Empīriskā ticamības funkcijas metode un Bārtleta korekcija

Sandra Vucāne

Latvijas Universitāte

2010.gada 22.septembris

Diplomdarbs

Empīriskās ticamības funkcijas metode un tās pielietojumi statistikā

Maģistra darbs

Bārtleta korekcija empīriskās ticamības metodei

Doktora darbs

Bārtleta korekcija empīriskās ticamības metodei divu izlašu gadījumā

Vislielākās ticamības attiecības tests

1. $X_1, \ldots, X_n$ ir neatkarīgi, vienādi sadalīti gadījuma lielumi ar blīvuma funkciju $f(x|\theta)$, kur $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$;
2. Hipotēžu pārbaude: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ pret $H_1 : \theta \in \Theta_1$, kur $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \subset R^k$ un $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
   Tests noraida H_0 pie mazām vislielākās ticamības attiecības testa statistikas
   $$\lambda_n = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_n(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L_n(\theta)} = \frac{L_n(\hat{\theta}_0)}{L_n(\hat{\theta}_1)}$$
   vērtībām.
3. Vilksa teorēma:
   $$-2 \ln \lambda_n \sim \chi^2_r, \text{ kur } 0 < r \leq k.$$
4. Ticamības intervāls parametram θ ir formā: $\left\{\theta : -2\ln(L_n(\theta)/L_n(\hat{\theta}_1)) \leq c\right\}$, kur c nosaka no $P(\chi^2_r \leq c) = 1 - \alpha$.

Neparametriskā vislielākās ticamības funkcija

- Ja $X_1, \ldots, X_n$ ir neatkarīgi un vienādi sadalīti ar kādu sadalījuma funkciju F_0, tad funkcijas F neparametriskā ticamības funkcija ir

$$L(F) = \prod_{i=1}^{n} (F(X_i) - F(X_i-)),$$

kur $F(x) = P(X \leq x)$ un $F(x-) = P(X < x)$;

Teorēma (Owen, 2001)

Pieņemsim, ka $X_1, \ldots, X_n$ ir neatkarīgi gadījuma lielumi ar sadalījuma funkciju F_0 un F_n ir to empīriskā sadalījuma funkcija. Ja $F \neq F_n$, tad $L(F) < L(F_n)$.

Neparametriskās vislielākās ticamības funkcijas attiecība

- Neparametriskajā gadījumā parametrus izsaka kā funkcionāļus no sadalījuma funkcijas $\theta = T(F)$.

- Piemēri:
  1. vidējā vērtība: $\theta = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$ un $\hat{\theta}$ iegūstam sekojoši $\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_n(x) = n^{-1} \sum_i X_i = \bar{X}$,
  2. mediāna $\theta = m : \int_{-\infty}^{m} dF(x) - \int_{m}^{+\infty} dF(x) = 0$.

- Sadalījuma funkcijas F neparametriskās ticamības fukcijas attiecība:
$$R(F) = \frac{L(F)}{L(F_n)} = \prod_{i=1}^{n} np_i.$$

Neparametriskās vislielākās ticamības funkcijas attiecība vidējai vērtībai μ

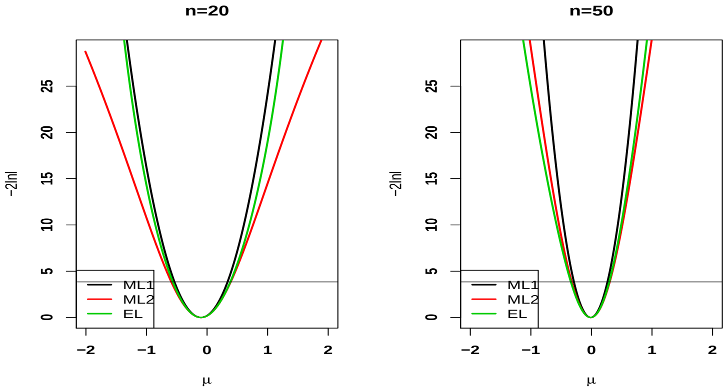
- Ticamības intervāli $\theta = \mathrm{T(F)} = \mu$, izmantojot empīriskās ticamības attiecību:
$\mathrm{R}(\mu) = \sup\left\{ \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{np_i} \middle| \mathrm{p_i} \geq 0, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i} = 1, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i X_i} = \mu \right\}.$

