

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE  
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**ILGLAICĪGĀS ATMINĀS PARAMETRA NOVĒRTĒŠANA  
AR VEIVLETIEM**

DIPLOMDARBS

Autors: **Ieva Dasmane**

Stud. apl. id06030

Darba vadītājs: Jānis Valeinis

RĪGA 2011

## Anotācija

Šī darba mērķis ir ilglaicīgās atmiņas parametra novērtēšana ar veivletiem. Definēts ilglaicīgās atmiņas raksturojošais parametrs un Hursta parametrs, kā arī analizēts viens no izplatītākajiem ilglaicīgās atmiņas procesiem - frakcionālā Brauna kustība un tās pieaugumi. Programmā *R* veiktas procesu simulācijas, kā arī aplūkotas četras metodes ilglaicīgās atmiņas parametra novērtēšanai, izmantojot nesenos rezultātus literatūrā [1] - kopējās variācijas metode, periodogrammu metode, *R/S* metode un veiveltu metode. Hursta parametra novērtējumiem konstruēti ticamības intervāli ar apaksizlašu veidošanas metodi. [2] Aprakstīta veivletu konstrukcija un īpašības. [3] Kā arī apskatītas divas veivletu metodes ilglaicīgās atmiņas parametra novērtējumam no nesenās publikācijas [4] - lokālās regresijas veivletu metode un lokālā *Whittle* veivletu metode.

Atslēgas vārdi: Ilglaicīgās atmiņas procesi, Hursta parametrs, apaksizlašu metode, veivleti

## **Abstract**

The aim of this work is the long memory parameter estimation using wavelets. The descriptive parameter of a long memory process as well as the famous Hurst parameter are defined and also one of the most popular long memory processes - fractional Brownian motion and its increments are analysed. Simulation study has been carried out in program *R* implementing four methods for estimation of the long memory parameter - the aggregated variance method, the periodogramm method, the *R/S* method and the wavelets method using recent results in [1]. Confidence intervals based on subsampling are constructed for the Hurst parameter following recent results in this field. [2] Further wavelet construction and their properties are analysed in details. [3] We also examine two wavelet methods for estimating a long memory parameter - the local regression wavelets method and the local *Whittle* wavelets method introduced in [4].

Keywords: Long memory processes, Hurst parameter, subsampling, wavelets

# Saturs

<b>Apzīmējumi</b>	<b>3</b>
<b>Ievads</b>	<b>4</b>
1. Ilglaicīgās atmiņas procesi . . . . .	6
1.1. Sev - līdzīgi procesi un ilglaicīgā atkarība . . . . .	6
1.2. Frakcionālā Brauna kustība un frakcionālais Gausa troksnis . . . . .	9
1.3. Frakcionālās Brauna kustības spektrs . . . . .	12
2. Hursta parametra novērtēšanas metodes . . . . .	13
2.1. Kopējās variācijas metode . . . . .	13
2.2. Periodogrammu metode . . . . .	14
2.3. R/S metode . . . . .	15
3. Veivleti . . . . .	18
3.1. Multi - līmeņu transformācija virknēm . . . . .	18
3.2. Haar veivleti funkcijām . . . . .	21
3.3. Diskrēto Haar veiveltu piemērs . . . . .	26
3.4. Multilīmeņu analīze . . . . .	28
3.5. Projekcija . . . . .	28
3.6. Mērogošana un veivletu konstrukcija . . . . .	29
3.7. Piemēri . . . . .	30
4. Veivletu novērtējums . . . . .	33
4.1. Veivletu īpašības . . . . .	33
4.2. Veivletu metode programmā <i>R</i> . . . . .	34
5. Ticamības intervāli parametram <i>H</i> ar apakšizlasēm . . . . .	35
6. Atmiņas parametra veivletu pus-parametriskie novērtejumi . . . . .	37
6.1. Lokālais regresijas veivletu (LRW) novērtējums parametram <i>d</i> . . . . .	38
6.2. Lokālais Whittle veivletu (LWW) novērtējums parametram <i>d</i> . . . . .	39

7.	Praktiskā daļa . . . . .	40
7.1.	Parametra $H$ novērtējumi programmā R . . . . .	40
7.2.	Parametra $d$ novērtējumi programmā MATLAB . . . . .	45
	<b>Nobeigums</b>	<b>48</b>
	<b>Pielikums 1</b>	<b>49</b>
	<b>R programmas kods</b>	<b>50</b>
	<b>Izmantotā literatūra un avoti</b>	<b>53</b>

# Apzīmējumi

ACF	autokorelāciju funkcija
DFT	diskrētā Furjē transformācija
DWT	diskrētā veivletu transformācija
EDF	empīriskā sadalījuma funkcija
FBM	frakcionālā Brauna kustība
FGN	frakcionālais Gausa troksnis
H	Hursts parametrs
LRD	ilglaicīgās atkarības process
LRW	lokālā regresiju veivletu metode
LWW	lokālā Whittle veivletu metode
MRA	multilīmeņu analīze
R/S	R/S metode
$\propto$	proporcionalis
$\sim$	līdzīgs
$\rightarrow^d$	tiecas pēc sadalījuma
$Var(X)$	dispersija no $X$
$\asymp$	asimptotiski tiecas

# Ievads

Ilglaicīgās atmiņas procesi (*long range dependent* jeb *LRD*) ir mūsdienās plaši analizēti procesi (skatīt, piemēram, [5]). Pēdējā desmitgadē *LRD* procesi plaši pielietoti telekomunikāciju zinātnē. Ilglaicīgās atmiņas procesu svarīgākā raksturojošā pazīme ir tā, ka autokovariāciju funkcija dilst ļoti lēni. Ilglaicīgās atmiņas procesu apraksta Hursta parametrs  $H$  (nosaukts par godu hidrologam Hurstam, kurš 1951. gadā atklāja šo parametru, pētot Nīlas upes problēmu [6]), kur  $H \in (1/2, 1)$  liecina, ka procesam pastāv ilglaicīgā atmiņa.

Mūsdienās Hursta parametrs parādās daudzās matemātikās nozarēs - fraktāļu un haosa teorijā, ilglaicīgos procesos un spektrālajā analīzē. Hursta parametra novērtējums tiek pielietots dažādās sfērās - sākot no biofizikas līdz datorzinātnei. Tomēr jaunākās Hursta parametra novērtēšanas metodes nāk no fraktālās matemātikas.

Viens no veidiem, kā novērtēt ilglaicīgās atmiņas parametru, ir veivletu metode. Veivlets ir viļņveidīga, oscilējoša funkcija ar amplitūdu, kas sākas no nulles, pēc tam pieaug, un tad dilst atpakaļ uz nulli. Piemērs, kur ikdienā var redzēt veivletu funkcijas, ir sirdspukstu attēlojums monitorā. Veivletu rašanos veicināja J. Fourier, kurš nodarbojās ar frekvenču analīzi (1807). No frekvenču analīzes izveidojās skalu analīze, kas nozīmēja - tika izveidotas matemātiskās struktūras, kas vairē dažādos līmeņos. Veivletu būtība ir tāda, ka tiek konstruēta funkcija, kas tiek mērogota jeb skalēta un translēta. Tad tā tiek pielietota signāla procesa novērtēšanai. Pēc tam procedūra tiek atkārtota - funkcija tiek mērogota un translēta vēlreiz un piemērota procesam jau citā līmenī. Un tā tālāk. Skalu analīze ar laba ar to, ka tā ir mazāk jūtīga pret trokšņu ietekmi, jo tā mēra vidējās signāla svārstības dažādos līmeņos. Pirmoreiz veivleti parādījās A.Haar tēzē (1909) [7], kuram par godu ir nosaukta vesela veivletu klase. Mūsdienās veivleti ir plaši pielietoti vairākās sfērās, piemēram, signālu un attēlu apstrādē, medicīnā, finansēs, ģeoloģijā un mūzikā.

