Pamatelementi statistikā un Hipotēžu pārbaude

J. Valeinis[1]

[1]Latvijas Universitāte, Rīga

12.marts, 2010

I. Pamatelementi matemātiskajā statistikā

Definīcija

Par gadījuma lielumu sauc mērojamu funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$, kur Ω ir izlases telpa jeb elementāru notikumu kopa.

Piemērs: met spēļu metamo kauliņu vienu reizi.

- $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. $X(w_i) = i$, kur $i = 1, \ldots, 6$.
- Diskrēts sadalījuma likums (Ω diskrēta):

$X = i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Pamatelementi: nepārtraukts gadījuma lielums

Definīcija

Par nepārtrauktu gadījuma lielumu sauc funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *kur* $\Omega = \mathbb{R}$ *un eksistē tāda funkcija* f (*blīvumfunkcija*), *ka sadalījuma fukcija*

$$F(x) := P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Piemērs: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Citi sadalījumi: log-normālais sadalījums, Košī sadalījums, vienmērīgais sadalījums.

Mērķi

Definīcija

X - nepārtraukts gadījuma lielums ar F (vai f)

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ - *matemātiskā cerība*
- $D(X) = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$ - *dispersija*

- Mērķis I: Novērtēt nezināmos lielums $E(X)$, $D(X)$, F vai f!
- Mērķis II: Konstruēt ticamības intervālus!
- Mērķis III: Veikt hipotēžu pārbaudi!

Definīcija

$X_1, \ldots, X_n$ - *gadījuma izlase, ja tie ir neatkarīgi, vienādi sadalīti gadījuma lielumi (atkārtoti veikti n eksperimenti). Pieņemsim, ka* $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D(X_i)$, $X_i \sim F$.

Novērtējumi:

- $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ "labi" novērtē μ
- $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ "labi" novērtē σ^2
- $F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}$ "labi" novērtē $F(x)$

Svarīgākās robežteorēmas

$X_1, \ldots, X_n$ - gadījuma izlase

Teorēma (Lielo skaitļu likums)

$\bar{X} \to \mu$, *kad* $n \to \infty$.

Teorēma (Centrālā robežteorēma)

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \to_d N(0, 1)$$

kad $n \to \infty$.

Sekas: $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

II. Hipotēžu pārbaude

Hipotēžu pārbaude: nostādne

Hipotēžu pārbaude ir lēmumu pieņemšanas process par kādiem populācijas raksturlielumiem, sadalījumiem, izejot no izlases datiem.

- populācijas (teorētiskie) raksturlielumi nav zināmi
- izlases dati ir neprecīzi (dispersija jeb izkliede)
- lēmumu pieņemšana saistīta ar kļūdām

Hipotēžu pārbaudi saista ar *statistisku testu*. Statistiskais tests ir procedūra, lai izlemtu, vai noraidīt vai pieņemt hipotēzi, kuru pārbaudam.

Ir divu veidu hipotēzes:

1. *Nulles hipotēze* H_0 - hip., kuru vēlamies pārbaudīt ($H_0 : \mu = \mu_0$)
2. *Alternatīvā hipotēze* H_1 - hip. salīdzināšanai ($H_1 : \mu > \mu_0$)
   - H_1 arī piedalās lēmuma pieņemšanā ($H_1 : \mu < \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ var būt dažādi lēmumi)
   - Tiek pieņemts, ka vai nu H_0 ir patiesa, vai arī H_1 ir patiesa (ja H_0 ir patiesa, tad H_1 nepatiesa)

Piemērs. AIDS slimība. Konstatēts, ka AIDS slimniekiem sagaidāmais dzīves ilgums $H_0 : \mu_0 = 14$ mēneši. Pielietojot jaunas zāles ceram, ka $H_1 : \mu > 14$. Vēlamais rezultāts būtu noraidīt H_0

Pamatelementi hipotēžu pārbaudē : divu veidu kļūdas

Pieņemtais lēmums	H_0 patiesa (H_1 nepatiesa)	H_0 nepatiesa
Noraidīt H_0 (pieņemt H_1)	I veida kļūda	pareizs lēmums
Pieņemt H_0 (noraidīt H_1)	pareizs lēmums	II veida kļūda

I veida kļūda uzskatāma par daudz nozīmīgāku $\Rightarrow$ nosaka H_0 izvēli!