- Izteiksme $\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{np_i}$ savu maksimumu sasniedz pie
$\mathrm{p_i} = \mathrm{p_i}(\mu) = \mathrm{n}^{-1} \left\{1 + \lambda(\mathrm{X_i} - \mu)\right\}^{-1}$, kur $\lambda = \lambda(\mu)$ nosaka no $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left\{1 + \lambda(\mathrm{X_i} - \mu)\right\}^{-1} (\mathrm{X_i} - \mu) = 0.$

Teorēma (Owen, 2001)

Ja $\mathrm{X_1}, \ldots, \mathrm{X_n}$ ir neatkarīgi un vienādi sadalīti gadījuma lielumi ar sadalījuma funkciju $\mathrm{F_0}$ un $\mu_0 = \mathrm{E(X_i)}$, un $0 < \mathrm{D(X_i)} < \infty$, tad $-2\ln(\mathrm{R}(\mu_0))$ tiecas uz χ^2_1, kad $\mathrm{n} \to \infty$.

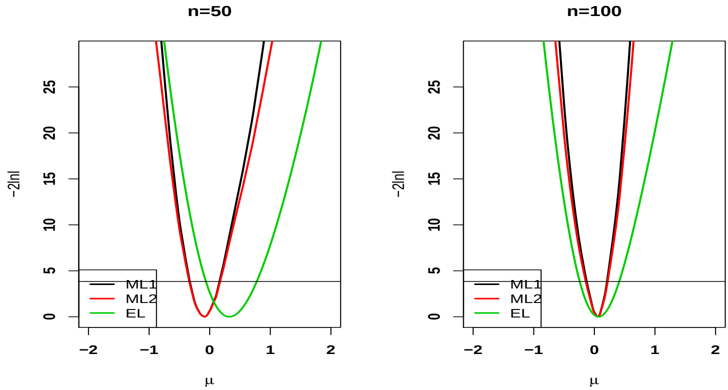
Neparametriskās un parametrisko metožu salīdzinājums vidējai vērtībai



att.: ML1, ML2 un EL $-2 \times \ln$ ticamības līknes standartnormālā sadalījuma parametram μ, $\alpha = 0.05$.

Ja n = 20, tad $\hat{\mu} = -0.1$, un ja n = 50, tad $\hat{\mu} = -0.01$.

Neparametriskās un parametrisko metožu salīdzinājums vidējai vērtībai



att.: ML1, ML2 un EL $-2 \times \ln$ ticamības līknes dubultā eksponenciālā sadalījuma parametram μ, $\alpha = 0.05$.

Ja n $= 50$, tad $\hat{\mu} = (-0.087; -0.089; 0.324)$ un ja n $= 100$, tad $\hat{\mu} = (0.056; 0.056; 0.07)$

Pārklājuma precizitāte vidējai vērtībai

N(0,1) sadalījums

	ML1	Z-tests	ML2	t-tests	EL
n = 20	0.9483	0.9493	0.9396	0.9495	0.9319
n = 50	0.9524	0.9537	0.9469	0.9514	0.9463
n = 100	0.9483	0.9500	0.9471	0.9510	0.9472
n = 500	0.9457	0.9504	0.9442	0.9495	0.9445
n = 1000	0.9430	0.9490	0.9430	0.9487	0.9430

χ^2_1 sadalījums

	ML1	Z-tests	ML2	t-tests	EL
n = 20	0.8445	0.8445	0.8839	0.8929	0.8953
n = 50	0.8395	0.8395	0.9197	0.9224	0.9297
n = 100	0.8355	0.8355	0.9339	0.9352	0.9404
n = 500	0.8378	0.8378	0.9508	0.9512	0.9516
n = 1000	0.8360	0.8360	0.9454	0.9456	0.9470

Empīriskās ticamības metode kvantilēm

- Parastajiem EL ticamības intervāliem kvantilēm pārklājuma kļūda ir ar kārtu $n^{-1/2}$ pat divpusējo intervālu gadījumā, savukārt ar kodolu metožu palīdzību nogludinātās EL ticamības intervālu pārklājuma kļūda ir ar kārtu n^{-1}.

