīcija 6.2. Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopu $M \subset \mathbf{E}$ sauc par *prekompaktu*, ja tās slēgums ir kompakta kopa.

Piemērs 6.2. Ierobežota n-dimensiju Eiklīda telpas $\mathbb{R}^n$ apakškopa $M \subset \mathbb{R}^n$ ir prekompakta, bet tās slēgums $\overline{M} \subset \mathbb{R}^n$ ir kompakts.

Nepārtraukto attēlojumu Banaha telpā $\mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ prekompaktas kopas kritēriju dod Arceli-Askoli teorēma.

Definīcija 6.3. Visi nepārtraukto attēlojumu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Banaha telpas $\mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ apakškopas $M \subset \mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ elementi ir *ekvinepārtraukti*, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tāds, ka visiem $f \in M$ no nevienādības $|t - t'| < \delta$ seko $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$.

Teorēma 6.1 (Arceli-Askoli teorēma). *Nepārtraukto attēlojumu Banaha telpas $\mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ ierobežota apakškopa $M \subset \mathbf{C}([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ ir prekompakta, ja visi tās elementi ir ekvinepārtraukti.*

Pierādījums. Skat. [4]. □

Tālākā izklāstā mums būs nepieciešami vairāki funkcionālās analīzes fakti.

Lemma 6.1. *Banaha telpas* $\mathbf{E}$ *apakškopa $M \subset$* $\mathbf{E}$ *ir prekompakta tad un tikai tad, ja jebkura kopas M elementu virkne $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in M$ satur konverģentu apakšvirkni.*

Pierādījums. Pieņemsim, ka jebkura M elementu virkne satur konverģentu apakšvirkni. Mums jāparāda, ka tad kopas M slēgums $\overline{M}$ ir kompakta kopa. Izvēlamies patvaļīgu virkni $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{M}$ un pozitīvu skaitļu virkni $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_k > 0$ un $\varepsilon_k \to 0$, ja $k \to +\infty$. Tā kā $x_k \in \overline{M}$, tad eksistē $y_k \in M$ tāds, ka $\|x_k - y_k\| < \varepsilon_k$. Apskatām virkni $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

No mūsu pieņēmuma seko apakšvirknes $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eksistence, kas konverģē uz kādu elementu $y^* \in \overline{M}$. Bet tad atbilstošajai apakšvirknei $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ būs

$$\|x_{k_n} - y^*\| = \|x_{k_n} - y_{k_n} + y_{k_n} - y^*\| \leq \varepsilon_{k_n} + \|y_{k_n} - y^*\| \to 0, \text{ ja } n \to +\infty.$$

Tātad, kopa $\overline{M}$ ir kompakta.

No otras puses, ja $\overline{M}$ ir kompakta kopa, tad no $M \subset \overline{M}$ uzreiz seko, ka jebkura kopas M elementu virkne satur konverģentu apakšvirkni. □

Pieņemam, ka $\varepsilon > 0$ un kopa $M \subset \mathbf{E}$ ir Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopa.

Definīcija 6.4. Kopa $Q \subset \mathbf{E}$ ir kopas $M \subset \mathbf{E}$ *ε–tīkls*, ja katram kopas M elementam $x \in M$ eksistē vismaz viens kopas Q elements $z \in Q$ tāds, ka $\|x - z\| < \varepsilon$.

Teorēma 6.2 (Hausdorfa teorēma). *Banaha telpas* $\mathbf{E}$ *apakškopa* $M \subset \mathbf{E}$ *ir prekompakta tad un tikai tad, ja katrm pozitīvam* $\varepsilon > 0$ *eksistē galīgs kopas* M *ε–tīkls.*

Pierādījums. Nepieciešamība. Pieņemsim pretējo, ka kopa $M \subset \mathbf{E}$ ir prekompakta, bet tajā neeksistē galīgs $\varepsilon > 0$ tīkls. Šis pieņēmums nozīmē, ka eksistē $\varepsilon_0 > 0$ tāds, ka jebkuram galīgam skaitam elementu $z_s \in M$, $s = 1, \ldots, m$ eksistē $x_* \in M$, kas atrodas attālumā ε_0 no visiem elementiem z_s, $s = 1, \ldots, m$. Izmantojot šo īpašību, konstruējam bezgalīgu virkni $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ pēc sekojoša algoritma.

Izvēlamies patvaļīgu $x_1 \in M$. Pēc mūsu pieņēmuma, eksistē $x_2 \in M$ tāds, ka $\|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon_0$. Pārējo procesu organizējam sekojoši. Ja ir jau atrasti elementi $x_1, \ldots, x_k \in M$, tad pēc mūsu pieņēmuma kopā M eksistē elements x_{k+1} tāds, ka $\|x_{k+1} - x_j\| \geq \varepsilon_0$, $j = 1, \ldots, k$.

