β-mixing koeficientu novērtējums

Aleksis Jurševskis

LU

15.09.2011

Atkarīgas gadījuma lielumu virknes

Kā mērīt gadījuma lieluma virkņu atkarību, ja tām nav definēta kāda noteikta iekšēja struktūra?

Definīcijas (Bradley, 2007)

Pieņemam, ka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ir varbūtību telpa un $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ ir σ-algebras. Pieci atkarības mēri:

- $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup |\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})|, \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B};$
- $\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup |\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B})|, \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}, \mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0;$
- $\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup |\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})} - 1|, \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}, \mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0, \mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0;$
- $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup |\mathrm{Corr}(\mathrm{f}, \mathrm{g})|, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{real}}(\mathcal{A}), \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{real}}(\mathcal{B});$

Atkarīgas gadījuma lielumu virknes

...

un visbeidzot

$$\beta(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sup(1/2)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}|P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|,$$

kur suprēms ir ņemts pār visām Ω partīcijām $\{A_1, A_2, ..., A_I\}$ un $\{B_1, B_2, ..., B_J\}$ tā, ka $A_i \in \mathcal{A}$ visiem i un $B_j \in \mathcal{B}$ visiem j.

Ja meklē atkarības koeficientus (šeit parādīts tikai β) gadījuma lielumu virknei $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, definē σ-lauku $\mathcal{F}_J^L := \sigma(X_t, J \le t \le L)$ un

$$\beta(n) = \beta(\mathbf{X}, n) := \sup_t \beta(\mathcal{F}_{-\infty}^t, \mathcal{F}_{t+n}^{\infty}),$$

ja $\mathbf{X}$ ir stacionārs

$$\beta(n) = \beta(\mathbf{X}, n) := \beta(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^{\infty}).$$

Iepriekš definēto atkarības koeficientu savstarpējo attiecību shēma

$$\psi - \text{mixing} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \phi - \text{mixing} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} \beta - \text{mixing} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \alpha - \text{mixing} \\ \& \not\uparrow \not\downarrow \\ \rho - \text{mixing} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \alpha - \text{mixing} \end{cases}$$

Kopējās variācijas (total variation) norma

Definīcija

Pieņemsim, ka $\mathbb{P}_1$ un $\mathbb{P}_2$ ir diskrēti sadalījumi ar blīvuma funkcijām $f(k)$, $g(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Tad kopējās variācijas normu var definēt šādi:

$$||\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2||_{TV} = \sum_k |f(k) - g(k)|$$

Piemērs

Ar $\mathbb{P}_n$ apzīmēsim binomiālo $\mathrm{Bin}(n, \theta)$ sadalījumu, ar $\mathbb{Q}_n$ Puasona $P(n\theta)$ sadalījumu. Tad var pierādīt, ka

$$||\mathbb{P}_n - \mathbb{Q}_n||_{TV} \leq n\theta^2,$$

no kā var secināt, ka $\mathbb{Q}_n$ labi aproksimē $\mathbb{P}_n$ pie maziem θ.

tenzoru reizinājums (tensor product)

Definīcija, Friedlander 1982

Ja X un Y ir vaļējas kopas attiecīgi $\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}^m$ un ja $f \in C^0(X)$ un $g \in C^0(Y)$, tad funkciju $f \otimes g \in C^0(X \times Y)$ var definēt kā punktveida reizinājumu (pointwise multiplication)

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y), \ (x, y) \in (X \times Y)$$

Šo pašu ideju, izmantojot dažādas konstrukcijas, var realizēt arī ar sadalījuma funkcijām varbūtību telpās, rezultātā iegūstot sadalījumu tenzoru reizinājumu.

Cita $\beta()$ definīcija

Definīcija, Doukhan 1994

Pieņemsim, ka $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ ir gadījuma lieluma virkne. Ar $\mathbf{X}_i^j \equiv \{X_t\}_{t=i}^{j}$ apzīmē kādu šīs virknes daļu jeb bloku. Ar $\mathbb{P}_i^j$ apzīmē $\mathbf{X}_i^j$ sadalījumu (joint distribution). Tad katram nenegatīvam a

$$\beta(a) \equiv \sup_t ||\mathbb{P}_{-\infty}^t \otimes \mathbb{P}_{t+a}^{\infty} - \mathbb{P}_{t,a}||_{TV},$$

kur $||\cdot||_{TV}$ ir kopējās variācijas norma, $\mathbb{P}_{-\infty}^t \otimes \mathbb{P}_{t+a}^{\infty}$ ir attiecīgo sadalījumu tenzoru reizinājums un $\mathbb{P}_{t,a}$ ir $(\mathbf{X}_{-\infty}^t, \mathbf{X}_{t+a}^{\infty})$ sadalījums.

Suprēmu var atmest, ja $\mathbf{X}$ ir stacionārs process, ko arī darām.