Šī darba mērķi ir:

- izanalizēt četras Hursta parametra novērtēšanas metodes, kas piedāvātas publikācijā [1]. Tās ir - kopējās variācijas metode, periodogrammas metode,  $R/S$  metode un veivletu metode
- Hursta parametru novērtējumiem konstruēt ticamības intervālus ar apakšizlašu metodi, kura iepazīstināta [2]

- novērtēt ilglaicīgās atmiņas parametru ar divām veivletu metodēm, kas piedāvātas publikācijā [4]

Darbā tiks aplūkota frakcionālā Brauna kustība (*FBM*), kas ir viens no populārākajiem ilglaicīgās atmiņas procesiem, kā arī *FBM* pieaugumu process - frakcionālais Gausa troksnis (*FGN*). Datorprogrammā *R* tiks simulēti šie procesi, analizētas četras Hursta parametra novērtēšanas metodes, kā arī kostruēti parametra *H* novērtējumu ticamības intervāli. Analizējot divas ilglaicīgās atmiņas parametra veivletu novērtēšanas metodes publikācijā [4], tika izveidota komunikācija ar vienu no publikācijas autoriem (M.S.Taqqu) un iegūts programmas kods abām šīm metodēm datorprogrammā *MATLAB*, kas arī tiek izmantots ilglaicīgās atmiņas parametra novērtējuma iegūšanai.

Pirmajā nodaļā apskatīti ilglaicīgās atmiņas procesi. Otrajā - trīs atmiņas parametra novērtēšanas metodes programmā *R*. Trešajā nodaļā aprakstīts veivletu funkcijas jēdziens. Ceturtajā - aprakstītas veivletu īpašības un veivletu metode programmā *R*. Piektajā nodaļā apskatīta ticamības intervālu konstruēšana atmiņas parametram ar apakšizlašu metodi. Sestajā nodaļā aprakstītas divas atmiņas parametra veivletu novērtēšanas metodes, izmantojot nesenos rezultātus publikācijā [4]. Septītajā nodaļā veikts prakstiskais pielietojums.

# 1. Ilglaicīgās atmiņas procesi

## 1.1. Sev - līdzīgi procesi un ilglaicīgā atkarība

No sākuma definēsim sev līdzīgus (*self - similar*) un ilglaicīgi atkarīgus (*long range dependent*) procesus vispārējiem stacionāriem stohastiskiem procesiem. Vēlāk apskatīsim, kā šie jēdzieni ir saistīti ar frakcionālo Brauna kustību. Šim mērķim izmantosim literatūru [1], [2] un [8].

**Definīcija 1.**  $X = \{X_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$  ir stacionārs diskрēta laika stohastisks process, ja vektoriem  $(X_{k_1}, \dots, X_{k_d})$  un  $(X_{k_1+n}, \dots, X_{k_d+n})$  ir tāds pats kopējais sadalījums visiem veseliem  $d, n \geq 1$  un  $k_1, \dots, k_d \geq 0$ . Gausa procesiem tas nozīmē to pašu, kā prasīt, lai autokovariāciju funkcija  $\gamma(k)$  nav atkarīga no  $n$ .

Pieņemsim, ka

$$X_{km} + \dots + X_{(k+1)m-1} = a_m X_k. \quad (1.1)$$

visiem  $m \geq 1$ ,  $k \geq 0$  un  $a_m$  ir reizinātājs.

**Definīcija 2.** Process  $X^{(m)} = \{X_k^{(m)} : k = 0, 1, 2, \dots\}$  visiem  $m \geq 1$ , kur

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m}(X_{km} + \dots + X_{(k+1)m-1}).$$

**Definīcija 3.** [8] Diskрēta laika stohastisku procesu  $X$  sauc par *sev - līdzīgu* ar Hursta parametru  $0 < H < 1$ , ja procesiem  $X$  un  $m^{1-H}X^{(m)}$  ir vienādi galīgdimensionālie sadalījumi visiem  $m \geq 1$ . Tas nozīmē, ka visiem  $d \geq 1$  un  $0 \leq k_1 < \dots < k_d$  vektoram

$$(X_{k_1}, \dots, X_{k_d})$$

ir tas pats sadalījums, kas vektoram

$$(m^{1-H}X_{k_1}^{(m)}, \dots, m^{1-H}X_{k_d}^{(m)}).$$

Tad (1.1) izpildās un  $a_m = m^H$ , ja  $X$  ir sev - līdzīgs ar Hursta parametru  $H$ .

**Definīcija 4.** Nepārtrauka laika stohastisks process  $Y = \{Y(t) : 0 \leq t < \infty\}$  ir *sev - līdzīgs process* ar Hursta parametru  $0 < H < 1$ , ja procesiem  $\{Y(at) : 0 \leq t < \infty\}$  un  $\{a^H Y(t) : 0 \leq t < \infty\}$  ir vienādi galīgdimensionālie sadalījumi visiem  $a > 0$ .

Tagad iepazīsimies ar *ilglaicīgo atkarību*. Intuitīvi diskrēta laika stohastisks process  $X$  ir ilglaicīgi atkarīgs (ar ilglaicīgo atmiņu), kad tā autokovariāciju funkcija  $\gamma$  dilst tik lēni, ka  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma(k) = \infty$ .

**Definīcija 5.** [2] Diskrēta laika stacionārs process  $(X_j : j > 1)$  ar dispersiju  $\sigma^2 = E(X_j^2) - (EX_j)^2$  ir *ilglaicīgi atkarīgs process* (*ilglaicīgās atmiņas* jeb *(LRD)*) process, ja tā korelācijas koeficienti

$$\rho(k) = \sigma^{-2} \{E(X_j X_{j+k}) - (EX_j)^2\}$$

ir formā

$$\rho(k) \sim c_r k^{-(1-\alpha)}, \text{ kad } k \rightarrow \infty \text{ un } 0 < \alpha < 1, \quad (1.2)$$

kur  $k$  ir autokorelācijas lags,  $\alpha$  ir *ilglaicīgās atmiņas parametrs* un  $c_r$  ir absolūtā konstante (skatīt Beran(1994) [9] un Taqqu(2003)[5]).

**Apgalvojums 1.** *Sākuma procesam*  $(Z(t) : t \geq 0)$  *ir stacionāri pieaugumi un tas ir sev - līdzīgs ar Hursta parametru H.* Tad, ja  $1/2 < H < 1$ , tad procesa pieaugumi  $(X_j = Z_j - Z_{j-1} : j > 1)$  veido LRD procesu ar autokorelācijas koeficientiem

