LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

BETA KOEFICIENTU NOVĒRTĒŠANA STOHASTISKIEM PROCESIEM

KURSA DARBS

Autors: **Aleksis Jurševskis**
Stud. apl. aj06048
Darba vadītājs: asoc.prof. Dr.math. Jānis Valeinis

RĪGA 2012

Anotācija

Darbā apskatīta iespēja stohastiskam procesam novērtēt β stipri jauktās atkarības koeficientu no vienas realizācijas. Izpētīta novērtējuma teorētiskā un praktiskā konstrukcija, aplūkota novērtējuma efektivitāte Markova ķēdēm, AR un ilglaicīgās atmiņas procesiem.

Izveidota programma, kas spēj aprēķināt novērtējumu jebkuram stacionārai laikrindai.

Atslēgas vārdi: *beta* stipri jauktais koeficients, *beta* stipri jauktā koeficienta novērtēšana

Saturs

1. Ievads

Pētot procesus dabā, var ievērot, ka daudzi no tiem ir laikā atkarīgi, taču, šī ietekme mazinās, pieaugot laika atstarpei starp novērojumiem, līdz tos var uzskatīt par neatkarīgiem. Lai datus, kas iegūti no šāda veida fenomeniem, varētu pētīt ar statistikas metodēm, nepieciešams teorētisks modelis. Viens no tādiem ir stipri jauktu procesu teorija, kas, izmantojot mēra/varbūtību teorijas konstrukcijas, apraksta atkarīgus procesus, neizdarot pieņēmumus par to struktūru. Galvenā vispārīgas teorijas priekšrocība ir, ka jebkuru rezultātu var potenciāli plaši pielietot, piemēram, tādi modeļi kā Markova ķēdes [6], ARMA [13], ARCH [8], GARCH [5] un difūzijas procesi [10] apmierina stipri jauktu procesu nosacījumus, un ir pētāmi ar to metodēm.

Pamatus stipri jauktu procesu teorijai lika Murrejs Rozenblats *(Murray Rosenblatt)* 1956. gadā ar darbu "Centrālā robežteorēma un stipri jauktas atkarības nosacījums" [15], definējot nosacījumu, lai process būtu stipri jaukts, centrālās robežteorēmas variantu stipri jauktiem procesiem un stipri jauktas atkarības mēru α. Nākošo nozīmīgo darbu publicēja V. Volkonskis un J. Rozanovs 1960. gadā [17], ieviešot β jaukto jeb absolūtās regularitātes koeficientu, kas definēja stipri jauktu atkarību nedaudz šaurākā nozīmē, darbā minot Andreju Kolmogorovu kā idejas autoru. Līdz šim brīdim nākuši klāt daudzi citi atkarības mēri, taču šie divi ir nozīmīgākie.

Tik vispārīga līmeņa teorijai ir savas ēnas puses. Jo teorija kļūst abstraktāka, jo mazākas iespējas to izmantot praktiskiem aprēķiniem. Pieņemsim, ka ir dota novērojumu virkne, un mums ir aizdomas, ka tā varētu būt stipri jaukta, taču kā to pārbaudīt? Citāts no Jolantes Rones maģistra darba [14]: "Jaukto procesu koeficientus vispārīgā veidā ir ļoti grūti aprēķināt, ...". Šeit soli uz priekšu ir spēruši Daniels Makdonalds *(Daniel McDonald)*, Kosma Šalizi *(Cosma Shalizi)* un Marks Šervišs *(Mark Schervish)* [1] [12] no ASV ar publikāciju β jaukto koeficientu novērtēšana, pirmo reizi piedāvājot absolūtās regularitātes koeficienta novērtējumu jebkāda stacionāra procesa realizācijai: "We present the first method for estimating the β-mixing coefficients for stationary time series data given a single sample path."

Kursa darba mērķis ir padziļināti izpētīt M.S.S. novērtējuma konstrukciju un pielietojamību. Pirmajā nodaļā tiks dots neliels ievads stipri jaukto procesu teorijā. Tālāk sekos Makdonalda novērtējuma konstrukcijas izpēte. Visbeidzot tiks praktiski pētīta absolūtās regularitātes koeficienta uzvedība dažādiem stacionāriem stohastiskiem procesiem.

[1] Tā kā šī ir svarīgākā publikācija kursa darba literatūras sarakstā, kas tiek bieži pieminēta, turpmāk šie trīs autori tiks apzīmēti ar M.S.S.

2. Stipri jauktie koeficienti stohastiskiem procesiem.

Definīcija 1. Pieņemsim, ka $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \in [1, \infty]$ ir p-integrējamu gadījuma lielumu f telpa. Tad par p-normu tādā telpā sauksim

$$||f||_p = \left(\int |f|^p dP \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definīcija 2. [4, 66 lpp.] Pieņemsim, ka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir varbūtību telpa, $\mathcal{A}$ ir σ-algebras $\subset \mathcal{F}$ un $p \in [1, \infty]$. Ar $\mathcal{L}^p_{real}$ apzīmēsim visu tādu $\mathcal{A}$ mērāmu, reālu gadījuma lielumu X uz Ω saimi, kuriem $||X||_p < \infty$

Definīcija 3. Pieņemsim, ka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir varbūtību telpa un $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ir σ-algebras $\subset \mathcal{F}$. Tad var definēt divus koeficientus, kas mēra atkarību starp σ-algebrām:

$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, \, A \in \mathcal{A}, \, , \, B \in \mathcal{B};$

$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup |\mathrm{Corr}(f, g)|, f \in \mathcal{L}^2_{real}(\mathcal{A}), g \in \mathcal{L}^2_{real}(\mathcal{B}),;$

$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup(1/2) \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|,$

kur koeficientam β suprēms ņemts pār visiem tādiem Ω skaldījumu *(partition)*[2] pāriem $\{A_1, A_2, ..., A_I\}$, $\{B_1, B_2, ..., B_J\}$ tā, ka $\forall i \; A_i \in \mathcal{A}$ un $\forall j \; B_j \in \mathcal{B}$.