- Tika apskatītas un salīdzinātas 3 EL metodes:
  1. parastā EL;
  2. Chen un Hall (1993.) gludinātā EL metode;
  3. Zhou un Jing (2003.) gludinātā EL metode.

Kodolu gludināšanas metode

- $X_1, \ldots, X_n$ $\left(X_i\text{–neatkarīgi un vienādi sadalīti}\right)$ ir izlase ar blīvuma funkciju f.
- Kodols tiek definēts kā gluda funkcija K, kurai ir spēkā, ka $K(x) \geq 0$, $\int K(x)dx = 1$, $\int xK(x)dx = 0$ un $\int x^2 K(x)dx > 0$.
- Normālais jeb Gausa kodols:

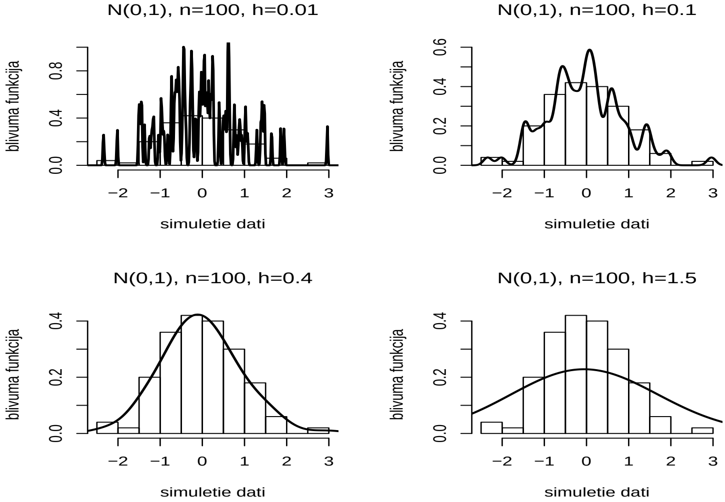
$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

- Ja K ir kodols un joslas platums h ir pozitīvs skaitlis, tad

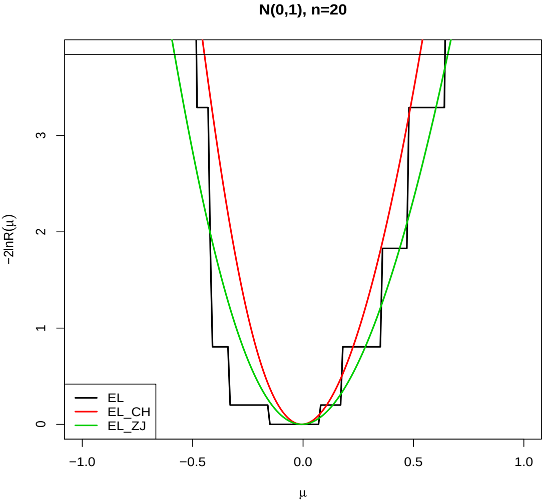
$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

ir kodolu blīvuma funkcijas novērtējums.

N(0,1) sadalījuma ģenerēšana



EL metožu salīdzinājums kvantilēm



EL [-0.48;0.64], EL_{CH} [-0.44;0.52], EL_{ZJ} [-0.58;0.65].