Tādejādi, no mūsu pieņēmuma seko, ka kopā M ir sanumurējama virkne $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, kuras elementi atrodas attālumā, lielākā vai vienādā ar ε_0, viens no otra. Bet tāda virkne nevar saturēt nevienu fundamentālu (t.i., konverģējošu) apakšvirkni. Tas parāda, ka mūsu pieņēmums, ka prekompaktā kopā M neeksistē galīgs ε tīkls, bija aplams.

Pietiekamība. Parādīsim, ka no galīga $\varepsilon > 0$ tīkla eksistences seko kopas M prekompaktība. Šajā nolūkā izvēlamies patvaļīgu elementu virkni $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ un pozitīvu skaitļu virkni $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_k > 0$ un $\varepsilon_k \to 0$, ja $k \to +\infty$. Aplūkojam atbilstošos ε_1 tīklu. Ja apskatām rādiusa ε_1 lodes ar centriem ε_1-tīkla punktos, tad katrs kopas M elements atradīsies vismaz vienā no šīm lodēm. Tā kā ložu skaits ir galīgs, tad atradīsies vismaz viena lode, kura satur bezgalīgi daudzus virknes $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ elementus. Apzīmējam šo lodi ar $\mathbf{B}_{\varepsilon_1}(z_1)$, kur z_1 ir ε_1-tīkla punkts. Tālāk ņemam ε_2-tīklu un apskatām rādiusa ε_2 lodes ar centriem ε_2-tīkla, Kā iepriekš atradīsies vismaz viena lode, kurā atradīsies bezgala daudz virknes $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ elementu no lodes $\mathbf{B}_{\varepsilon_1}(z_1)$. Apzīmējām šo lodi ar $\mathbf{B}_{\varepsilon_2}(z_2)$, kur z_2 ir ε_2-tīkla punkts. Turpinot šo procesu iegūsim ložu virkni $\{\mathbf{B}_{\varepsilon_k}(z_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ tādu, ka jebkurā galīga skaita ložu šķēlumā būs bezgalīgi daudz virknes $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ elementi. Tādēļ varam izvēlēties apakšvirkni $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ tādu, ka $x_{k_1} \in \mathbf{B}_{\varepsilon_1}(z_1)$, $x_{k_2} \in \mathbf{B}_{\varepsilon_1}(z_1) \bigcap \mathbf{B}_{\varepsilon_2}(z_2)$, $k_2 > k_1$ un vispārīgi

$$x_{k_n} \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{B}_{\varepsilon_j}(z_j), \quad k_1 < k_2 < \ldots < k_n.$$

Tā kā abi elementi $x_{k_n} \in \mathbf{B}_{\varepsilon_n}(z_n)$ un $x_{k_l} \in \mathbf{B}_{\varepsilon_n}(z_n)$ ja $k \leq l$, tad

$$\|x_{k_n} - x_{k_l}\| \leq \|x_{k_n} - z_n\| + \|x_{k_l} - z_n\| < 2\varepsilon_n.$$

Tātad, mūsu konstruētā apakšvirkne $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir fundamentāla un tātad konverğenta. □

Piezīme 6.1. Hausdorfa teorēma ir spēkā arī pilnā metriskā telpā.

Lemma 6.2. *Ja Banaha telpas* **E** *apakškopa M ir prekompakta, tad tās* slēgtā izliektā čaula $\overline{\mathrm{co}}M$, *kas vienāda ar kopas*

$$\left\{ z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \;\middle|\; x_j \in M,\, \lambda_j \geq 0,\, j = 1,\ldots,k;\, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1;\, k = 1,2,\ldots \right\}$$

slēgumu, ir kompakta kopa.

Pierādījums. Saskaņā ar Lemmu 6.1 pietiek pierādīt, ka kopas M izliektā čaula $\mathrm{co}M$ ir prekompakts.

Izvēlamies patvaļīgu $z \in \mathrm{co}M$ un, ievērojot izliektas čaulas definīciju,

$$z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j, \tag{6.1}$$

kur $x_j \in M$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,k$ un $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.