Piezīme 1. *Ievada nepieminēts, taču arīdzan nozīmīgs, $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ir atkarības mērs, ko mēdz saukt arī par maksimālās korelācijas koeficientu, kas ir "parastā" divu gadījuma lielumu X, Y korelācijas koeficienta $\rho(X, Y)$ vispārinājums. Eksistē procesi, kuriem pierādīts, ka šo skaitļu absolūtās vērtības sakrīt, piemēram, kad gadījuma lielumi X, Y pieņem tikai divas vērtības [14, 13 lpp.], taču vispārīgā gadījumā tas nav tiesa.*

Piezīme 2. *Ja gadījuma lielumiem papildus uzliekam nosacījumus $\mathbb{E}f = \mathbb{E}g = 0$, $||f||_2 = 1$, $||g||_2 = 1$, tad iegūstam*

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup |\mathrm{Corr}(f, g)| = \sup \frac{|\mathbb{E}fg|}{||f||_2||g_2||} = \sup |\mathbb{E}fg|.$$

Lai pētītu procesus laikā, nepieciešams apskatīt variantu, kad σ-algebras $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$ tiek ģenerētas no gadījuma lielumu virknes.

Definīcija 4. Pieņemsim, ka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir varbūtību telpa. Tad par šajā telpā definētu gadījumu lielumu virkni sauksim gadījuma lielumu saimi $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

σ-algebru ($\subset \mathcal{F}$), ko ģenerē g. l. virkne $\{X_i : i \in I\}$, apzīmēsim ar $\sigma(X)$ vai $\sigma(X_i, i \in I)$, šeit I ir indeksu kopa. Pieņemsim, ka $\{X_i : i \in I\}$ ir g. l. saime, un $X_i(\omega)$, kas pieņem reālas vērtības, ir definēts visiem $i \in I$ un $\omega \in \Omega$. Tad σ-algebra $\sigma(X)$ ir notikumu saime formā $\{X \in G\}, G \in \mathcal{R}^I$, kur $\mathcal{R}^I$ ir $\mathbb{R}^I$ Boreila apakškopu saime.

Definīcija 5. Gadījuma lielumu virkni $X := \{X_k, k \in \mathbb{Z}\}$ sauksim par stingri stacionāru, ja visiem $J \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ gadījuma lielumu vektoru $(X_{J+1}, X_{J+2}, ..., X_{J+n})$ un $(X_1, X_2, ..., X_n)$ galīgi dimensionālie sadalījumi sakrīt.

[2] Tā kā gandrīz visa šī darba bibliogrāfija ir angļu valodā, šeit un tālāk, kur vien precīzs tulkojums man nav zināms, tulkotais vārds tiks dots *kursīvā*.

Definīcija 6. Pieņemsim, ka X ir gadījuma lielumu virkne. Visiem $-\infty \leq J \leq L \leq \infty$ definēsim σ-algebru

$$\mathcal{F}_J^L := \sigma(X_k, J \leq K \leq L),$$

kā σ-algebru, kas ģenerēta no gadījuma lielumiem $(X_k, J \leq k \leq L)$. Noteiktam J definējam arī

$$\mathcal{F}_{-\infty}^J = \sigma(X_J, X_{J-1}, X_{J-2}, ...);$$
$$\mathcal{F}_n^\infty = \sigma(X_J, X_{J+1}, X_{J+2}, ...);$$
$$\mathcal{F}_{-\infty}^\infty = \sigma(X_k, k \in \mathbb{Z}).$$

Apskatīsim jauktos koeficientus g. l. virknēm.

Definīcija 7. Pieņemsim, ka X ir gadījuma lielumu virkne telpā $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tad katram pozitīvam naturālam skaitlim a

$$\alpha(a) = \alpha(X, a) = \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_a^\infty);$$

$$\rho(a) = \rho(X, a) = \rho(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_a^\infty);$$

$$\beta(a) = \beta(X, a) = \beta(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_a^\infty),$$

Piezīme 3. *Ja $X := \{X_k, k \in \mathbb{Z}\}$ ir stacionāra g. l. virkne, tad*

$$\alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_a^\infty) = \sup_{C,D} |P(V \in C, W \in D) - P(V \in C)P(W \in D)|,$$

kur $V := (X_0, X_{-1}, X_{-2}, ...)$ un $W := (X_a, X_{a+1}, X_{a+2}, ...)$, un suprēms ņemts pār visiem $C, D \in \mathcal{R}^\mathcal{N}$. Līdzīgi varam arī papildināt β un ρ definīcijas.

Virkni X sauksim par *stingri jauktu* (jeb α-jauktu), ja $\alpha(a) \to 0$, kad $a \to \infty$, par ρ-jauktu, ja $\rho(a) \to 0$, kad $a \to \infty$, un par *absolūti regulāru* (jeb β-jauktu), ja $\beta(a) \to 0$, kad $a \to \infty$. Ja virkne ir β-jaukta, tā ir arī α-jaukta, bet ne otrādi. Ja virkne ir ρ-jaukta, tā ir arī α-jaukta, bet ne otrādi. Ja virkne ir β-jaukta, no tā neseko, ka tā ir ρ-jaukta, un otrādi.

Minēsim pāris svarīgas jaukto koeficientu īpašības.

Teorēma 4. *Pieņemsim, ka gadījuma process X ir α, β un ρ jaukts. Tad tam izpildās sekojošas nevienādības.*

$$0 \leq \alpha(a) \leq 1/4$$

$$0 \leq \beta(a) \leq 1$$

$$0 \leq \rho(a) \leq 1$$

$$2\alpha(a) \leq \beta(a) \leq 1$$

$$4\alpha(a) \leq \rho(a) \leq 1$$

Izmantojot pēdējās divas īpašības, varam izteikt minējumu, ka $\rho(a)$ vajadzētu būt lielākam nekā $\beta(a)$. Vēlāk apskatītais piemērs ar ARMA procesu to tik tiešām apstiprinās.

β jauktajiem koeficientiem eksistē īpaša forma, ko sauc par kopējās variācijas normu *(total variation norm)*. Tieši šo normu izmantoja M.S.S., lai izveidotu β-jauktā koeficienta novērtējumu, tāpēc nepieciešams apskatīt dažus papildus jēdzienus, uz kuriem balstīta kopējā variācija.

Definīcija 8. Pieņemsim, ka μ_1 un μ_2 ir divi galīgi mēri mērāmā telpā $(\Omega, \mathcal{F})$. Apzīmēsim $\nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)\ \forall A \in \mathcal{F}$. Ja $\nu : F \to \mathbb{R}$ apmierina:

(a) $\nu(\emptyset) = 0$;

(b) $\forall \{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, kur $A_i \cap A_j = \emptyset$, ja $i \neq j$, un $\sum_{i=1}^{\infty} |\nu(A_i)| < \infty$:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i);$$

(c) $||\nu|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(A_i)| : \{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F},\ A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ ja } i \neq j, \bigcup_{n\geq 1} A_n = \Omega \right\}$,

tad ν sauc par neierobežotu, galīgu zīmju mēru (*finite signed measure*).