$$\rho(k) \sim c_r k^{-2(1-H)}, \text{ kad } k \rightarrow \infty.$$

Bet, ja  $H = 1/2$ ,

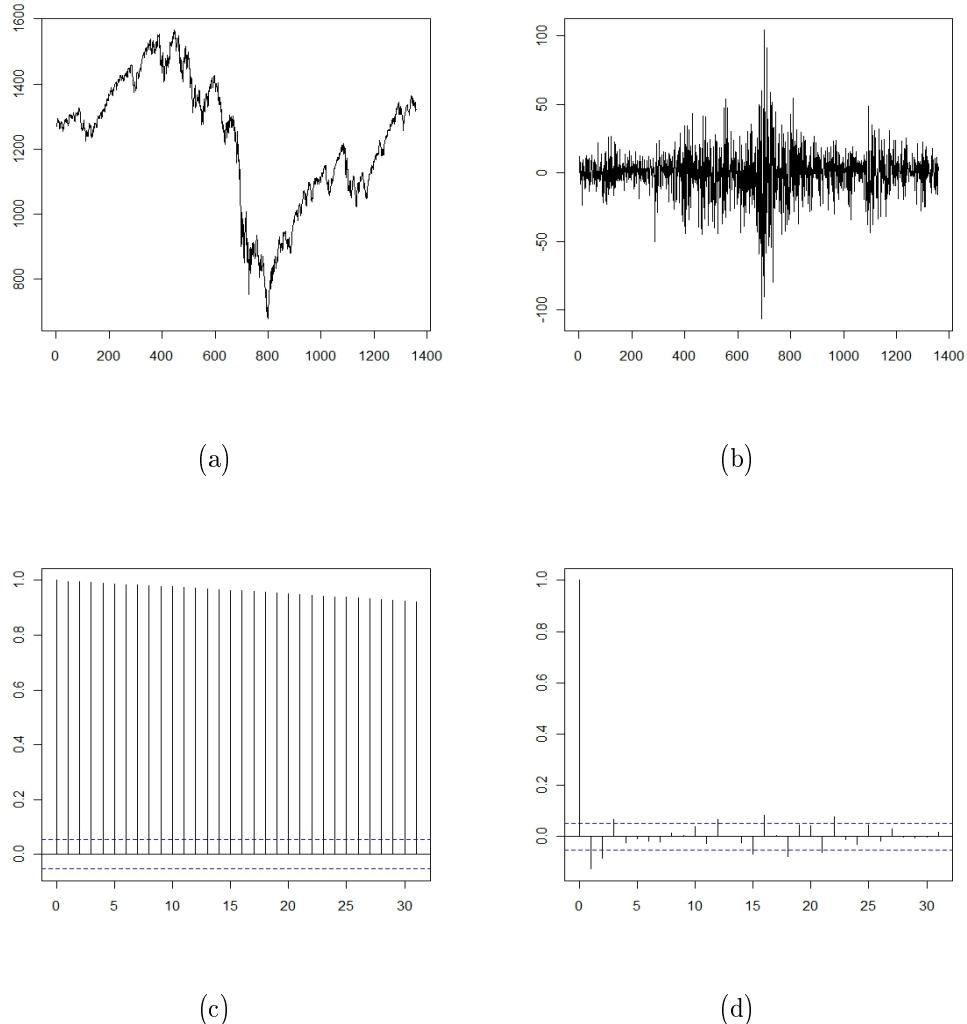
$$\rho(k) = 0, \quad \forall k \geq 0,$$

un tāpēc process ir *īslaicīgi atkarīgs*.

Kad  $1/2 < H < 1$ , tad Hursta parametru  $H$  un ilglaicīgās atmiņas parametru  $\alpha$  saista vienādība

$$H = \frac{1 + \alpha}{2}. \quad (1.3)$$

**Piemērs 1.** Aplūkosim procesu  $SP500$  (datus var iegūt mājas lapā [10]).  $SP500$  ir populārs 500 lielāko uzņēmumu aktīvu tirgus cenas indekss Amerikas Savienotajās valstīs kopš 1957. gada. Dati iegūti par laika periodu 03.01.2006 – 25.05.2011.



1. att.: Dati laika intervālā: 03.01.2006 – 25.05.2011. (a)-  $SP500$  process, (b) -  $SP500$  procesa pieaugumi, (c) un (d) attiecīgās autokovariāciju funkcijas.

Kā var redzēt 1.(a) attēlā,  $SP500$  process ir nestacionārs. Ievērojam, ka procesam  $SP500$  autokovariāciju funkcija dilst ļoti lēni, kas liecina par ilglaicīgo atmiņu.

## 1.2. Frakcionālā Brauna kustība un frakcionālais Gausa troksnis

**Definīcija 6.** [1] Tādu Gausa procesu  $B_H = \{B_H(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$  ar  $0 < H < 1$  sauc par *frakcionālo Brauna kustību (FBM)*, ja izpildās šādas īpašības:

- $B_H(t)$  ir stacionāri pieaugumi ;
- $B_H(0) = 0$  un  $E(B_H(t)) = 0$  visiem  $t \geq 0$  ;
- $E(B_H)^2(t) = t^{2H}$  visiem  $t \geq 0$  ;
- $B_H(t)$  ir Gausa sadalījums visiem  $t > 0$ .

$H$  ir frakcionālās Brauna kustības *Hurstam parametrs*. Frakcionālās Brauna kustības *kovariāciju funkcija* ir

$$\gamma(s, t) = E(B_H(s)B_H(t)) = \frac{1}{2}\{t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\} \quad (1.4)$$

visiem  $0 < s < t$  (skatīt [1]). Tā kā Gausa procesiem vidējā vērtība un kovariāciju struktūra nosaka galīgdimensionālo sadalījumu, tāpēc, no (1.4) mēs secinām, ka procesam  $\{B_H(at) : 0 < t < \infty\}$  un  $\{a^H B_H(t) : 0 < t < \infty\}$  ir vienādi galīgdimensionālie sadalījumi. Tātad frakcionālā Brauna kustība ir *sev līdzīga* ar Hursta parametru  $H$ . Frakcionālā Brauna kustība ir vienīgais Gausa processs ar stacionāriem pieaugumiem, kurš ir sev līdzīgs (skatīt [1]).