Fiksējam patvaļīgi izvēlētu pozitīvu $\varepsilon > 0$ un tā ka kopa M ir prekompakta, tad tajā saskaņā ar Hausdorfa teorēmu eksistē galīgs

$\varepsilon > 0$ tīkls, t.i. eksistē elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in M$ tādi, ka jebkuram $x_j \in M$ eksistē vismaz viens elements a_{m_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$, ka $\|x_j - a_{m_j}\| < \varepsilon$. Summā (6.1) x_j aizvietojam ar a_{m_j},

$$\hat{z} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_{m_j},$$

kur $\|x_j - a_{m_j}\| < \varepsilon$. Tad

$$\|z - \hat{z}\| < \varepsilon.$$

Apskatām galīga skaita punktu izliektu čaulu $\mathrm{co}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ vai citiem vārdiem simpleksu un atzīmējam, ka $\hat{z} \in \mathrm{co}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Mūsu gadījumā simpleksa dimensija ir $n \leq m - 1$ (simpleksa dimensiju nosaka afīni neatkarīgo virsotņu skaits). Seko, $\mathrm{co}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ir kompakta kopa un tātad tai ir savs galīgs ε-tīkls (ja nepieciešams to iegūst papildinot kopas M atbilstošo ε-tīklu ar galīga skata punktiem). Iegūstam, ka $\mathrm{co}M$ 2ε-tīkls sakrīt ar $\mathrm{co}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ε-tīklu, vai citiem vārdiem $\mathrm{co}M$ ir prekompakts. □

6.2 Šaudera princips

Formulējam Šaudera[1] principu un to pierādam.

Teorēma 6.3 (Šaudera princips). *Ja $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir izliekta un kompakta Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopa un attēlojums $f\colon \Omega \to \Omega$ ir nepārtraukts, tad eksistē $x^* \in \Omega$ tāds, ka $f(x^*) = x^*$.*

Pierādījums. Fiksējam patvaļīgi izvēlētu pozitīvu $\varepsilon > 0$. Saskaņā ar Hausdorfa teorēmu kopā Ω eksistē galīgs $\varepsilon > 0$ tīkls, t.i. eksistē elementi $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \Omega$ tādi, ka jebkuram $x \in \Omega$ eksistē vismaz viens elements a_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, ka $\|x - a_j\| < \varepsilon$. Definējam nepārtrauktas funkcijas $m_j\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2, \ldots, k$

[1] Juliusz Pawel Schauder, ⋆1899.21.IX, Ļvova, Austroungārija (tagad Ukraina), † 1943.IX, Ļvova, Ukraina; ebreju izcelsmes poļu matemātiķis, Ļvovas universitātes privātdocents, profesors. Nozīmīgi darbi topoloģijā, parciālos diferenciālvienādojumos un matemātiskā fizikā. 1930. gadā viņš pierādīja tā saukto Šaudera nekustīgā punkta teorēmu. 1943.IX gestapo viņu nošāva, kad viņš mēģināja bēgt no nosūtīšanas uz koncentrācijas nometni

$$m_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - a_j\|, \text{ ja } \|x - a_j\| \leq \varepsilon, \\ 0, \qquad\qquad\quad \text{ ja } \|x - a_j\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Saskaņā ar ε-tīkla definīciju katram $x \in \Omega$ eksistē tāds j, $j = 1, 2, \ldots, k$, ka $m_j(x) > 0$. Līdz ar to $\sum_{j=1}^{k} m_j(x) \geq \nu > 0$ visiem $x \in \Omega$ kā galīga skaita nepārtrauktu funkciju nenegatīva summa definēta kompaktā kopā Ω.

Apskatām slēgtu izliektu čaulu $\Omega_\varepsilon = \overline{\text{co}}\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \Omega$. Līdz ar to varam definēt nepārtrauktu attēlojumu $g_\varepsilon \colon \Omega \to \Omega_\varepsilon$ ar vienādību

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j(x) a_j}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)}.$$

Ievērojam, ka

$$x = \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j(x) x}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)}.$$

Seko katram $x \in \Omega$ ir spēkā novērtējums

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)(a_j - x)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)} \right\| \leq \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)\varepsilon}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)} = \varepsilon,$$

jo funkcijas $m_j(x) \neq 0$ tikai tiem $x \in \Omega$, kuriem $\|x - a_j\| < \varepsilon$.

Apskatām attēlojumu $g_\varepsilon \circ f \colon \Omega \to \Omega_\varepsilon$ (ievērojam, ka $g_\varepsilon \circ f(\Omega_\varepsilon) \subset \Omega_\varepsilon$). Tā kā Ω_ε ir galīga skaita elementu izliekta čaula, tad Ω_ε ir homeomorfa kādai m-dimensiju $(m \leq k)$ Eiklīda telpas $\mathbb{R}^m$ izliektai slēgtai ierobežotai apakškopai, Tagad varam pielietot Bola-Brauera teorēmu un tātad attēlojumam $g_\varepsilon \circ f$ eksistē nekustīgais punkts $x_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$, tas ir $g_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Tātad