Definīcija 9. [2, 123. lpp] Ja ν ir ar zīmi neierobežots, galīgs mērs telpā $(\Omega, \mathcal{F})$, tad $||\nu||_{TV} := |\nu|(\Omega)$ sauc par kopējās variācijas normu.

Šeit $|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(A_i)| : \{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F},\ A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ ja } i \neq j, \bigcup_{n\geq 1} A_n = A \right\}$.

TV metriku varam interpretēt arī pavisam vienkārši.

Piemērs 1. [9, 356. lpp] Pieņemsim, ka μ un ν ir diskrēti mēri, kas piešķir varbūtības f_n un g_n punktos x_n. Tad

$$||\mu - \nu||_{TV} = \sum_n |f_n - g_n|.$$

Līdzīgi, pieņemsim, ka μ un ν ir nepārtraukti mēri ar blīvuma funkcijām f un g, tad

$$||\mu - \nu||_{TV} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx.$$

Kad apskatām g.l. virknes, ērti par Ω izvēlēties daudzdimensiju telpu $\mathbb{R}^n$ un par $\mathcal{F}$ Boreila σ-algebru $\mathcal{R}^n \equiv \sigma(\{A : A \text{ ir vaļēja } \mathbb{R}^n \text{ apakškopa}\})$.

Konteksts 1. I Pieņemsim, ka P ir varbūtību mērs mērāmā telpā $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{R}^{\mathbb{Z}})$. Varbūtību telpā $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}, P)$ definējam šādu g.l. virkni X

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, X_k(\omega) := \omega_k.$$

Jeb visiem $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $X(\omega) = \omega$.

Tad katram $A \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ iegūstam, ka $\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : X(\omega) \in A\} = A$ un attiecīgi $P(X \in A) = P(A)$. Tādējādi X sadalījums uz $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ir varbūtību mērs P.

II Mērāmā telpā $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{R}^{\mathbb{Z}})$ eksistē tāds varbūtību mērs Q, kuram izpildās

$$Q(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}, B \in \mathcal{F}_{1}^{\infty}.$$

No tā seko, ka

(i) $Q(A) = P(A) \qquad A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}$;

(ii) $Q(B) = P(B) \qquad B \in \mathcal{F}_{1}^{\infty}$;

(iii) $\mathcal{F}_{-\infty}^{0}$ un $\mathcal{F}_{1}^{\infty}$ ir neatkarīgas zem mēra Q, tas ir, $Q(A \cap B) = Q(A)Q(B)$ visiem $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}, B \in \mathcal{F}_{1}^{\infty}$.

Šie apgalvojumi dod mums papildus rīkus gadījuma lielumu virkņu pētīšanai. Izmantojot **I**, var pierādīt, ka jebkuru teorēmu, kas apraksta kādas g. l. virknes sadalījumu, varam pārveidot tā, ka augstākminētais ir pielietojams. Savukārt no **II** seko, ka jebkurus g.l. virknes ģenerētus notikumus varam mērīt kā neatkarīgus.

Sekojošās teorēmas parāda sakarību starp kopējās variācijas normu un β jaukto koeficientu.

Teorēma 5. *Pieņemsim, ka* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ir varbūtību telpa, un* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *ir tajā definētas* σ-*algebras* $\subset \mathcal{F}$. *Pieņemsim, ka pārī* $(\Omega, \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ *eksistē varbūtību mērs* Q *ar trim īpašībām:*

(a) $Q(A) = P(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$,

(b) $Q(B) = P(B)\ \forall B \in \mathcal{B}$, *un*

(c) $Q(A \cap B) = Q(A)Q(B) = P(A)P(B)\ \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$.

Ar P' *apzīmē varbūtību mēra* P *ierobežojumu uz* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, *tas ir,* P' *mēra tikai tos notikumus, kas pieder* σ-*algebrai* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. *Tad ir spēkā, ka*

$$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (1/2)||P' - Q||_{TV},$$

kur $||P' - Q||_{TV}$ *ir ar zīmi neierobežota, galīga mēra* $P' - Q$ *variācija uz* $(\Omega, \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$.

Šī teorēma paver iespēju mērīt β jauktos koeficientus ar kopējās variācijas normu, taču mūsu novērtējumam daudz svarīgākas ir tās sekas.

Sekas 6. *Pieņemsim, ka* $(S_1, \mathcal{S}_1)$ *un* $(S_2, \mathcal{S}_2)$ *ir Boreila telpas un ka* X, Y *ir gadījuma lielumi (definēti kādā varbūtību telpā), kas pieņem vērtības no attiecīgi* S_1 *un* S_2. *Ar* μ_1 *apzīmēsim* X *sadalījumu uz* $(S_1, \mathcal{S}_1)$, *ar* μ_2 *apzīmēsim* Y *sadalījumu uz* $(S_2, \mathcal{S}_2)$, *un ar* ν *apzīmēsim* (X, Y) *sadalījumu uz* $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$. *Tad*

$$\beta(\sigma(X), \sigma(Y)) = [\sup |\nu(D) - (\mu_1 \times \mu_2)(D)|, D \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2]$$

$$= (1/2)||\nu - (\mu_1 \times \mu_2)||_{TV}$$

.

Lai šos rezultātus varētu pielietot, nepieciešams apskatīt teorēmu 5 no g. l. virkņu skatpunkta, saistībā ar kontekstu 1.

Sekas 7. *Varbūtību telpā* $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}, P)$ *eksistē mērs* Q *uz* σ-*algebras* $\mathcal{R}_{-\infty}^{\infty}$, *kuram izpildās*

(i) $Q(A) = P(A) \qquad A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}$;

(ii) $Q(B) = P(B) \qquad B \in \mathcal{F}_{1}^{\infty}$;

(iii) $Q(A \cap B) = Q(A)Q(B) = P(A)P(B)$ *visiem* $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{0}, B \in \mathcal{F}_{1}^{\infty}$.