Pārklājuma precizitāte N(0,1) mediānai

			Ticamības līmenis		
			90%	95%	99%
$n = 20$	h	EL	0.8837	0.9589	0.9884
	n^{-1}	EL_{CH}	0.8898	0.9498	0.9885
		EL_{CHB}	0.8942	0.9509	0.9889
		EL_{ZJ}	0.8988	0.9550	0.9907
	$n^{-3/4}$	EL_{CH}	0.8951	0.9468	0.9883
		EL_{CHB}	0.8996	0.9507	0.9897
		EL_{ZJ}	0.9117	0.9598	0.9930
	$n^{-1/2}$	EL_{CH}	0.8977	0.9465	0.9881
		EL_{CHB}	0.9026	0.9505	0.9895
		EL_{ZJ}	0.9327	0.9703	0.9959

Valeinis (2007) Vācijā Gētingenas Universitātes izstrādātajā disertācijā parādīja, kā vispārināt empīrisko ticamības funkcijas metodi divu izlašu gadījumā vispārējā formā, kas sevī ietver divu vidējo vērtību, sadalījuma un kvantiļu funkciju starpības, Q-Q, P-P grafikus, ROC līknes, kā arī strukturālos attiecību modeļus.

Nākamais solis:

Parādīt Bārtleta korekciju divu izlašu gadījumiem vispārējā formā.

Edgeworth izvirzījumi

Ideja:

iegūt statistikas sadalījuma aproksimāciju caur tā kumulantiem

Edgeworth izvirzījums statistikai S_n

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. gadījuma lielumi ar vidējo vērtību θ_0 un galīgu dispersiju σ^2.
- $S_n = n^{1/2}(\hat{\theta} - \theta_0)/\sigma$, kur $\hat{\theta} = \bar{X}$.

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}\{\exp(itS_n)\} \to \mathbb{E}\{\exp(itN(0,1))\} = e^{-t^2/2}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Edgeworth izvirzījumi

$$\varphi_{S_n}(t) = e^{-t^2/2}\{1 + n^{-1/2}r_1(it) + n^{-1}r_2(it) + \ldots + n^{-j/2}r_j(it) + \ldots\},$$

kur $r_1(u) = \frac{1}{6}\kappa_3 u^3$, $r_2(u) = \frac{1}{24}\kappa_4 u^4 + \frac{1}{72}\kappa_3^2 u^6$, utt.

$$\varphi_{S_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP(S_n \le x) \text{ un } e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x),$$

$$\mathbb{P}(S_n \le x) = \Phi(x) + n^{-1/2}R_1(x) + n^{-1}R_2(x) + \ldots + n^{-j/2}R_j(x) + \ldots,$$

Edgeworth izvirzījums S_n

$$\mathbb{P}(S_n \le x) = \Phi(x) + n^{-1/2}p_1(x)\phi(x) + n^{-1}p_2(x)\phi(x) + \ldots .$$

EL metode vienai izlasei

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. gadījuma lielumi ar nezināmu sadalījuma funkciju F un parametru θ;
- $g(X, \theta)$, $E\{g(X, \theta)\} = 0$ $\big($vidējai vērtībai $g(X_i, \theta) = X_i - \mu\big)$;
- Empīriskā ticamības funkcija parametram θ

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n} n^{-1}\{1 + \lambda(\theta) g(X_i, \theta)\}^{-1}$$

- Empīriskās ticamības attiecība parametram θ

$$R(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} = \prod_{i=1}^{n}\{1 + \lambda(\theta) g(X_i, \theta)\}^{-1},$$

Logaritmiskā empīriskās ticamības attiecība

$$W(\theta_0) = -2 \log R(\theta_0) \to_d \chi_1^2,$$

kad $n \to \infty$ un $H_0 : \theta = \theta_0$ ir spēkā.

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

Ideja:

Koriģēt $W(\theta)$ ar tās vidējo vērtību $\mathbb{E}\{W(\theta)\}$, kuras izvirzījums ir formā $1 - an^{-1}$, uzlabojot tās χ^2 sadalījuma aproksimācijas kļūdu no $O(n^{-1})$ uz $O(n^{-2})$.

<u>Apzīmējumi:</u> $\alpha_k = \mathbb{E}(X^k)$ un $A_k = n^{-1}\sum_i X_i^k - \alpha_k$.