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| &\leq \|x_\varepsilon - g_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon)\| + \|g_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| \\ &= \|g_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tā kā $\varepsilon > 0$ ir patvaļīgs, izvēlamis pozitīvu skaitļu virkni $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tādu, ka $\varepsilon_n \to 0$, ja $n \to +\infty$. Kopa Ω ir kompakta un visi atbilstošie nekustīgie punkti $x_n \in \Omega$. No virknes $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ izdalam apakšvirkni $\{x_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}} \subset \Omega$, kas konverğē uz kādu kopas Ω elementu x^*. Seko $\lim_{n' \to +\infty} f(x_{n'}) = f(\lim_{n' \to +\infty} x_{n'}) = f(x^*)$ attēlojuma f nepārtrauktības dēļ un ir spēkā novērtējums

$$\|f(x_{n'}) - x_{n'}\| \le \varepsilon_{n'}, \quad s = 1, 2, \dots .$$

Pārejot uz robežu $\varepsilon_{n'} \to 0$, ja $n' \to +\infty$ pēdējā sakarībā, iegūstam $f(x^*) = x^*$. □

Lietojumos nākās sastapties ar situāciju, ka kopa $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir slēgta, izliekta un ierobežota Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopa, attēlojums $f\colon \Omega \to \Omega$ ir nepārtraukts, bet attēls $f(\Omega)$ ir prekompakts. Lai formulētu Šaudera principu dotajā gadījumā ir lietderīgi definēt *pilnīgi nepārtraukta attēlojuma* jēdzienu.

Definīcija 6.5. Nepārtraukts attēlojums $F\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ Banaha telpā $\mathbf{E}$ ir *pilnīgi nepārtraukts*, ja tas ierobežotas kopas attēlo par prekompaktām kopām.

Apskatām pilnīgi nepārtraukta attēlojuma piemēru.

Piemērs 6.3. Pieņemam, ka $M \subset \mathbf{C}([0,1] \to \mathbb{R})$ un $f \in M$. Aplūkojam attēlojumu $F\colon M \to \mathbf{C}([0,1] \to \mathbb{R})$, kur

$$F \circ f(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Attēlojums F ir nepārtraukts, jo

$$\|F \circ f - F \circ f'\| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s \right|$$
$$\le \max_{0 \le s \le 1} \left| f(s) - f'(s) \right| = \|f - f'\|.$$

Ja tagad kopa M ir ierobežota, t.i., eksistē konstante $c \ge 0$ tāda, ka no $f \in M$ seko, ka $\|f\| \le c$, tad patvaļīgam elementam $f \in M$

$$\|F \circ f\| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \right| \le c,$$

$$|(F \circ f(t') - F \circ f(t)| = \left| \int_t^{t'} f(s)\,\mathrm{d}s \right| \le c|t' - t|.$$

Iegūtie novērtējumi parāda, ka kopa $F(M)$ ir ierobežota un tās elementi ir ekvinepārtraukti, kas, saskaņā ar Askoli-Arcela Teorēmu 6.1 ir pietiekami, lai kopa $F(M)$ būtu prekompakta telpā $\mathbf{C}([0,1] \to \mathbb{R})$.

Teorēma 6.4. *Ja $\Omega \subset \mathbf{E}$ ir slēgta, ierobežota un izliekta Banaha telpas $\mathbf{E}$ apakškopa un attēlojums $f\colon \Omega \to \Omega$ ir pilnīgi nepārtraukts, tad eksistē $x^* \in \Omega$ tāds, ka $f(x^*) = x^*$.*

Pierādījums. Pierādījumu reducē uz gadījumu ar nepārtrauktu attēlojumu, kas attēlo sevī izliektu kompaktu (tātad arī slēgtu un ierobežotu) kopu.

Tā kā kopa $f(\Omega)$ ir prekompakta, tad, saskaņā ar Lemmu 6.2, kopa $\overline{\mathrm{co}} f(\Omega)$ ir kompakta un, protams, ietilpst Ω (Ω ir izliekta un slēgta). Savukārt, attēlojuma f nekustīgais punkts var atrasties tikai kopā $\overline{\mathrm{co}} f(\Omega)$. Tad no Teorēmas 6.3 seko attēlojuma $f\colon \Omega \to \Omega$ nekustīgā punkta eksistence.

6.3 Piemēri

Kā pirmo piemēru Šaudera principa pielietojumam aplūkosim Peano teorēmas pierādījumu.

6.3.1 Košī problēma diferenciālvienādojumu sistēmai ar nepārtrauktu labo pusi

Apskatām Košī problēmu diferenciālvienādojumu sistēmai

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{6.2}$$

kur $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ nepārtraukts attēlojums, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vaļējs apgabals un $(t_0, x_0) \in G$.