Izmantojot mēru Q, *visiem* $m \leq 0$, $n \geq 1$ *koeficientu* β *varam rēķināt kā*

$$\beta(\mathcal{R}_{-\infty}^{m}, \mathcal{R}_{n}^{\infty}) = \sup |P(D) - Q(D)|, D \in \mathcal{R}_{-\infty}^{m} \vee \mathcal{R}_{n}^{\infty}$$

Nepieciešams vēl pēdējais solis, pāreja uz kopējo variācijas metriku stacionārām g. l. virknēm. Izmantojot 7 un 6, varam iegūt

$$\beta(a) = \beta(X, a) =$$

$$\beta(\mathcal{R}_{-\infty}^{0}, \mathcal{R}_{a}^{\infty}) = [\sup|\nu(D) - (\mu_1 \times \mu_2)(D)|, D \in \mathcal{R}_{-\infty}^{0} \vee \mathcal{R}_{a}^{\infty}] =$$
$$= (1/2)||\nu - (\mu_1 \times \mu_2)||_{TV},$$

kur ν ir (X_0, X_a) sadalījums, bet $\mu_1 \times \mu_2$ ir (X_0, X_a) sadalījums, pieņemot, ka X_0 un X_a ir neatkarīgi.

Šeit arī slēpjas galvenā M.S.S. ideja, kā novērtēt kādas laikrindas β koeficientu no tās realizācijas, proti, no datiem izdarīt secinājumus par ν un $\mu_1 \times \mu_2$ sadalījumiem.

Nodaļas beigās apskatīsim eksponenciālās nevienādības, kas, kopā ar M.S.S. novērtējumu, varētu kalpot par pamatu jaunu testu konstrukcijai statistikā. Bernšteina nevienādības ir plaši pazīstama. Visvienkāršākā no tām ir

Teorēma 8. *Pieņemsim, ka $X_1, ..., X_n$ ir neatkarīgi Bernulli gadījuma lielumi, kas pieņem vērtības -1 un 1 ar varbūtību $1/2$. Tad katram $\varepsilon > 0$*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \varepsilon\right) \le 2\exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon/3)}\right\}.$$

Līdzīgas nevienādības ir konstruētas stipri jauktu procesu teorijā. Šeit par piemēru izvēlētajai nevienādībai labā puse ir atkarīga no $\beta(a)$ koeficienta vērtības.

Teorēma 9. *[7, 36. lpp] Pieņemsim, ka laikrinda X ir absolūti regulāra un apmierina nosacījumus*

1) $\forall t \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}X_t = 0;$

2) $\exists \sigma^2 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{m}\mathbb{E}(X_n + ... + X_{n+m})^2 \le \sigma^2;$

3) $\forall t \in \mathbb{N}, \quad |X_t| \le M,$

tad katram $\varepsilon > 0$, $\theta = \varepsilon^2/4$ un katram reālam nenegatīvam $q \le n/(q+\theta)$:

$$P\left(\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right| \ge x\right) \le 4\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)x^2}{2(n\sigma^2 + qMx/3)}\right\} + 2^n\frac{[\beta(q\theta)] - 1)}{q}.$$

3. M.S.S. $\beta(a)$ novērtējuma konstrukcija

Definīcija 10. Pieņemsim, ka funkcija f definēta intervālā $[0,1]$, kas sadalīts n vienādās daļās. Intervālus $B_1 = [0, \frac{1}{n}], B_2 = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], ..., B_n = [\frac{n-1}{n}, 1]$ sauksim par biniem. Tad par histogrammu sauksim summu

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{p}_i}{h} I_{x \in B_i},$$

kur $h = \frac{1}{n}$, $\hat{p}_i = X_i/n$, x_i ir novērojumu skaits binā B_i, $I_{x\in B_i}$ ir indikatorfunkcija.

Definīcija 11. Vispārinot uz divām dimensijām,

$$\hat{f}^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\hat{p}_{1_i}}{h_1}\frac{\hat{p}_{2_j}}{h_2} I_{x\in B_j} I_{y\in B_j},$$

kur attiecīgi $h_1 = \frac{1}{n}$, $h_2 = \frac{1}{m}$, $\hat{p}_{1_i} = X_i/n$, $\hat{p}_{2_j} = Y_j/m$, X_i ir novērojumu skaits binā B_i un Y_j ir novērojumu skaits binā B_j. Mūsu vajadzībām vienmēr $m = n$.

Ja mums ir doti novērojumi $\{x_i\}_{i=1}^n$, konstruējam divdimensiju histogrammu $\hat{f}_a^2$ no $\{x_i, x_{i+a}\}$ un divdimensiju histogrammu $\hat{f}\otimes\hat{f}$ no $\{x_i\}\times\{x_i\}$. Tad $\beta(a)$ novērtējumu $\hat{\beta}(a)$ varam konstruēt kā

$$\hat{\beta}(a) = (1/2)\int \left|\hat{f}_a^2 - \hat{f}\otimes\hat{f}\right|.$$

Tas gan ir M.S.S. piedāvātā novērtējuma nedaudz vienkāršots variants, taču praktiskām vajadzībām ar to pilnībā pietiek, un to mēs arī izmantosim. Tā oriģinālā formā ir

$$\hat{\beta}^d(a) = (1/2)\int \left|\hat{f}_a^{2d} - \hat{f}^d\otimes\hat{f}^d\right|,$$

kur d apzīmē, cik novērojumi pēc kārtas tiek ņemti, tas ir, tiek histogrammēti dati formā $\{x_i, x_{i+1}, ..., x_d\}$ un, d pieaugot, palielinās arī novērtējuma sarežģītība. Turklāt novērtējuma autoru piemēri liecina, ka krītas arī precizitāte. Pieaugošās dimensijas tiek izmantotas, lai pierādītu, ka $\hat{beta}^d(a)$ konverģē pēc varbūtības uz $\beta(a)$, kad $n\to\infty$, ja d aug līdz ar n.

Publikācijas [12] divas galvenās teorēma skan šādi.

Teorēma 10. *Pieņemsim, ka $\{x_i\}_{i=1}^n$ ir realizācijas no patvaļīgas β jauktas gadījuma lielumu virknes un $d_n = O(exp\{W(\log n)\})$, kur W ir Lamberta W funkcija* [3] *Tad $\hat{\beta}^{d_n}(a) \xrightarrow{P} \beta(a)$, kad $n\to\infty$,*

Teorēma 11. *Pieņemsim, ka $\{x_i\}_{i=1}^n$ ir realizācijas no stacionāras β jauktas gadījuma lielumu virknes. Pieņemsim, ka μ_n un m_n ir pozitīvi naturāli skaitli, kuriem izpildās $2\mu_n m_n = n$. Tad visiem $\varepsilon > \mathbb{E}\left[\int|\hat{f}-f|\right]$*

$$P\left(|\hat{\beta}^d(a) - \beta^d(a)| > \varepsilon\right) \le 2\exp\left\{-\frac{\mu_n\varepsilon_1^2}{2}\right\} + 2\exp\left\{-\frac{\mu_n\varepsilon_2^2}{2}\right\} + 4(\mu_n-1)\beta(m_n),$$

kur $\varepsilon_1 = \varepsilon - \mathbb{E}\left[\int|\hat{f}^d - f^d|\right]$ un $\varepsilon_2 = \varepsilon - \mathbb{E}\left[\int|\hat{f}_a^{2d} - f_a^{2d}|\right]$

[3] Lamberta W funkcija tiek definēta kā daudzvērtīga inversā funkcijas no $f = w\exp\{w\}$.