1. No $n^{-1}\sum_i (X_i - \mu)\{1 + \lambda(X_i - \mu)\}^{-1} = 0$ nosaka λ :

$$\lambda = A_1 + \alpha_3 A_1^2 - A_1 A_2 + A_1 A_2^2 + A_1^2 A_3 + 2\alpha_3^2 A_1^3 - 3\alpha_3 A_1^2 A_2 - \alpha_4 A_1^3 + O_p(n^{-2}).$$

2. Nosaka $n^{-1}W_0$ izvirzījumu:

$$n^{-1}W_0 = A_1^2 - A_2 A_1^2 + \frac{2}{3}\alpha_3 A_1^3 + A_2^2 A_1^2 + \frac{2}{3} A_3 A_1^3 - 2\alpha_3 A_2 A_1^3 + \alpha_3^2 A_1^4 - \frac{1}{2}\alpha_4 A_1^4 + O_p(n^{-5/2}).$$

Bārtleta korekcija vidējai vērtībai

3. $n^{-1}W_0$ var uzrakstīt formā $n^{-1}W_0 = R^2 + O_p(n^{-5/2})$, kur $R = R_1 + R_2 + R_3 + O_p(n^{-2})$ un

$$R_1 = A_1, \; R_2 = -\frac{1}{2}A_2A_1 + \frac{1}{3}\alpha_3 A_1^2,$$
$$R_3 = \frac{3}{8}A_2^2A_1 + \frac{1}{3}A_3A_1^2 - \frac{5}{6}\alpha_3A_2A_1^2 + \frac{4}{9}\alpha_3^2A_1^3 - \frac{1}{4}\alpha_4A_1^3.$$

4. Kā rezultātā $n^{-1}W_0$ var pārrakstīt formā

$$n^{-1}W_0 = R_1^2 + 2R_1R_2 + 2R_1R_3 + R_2^2 + O_p(n^{-5/2}).$$

Johnson un Kotz pierādīja, ka s−tais nR^2 kumulants ir

$$\kappa_s = 2^{s-1}(s-1)!\{\mathbb{E}(nR^2)\}^s + O(n^{-3/2}).$$

s−tais $(nR^2)\{\mathbb{E}(nR^2)\}^{-1}$ kumulants ir $2^{s-1}(s-1)!$, kas ir arī s−tais χ_1^2 kumulants.

5. $\mathbb{P}\left[W_0\{\mathbb{E}(nR^2)\}^{-1} \leq z\right] = \mathbb{P}(\chi_1^2 \leq z) + O(n^{-2})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(nR^2) &= n\{\mathbb{E}(R_1^2) + 2\mathbb{E}(R_1R_2) + 2\mathbb{E}(R_1R_3) + \mathbb{E}(R_2^2)\} + O(n^{-2}) \\ &= 1 + n^{-1}\left(-\frac{1}{3}\alpha_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_4\right) + O(n^{-2})\end{aligned}$$

6. Ja EL ticamības intervāls parametram μ ir

$$I_\alpha = \{\mu : W(\mu) \leq c_\alpha\},$$

kur c_α ir tāds, ka $\mathbb{P}(\chi_1^2 \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$, tad EL ticamības intervāls ar Bārtleta korekciju ir

$$I'_\alpha = \{\mu : W(\mu) \leq c_\alpha(1 + n^{-1}a)\},$$

Simulācijas Bārtleta korekcijai N(0, 1) vidējai vērtībai

		Ticamības līmenis		
		90%	95%	99%
n = 10	EL	0.8429	0.8975	0.9552
	$EL_{B_{teo}}$	0.8674	0.9162	0.9650
	$EL_{B_{nov}}$	0.8616	0.9118	0.9633
n = 20	EL	0.8786	0.9334	0.9787
	$EL_{B_{teo}}$	0.8924	0.9420	0.9830
	$EL_{B_{nov}}$	0.8900	0.9410	0.9825
n = 50	EL	0.8910	0.9456	0.9867
	$EL_{B_{teo}}$	0.8952	0.9486	0.9879
	$EL_{B_{nov}}$	0.8948	0.9482	0.9877