**Definīcija 7.** Pieaugumu procesu  $X = \{X_k : k = 0, 1, \dots\}$  sauc par *frakcionālo Gausa troksni*, ja

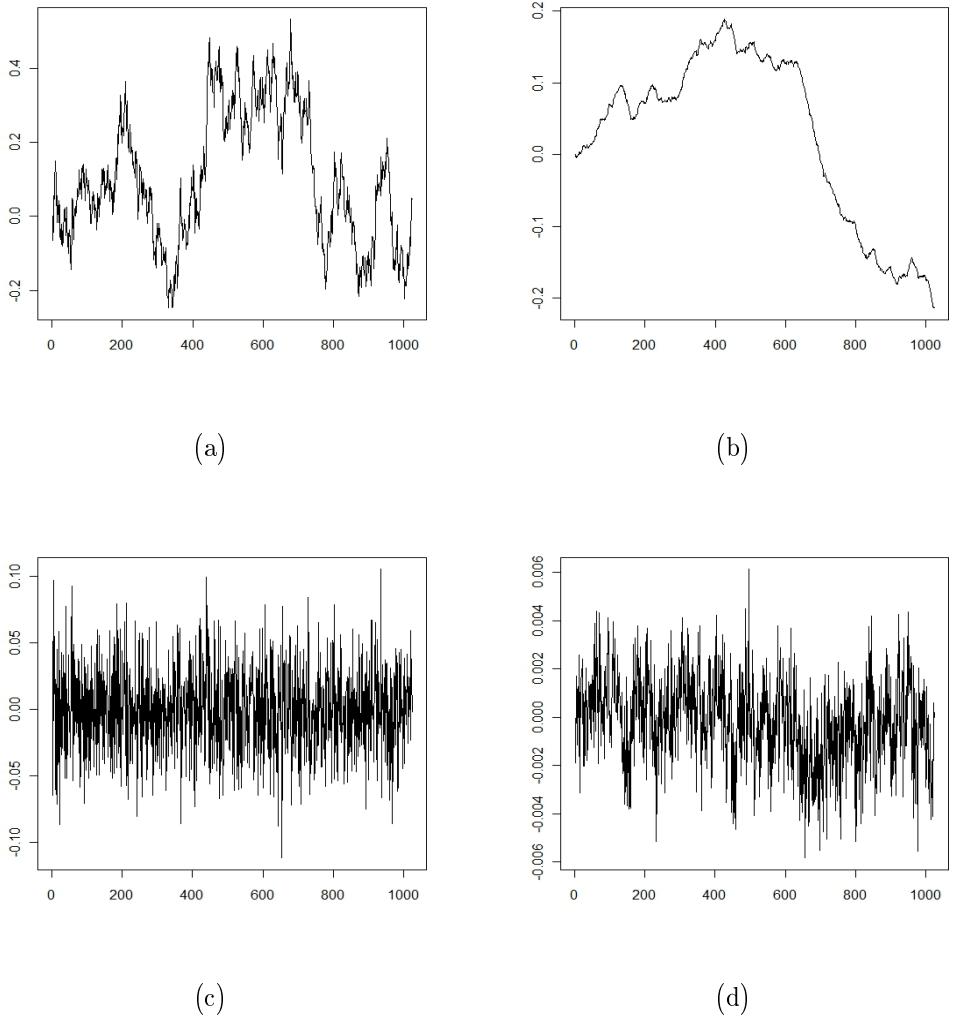
$$X_k = B_H(k+1) - B_H(k).$$

Procesa  $X_k$  *autokovariāciju funkcija*  $\gamma(k)$  ir

$$\gamma(k) = \frac{1}{2}[|k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k+1|^{2H}]$$

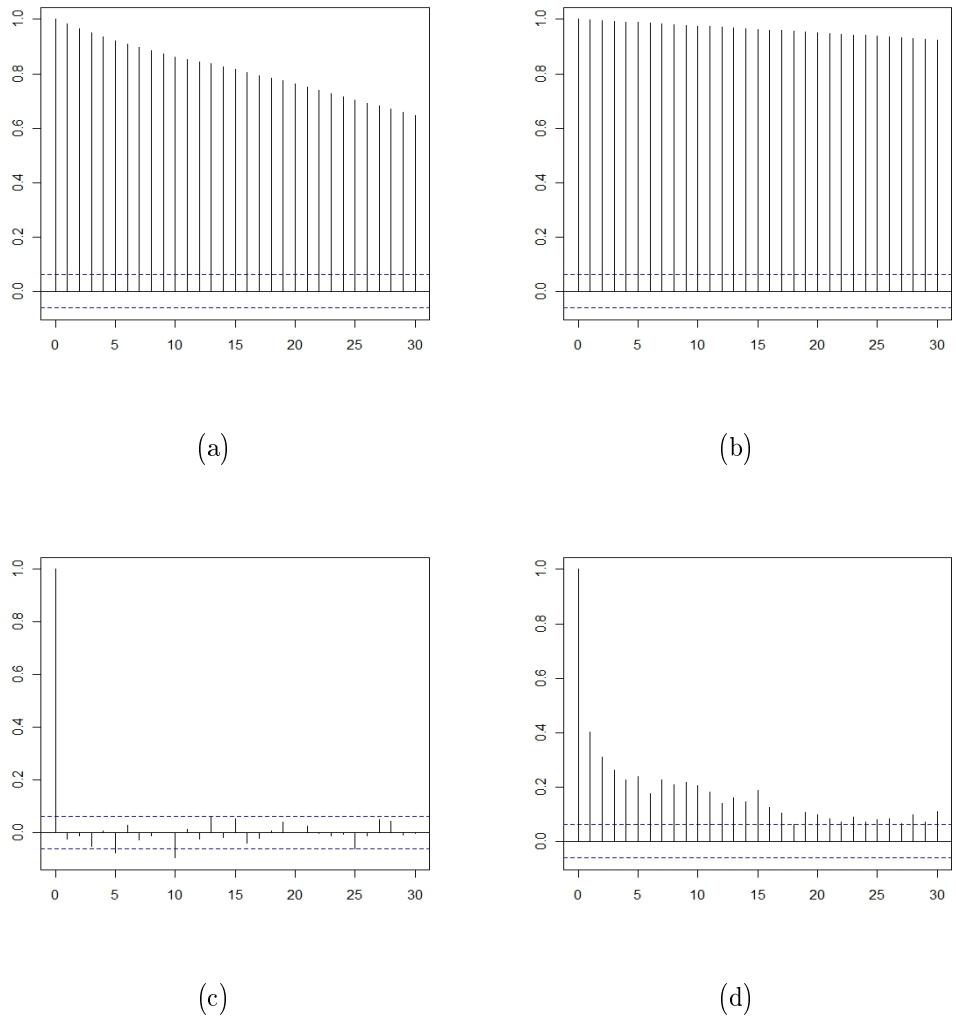
visiem  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Ja  $H = 1/2$ , tad  $\gamma(k) = 0$  (izņemot gadījumu, kad  $k = 0$ ). Tā ir standarta Brauna kustība, kuras pieaugumu ir neatkarīgi;
- Ja  $H < 1/2$ , tad  $\gamma(k) < 0$ ;
- Ja  $H > 1/2$ , tad  $\gamma(k) > 0$ .



2. att.: Izlases apjoms  $N = 1024$ . (a) - standarta Brauna kustība ( $H = 0.5$ ), (b) - frakcionālā Brauna kustība ( $H = 0.9$ ), (c) un (d) - procesu pieaugumi.

2. attēlā ir standarta Brauna kustības un frakcionālās Brauna kustības piemēri. Var redzēt, ka pieaugumu process abiem ir stacionārs. 3. attēlā varam redzēt, ka standarta Brauna kustības autokovariācijas dilst ievērojami straujāk, nekā frakcionālās Brauna kustības ( $H = 0.9$ ) autokovariācijas. Aplūkojot pieaugumu autokovariācijas, var redzēt, ka, kad  $H = 1/2$ ,  $\gamma(k) = 0$ , bet, kad  $H = 0.9$ , autokovariācijas ir pozitīvas.



3. att.: Autokovariāciju funkcijas: (a) - standarta Brauna kustībai, (b) - frakcionālajai Brauna kustībai ( $H = 0.9$ ), (c) un (d) - abu procesu pieaugumiem.

### 1.3. Frakcionālās Brauna kustības spektrs

**Definīcija 8.** [11] Ja  $\gamma(h)$  ir stacionāra procesa  $\{x_t\}$  autokovariāciju funkcija un tā apmierina nevienādību

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty,$$

tad

$$\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda h} f(\lambda) d\lambda, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5)$$

un procesa  $\{x_t\}$  spektrālā blīvuma funkcija ir

$$f(\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \lambda(h) e^{-2\pi i \lambda h}, \quad -1/2 \leq \lambda \leq 1/2. \quad (1.6)$$

Autokovariāciju funkcija (1.5) un spektrālā blīvuma funkcija veido (1.6) *Furjē transformāciju pāri*.

**Definīcija 9.** [11] Ja doti dati  $x_1, \dots, x_n$ , tad par *diskrēto Furjē transformāciju (DFT)* sauc

$$d(\lambda_j) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n x_t e^{-2\pi i \lambda_j t}, \quad (1.7)$$

kad  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , kur frekvences  $\lambda_j = j/n$  sauc par *Furjē frekvencēm*.

**Definīcija 10.** [11] Dotiem datiem  $x_1, \dots, x_n$  par *periodogrammu* sauc

$$I(\lambda_j) = |d(\lambda_j)|^2, \quad (1.8)$$

kad  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Tā kā frakcionālā Brauna kustība ar  $0 < H < 1$  nav stacionārs process, tad, strikti runājot, procesam  $B_H(t)$  nav spektrālā blīvuma. [12] Tomēr, spektrālo blīvumu var definēt kā periodogrammas sagaidāmas vērtības robežu

$$f_H(\lambda) \propto |\lambda|^{-2(H+1/2)}, \quad \text{kad } \lambda \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

## 2. Hursta parametra novērtēšanas metodes

Apskatīsim četras Hursta parametra novērtēšanas metodes programmā  $R$ , kuras piedāvātas publikācijā [1]. Tiks simulēts frakcionālais Gausa troksnis ar  $H = 0.6$  apjomā  $N = 1024$ , lai aplūkotu, kā šīs metodes novērtē Hursta parametru.