Ir daudz veidu, kā novērtēt blīvuma funkciju (piemēram, ar kodolu gludināšanas metodi [18]), taču šeit izvēle pār kodolu metodēm izdarīta datorresursu taupīšanas nolūkā [11]. Ja apskatāmais process nav ar diskrētu stāvokļu telpu, aktuāla kļūst problemātika, kādu histogrammas binu skaitu m izvēlēties. Savā darbā M.S.S. meklēja labāko bina platumu, simulējot $AR(1)$ procesu un meklējot minimumu

$$\mathbb{E}[|\hat{\beta}(a) - \beta(a)|].$$

Rezultātā tika iegūts, ka labākie binu skaiti ir $33, 11, 7, 5, 3$, ja $a = 1, ..., 5$ un 1, ja $a > 5$. Lai paātrinātu aprēķinus novērtējumu programmējot, tika pieņemts, ka labākais binu skaits ir 2 visiem a.

Darba gaitā tika apskatīta sekojoša optimālā skaita histogrammas binu novērtējuma metode, taču tās rezultāti bija nepārliecinoši. Tiek meklēts minimums funkcijai [18, 129. lpp]

$$\hat{J}(h) = \frac{2}{h(n-1)} - \frac{n+1}{h(n-1)} \sum_{j=1}^{m} \hat{p}_j^2,$$

kur h ir histogrammas bina platums.

4. M.S.S. $\beta(a)$ novērtējuma pielietošana

Viens no biežāk pētītajiem un lietotajiem modeļiem laikrindu pētīšanā ir Markova ķēdes ar diskrētu stāvokļu telpu. No mūsu interešu skatpunkta tie ir saistoši, jo, ja mums ir uzdota stāvokļu pārejas varbūtību matrica P, tad varam precīzi izrēķināt $\beta(a)$ un salīdzināt to ar M.S.S. novērtējumu.

Definīcija 12. Virkne $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ veido Markova ķēdi vai Markova procesu, ja

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}^n,$$

kur p_{ij}^n ir pārejas varbūtība no i uz j viena soļa laikā n-tajā solī, $\sum_i p_{ij}^n = 1$, $i, j \in S$, un S ir diskrēta stāvokļu kopa.

Definīcija 13. Pārejas varbūtību matrica P Markova ķēdēm ir $n \times n$ matricas, kuras (i, j) elements ir $p_{i,j}$. Matricu P sauc par stohastisku matricu, kam izpildās

1) $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$.

2) $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$, kur $i = 1, ..., n$.

Definīcija 14. Markova ķēde ir nereducējam, ja visiem i un j $p_{ij}^n > 0$, pretējā gadījumā Markova ķēde ir reducējama.

Markova ķēdes stāvokļu varbūtības ir atkarīgas tikai no vērtības iepriekšējā solī. Šī īpašība parādās arī tās apskatot no jaukto koeficientu teorijas skatpunkta, proti, lai rēķinātu atkarību, nepieciešamās σ algebras tiek ģenerētas no viena gadījuma lieluma.

Teorēma 12. *Pieņemsim, ka $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ir Markova ķēde ar stacionāru sadalījumu, tad visiem a ir spēkā sekojoši apgalvojumi:*

1) $\alpha(a) = \alpha(\mathcal{F}_0^0, \mathcal{F}_a^a)$;

2) $\beta(a) = \alpha(\mathcal{F}_0^0, \mathcal{F}_a^a)$;

3) $\rho(a) = \alpha(\mathcal{F}_0^0, \mathcal{F}_a^a)$;

Jāpierāda, ka Markova ķēdes patiešām ir absolūti regulāras.

Teorēma 13. *Pieņemsim, ka $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ ir Markova ķēde ar stacionāru sadalījum un diskrētu stāvokļu kopu S. Tad sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:*

1) X ir nereducējama un neperiodiska;

2) X ir jauktais process ergodiskā nozīmē;

3) $\alpha(n) \to 0$, *kad* $n \to \infty$;

4) $\beta(n) \to 0$, *kad* $n \to \infty$;

Ergodisko konverģenci mēdz saukt par vājo konverģenci, vispārīgi, ja process ir stipri jaukts, tas ir arī ergodisks, bet ne otrādi.

Markova ķēde $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ ir "ģeometriski ergodiska", ja eksistē tādas Boreila funkcijas $a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ un $c : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, kas visiem μ-mērāmiem $x \in \mathbb{R}$ apmierina

$$\forall n \geq 1, \forall B \in \mathcal{R}, \qquad |P(X_n \in B | X_0 = x) - \mu(B)| \leq a(x) \cdot e^{-cn}.$$

Teorēma 14. *[3, 121] Pieņemsim, ka $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ ir stacionāra Markova ķēde. Tad sekojošie trīs apgalvojumi ir ekvivalenti:*

1) Markova ķēde X ir ģeometriski ergodiska;

2) eksistē tādas Boreila funkcijas $a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ un $c : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, kas visiem μ-mērāmiem $x \in \mathbb{R}$ apmierina

$$\forall n \geq 1, \forall B \in \mathcal{R}, \qquad |P(X_n \in B | X_0 = x) - \mu(B)| \leq a(x) \cdot e^{-cn};$$

3) Markova ķēde X ir absolūti regulāra un $\beta(n) \to 0$ vismaz eksponenciāli ātri, kad $n \to \infty$.

M.S.S. savā darbā apskata Markova ķēdi ar sekojošu stāvokļu pārejas matricu P_1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

izmantojot 3 varam aprēķināt, ka patiesais $\beta(a)$ koeficients ir $(4/9) \cdot (1/2)^a$. Kā otru aplūkosim Ričarda Bredlija (*Richard Bradley*) [14, 27 lpp.] piemēru ar P_2.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.5(1+\varepsilon) & 0.5(1-\varepsilon) \\ 0.5(1+\varepsilon) & 0.5(1-\varepsilon) \end{pmatrix},$$

un teorētisko $\beta(a) = \varepsilon^a/2$.