Simulācijas Bārtleta korekcijai χ_1^2 vidējai vērtībai

		Ticamības līmenis		
		90%	95%	99%
n = 10	EL	0.7704	0.8329	0.8975
	$EL_{B_{teo}}$	0.8389	0.8826	0.9297
	$EL_{B_{nov}}$	0.7906	0.8480	0.9074
n = 20	EL	0.8394	0.8925	0.9523
	$EL_{B_{teo}}$	0.8741	0.9198	0.9669
	$EL_{B_{nov}}$	0.8540	0.9042	0.9587
n = 50	EL	0.8710	0.9265	0.9776
	$EL_{B_{teo}}$	0.8876	0.9387	0.9818
	$EL_{B_{nov}}$	0.8797	0.9328	0.9793

Bārtleta korekcija kvantilēm

$g(X_i, \theta) = G_h(\theta - X_i) - q$, kur $G_h(x) = G(x/h)$ un h ir joslas platums un $G(t) = \int_{-\infty}^{t} K(x)dx$.

Chen un Hall pieeja:

1. No $n^{-1}\sum_i g_i(1+\lambda g_i)^{-1} = 0$ iegūst λ :

$$\lambda = \bar{g}_2^{-1}\bar{g}_1 + \bar{g}_2^{-3}\bar{g}_3\bar{g}_1^2 + \{2\bar{g}_2^{-5}\bar{g}_3^2 - \bar{g}_2^{-4}\bar{g}_4\}\bar{g}_1^3 + \sum_{k=4}^{j} R_{1k}\bar{g}_1^k + O_p\{(n^{-1/2} + h^r)^{j+1}\},$$

2. Iegūst $W(\theta)$ izvirzījumu

$$\begin{aligned} W(\theta) =& n\{\bar{g}_2^{-1}\bar{g}_1^2 + \frac{2}{3}\bar{g}_2^{-3}\bar{g}_3\bar{g}_1^3 + \left(\bar{g}_2^{-5}\bar{g}_3^2 - \frac{1}{2}\bar{g}_2^{-4}\bar{g}_4\right)\bar{g}_1^4 \\ & - \left(2\bar{g}_2^{-6}\bar{g}_3\bar{g}_4 - 2\bar{g}_2^{-7}\bar{g}_3^3 - \frac{2}{5}\bar{g}_2^{-5}\bar{g}_5\right)\bar{g}_1^5\} \\ & + n\sum^{j} R_{2k}\bar{g}_1^{k+1} + O_p\{n(n^{-1/2} + h^r)^{j+2}.\} \end{aligned}$$

Bārtleta korekcija kvantilēm

3. $W(\theta)$ var uzrakstīt formā $W(\theta) = (n^{1/2} S_j')^2$,

$$\begin{aligned} S_j' = & \bar{g}_2^{-1/2} \{ \bar{g}_1 + \frac{1}{3} \bar{g}_2^{-2} \bar{g}_3 \bar{g}_1^2 + \left(\frac{4}{9} \bar{g}_2^{-4} \bar{g}_3^2 - \frac{1}{4} \bar{g}_2^{-3} \bar{g}_4 \right) \bar{g}_1^3 \\ & + \left(\frac{23}{27} \bar{g}_2^{-6} \bar{g}_3^3 - \frac{11}{12} \bar{g}_2^{-5} \bar{g}_3 \bar{g}_4 + \frac{1}{5} \bar{g}_2^{-4} \bar{g}_5 \right) \bar{g}_1^4 \\ & + \sum_{k=5}^{j} T_k \bar{g}_1^k \} + U_{1j} = S_j + U_{1j}, \end{aligned}$$

4. Iegūst Edgeworth izvirzījumu $n^{1/2} S_j$ sadalījumam,
5. Izpildoties zināmiem nosacījumiem, var iegūt, ka

$$\mathbb{E}\{W(\theta)\} = 1 + n^{-1}\beta + o(n^{-1}),$$

kur $\beta = \frac{1}{6}(3\mu_2^{-2}\mu_4 - 2\mu_2^{-3}\mu_3^2)$

Simulācijas Bārtleta korekcijai χ^2_3 mediānai

			Ticamības līmenis		
			90%	95%	99%
n = 50	h	EL	0.8798	0.9347	0.9930
	n^{-1}	EL_{CH}	0.8859	0.9425	0.9914
		EL_{CH_B}	0.8866	0.9437	0.9917
	$n^{-3/4}$	EL_{CH}	0.8927	0.9464	0.9906
		EL_{CH_B}	0.8942	0.9482	0.9912
	$n^{-1/2}$	EL_{CH}	0.8953	0.9490	0.9906
		EL_{CH_B}	0.8971	0.9493	0.9908
	$n^{-1/4}$	EL_{CH}	0.8926	0.9463	0.9893
		EL_{CH_B}	0.8943	0.9483	0.9903