### 2.1. Kopējās variācijas metode

Kopējās variācijas metode ir balstīta uz sev - līdzības īpašību. Kopējais process  $X^{(m)}$  izskatās šādi:

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m}(X_{km} + \dots + X_{(k+1)m-1}),$$

kur  $k = 0, 1, \dots$  un  $m$  apzīmē to, cik elementu ietilpst summā  $X_k^{(m)}$ . Sev līdzības dēļ procesam  $X^{(m)}$  ir tas pats galīgdimensionālais sadalījums, kas procesam  $m^{H-1}X$  lieliem  $m$ . Turklat  $Var(X_k^{(m)}) = m^{2H-2}Var(X_k)$ . Procesa  $X_k^{(m)}$  dispersija ir vienāda visiem  $k$  un tās novērtējums ir

$$\widehat{Var}(X_k^{(m)}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} (X_i^{(m)} - \bar{X}^{(m)})^2, \quad (2.1)$$

kur  $\bar{X}^{(m)}$  ir:

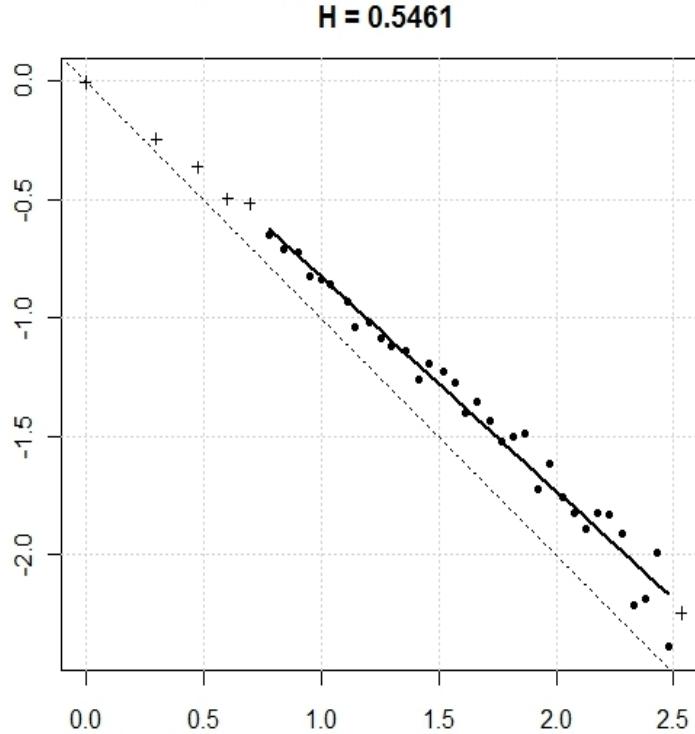
$$\bar{X}^{(m)} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X_i^{(m)},$$

un  $M$  ir veselā daļa no  $N/m$  ( $N$  ir izlases apjoms).

**Apgalvojums 2.** [1]Parametra  $H$  novērtējums tiek iegūts attēlojot  $\widehat{Var}(X_k^{(m)})$  pret  $m$  log-log skalā. Kad variācijas novērtējumi sakrīt ar īstajām vērtībām, tad visi punkti izvietojas uz taisnas līnijas ar slīpumu  $2H - 2$ .

Šīs metodes trūkums ir tāds, ka novērtējums (2.1) ir novirzīts, ja pastāv ilglaicīgā atkarība. Novirze pazūd, kad  $M$  ir liels (piemēram, liels  $N$  un mazs  $m$ ).

4. attēlā redzam Hursta parametra novērtējumu frakcionālajam Gausa troksnim ar kopējās variācijas metodi. Redzam, ka aprēķinātā vērtība  $H = 0.5461$  ir mazāka nekā īstā  $H = 0.6$ . Raustītā līnija grafikā attiecas uz Hursta parametru  $H = 0.5$ .



4. att.: Simulēts frakcionālais Gausa troksnis ar  $H = 0.6$  apjomā  $N = 1024$ . Līnijas slīpums  $2H - 2$

## 2.2. Periodogrammu metode

Periodogrammu metode novērtē Hursta parametru, pielāgojot taisnu līniju spektrālajā domeinā. Tā balstās uz novērojumu, ka Gausa trokšņa spektrālā blīvuma funkcija uzvedas kā  $c_f|\lambda|^{1-2H}$ , kad  $\lambda \rightarrow 0$  (1.9)

**Definīcija 11.** Spektrālo blīvumu var novērtēt ar *periodogrammu*

$$I(\lambda) = \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}(j) e^{ij\lambda},$$

kur  $\hat{\gamma}(j)$  ir izlases autokovariāciju funkcija.

Periodogrammas definīcija ir ekvivalenta ar

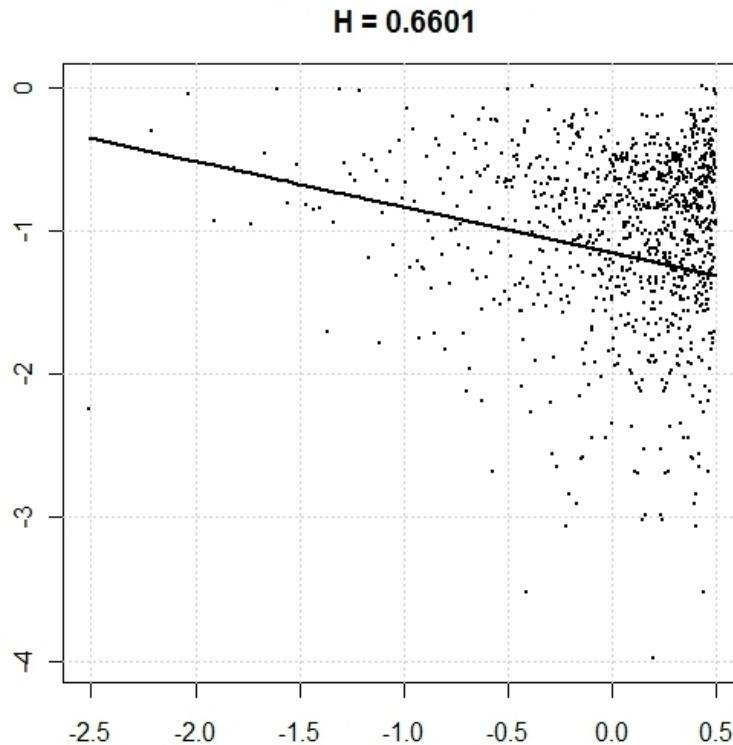
$$I(\lambda) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} (X_k - \bar{X}) e^{ijk\lambda} \right|^2,$$

(skatīt [1]). Periodogramma un spektrālais blīvums - abi ir simetriski nulles reģionā. Tāpēc var parādīt, ka periodogramma ir asimptotiski nenovirzīts novērtējums spektrālajam blīvumam, tas ir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[I(\lambda)] = f(\lambda).$$

**Apgalvojums 3.** [1]Parametra  $H$  novērtējums tiek iegūts, grafiski attēlojot  $I(\lambda_k)$  pret izlases frekvencēm  $\lambda(k)$  log-log skalā un pielāgojot taisnu līniju caur datiem, kura teorētiskais slīpums log-log grafikā ir  $1 - 2H$ .