P_1 un P_2, tika simulētas 1000 Markova ķēdes, un tām rēķināts $\beta(a) a = 1, ..., 10$. 1. tabulā ir attēlotas patiesās $\beta(a)$ vērtības un simulāciju mediānas vērtība. Tabulas rezultāti liecina, ka Bredlija piemēra novērtējums ir sākotnēji nobīdīts uz leju pie mazākiem a, bet tad konverģē uz īsto vērtību, kad a pieaug. Savukārt, M.S.S. gadījumā koeficients pie pirmajiem soļiem ir precīzs, taču norāda uz pozitīvu nobīdi pie $a > 4$.

Simulāciju rezultāti grafiski attēloti 1. attēlā. Tiem pievienoti 95 % ticamības intervāli.

1. tabula: Markova ķēžu simulācijas. Ar indeksu B apzīmēts Bredlija piemērs ar $\varepsilon = 0.9$, ar M - M.S.S.

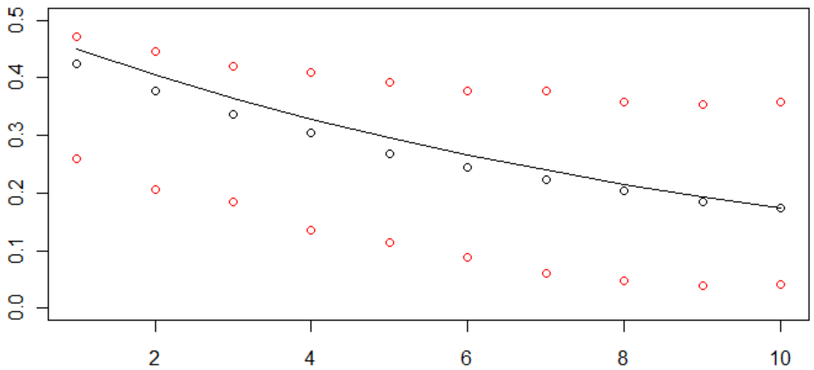
Piemērs	$\beta(1)$	$\beta(2)$	$\beta(3)$	$\beta(4)$	$\beta(5)$	$\beta(6)$	$\beta(7)$	$\beta(8)$	$\beta(9)$	$\beta(10)$
$\hat{\beta}(a)_B$	0,425	0,378	0,337	0,304	0,268	0,245	0,223	0,203	0,185	0,174
$\beta(a)_B$	0,450	0,405	0,365	0,328	0,295	0,266	0,239	0,215	0,194	0,174
$\hat{\beta}(a)_M$	0,218	0,108	0,059	0,035	0,031	0,029	0,029	0,030	0,027	0,029
$\beta(a)_M$	0,222	0,111	0,055	0,028	0,013	0,006	0,003	0,002	0,001	0,000

Apskatīsim M.S.S. novērtējuma pielietojumu autoregresīviem slīdošā vidējā procesiem.

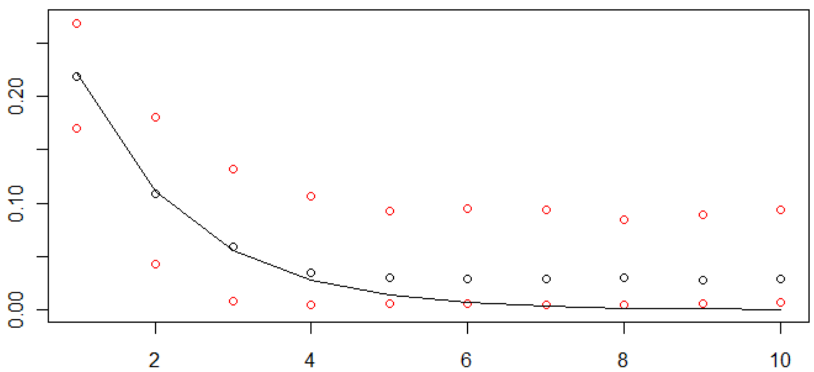
Definīcija 15. Par jaukto (p, q) kārtas ARMA procesu sauc $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$, kas apmierina vienādojumu

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i},$$

$\mathbb{E}\varepsilon_t = 0, \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \qquad i \neq j.$



(a) Markova ķēdes ar stāvokļu pārejas matricu P_2 (Bredlija) procesa 1000 simulācijas ar datu skaitu 200, no tām rēķināts $\hat{beta}(a)$, $a = 1, ..., 10$. Patiesā $\beta(a)$ vērtība attēlota ar nepārtrauktu līniju. Novērtējumiem attēlota mediāna un 95% ticamības intervāls.



(b) Markova ķēdes ar stāvokļu pārejas matricu P_1 (M.S.S.) procesa 1000 simulācijas ar datu skaitu 200, no tām rēķināts $\hat{beta}(a)$, $a = 1, ..., 10$. Patiesā $\beta(a)$ vērtība attēlota ar nepārtrauktu līniju. Novērtējumiem attēlota mediāna un 95% ticamības intervāls.

1. att.: Markova procesu simulāciju rezultāti.

Definīcija 16. Ja $q = 0$, tad modeli sauc par AR(p) autoregresībo modeli un X_t var pierakstīt kā

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Definīcija 17. Ja $p = 0$, tad modeli sauc par MA(q) slīdošā vidējā modeli ar X_t formā

$$X_t = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t.$$

1988. gadā A. Mokkadems (*A. Mokkadem*) publicēja [13] sekojošu teorēmu.

Teorēma 15. *Pieņemsim, ka ε_t sadalījums ir absolūti nepārtraukts attiecībā pret Lebega mēru uz $\mathbb{R}$. Tad $X(t)$ ir β jaukts process.*

Sekas 16. *[7, 99. lpp] Pieņemsim, ka ε_t ir neatkarīgi un vienādi sadalīti ar simetrisku sadalījumu λ. Pieņemsim arī, ka polinoma $P(x) = x^p - \sum_{i=1}^{p} a_i x^{p-i}$ kompleksās saknes atrodas vienības riņķa iekšpusē. Ar g apzīmēsim tādu merāmu funkciju $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, ka $|g(x)| \leq |x|$ visiem $|x| > A$ un funkcijas vērtības ir ierobežotas kopā $\{|x| \leq A\}$ vismaz vienam A, kur $A \leq 0$. Tad eksistē vismaz viens tāds $a_0 > 0$, ka X_t, kas apmierina rekurences vienādojumu $X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + ag(X_{t-1}, ..., X_{t-p}) + \varepsilon_t$, ir ģeometriski ergodisks $|a| \leq a_0$.*

Piemērs 2. [1] Pirmās kārtas autoregresīvs process X_t ar bezgalīgu slīdošā vidējā reprezentāciju $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{i-l}$, kur $\{\varepsilon_t\}$ ir neatkarīgu Bernulli gadījuma lielumu virkne, nav α (tātad arī β) jaukts.