McDonald piedāvātais novērtējums

Definīcija, McDonald 2011

Pieņemsim, ka $\hat{f}$ ir gadījuma lielumu virknes novērojumu sadalījuma histogramma un $\hat{f}_a^2$ ir 2-dimensiju sadalījuma histogramma, ko veido sākotnējie novērojumi un tie paši novērojumi, kas nobīdīti (shifted) par a vienībām. Tad varam konstruēt $\beta(a)$ novērtējumu

$$\hat{\beta}(a) = \frac{1}{2} \int |\hat{f} \otimes \hat{f} - \hat{f}_a^2|.$$

Salīdzinājumam iepriekšējā definīcija:

$$\beta(a) \equiv \sup_t ||\mathbb{P}_{-\infty}^{t} \otimes \mathbb{P}_{t+a}^{\infty} - \mathbb{P}_{t,a}||_{TV},$$

Ilustrācija

$\hat{f}_a^2$ konstruēšana

- 1. solis: ģenerē $n + a$ novērojumus un definē $A = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$;
- 2. solis: nobīda A par a vienībām $B = \{w_{a+1}, w_{a+2}, ..., w_{n+a}\}$;
- 3. solis: veido divdimensiju notikumus $(A, B) = \{(w_1, w_{a+1}), (w_2, w_{a+2}), ..., (w_n, w_{n+a})\}$
- 4. solis: histogrammē (A, B)

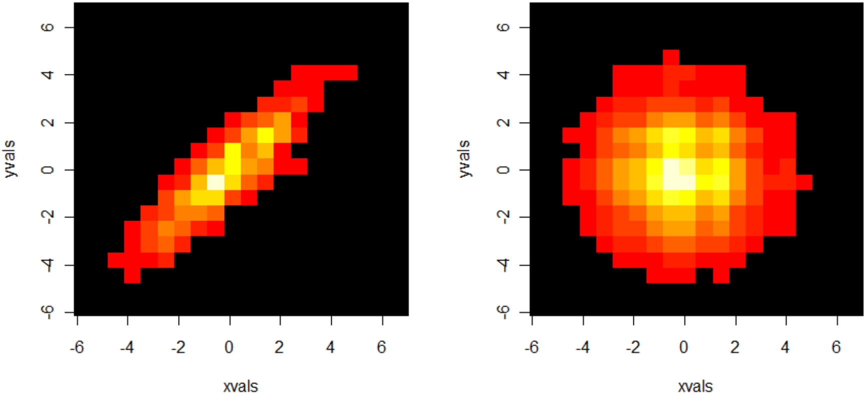
Ilustrācija

$\hat{f} \otimes \hat{f}$ konstruēšana

- 1. solis: ņem tos pašus n novērojumus $A = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$;
- 2. solis: konstruē Dekarta reizinājumu $A \times A = \{(w_1, w_2) : w_1 \in A, w_2 \in A\}$
- 3. solis: histogrammē $A \times A$

Rēķina $\hat{\beta}(a) = \frac{1}{2}\int |\hat{f} \otimes \hat{f} - \hat{f}_a^2|$, atņemot vienu histogrammu no otras.

AR(1) procesa $x_t = 0.9x_{t-1} + w_t$ 1000 realizāciju $\hat{f}_a^2$ un $\hat{f} \otimes \hat{f}$ histogrammas



Piemērs ar Markova ķēdi

Jebkurai Markova ķēdei ar diskrētu stāvokļu telpu, kam zināma stāvokļu pārejas matrica P, var izrēķināt $\beta(\mathrm{a})$.

Piemērs, $\beta(\mathrm{a}) = \frac{4}{9}(\frac{1}{2})^{\mathrm{a}}$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Pārejas shēma: } \begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "0.5"] \arrow[r, bend left, "0.5"] & B \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Vidējā vērtība no simts reizes rēķinātas $\hat{\beta}(\mathrm{a})$ statistikas

	n = 50	n = 100	n = 200	$\beta(\mathrm{a})$
a = 1	0.2167	0.2144	0.2228	0.2222
a = 2	0.1109	0.1058	0.1102	0.1111
a = 3	0.0742	0.0675	0.0576	0.0555

Piemērs ar AR(1) modeli

Tika aplūkoti trīs dažādi AR(1) modeļi $x_t = \phi x_{t-1} + w_t$, taču īstais $\beta(a)$ nav zināms. Simulācijās tika iegūti šādi 95% ticamības intervāli:

$$\begin{array}{cc} & \widehat{\beta}(1) \\ \phi = 0.9 & [0.4566,\ 0.5316] \\ \phi = 0.6 & [0.2287,\ 0.2752] \\ \phi = 0.3 & [0.1456,\ 0.1843] \end{array}$$

AR(1) simulācijās, lai noteiktu vislabāko histogrammas iedaļas platumu h, tikai izmantota šāda metode:

Krosvalidācijas metode, Wassermann 2006

Meklē šādas funkcijas minimumu pa visiem h

$$\hat{J}(h) = \frac{2}{h(n-1)} - \frac{n+1}{h(n-1)} \sum_{j=1}^{m} \hat{p}_j^2,$$

kur h ir iedaļas platums, m ir to skaits, $\hat{p}_j$ ir novērtētās varbūtības.

Taču tā nav paredzēta nedz atkarīgiem datiem, nedz divu dimensiju histogrammai. Nākotnē varētu apskatīt iespēju blīvuma funkcijas noteikšanai histogrammas vietā izmantot kodolu metodi.

Potenciāls pielietojums

Teorēma, Doukhan 1995

Pieņemsim, ka $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ ir gadījuma lieluma virkne, kas izpilda šādus nosacījumus:

- $\forall t \in \mathbb{N}, \mathbb{E}X_t = 0;$
- $\exists \sigma^2 \in \mathbb{R}^+, \forall n, m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m}(X_n + ... + X_{n+m})^2 \leq \sigma^2;$
- $\forall t \in \mathbb{N}, |X_t| \leq M;$

un katram $\varepsilon > 0$, $\theta = \frac{\varepsilon^2}{4}$, $q \leq \frac{n}{1+\theta}$, tad

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{n} X_t| \geq x) \leq 4\exp\{-\frac{(1-\varepsilon)x^2}{2(n\sigma^2 + qMx/3)}\} + 2^n \frac{\beta(\lceil q\theta \rceil - 1)}{q}$$

Paldies par uzmanību!

Jautājumi un atbildes (varbūt)!