Kā redzam 5. attēlā, periodogrammu metode izdod mazliet lielāku Hursta parametra novērtējumu, nekā īstais.



5. att.: Simulēts frakcionālais Gausa troksnis ar  $H = 0.6$  apjomā  $N = 1024$ . Līnijas slīpums  $1 - 2H$ .

### 2.3. R/S metode

Hidrologs Hursts (1951)  $R/S$  statistiku apraksta, vadoties pēc *Nīlas upes* problēmas (skatīt [9]). Tieki pieņemts, ka apskatāmais laika intervāls ir diskrēts un nav nekādu

ūdenstilpnes krātuves zudumu (iztvaikošana, noplūde utt.). Mērķis ir sasniegt, ka ūdens izplūde ir vienmērīga un ka laikā  $t + k$  ūdens krātuve ir tik pat pilna kā laikā  $t$ , un ka ūdenstilpne nekad nepūrplūst.

Ar  $X_i$  apzīmēsim ūdens ieplūdi laikā  $i$ , un  $Y_j = \sum_{i=1}^j X_i$  ir kopējā ūdens ieplūde līdz laika brīdim  $j$ . Tad ideālais ūdens tilpums tiek aprakstīts kā

$$R(t, k) = \max_{0 \leq i \leq k} \left[ Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+k} - Y_t) \right] - \min_{0 \leq i \leq k} \left[ Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+k} - Y_t) \right]$$

Standartizēts  $R(t, k)$  ir  $S(t, k)$ , kas izskatās šādi:

$$S(t, k) = \sqrt{k^{-1} \sum_{i=t+1}^{t+k} (X_i - \bar{X}_{t,k})^2},$$

kur  $\bar{X}_{t,k} = k^{-1} \sum_{i=t+1}^{t+k} X_i$ . Attiecību

$$R/S = \frac{R(t, k)}{S(t, k)} \quad (2.2)$$

sauc par  $R/S$  statistiku. Hursts grafiski attēloja  $\log(R/S)$  pret dažādām  $k$  vērtībām un novēroja, ka lieliem  $k$ ,  $\log(R/S)$  atrodas apkārtnē taisnai līnijai ar slīpumu  $\frac{1}{2}$ . Hursts novēroja, ka Nīlas upes datiem un citiem hidroloģiskiem, ģeofizikāliem un klimataloģiskiem datiem,  $R/S$  uzvedas kā konstante reiz  $k^H$  visiem  $H > 1/2$ . To sauc par *Hursta efektu*. Lieliem  $k$ ,

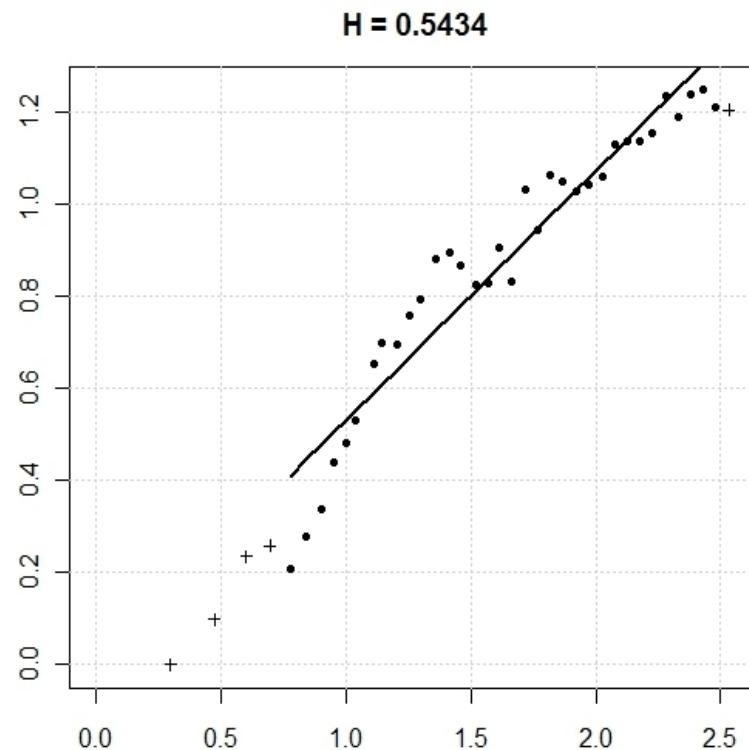
$$\log E[R/S] \approx a + H \log k, \text{ kur } H > \frac{1}{2}.$$

**Teorēma 4.** [9] Pieņem, ka  $X_t$  ir tāds, ka  $X_t^2$  ir ergodisks un  $t^{-H} \sum_{s=1}^t X_s$  konverģē vājā nozīmē uz frakcionālo Brauna kustību, kad  $t \rightarrow \infty$ . Tad, visiem  $k \rightarrow \infty$ ,

$$k^{-H} R/S \rightarrow_d \xi,$$

kur  $\xi$  ir nedeģenerēts gadījuma lielums.

Tas nozīmē, ka grafika  $\log R/S$  pret  $\log k$  punkti būs vienmērīgi izkaisīti ap taisni ar slīpumu  $H$ . Ilglaicīgās atmiņas gadījumā ap  $H > 1/2$ , pretējā gadījumā ap  $H = 1/2$ .



6. att.: Simulēts frakcionālais Gausa troksnis ar  $H = 0.6$  apjomā  $N = 1024$ . Līnijas slīpums  $H$

Kā redzam 6. attēlā,  $R/S$  metode izdod  $H = 0.5434$ , kas ir tuvu īstajam.

Tika aplūkotas trīs parametra  $H$  novērtēšanas metodes (veivletu metode tiks aplūkota mazliet vēlāk), un secināts, ka metodes novērtē parametru  $H$  ļoti dažādi un grūti noteikt, kura ir vislabākā metode. Tāpēc vajadzētu konstruēt ticamības intervālus, lai to noskaidrotu.

### 3. Veivleti

Pirms apskatām veivletu metodi ilglaicīgās atmiņas parametra novērtējumam, apskatīsim sīkāk kāda ir veivletu uzbūve (izmantota literatūra [3]).

#### 3.1. Multi - līmeņu transformācija virknēm

Pirms definēt veivletus un to transformāciju (skalēšanu), apskatīsim multilīmeņu analīzes pamatprincipus. Vārds multilīmeņu transformācija nozīmē objektu reprezentāciju skalu (līmeņu) kopā un manipulēšanu ar šo reprezentāciju dažādās skalās vienlaicīgi. Iesākumā apskatīsim veivletu analīzi virknēm, un vēlāk funkcijām.

Dota datu diskrētu virkne:  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , kur katrs  $y_i$  ir reāls skaitlis un  $i = 1, \dots, n$ . Pieņemsim, ka virknes garums ir divnieka pakāpe, tātad  $n = 2^J$  veselam skaitlim  $J \geq 0$ . Mērķis ir iegūt multilīmeņu informāciju vektoram  $y$ . Galvenā informācija ir *virknes pieaugumi* dažādos līmeņos un vietās. Vispirms iegūstam pieaugumus vienā un tajā pašā līmenī

$$W_k = y_{2k} - y_{2k-1}, \quad (3.1)$$

kur  $k = 1, \dots, n/2$ . Piemēram,  $W_1 = y_2 - y_1$ ,  $W_2 = y_4 - y_3$  un tā tālāk. Vienādojums (3.1) parāda, ka, ja  $y_{2k}$  ir ļoti tuvs  $y_{2k-1}$ , tad koeficients  $W_k$  ir ļoti mazs. Ja  $y_{2k} = y_{2k-1}$ , tad koeficients  $W_k = 0$ . Ja  $y_{2k}$  ļoti atšķiras no  $y_{2k-1}$ , tad koeficients  $W_k$  būs ļoti liels. Tādējādi virkne  $W_k$  parāda virknes  $y$  secīgo pāru pieaugumus. Jāpiezīmē, ka virknē  $\{W_k\}_{k=1}^{n/2}$  nav tādu diferenču kā  $W_3 - W_2$ . Ir tikai differences vietās  $(2k + 2k - 1)/2 = 2k - 1/2$ .

