Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

Sandra Vucāne

Latvijas Universitāte

2010.gada 8.decembris

EL metode vienai izlasei

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījuma funkciju F un parametru θ;
- F un θ: $g(X, \theta)$, $E\{g(X, \theta)\} = 0$, vidējās vērtības gadījumā $g(X_i, \theta) = X_i - \mu$;
- Funkciju $L(F) = \prod_{i=1}^{n} p_i$ maksimizē pie ierobežojumiem:

$$p_i \geq 0,\ \sum_i p_i = 1,\ \sum_i p_i (X_i - \mu) = 0. \tag{1}$$

EL metode vienai izlasei

- Empīriskā ticamības funkcija parametram θ

$$\mathrm{L}(\mu) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}_{\mathrm{i}} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{n}^{-1}\{1 + \lambda(\mu)(\mathrm{X}_{\mathrm{i}} - \mu)\}^{-1}$$

- Empīriskās ticamības attiecība parametram θ

$$\mathrm{R}(\mu) = \frac{\mathrm{L}(\mu)}{\mathrm{L}(\hat{\mu})} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \{1 + \lambda(\mu)(\mathrm{X}_{\mathrm{i}} - \mu)\}^{-1},$$

Logaritmiskā empīriskās ticamības attiecība

$$\mathrm{W}(\mu_0) = -2\log \mathrm{R}(\mu_0) = 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \log\{1+\lambda(\mu_0)(\mathrm{X}_{\mathrm{i}}-\mu)\} \rightarrow_{\mathrm{d}} \chi_1^2, \quad (2)$$

kad $\mathrm{n} \rightarrow \infty$ un $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ ir spēkā.

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

Ja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ir gadījuma lielumi, kuriem $Y_i = \sigma^{-1}(X_i - \mu_0)$, tad (2) var pārrakstīt

$$W(\mu) = 2\sum_{i=1}^{n} \log\{1 + u(Y_i - \nu)\}, \tag{3}$$

kur $u = \sigma\lambda$, $\nu = \sigma^{-1}(\mu - \mu_0)$ un u ir spēkā

$$\frac{1}{n}\sum_{i} \frac{Y_i - \nu}{1 + u(Y_i - \nu)} = 0. \tag{4}$$

Salīdzinot pēdējo nosacījumu no (1) un (2) ar (4) un (3), redzams, ka nezaudējot problēmas vispārīgumu, varam pieņemt, ka $\mu_0 = 0$ un $\sigma^2 = 1$.

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

1. Lai noteiktu parametru λ, T izvirza Teilora rindā,

$$\begin{aligned} T &= n^{-1} \sum_i X_i \{1 + \lambda X_i\}^{-1} \\ &= n^{-1} \sum_i \left[1 - \lambda X_i + (\lambda X_i)^2 - (\lambda X_i)^3 + \ldots\right] X_i. \qquad (5) \end{aligned}$$

2. Ievedam apzīmējumus, $\alpha_k = \mathbb{E}(X^k)$ un $A_k = n^{-1} \sum_i X_i^k - \alpha_k$, tātad $n^{-1} \sum_i X_i^k = A_k + \alpha_k$.

3. Izmanto ievestos apzīmējumus un (5) pārraksta

$$T = (A_1 + \alpha_1) - \lambda(A_2 + \alpha_2) + \lambda^2(A_3 + \alpha_3) - \lambda^3(A_4 + \alpha_4) + O_p(n^{-2}).$$

$\alpha_1 = 0$ un $\alpha_2 = 1$, tāpēc

$$T = A_1 - \lambda A_2 - \lambda + \lambda^2 A_3 + \lambda^2 \alpha_3 - \lambda^3 A_4 - \lambda^3 \alpha_4 + O_p(n^{-2}).$$