Piemērs. Tiesa: H_0: Persona ir vainīga VAI H_0: Persona ir nevainīga?

Pamatelementi hipotēžu pārbaudē: testa nozīmības līmenis un jauda

Pieņemtais lēmums	H_0 patiesa	H_0 nepatiesa
Noraidīt H_0 (pieņemt H_1)	Nozīmības līmenis $= \alpha$	testa jauda $= 1 - \beta$
Pieņemt H_0 (noraidīt H_1)	P(pieņemt $H_0 \vert H_0) = 1 - \alpha$	P(pieņemt $H_0 \vert H_1) = \beta$

Tipiski:

- izvēlas $\alpha = 0.05; 0.01; 0.001$ (fiksē I veida kļūdu)
- cenšas maksimizēt jaudu (samazināt II veida kļūdu β)

Pamatelementi hipotēžu pārbaudē: testa statistika

- Nepieciešams kritērijs, kas ļautu izšķirties par H_0 vai H_1
- *Testa statistika* ir funkcija no gadījuma lielumiem, izvēlēta tā, lai pārbaudītu konkrētu hipotēzi

Piemērs. Pieņemsim, ka $X_1, \ldots, X_n$ ir i.i.d. ar $EX_i := \mu$. Nulles hipotēzei $H_0 : \mu = \mu_0$ par statistiku var izvēlēties $\bar{X}$.

- Pēc lielo skaitļu likuma $\bar{X} \to \mu_0$, ja patiesa H_0
- Kritērijs: ja μ_0 un $\bar{X}$ vērtības stipri atšķiras $\Rightarrow$ noraidam H_0
- IDEJA: lai izteiktu varbūtiski, lietosim CRT: Ja H_0 spēkā, tad lieliem n

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

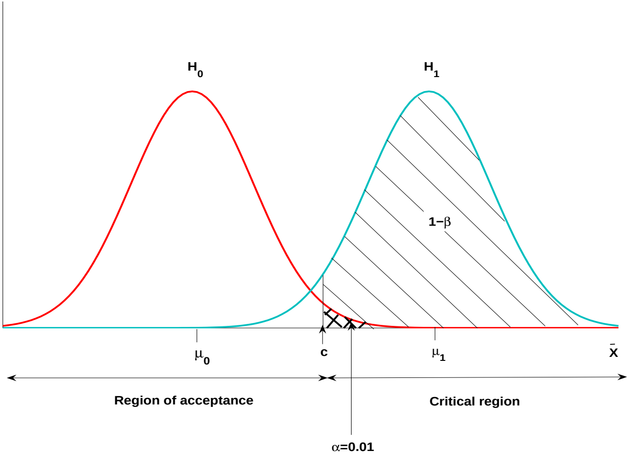
Pamatelementi hipotēžu pārbaudē: kritiskais un pieņemšanas apgabali

- Kritiskais apgabals - tās statistikas vērtības, pie kurām noraida H_0
- Pieņemšanas apgabals - tās statistikas vērtības, pie kurām pieņem H_0

Piemērs. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ar $EX_i := \mu$. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$

- Statistika $\bar{X} \in (-\infty; +\infty)$
- c - kritiskā vērtība. To nosaka testa nozīmības līmenis α
- Ja $\bar{X} > c$ (jeb $\bar{X} \in (c; +\infty)$) $\Rightarrow$ noraidam H_0
- Kritiskais apgabals $= (c; +\infty)$, pieņemšanas apgabals $= (-\infty; c)$

$X_1, \ldots, X_n$ ir i.i.d. ar $EX_i = \mu$. $H_0 : \mu = \mu_0$ un $H_1 : \mu = \mu_1$, kur $\mu_1 > \mu_0$



Piemērs: AIDS slimība un AZT medikaments

- Mērķis: pārbaudīt AZT medikamenta ietekmi
- Izlase (mērķa grupa): $n = 100$ AIDS slimnieki
- X - g.l., pacientu izdzīvošanas ilgums pēc AZT medikamenta lietošanas
- Novērtēts vidējais izdzīvošanas ilgums no AIDS konstatēšanas līdz miršanai: 14.25 mēneši. Novērtēta standartnovirze $\sigma = 13$ mēneši
- Nulles hipotēze $H_0 : \mu = 14$ mēneši
- Alternatīvā hipotēze $H_1 : \mu = 20$ mēneši (eksperti konstatējuši, ka AZT ir efektīvs tad, ja vismaz par 6 mēnešiem paildzinājies izdzīvošanas ilgums)