Tagad, kad iegūti pieaugumi vienā līmenī, var iegūt pieaugumus citos (rupjākos) līmeņos. Tam izmantosim jaunu koeficientu

$$c_k = y_{2k} + y_{2k-1}, \quad (3.2)$$

kur  $k = 1, \dots, n/2$ . Šoreiz virkne  $\{c_k\}_{k=1}^{n/2}$  ir mērogotu lokālo vidējo vērtību kopa (mērogotu, jo netika izdalīts ar 2, kas būtu īsta vidējā vērtība). Informācija vektorā  $\{c_k\}$  ir rupjāka, nekā vektorā  $y$ . Ja mēs gribam iegūt rupjākas differences, nekā  $\{W_k\}$ , tad jāsalīdzina divi blakus esoši  $c_k$ . Pirms aprēķinām aizvien rupjāku līmeņu  $W_k$ , atzīmēsim differencesāšanas līmeni, ieviešot jaunu mainīgo  $j$ . Sākuma virkne  $y$  sastāvēja no  $2^J$  novērojumiem. Vissmalkākās differences  $W_k$  no  $n/2 = 2^{J-1}$  novērojumiem. Tad ar  $j$  apzīmēsim

diferencēšanas līmeni  $J - 1 = j$ , un turpmāk  $W_k$  vietā rakstīsim  $W_{J-1,k}$  jeb  $W_{j,k}$ , tāpat ar koeficientiem  $c_k = c_{J-1,k}$  jeb  $c_{j,k}$ .

Lai iegūtu rupjākas differences, atkārto operāciju (3.1) uz smalkākā līmeņa vidējām vērtībām  $c_{J-1,k}$ :

$$W_{J-2,\ell} = c_{J-1,2\ell} - c_{J-1,2\ell-1},$$

kur  $\ell = 1, \dots, n/4$ . Tādējādi koeficienti  $W_{J-2,\ell}$  un  $W_{J-1,k}$  atrodas dažādos līmeņos. Pārrakstot 3.1., iegūstam

$$W_{J-2,\ell} = (y_{4\ell} + y_{4\ell-1}) - (y_{4\ell-2} + y_{4\ell-3})$$

tiem pašiem  $\ell$ , kas vienādojumā (3.1.). Piemēram, ja  $\ell = 1$ , iegūstam  $W_{J-2,1} = (y_4 + y_3) - (y_2 + y_1)$ .

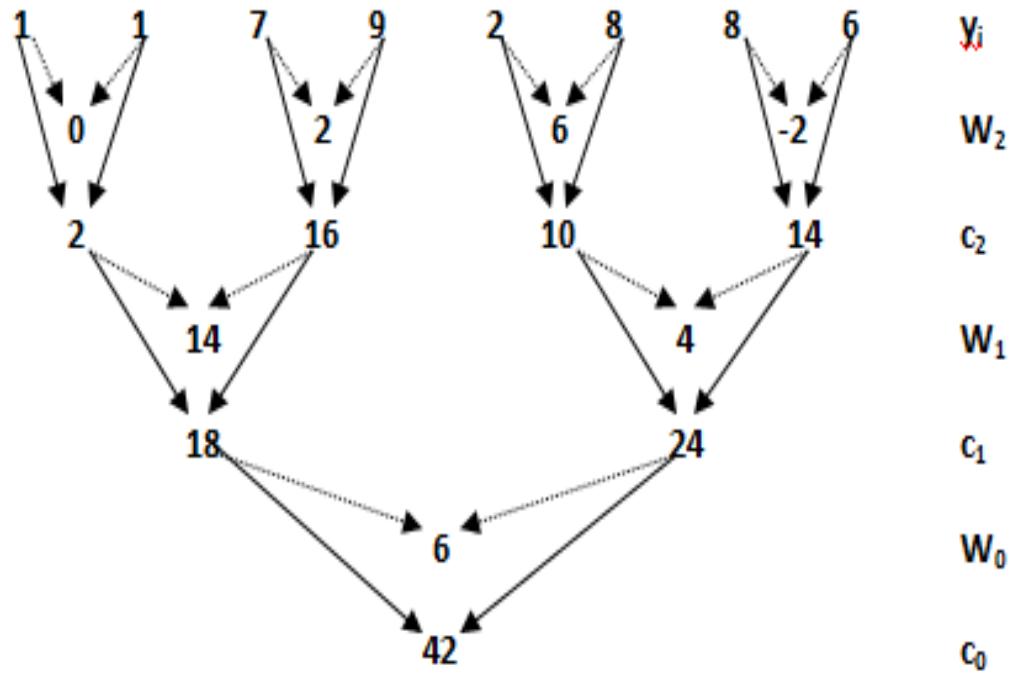
Šīs  $W_{J-2,\ell}$  sauc par "otrās skalas" jeb "otrā līmeņa" differencēm, bet  $W_{J-1,k}$  par "pirmā līmeņa" differencēm. Ja pielietojam (3.2) uz  $c_{J-1,k}$ , tad iegūstam

$$c_{J-1,\ell} = c_{J-1,2\ell} + c_{J-1,2\ell-1},$$

kur  $\ell = 1, \dots, n/4$ .

Atkārtojot procedūras (3.1) un (3.2), var iegūt aizvien jaunus diferenču un vidējo rādītāju koeficientus aizvien rupjākos līmeņos. Katru reizi skala pieaug par divnieka pakāpi, bet koeficientu skaits samazinās par divnieku apkāpi. Procedūra apstājas, kad tikai viens  $c_{0,1}$  koeficients tiek iegūts, kas notiks līmenī  $j = 0$ .

**Piemērs 2.** Dota virkne  $y = (y_1, \dots, y_8) = (1, 1, 7, 9, 2, 8, 8, 6)$ ,  $n = 8$  un  $J = 3$ . Vispirms pielieto formulu 3.1 un iegūst:  $W_{2,1} = y_2 - y_1 = 1 - 1 = 0$ ,  $W_{2,2} = y_4 - y_3 = 9 - 7 = 2$ ,  $W_{2,3} = y_6 - y_5 = 8 - 2 = 6$  un  $W_{2,4} = y_8 - y_7 = 6 - 8 = -2$ . Kā jau tika solīts, ir  $2^{J-1} = n/2 = 4$  koeficienti līmenī 2. Aprēķinot lokālos vidējos, iegūstam  $c_{2,1} = y_2 + y_1 = 1 + 1 = 2$ ,  $c_{2,2} = y_4 + y_3 = 9 + 7 = 16$ ,  $c_{2,3} = y_6 + y_5 = 8 + 2 = 10$  un  $c_{2,4} = y_8 + y_7 = 6 + 8 = 14$ . Sākām ar astoņiem  $y_i$ , ieguvām četru  $W_2$ , un četru  $c_2$ , koeficientus. Tātad, tik vērtību cik bija sākumā, tik arī ieguvām beigās. Vizuāli to var redzēt 7. attēlā.