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

4. Tā kā $\lambda = \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-1/2})$, tad $\lambda^3 \mathrm{A}_4 = \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2})$ un

$$\mathrm{T} = \mathrm{A}_1 - \lambda \mathrm{A}_2 - \lambda + \lambda^2 \mathrm{A}_3 + \lambda^2 \alpha_3 - \lambda^3 \alpha_4 + \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2}).$$

5. Pielīdzinot $\mathrm{T} = 0$, jāizsaka λ.
   λ izvirzījumu var uzrakstīt formā
   $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2})$, kur λ_i ir $\mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-\mathrm{i}/2}), \mathrm{i} = \overline{1,3}$ un
   λ_1, λ_2, λ_3 iegūst no izteiksmes $\mathrm{T} = 0$ pārrakstot to formā

$$\lambda = \mathrm{A}_1 - \lambda \mathrm{A}_2 + \lambda^2 \mathrm{A}_3 + \lambda^2 \alpha_3 - \lambda^3 \alpha_4 + \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2})$$

$\lambda_1 = \mathrm{A}_1 \Rightarrow \lambda = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1^2 \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1^2 \alpha_3 - \mathrm{A}_1^3 \alpha_4 + \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2})$,

$\lambda_2 = -\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1^2 \alpha_3 \Rightarrow \ldots$,

$\lambda_3 = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_1^2 \mathrm{A}_3 + 2\alpha_3^2 \mathrm{A}_1^3 - 3\alpha_3 \mathrm{A}_1^2 \mathrm{A}_2 - \alpha_4 \mathrm{A}_1^3$.

6. Nosaka $n^{-1}W(0) = n^{-1}W_0$ izvirzījumu:

$$\begin{aligned}\sum_i \lambda X_i =& \sum_i \{(\lambda X_i)^2 - (\lambda X_i)^3 + (\lambda X_i)^4 - \ldots\} \\ W_0 =& 2\sum_i \log\{1 + \lambda X_i\} \\ =& 2\sum_i \{\lambda X_i - \frac{1}{2}(\lambda X_i)^2 + \frac{1}{3}(\lambda X_i)^3 - \frac{1}{4}(\lambda X_i)^4\} \\ &+ O_p(n^{-3/2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^{-1}W_0 =& A_1^2 - A_2A_1^2 + \frac{2}{3}\alpha_3 A_1^3 + A_2^2A_1^2 + \frac{2}{3}A_3A_1^3 - 2\alpha_3 A_2 A_1^3 \\ &+ \alpha_3^2 A_1^4 - \frac{1}{2}\alpha_4 A_1^4 + O_p(n^{-5/2}).\end{aligned}$$

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

7. Veic pāreju $n^{-1}W(0) \Rightarrow n^{-1}W(\mu)$

$$A_1 \Rightarrow A_1 - \mu$$
$$A_2 \Rightarrow A_2 - 2\mu A_1 + \mu^2 = A_2 + O_p(n^{-1})$$
$$A_3 \Rightarrow A_3 - 3\mu(A_2 + \alpha_2) + 3\mu^2 A_1 - \mu^3 = A_3 - 3\mu\alpha_2 + O_p(n^{-1})$$

$$\begin{aligned} n^{-1}W(\mu) = &(A_1 - \mu)^2 - \{A_2 - 2\mu A_1 + \mu^2\}(A_1 - \mu)^2 \\ &+\frac{2}{3}\alpha_3(A_1 - \mu)^3 + A_2^2(A_1 - \mu)^2 \\ &+\frac{2}{3}\{A_3 - 3\mu\alpha_2\}(A_1 - \mu)^3 - 2\alpha_3 A_2(A_1 - \mu)^3 \\ &+\alpha_3^2(A_1 - \mu)^4 - \frac{1}{2}\alpha_4(A_1 - \mu)^4 + O_p(n^{-5/2}) \quad (6) \end{aligned}$$

8. Nosaka $\tilde{\mu}$, kas minimizē $\mathrm{W}(\mu)$

   $\tilde{\mu} = \mathrm{A}_1 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2})$, kur $\mu_\mathrm{i} = \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-\mathrm{i}/2})$