Atšķirībā no Košī problēmas, kuru analizējām paragrāfā 1.3.1, šoreiz mēs vairs neprasām, lai attēlojums f apmierinātu Lipšica nosacījumus. Bet reizē ar to mēs varēsim pierādīt tikai Košī problēmas atrisinājuma eksistenci, bet nevarēsim garantēt tā unitāti.

Teorēma 6.5 (Peano teorēma). [2] *Ja attēlojums f ir nepārtraukts, tad eksistē tāds pietiekoši mazs skaitlis $h > 0$, ka Košī problēmai* (6.2) *slēgtā intervālā $[t_0 - h, t_0 + h]$ ir atrisinājums.*

Pierādījums. Lemma 1.1 ļauj Košī problēmas (1.4) atrisināmību reducēt uz itegrālvienādojuma (1.5) atrisināmību.

Vispirms definējam piemērotu slēgtu, ierobežotu un izliektu Banaha telpas apakškopu Ω. Izvēlamies divus pozitīvus skaitļus $a > 0$ un $b > 0$ tā, lai slēgtais ierobežotais apgabals D piederētu G, t.i.

$$D = \{(t,x) \mid |t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b\} \subset G.$$

Saskaņā ar Veierštrāsa teorēmu attēlojuma f nepārtrauktības dēļ slēgtā ierobežotā apgabalā (mūsu gadījumā kompaktā) eksistē

$$M = \max_{(t,x)\in D} |f(t,x)| < +\infty.$$

Apzīmējam ar

$$h = \min(a, bM^{-1}).$$

Apskatām visu slēgtā galīgā intervālā $[t_0 - h, t_0 + h] \subset \mathbb{R}$ definēto nepārtraukto funkciju $x\colon [t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ kopu, kuru apzīmējam ar $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$. Dotā kopa ir Banaha telpa, ja normu definē kā suprēma normu, t.i.

$$\|x\| = \sup_{|t-t_0|\le h} |x(t)|. \tag{6.3}$$

Šajā Banaha telpā konverğence ir vienmērīga attiecībā pret $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ un tādēļ arī robežfunkcija ir nepārtraukta slēgtā galīgā intervālā $[t_0 - h, t_0 + h] \subset \mathbb{R}$.

Apskatām Banaha telpas $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$ apakškopu Ω, kur

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \sup_{|t-t_0|\le h} |x(t) - x_0| \le b \right\}.$$

Seko Ω ir slēgta, ierobežota un izliekta Banaha telpas $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$ apakškopa.

Definējam attēlojumu F kopā Ω ar vienādību

[2] Giuseppe Peano, ⋆1858.27.VIII, Cuneo, Itālija, †1932.20.IV, Turina, Itālija; itāļu matemātiķis, simboliskās loģikas izveidotājs, nozīmīgi darbi matemātikas pamatos

$$Fx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Acīmredzot

$$|Fx(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq Mh \leq b.$$

Ievērojot, ka $Fx\colon [t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukta mainīgā $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ funkcija, rezultātā iegūstam ka

$$F\Omega \subset \Omega.$$

Vispirms pierādām, ka attēlojums F ir nepārtraukts kopā Ω. Funkcijas f vienmērīgās nepārtrauktības dēļ slēgtā apgabalā $D \subset \mathbb{R}^{n=1}$ katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tāds, ka ja $|x - x'| < \delta$, tad $|f(t,x) - f(t,x')| < \varepsilon$. Pieņemam, ka x, $x' \in \Omega$ un $\|x - x'\| < \delta$ vai citiem vārdiem

$$|x(t) - x'(t)| \leq \sup_{|t-t_0| \leq h} |x(t) - x'(t)| = \|x - x'\| < \delta.$$

Tad visiem $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ir spēkā novērtējums

$$|Fx(t) - Fx'(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,x'(s)))\,\mathrm{d}s \right| < \varepsilon h$$

vai

$$\|Fx - Fx'\| < \varepsilon h.$$

Līdz ar to esam pierādījuši nelineārā attēlojuma F nepārtrauktību Banaha telpas slēgtā ierobežotā izliektā apgabalā Ω.