Piemērs: AIDS slimība un AZT medikaments

- Testa nozīmības līmenis: $\alpha = 0.01 = P(\text{noraidīt } H_0 | H_0)$
- Izvēlētā testa statistika: $\bar{X}$
- Pieņemam, ka $\sigma = 13$ mēneši. Tad $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{D\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 1.3$
- Kritiskais reģions. H_0 tiek noraidīta, ja $\bar{X} > c$. Noteiksim kritisko vērtību c, izmantojot CRT.

$$0.01 = P(\text{noraidīt } H_0 | H_0 : \mu = 14)$$

$$0.01 = P(\bar{X} > c | H_0 : \mu = 14)$$

$$0.01 = P\left(\frac{\bar{X} - 14}{\sigma_{\bar{X}}} > \frac{c - 14}{1.3}\right) = P\left(Z > \frac{c - 14}{1.3}\right),$$

kur $Z \sim N(0, 1)$

Piemērs: AIDS slimība un AZT medikaments

- No statistiskām tabulām atrodam $0.01 = P(Z > 2.326)$. Tātad
$$\frac{c-14}{1.3} = 2.326 \;\Rightarrow\; c = 17$$
- Kritiskais apgabals: $[17; +\infty)$
- **Procedūra**: 1) Doti izlases dati: $X_1, \ldots, X_n$; 2) Izrēķinam $\bar{X}$; 3) Ja $\bar{X} > 17$, tad noraidam H_0
- Vai tests tiešām labs?

- Jaudas aprēķins. Vēlreiz izmantojam CRT

$$1 - \beta = P(\text{noraidīt} H_0 : \mu = \mu_0 | H_1 : \mu = 20)$$

$$1 - \beta = P(\bar{X} > 17 | H_1 : \mu = 20)$$

$$1 - \beta = P\left(\frac{\bar{X} - 20}{\sigma_{\bar{X}}} > \frac{17 - 20}{1.3}\right) = P(Z > -2.31)$$

- No statistiskām tabulām atrodam $P(Z > -2.31) = 0.989 = 1 - \beta$
- Tests ir jaudīgs!
- *Piezīme*: Ja H_0 un H_1 atrodas tālu viena no otras, tad gandrīz jebkurš tests būs jaudīgs. Grūtāk piemeklēt labu testu, ja H_0 un H_1 atrodas tuvu

Pieņemsim, ka no datiem ieguvām $\bar{X}^* = 16$. Pie izvēlētā nozīmības līmeņa $\alpha = 0.01$ nulles hipotēze ir jānoraida. Vai var ko vairāk pateikt?

p-vērtības ir mazākais nozīmības līmenis, pie kura var noraidīt H_0:

$$P(\bar{X} > \bar{X}^* | H_0 : \mu = 14) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 14}{\sigma_{\bar{X}}} > \frac{\bar{X}^* - 14}{1.3}\right) = P(Z > 1.5384) \approx 0.06.$$

Ja $\alpha < p$-vērtība, tad nevaram noraidīt H_0 un otrādi! Tātad aprēķinot p-vērtību uzreiz var pateikt lēmumu par jebkuru sākotnēji izvēlētu nozīmības līmeni α!

Piemērs: AIDS slimība un AZT medikaments

Pieņemtais lēmums	AZT nav efektīvs $H_0 : \mu = 14$ mēn.	AZT ir efektīvs $H_1 : \mu = 20$ mēn.
Noraidīt H_0 (pieņemt H_1)	Nozīmības līmenis $\alpha = 0.01$	testa jauda $= 1 - \beta = 0.989$
Pieņemt H_0 (noraidīt H_1)	P(pieņemt $H_0 \| H_0$) $= 1 - \alpha = 0.99$	P(pieņemt $H_0 \| H_1$) $= \beta = 0.011$

Piemērs: AIDS slimība un AZT medikaments