EL metode divām izlasēm

- $X_1, \dots, X_{n_1}$ ir i.i.d. $\sim F_1$ un $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ ir i.i.d. $\sim F_2$;
- Informācija par parametriem θ_0 un Δ_0 ir pieejama ar funkcijām $w_1(X_i, \theta_0, \Delta_0, t)$ un $w_2(Y_j, \theta_0, \Delta_0, t)$, kurām ir spēkā

$$\mathbb{E}_{F_1} w_1(X, \theta_0, \Delta_0, t) = 0, \ \mathbb{E}_{F_2} w_2(Y, \theta_0, \Delta_0, t) = 0.$$

- Empīriskās ticamības attiecība

$$R(\Delta, \theta) = \sup_{\theta, p, q} \prod_{i=1}^{n_1} (n_1 p_i) \prod_{j=1}^{n_2} (n_2 q_j), \ \text{kur}$$

$$p_i = \{n_1(1 + \lambda_1(\theta) w_1(X_i, \theta, \Delta, t))\}^{-1}, \quad i = 1, \dots, n_1.$$
$$q_j = \{n_2(1 + \lambda_2(\theta) w_2(Y_j, \theta, \Delta, t))\}^{-1}, \quad j = 1, \dots, n_2,$$

EL metode divām izlasēm

- Empīriskā logaritmiskā ticamības attiecība

$$W(\Delta,\theta) = -2\log R(\Delta,\theta) = 2\sum_{i=1}^{n_1}\log(1+\lambda_1(\theta)w_1(X_i,\theta,\Delta,t))$$
$$+2\sum_{j=1}^{n_2}\log(1+\lambda_2(\theta)w_2(Y_j,\theta,\Delta,t)).$$

- Parametra θ novērtējumu $\hat{\theta}=\hat{\theta}(\Delta)$, kas maksimizē $R(\Delta,\theta)$ fiksētam parametram Δ, var iegūt no vienādojuma $\partial W(\Delta,\theta)/\partial\theta$

Izpildoties zināmiem nosacījumiem

$$-2\log R(\Delta_0,\hat{\theta}) \rightarrow_d \chi^2_1,$$

Bārtleta korekcija 2 izlašu vidējo starpībai

- $\theta_0 = \int \mathrm{XdF_1(x)}$, $\Delta_0 = \int \mathrm{YdF_2(y)} - \int \mathrm{XdF_1(x)}$ un $\mathrm{w_1 = X} - \theta_0$, $\mathrm{w_2 = Y} - \theta_0 - \Delta_0$;
- Liu, Zou un Zhang (2008) ieguva $\mathrm{n^{-1}W}(\theta)$ formā $\mathrm{n^{-1}W}(\theta) = \Delta_1 + \Delta_2^* + \mathrm{O_p(n^{-5/2})}$,
- $\Delta_2^* = \frac{2}{3}\mathrm{A_{01}^3(A_{13} - A_{03}) + (A_{02} - A_{12})A_{01}^2}$, taču $\Delta_2 = \frac{2}{3}\mathrm{A_{01}^3(A_{13} - A_{03}) + (A_{02} - A_{12})(A_{01}^2} + \alpha_3 \mathrm{A_{01}^3 - A_{01}^2 A_{02})}$, ko var pārrakstīt $\Delta_2 = \Delta_2^* + \delta$