Pierādam, ka kopa $F\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā. Ievērojam, ka visiem $x \in \Omega$ ir spēkā novērtējums

$$|Fx(t') - Fx(t)| = \left| \int_{t}^{t'} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq M|t' - t|$$

vai citiem vārdiem funkcijas $Fx \in \Omega$ ir ekvinepārtrauktas (vēl vairāk – apmierina Lipšica nosacījumus ar vienu un to pašu Lipšica konstanti). Tā kā $F\Omega \subset \Omega$, tad kopa $F\Omega$ ir ierobežota. Saskaņā ar Arceli-Askoli Teorēmu 6.1 $F\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā $\mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n)$ un tātad attēlojums $F\colon \Omega \to \Omega$ ir pilnīgi nepārtraukts. Saskaņā ar Šaudera nekustīgā punkta teorēmu slēgta, ierobežota un izliektā kopa Ω satur pilnīgi nepārtraukta attēlojuma F nekustīgo punktu. Savukārt attēlojuma F nekustīgais punkts ir Košī problēmas (6.2) atrisinājums. □

6.3.2 Nelineāra divpunktu robežproblēma

Apskatām Dirihlē robežproblēmu nelineāram diferenciālvienādojumam

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(0) = x(1) = 0, \tag{6.4}$$

kur $f\colon [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukts un ierobežots attēlojums, t.i.

$$\sup_{(t,x,\dot{x}) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2} |f(t, x, \dot{x})| \leq M.$$

Lemma 6.3. *Dirihlē robežproblēmas* (6.4) *atrisināmība ir ekvivalenta integrālvienādojuma*

$$x(t) = \int_0^t (t-1) s f(s, x(s), \dot{x}(s))\, \mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1) f(s, x(s), \dot{x}(s))\, \mathrm{d}s \tag{6.5}$$

atrisināmībai.

Pierādījums. Skat. [3]. □

Teorēma 6.6 (Skorca-Dragoni teorēma). *Ja attēlojums f ir nepārtraukts un ierobežots, tad Dirihlē robežproblēmai* (6.4) *eksistē atrisinājums.*

Pierādījums. Lemma 6.3 ļauj Dirihlē robežproblēmas (6.4) atrisināmību reducēt uz itegrālvienādojuma (6.5) atrisināmību.

Apskatām visu slēgtā intervālā $[0,1] \subset \mathbb{R}$ definēto nepārtraukti diferencējamo funkciju $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kopu, t.i. $\mathbf{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$. Dotā kopa ir Banaha telpa, ja sekojoši definē normu, t.i.

$$\|x\| = \max\left\{\sup_{t\in|0,1|}|x(t)|, \frac{\sup_{t\in|0,1|}|\dot{x}(t)|}{4}\right\}. \tag{6.6}$$

Šajā Banaha telpā konverğence ir vienmērīga attiecībā pret $t \in [0,1]$ un tādēļ arī robežfunkcija ir nepārtraukti diferencējama slēgtā intervālā $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Apskatām Banaha telpas $\mathbf{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$ apakškopu Ω, kur

$$\Omega = \left\{x \in \mathbf{C}^1([0,1] \to \mathbb{R}) \,\middle|\, \|x\| \le \frac{M}{8}\right\}.$$

Seko Ω ir slēgta, ierobežota un izliekta Banaha telpas $\mathbf{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$ apakškopa.

Definējam attēlojumu F kopā Ω ar vienādību

$$Fx(t) = \int_0^t (t-1)sf(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)f(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Acīmredzot

$$|Fx(t)| \le M\left(\int_0^t (1-t)s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(1-s)\,\mathrm{d}s\right) \le \frac{M}{8}.$$

Tā kā

$$\dot{F}x(t) = \int_0^t sf(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 (s-1)f(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s,$$

tad

$$|\dot{F}x(t)| \le M\left(\int_0^t s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 (1-s)\,\mathrm{d}s\right) \le \frac{M}{2}.$$

Iegūstam, ka $\|Fx\| \le \frac{M}{8}$. Ievērojot, ka $Fx\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukti diferencējama mainīgā $t \in [0,1]$ funkcija, rezultātā iegūstam, ka

$$F\Omega \subset \Omega.$$

Pierādām, ka attēlojums F ir nepārtraukts kopā Ω. Funkcijas f vienmērīgās nepārtrauktības dēļ slēgtā apgabalā $D \subset \mathbb{R}^3$, kur

$$D = [0,1] \times \left[-\frac{M}{8}, \frac{M}{8}\right] \times \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]$$

katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tāds, ka ja $|x - x'| < \delta$ un $|\dot{x} - \dot{x}'| < 4\delta$, tad $|f(t,x,\dot{x}) - f(t,x',\dot{x}')| < 8\varepsilon$. Pieņemam, ka x, $x' \in \Omega$ un $\|x - x'\| < \delta$ vai citiem vārdiem

$$\max\left\{|x(t) - x'(t)|, \frac{|\dot{x}(t) - \dot{x}'(t)|}{4}\right\}$$

$$\leq \max\left\{\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - x'(t)|, \frac{\sup_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t) - \dot{x}'(t)|}{4}\right\}$$