Pretpiemērs ilustrē Mokkadema teorēmas nepārtrauktības nosacījuma nepieciešamību. Šādu konstrukciju ir daudz, taču mēģinājumi atrast kādu piemēru, kam M.S.S. novērtējums atklātu kaut ko neparastu, pagaidām bijuši neveiksmīgi, $\hat{\beta}(a)$ vai nu vienmērīgi dilst, vai ir 0.

Teorēma 17. *[4, 285. lpp] Pieņemsim, ka (X, Y) ir normāli sadalīts. Tad*

$$\rho(\sigma(X), \sigma(Y)) = |\mathrm{Corr}(X, Y)|.$$

Pieņemsim, ka X_t ir ARMA process, kam ε_t ir normāli sadalīti. Ja par X izvēlamies X_t un Y vietā liekam X_{t+a}, tad augstākminētā teorēma ļauj mums absolūto vērtību no autokorelācijas funkcijas

$$r(a) = \frac{\mathrm{cov}(X_t, X_{t+a})}{\mathbb{D}(X_t)}$$

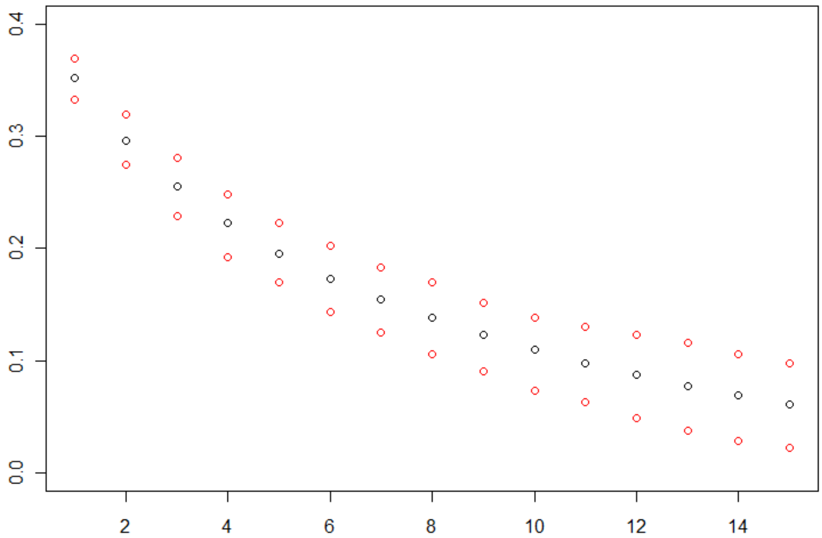
definēt kā jaukto koeficientu $\rho(a)$ procesam X_t. Šis fakts dod pamatu salīdzināt $\hat{\beta}(a)$ ar autokorelācijas funkciju ARMA procesiem.

Piezīme 18. *Ja X_t ir AR(1) process ar $\phi_1 = c$, tad tā autokorelācijas funkciju var uzrakstīt formā*

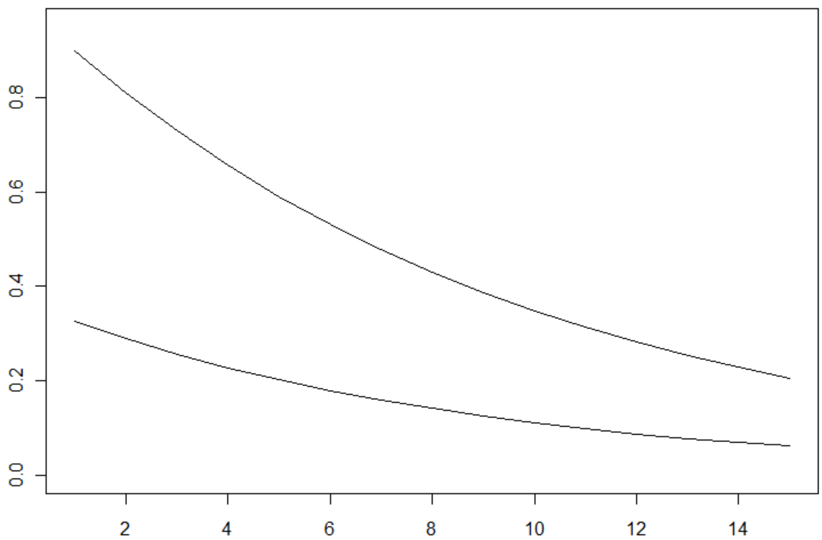
$$r(a) = c^a$$

.

Lai gan ir zināms, ka ARMA procesi ir β-jaukti procesi ar eksponenciālu dilšanas ātrumu, precīzu $\beta(a)$ izteiksmi līdz šim nav izdevies atrast, tāpēc simulācijās iegūtos rezultātus nav ar ko tiešā veidā salīdzināt (kā tas tika darīts Markova ķēdēm).



(a) AR(1) $\phi_1 = 0.9$ procesa 100 simulācijas ar datu skaitu 3000, no tām novērtēts $\beta(a)$, $a = 1, ..., 15$. Novērtējumiem attēlota mediāna un 95% ticamības intervāls.



(b) $\rho(a) = 0.9^a$ un $\hat{\beta}(a) = -1.004 \exp(-0.119a)$

2. att.: Simulāciju rezultāti.

Tika veikta to noteikšana ar simulāciju palīdzību, 100 reizes ģenerējot AR(1) procesa ($\phi_1 = 0.9$) realizācijas skaitā 3000, tām rēķināti $\hat{\beta}(a)$ līdz $a = 15$.