Simulācijas Bārtleta korekcijai χ^2_3 un $\exp(1)$ vidējo starpībai

		$n_2 = 10$	$n_2 = 20$	$n_2 = 30$
$n_1 = 10$	EL	0.8877	0.9210	0.9284
	$EL_{B_{teo}}$	0.9183	0.9364	0.9412
	$EL_{B_{nov}}$	0.9057	0.9352	0.9374
$n_1 = 20$	EL	0.8915	0.9213	0.9313
	$EL_{B_{teo}}$	0.9162	0.9358	0.9425
	$EL_{B_{nov}}$	0.9056	0.9318	0.9403
$n_1 = 30$	EL	0.8838	0.9251	0.9342
	$EL_{B_{teo}}$	0.9119	0.9355	0.9427
	$EL_{B_{nov}}$	0.9007	0.9286	0.9379

Simulācijas Bārtleta korekcijai exp(1) un exp(2) vidējo starpībai

		$n_2 = 10$	$n_2 = 20$	$n_2 = 30$
$n_1 = 10$	EL	0.8862	0.8803	0.8757
	$EL_{B_{teo}}$	0.9186	0.9134	0.9167
	$EL_{B_{nov}}$	0.9015	0.8962	0.8946
$n_1 = 20$	EL	0.9170	0.9163	0.9201
	$EL_{B_{teo}}$	0.9379	0.9378	0.9343
	$EL_{B_{nov}}$	0.9305	0.9257	0.9280
$n_1 = 30$	EL	0.9200	0.9261	0.9289
	$EL_{B_{teo}}$	0.9389	0.9396	0.9430
	$EL_{B_{nov}}$	0.9339	0.9378	0.9374

- Darbā iegūtais rezultāts:

$$
\begin{aligned}
W &= 2\tilde{v}_1\bar{w}_{12}^{-1}\bar{w}_{11} + (2\tilde{v}_1\bar{w}_{13}\bar{w}_{12}^{-3} - \tilde{v}_2\bar{w}_{12}^{-2})\bar{w}_{11}^2 \\
&\quad + \left(\frac{2}{3}\tilde{v}_3\bar{w}_{12}^{-3} - 2\tilde{v}_2\bar{w}_{13}\bar{w}_{12}^{-4} - 2\tilde{v}_1\bar{w}_{14}\bar{w}_{12}^{-4} + 4\tilde{v}_1\bar{w}_{13}^2\bar{w}_{12}^{-5}\right)\bar{w}_{11}^3 \\
&\quad + \left(2\tilde{v}_3\bar{w}_{12}^{-5}\bar{w}_{13} - \frac{1}{2}\tilde{v}_4\bar{w}_{12}^{-4} + 2\tilde{v}_2\bar{w}_{14}\bar{w}_{12}^{-5} - 5\tilde{v}_2\bar{w}_{13}^2\bar{w}_{12}^{-6}\right)\bar{w}_{11}^4 \\
&\quad + \left(\frac{2}{5}\tilde{v}_5\bar{w}_{12}^{-5} + 2\tilde{v}_2\bar{w}_{13}\bar{w}_{14}\bar{w}_{12}^{-7} - 2\tilde{v}_3\bar{w}_{14}\bar{w}_{12}^{-6} + 6\tilde{v}_3\bar{w}_{13}^2\bar{w}_{12}^{-7}\right)\bar{w}_{11}^5 \\
&\quad - \left(4\tilde{v}_2\bar{w}_{13}^3\bar{w}_{12}^{-8} + 2\tilde{v}_4\bar{w}_{13}\bar{w}_{12}^{-6}\right)\bar{w}_{11}^5 + \sum_{k=5}^{j} R_{2k}\bar{w}_{11}^{k+1} \\
&\quad + (o_p(b) + O_p(\delta + l^{-1/2}))^{j+2},
\end{aligned}
$$

kur $b = \min(b_1, b_2)$, $l = \min(n_1, n_2)$, $\delta = O(b^r)$,
$\tilde{v}_k = n_1\bar{w}_{1k} + n_2c^k\bar{w}_{2k}$, $\bar{w}_{1k} = n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1} w_1^k$ un
$\bar{w}_{2k} = n_2^{-1}\sum_{j=1}^{n_2} w_2^k$.

Paldies par uzmanību!