$$= \|x - x'\| < \delta.$$

Tad visiem $t \in [0,1]$ ir spēkā novērtējumi

$$|Fx(t) - Fx'(t)|$$

$$= \left| \int_0^t (t-1)sf(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(s-1)f(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s \right.$$

$$\left. - \int_0^t (t-1)sf(s,x'(s),\dot{x}'(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^1 t(s-1)f(s,x'(s),\dot{x}'(s))\,\mathrm{d}s \right|$$

$$< 8\varepsilon \left(\int_0^t (1-t)s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 t(1-s)\,\mathrm{d}s \right) \leq \varepsilon$$

un attiecīgi

$$|\dot{F}x(t) - \dot{F}x'(t)|$$

$$= \left| \int_0^t sf(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^1 (s-1)f(s,x(s),\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s \right.$$

$$- \int_0^t s f(s, x'(s), \dot{x}'(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^1 (s-1) f(s, x'(s), \dot{x}'(s))\,\mathrm{d}s \Bigg|$$

$$< 8\varepsilon \left(\int_0^t s\,\mathrm{d}s + \int_t^1 (1-s)\,\mathrm{d}s \right) \leq 4\varepsilon.$$

Seko

$$\|Fx - Fx'\| < \varepsilon.$$

Līdz ar to esam pierādījuši nelineārā attēlojuma F nepārtrauktību Banaha telpas slēgtā, ierobežotā izliektā apgabalā Ω.

Pierādām, ka kopa $F\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā. Saskaņā ar vidējās vērtības teorēmu

$$|Fx(t) - Fx(t')| = |\dot{F}x(c)||t - t'| \leq \frac{M}{2}|t - t'|,$$

kur $c \in (t, t')$, ja $0 \leq t < t' \leq 1$. No vienādības

$$\dot{F}x(t) - \dot{F}x(t') = \int_t^{t'} f(s, x(s), \dot{x}(s))\,\mathrm{d}s,$$

seko

$$|\dot{F}x(t) - \dot{F}x(t')| \leq M|t - t'|.$$

Tā kā kopa Ω ir ierobežota un visiem $x \in \Omega$ funkcijas Fx un $\dot{F}x$ ir ekvinepārtrauktas (vēl vairāk – apmierina Lipšica nosacījumus ar fiksētu Lipšica konstanti), tad saskaņā ar Arceli-Askoli Teorēmu 6.1 $F\Omega$ ir prekompakts Banaha telpā $\mathbf{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$ un tātad attēlojums F ir pilnīgi nepārtraukts. Saskaņā ar Šaudera nekustīgā punkta teorēmu slēgta, ierobežota un izliektā kopa Ω satur pilnīgi nepārtraukta attēlojuma F nekustīgo punktu. Savukārt attēlojuma F nekustīgais punkts ir Dirihlē robežproblēmas (6.4) atrisinājums. $\square$

Piezīme 6.2. Var samazināt prasības par funkcijas f ierobežotību kopā $[0,1] \times \mathbb{R}^2$. Teorēmas nosacījumos pietiek prasīt lai eksistētu tāds pozitīvs skaitlis $r > 0$, ka apgabalā $D_1 \subset \mathbb{R}^3$, kur

$$D_1 = [0,1] \times \left[-\frac{r}{4}, \frac{r}{4}\right] \times [-r, r]$$

izpildītos novērtējums

$$\max_{(t,x,\dot{x}0\in D}|f(t,x,\dot{x})| \leq 2r.$$

□

Nodaļa 7
Attēlojumu topoloģiskā pakāpe

Līdz šim zināmo vispārīgāko nelineāru vienādojumu atrisināmības rezultātu dod sekojoša teorēma.

Teorēma 7.1. *Ja*

(H_1) *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ir vaļējs ierobežots apgabals ar robežu $\partial\Omega$;*
(H_2) *$F\colon [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ir nepārtraukts attēlojums;*
(H_3) *kādam fiksētam $a \in \mathbb{R}^n$ eksistē pozitīva konstante $\nu > 0$ tāda, ka*

$$|F(t,x) - a| \geq \nu \text{ visiem } (t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega,$$

tad eksistē lielums

$$d(t) = d(\Omega, F(t,\cdot), a)$$

tāds, ka

(i) *$d(t)$ ir vesels skaitlis un nav atkarīgs no $t \in [0,1]$;*
(ii) *ja $d(t) \neq 0$ tad vienādojumam*

$$F(t,x) = a$$

attiecībā pret x apgabalā Ω eksistē vismaz viens atrisinājums;
(iii) *ja kādam $t_0 \in [0,1]$ $F(t_0,\cdot) = F(\cdot)$ un $F \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ir tāds, ka vienādojumam*

$$F(x) = a$$

apgabalā Ω eksistē galīgs skaits atrisinājumu $x_1, \dots, x_N$, kuriem visiem $\frac{\partial}{\partial x}F(x^k) \neq 0$, $k = 1, \dots, N$, tad

$$d(\Omega, F(t_0,\cdot), a) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{sign} \frac{\partial}{\partial x} F(x_k). \tag{7.1}$$