Tā kā ir pierādīts [13], ka ARMA procesiem $\beta(a) = O(c^a)$, kur $0 < c < 1$, tas motivē simulāciju datiem piemērot regresijas modeli $\hat{\beta}(a) = c_1 \exp(c_2 a)$. Veicot regresiju uz jau pieminētajiem simulāciju datiem, tikai iegūti novērtējumi $\hat{c}_1 = -1.004$, $\hat{c}_2 = -0.119$

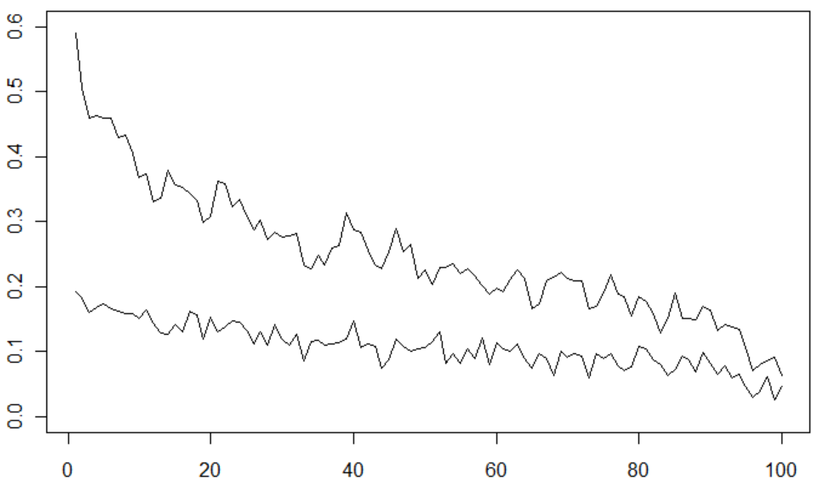
Rezultātus var aplūkot 2. attēlā. Simulācijām tika pievienoti butstrapoti 95% ticamības intervāli. 17 dod motivāciju pie uz $\beta(a)$ veiktās regresijas līknes attēlot $r(a) = 0.9^a$, un izteikt minējumu, ka starp novērtēto $\beta(a)$ līkni un $r(a)$ līkni pastāv tāda pat sakarība, kā starp absolūtās regularitātes koeficientu $\beta(a)$ un maksimālās korelācijas koeficientu $\rho(a)$.

Apskatīsim arī $\hat{\beta}$ ilglaicīgās atmiņas procesiem.

Definīcija 18. Pieņesim, ka X_t ir stacionārs process un $\gamma(h)$ tā autokovariāciju funkcija. Teiksim, ka procesam ir ilglaicīga atmiņa, ja

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty.$$

Šāda veida atkarība bieži tiek novērota procesiem hidroloģijā. Pētīšanai tika izmantoti logaritmizēti ledāju datus `varve` no [16], salīdzinājumam tika aprēķināta arī empīriskā autokorelācijas funkcija. Rezultāti redzami 3. attēlā. Līdzīgi kā AR procesam, abi novērtējumi uzvedas līdzīgi.



3. att.: ACF un $\hat{\beta}(a)$ `log(varve)` datiem.

5. Secinājumi

M.S.S. novērtējums vismaz tā pašreizējā formā šķiet pārāk sarežģīts, lai būtu praktiski izmantojams gadījuma lielumu virkņu atkarības pētīšanai, it īpaši tāpēc, ka darba izstrādes procesā tā arī neizdevās atrast piemēru, par ko $\hat{\beta}(a)$ sniegtu vairāk informācijas nekā empīriskā autokorelācijas funkcija. Lielākais ieguvums no novērtējuma varētu būt iespēja aprēķināt dažādus $\beta(a)$ dilšanas ātrumus jebkuram β-jauktam procesiem, ko, savukārt, varētu izmantot eksponenciālā tipa nevienādībās.

Pāris idejas tālākiem izpētes virzieniem. Pirmkārt, iespējams, ka eksistē kāda $\beta(a)$ forma, kurai novērtējuma konstrukcija būtu vienkāršāka. Otrkārt, M.S.S. darbā tiek pausta doma, ka arī α-jauktiem procesiem varētu eksistēt līdzīgs novērtējums. Treškārt, varētu apskatīt novērtējuma pielietojumu citās ar statistiku saistītās jomās, piemēram, mašīnmācīšanās nozarē.

Nepieciešams arī uzlabot novērtējuma kodu, ieviešot tajā algoritmu, kas meklē optimālo histogrammas binu skaitu pirms tiek veikts novērtējums.

Bibliogrāfija

[1] D.W.K. Andrews. Non-strong mixing autoregressive processes. *Journal of Applied Probability*, pages 930–934, 1984.

[2] K.B. Athreya and S.N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer-Verlag New York Inc, 2006.

[3] R.C. Bradley. Basic properties of strong mixing conditions. a survey and some open questions. *Probability surveys*, 2:107–144, 2005.

[4] R.C. Bradley. *Introduction to strong mixing conditions I*. Kendrick Press, 2007.

[5] M. Carrasco and X. Chen. Mixing and moment properties of various garch and stochastic volatility models. *Econometric Theory*, 18(1):17–39, 2002.

[6] Y.A. Davydov. Mixing conditions for markov chains. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 18(2):321–338, 1973.

[7] P. Doukhan. Mixing: properties and examples. 1994.

[8] P. Fryzlewicz and S. Subba Rao. Mixing properties of arch and time-varying arch processes. *Bernoulli*, 17(1):320–346, 2011.

[9] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford Univ. Press, 2001.

[10] H. Masuda. Ergodicity and exponential [beta]-mixing bounds for multidimensional diffusions with jumps. *Stochastic processes and their applications*, 117(1):35–56, 2007.

[11] D.J. McDonald. Personiska sarakste.

[12] D.J. McDonald, C.R. Shalizi, and M. Schervish. Estimating β-mixing coefficients. *Arxiv preprint arXiv:1103.0941*, 2011.

[13] A. Mokkadem. Mixing properties of arma processes. *Stochastic processes and their applications*, pages 309–315, 1988.

[14] Jolanta Rone. Jaukto procesu analīze un to pielietojums statistikā. Master's thesis, Latvijas Universitāte, 2008.

[15] M. Rosenblatt. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 42(1):43, 1956.

[16] R.H. Shumway and D.S. Stoffer. *Time series analysis and its applications*. Springer Verlag, 2000.

[17] VA Volkonskii and Y.A. Rozanov. Some limit theorems for random functions. i. *Theory of Probability and its Applications*, 4:178, 1959.

[18] L. Wasserman. *All of nonparametric statistics*. Springer-Verlag New York Inc, 2006.