   Vidējās vērtības gadījumā $\tilde{\mu} = \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-2})$

$$\begin{aligned}\mathrm{n}^{-1}\mathrm{W}(\tilde{\mu}) =& \mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1^2 + \frac{2}{3}\alpha_3\mathrm{A}_1^3 + \mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_1^2 + \frac{2}{3}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1^3 \\ &- 2\alpha_3\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1^3 + \alpha_3^2\mathrm{A}_1^4 - \frac{1}{2}\alpha_4\mathrm{A}_1^4 + \mathrm{O_p}(\mathrm{n}^{-5/2}) \quad (7)\end{aligned}$$

9. $n^{-1}W(\tilde{\mu}) = R^2$, kur $R = R_1 + R_2 + R_3$ un $R_i = O_p(n^{-i/2})$.

No (7) iegūst, ka

$$R_1 = A_1, \ R_2 = -\frac{1}{2}A_2A_1 + \frac{1}{3}\alpha_3A_1^2,$$
$$R_3 = \frac{3}{8}A_2^2A_1 + \frac{1}{3}A_3A_1^2 - \frac{5}{6}\alpha_3A_2A_1^2 + \frac{4}{9}\alpha_3^2A_1^3 - \frac{1}{4}\alpha_4A_1^3.$$

$$\begin{aligned} n^{-1}W(\tilde{\mu}) &= R_1^2 + 2R_1R_2 + 2R_1R_3 + R_2^2 + 2R_2R_3 + R_3^2 \\ &= R_1^2 + 2R_1R_2 + 2R_1R_3 + R_2^2 + O_p(n^{-5/2}) \end{aligned}$$

10. Tagad jāatrod $\mathbb{E}(nR^2)$. Definējot, ka $t_1 = \alpha_3^2$ un $t_2 = \alpha_4$, var pierādīt, ka

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_1^2) &= n^{-1}, \\
\mathbb{E}(R_1R_2) &= n^{-2}\left(\frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{2}t_2\right) + O(n^{-3}), \\
\mathbb{E}(R_1R_3) &= n^{-2}\left(-\frac{5}{12}t_1 + \frac{5}{8}t_2\right) + O(n^{-3}), \\
\mathbb{E}(R_2^2) &= n^{-2}\left(-\frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{4}t_2\right) + O(n^{-3}).
\end{aligned}$$

Tādējādi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(nR^2) &= n\{\mathbb{E}(R_1^2) + 2\mathbb{E}(R_1R_2) + 2\mathbb{E}(R_1R_3) + \mathbb{E}(R_2^2)\} + O(n^{-2}) \\
&= 1 + n^{-1}\left(-\frac{1}{3}\alpha_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_4\right) + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

11. Johnson un Kotz pierādīja, ka s−tais nR^2 kumulants ir

$$\kappa_s = 2^{s-1}(s-1)!\{\mathbb{E}(nR^2)\}^s + O(n^{-3/2}).$$

    s−tais $(nR^2)\{\mathbb{E}(nR^2)\}^{-1}$ kumulants ir $2^{s-1}(s-1)!$, kas ir arī s−tais χ_1^2 kumulants.

    $\mathbb{P}\left[W\{\mathbb{E}(nR^2)\}^{-1} \leq z\right] = \mathbb{P}(\chi_1^2 \leq z) + O(n^{-2}).$

12. Ja EL ticamības intervāls parametram μ ir

$$I_\alpha = \{\mu : W(\mu) \leq c_\alpha\},$$

    kur c_α ir tāds, ka $\mathbb{P}(\chi_1^2 \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$, tad EL ticamības intervāls ar Bārtleta korekciju ir

$$I'_\alpha = \{\mu : W(\mu) \leq c_\alpha(1 + n^{-1}a)\}.$$

Paldies par uzmanību!