□

Teorēmā 7.1 definēto lielumu $d(t)$ sauc par *attēlojuma* $F(t,\cdot)$ *topoloģisko pakāpi apgabalā* Ω *attiecībā pret elementu* a, vai, pieļaujot zināmu neprecizitāti, vienkārši par *topoloģisko pakāpi*, ja no konteksta ir skaidrs par kādu attēlojumu, kādā apgabalā un par kādu elementu a iet runa.

Lai demonstrētu Teorēmas 7.1 vispārīgumu, parādīsim kā no Teorēmas 7.1 viegli var izvest Bola-Brauera teorēmu slēgtai n-dimensijas vienības lodei $\overline{\mathbf{B}_1^n}$.

Piemērs 7.1. Bola-Brauera teorēma kā Teorēmas 7.1 sekas.

Pierādījums. Apskatam nepārtrauktu attēlojumu $F\colon \overline{\mathbf{B}_1^n} \to \overline{\mathbf{B}_1^n}$. Mūsu gadījumā vaļējais apgabals $\Omega = \mathbf{B}_1^n$ ir vaļēja n-dimensiju vienības lode un tās robeža $\partial\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ ir $n-1$ dimensionāla rādiusu 1 sfēra. Jāaplūko divi gadījumi.

1. gadījums — eksistē $x^* \in \mathbb{S}^{n-1}$ tāds, ka $F(x^*) = x^*$, t.i., Bola–Brauera teorēmas apgalvojums ir spēkā.

2. gadījums — $F(x) - x \neq 0$ visiem $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Šajā gadījumā $a = 0$ un definējam attēlojumu $F\colon [0,1] \times \overline{\mathbf{B}_1^n} \to \mathbb{R}^n$ ar formulu

$$F(t,x) = x - tF(x).$$

No mūsu pieņēmuma, ka uz kopas $\mathbf{B}_1^n$ robežas $\mathbb{S}^{n-1}$ nav attēlojuma F nekustīga punkta un no attēlojuma F nepārtrauktības seko (F attēlo kopu $\overline{\mathbf{B}_1^n}$ sevī), ka eksistē pozitīva konstante $\nu > 0$[1] tāda, ka

$$|F(t,x) - 0| \geq \nu \text{ visiem } (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Pie tam attēlojums $F(0,x) = x$ visiem $x \in \overline{\mathbf{B}_1^n}$. Bet vienādojumam

$$x = 0$$

kopā $\overline{\mathbf{B}_1^n}$ eksistē viens vienīgs atrisinājums $x^* = 0$ un identitātes attēlojumam $x \to x$ jakobiānis visos punktos vienāds ar 1. Seko attēlojuma F topoloģiskā pakāpe $d = 1$. Tātad, saskaņā ar Teorēmu 7.1, vienādojumam

[1] Vispirms jāpārliecinās, ka $F(t,x) = x - tF(x) \neq 0$, ja $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ vai $1 = |x| \neq t|F(x)|$. Ievērojam, ka $|F(x)| \leq 1$. Tātad $t|F(x)| < 1$, ja $0 \leq t < 1$. Ja $t = 1$, tad $x \neq F(x)$ pēc pieņēmuma. Savukārt no attēlojuma F nepārtrauktības kompaktā kopā $[0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ seko nepieciešamā nevienādība

$$F(1,x) \equiv x - F(x) = 0$$

kopā $\overline{\mathbf{B}_1^n}$ eksistē atrisinājums x^*, kas arī ir attēlojuma F nekustīgais punkts kopā $\overline{\mathbf{B}_1^n}$. $\square$

Detalizētu topoloģiskās pakāpes teorijas izklāstu skat. U. Raitums, *Nelineāru Vienādojumu Atrisināmība* 7. nodaļā vai Donald O'Regan, Yeol Je Cho, and Yu-Qing Chen, *Topological Degree Theory and Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boka Raton, London, New York, 2006.

Literatūra

1. Raitums, U. *Nelineāru vienādojumu atrisināmība*.
2. Granas, A., Degundi, J. *Fixed point theory*. New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, (2003).
3. Hartman, P. *Ordinary differential equations*. Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, (1982).
4. Канторович, Л.В., Акилов, Г.П. Функциональный анализ. Москва, Наука, (1977)