7. att. Multilīmeņu transformācija vektoram  $y = (1, 1, 7, 9, 2, 8, 8, 6)$

### 3.2. Haar veivleti funkcijām

#### Mērogošana un translācija

Jebkurai dotai funkcijai  $p(x)$  varam uzdot mērogotu un translētu funkciju  $p_{j,k}(x)$ , kas izskatās šādi:

$$p_{j,k}(x) = 2^{J/2} p(2^J x - k) \quad (3.3)$$

visiem  $x \in \mathbb{R}$ , kur  $j, k$  ir veseli skaitļi. Koeficients  $2^{J/2}$  nodrošina to, ka funkcijai  $p_{j,k}(x)$  ir tā pati norma, kas funkcijai  $p(x)$ . Citiem vārdiem sakot:

$$\begin{aligned} \|p_{j,k}(x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{j,k}^2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^J p^2(2^J x - k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(y) dy = \|p\|^2, \end{aligned}$$

kur  $y = 2^J x - k$ .

#### Smalku skalu tuvinājumi

Matemātikā vairāk tiek apskatīti veivleti, kas darbojas ar funkcijām, nevis diskrētām virknēm. Tad pieņemsim, ka mums ir funkcija  $f(x)$ , kas definēta intervālā  $x \in [0, 1]$ . Ar pilnīgām zināšanām par funkciju  $f(x)$ , mēs to varam izpētīt jebkurā skalā. Lai ieviestu Haar veivletu transformāciju, jāizvēlas fiksēta smalkākā skala, no kuras sākt. Sāksim ar smalkākās skalas lokālo funkcijas vidējošanu.

No sākuma definēsim *Haar tēva veivletu* skalā  $2^J$  ar  $\phi(2^J x)$ , kur

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{citur.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Tad smalkākā līmeņa (skalas  $2^J$ ) tēva veivletu koeficientus var definēt kā

$$c_{J,k} = \int_0^1 f(x) 2^{J/2} \phi(2^J x - k) dx, \quad (3.5)$$

vai, izmantojot mērogošanu un translāciju, 3.5 kļūst par

$$c_{J,k} = \int_0^1 f(x) \phi_{J,k}(x) dx = \langle f, \phi_{J,k} \rangle, \quad (3.6)$$

kur  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  ir iekšējais reizinājums (skatīt pielikumā).

Tagad izskaidrosim, ko nozīmē koeficienti  $c_{J,k}$ . Pirms tam izskaidrosim, kā izskatās funkcijas  $\phi_{J,k}(x)$ . Izmantojot (3.3) un (3.4), var redzēt, ka

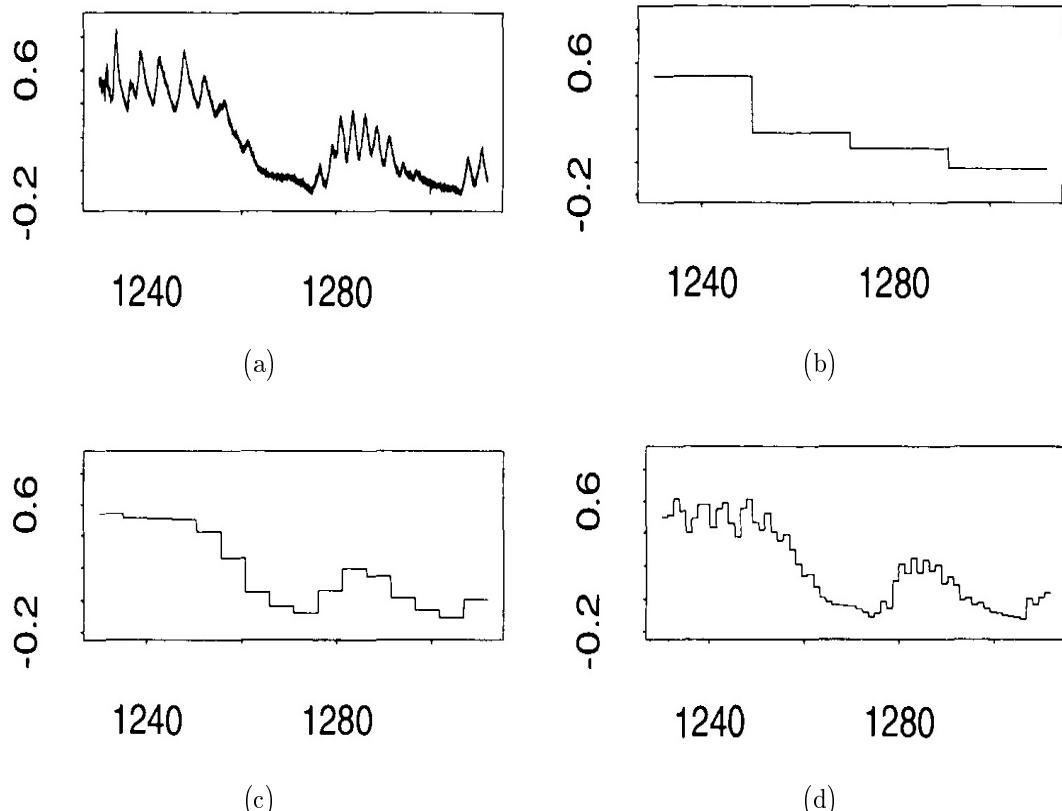
$$\phi_{J,k}(x) = \begin{cases} 2^{J/2}, & \text{ja } x \in [2^{-J}k, 2^{-J}(k+1)], \\ 0, & \text{citur.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Tas ir, funkcija  $\phi_{J,k}(x)$  ir konstanta intervālā  $I_{J,k} = [2^{-J}k, 2^{-J}(k+1)]$  un nulle visur citur. Ja funkcija  $f(x)$  ir definēta intervālā  $[0, 1]$ , tad  $k$  amplitūda, kur intervāls  $I_{J,k}$  pārklāj intervālu  $[0, 1]$  ir no 0 līdz  $2^J - 1$ . Tad koeficienti  $c_{J,k}$  ir integrālis funkcijai  $f(x)$  intervālā  $I_{J,k}$ .

**Teorēma 5.** Koeficientu kopa  $\{c_{J,k}\}_{k=0}^{2^J-1}$  un atbilstošie Haar tēva veivleti tajā pašā skalā definē funkcijas  $f(x)$  tuvinājumu  $f_J(x)$ :

$$f_J(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} c_{J,k} \phi_{J,k}(x). \quad (3.8)$$

8. attēlā (a) redzam ”plethysmography” datus apjomā  $N = 4096$ , kas iegūti no datorprogrammas  $R$  paketes *WaveTresh*. Šī laikrinda raksturo sprieguma izmaiņas milivoltos, pacientam elpojot, kas iegūtas ar speciālas jostas palīdzību, kura tiek uzvilkta pacientam. Grafiki (b), (c) un (d) ir funkcijas 3.8 attiecīgi līmenos  $J = 2, 4$  un  $6$ . Originālā datu virkne atbilst līmenim  $J = 12$ , jo  $4096 = 2^{12}$ . Kā var redzēt 8. attēlā, jo smalkāka skala  $J$ , jo labāk tiek aproksimēta funkcija  $f(x)$ .



8. att.: (a) - ”Plethysmography” dati apjomā  $N = 4096$  un to Haar tēva veivletu tuvinājumi līmenos  $J = 2$  (b),  $J = 4$  (c) un  $J = 6$  (d).  $X$ - ass ir laiks sekundēs un  $Y$  - ass ir milivolti

## Rupjākas skalas koeficientu aprēķināšana, izmantojot smalkākas skalas

Aprēķināsim intergāli funkcijai  $f(x)$  intervālā  $I_{J-1,k}$ , kas ir divreiz šaurāks, nekā  $I_{J,k}$  un satur intervālus  $I_{J,2k}$  un  $I_{J,2k+1}$ . Koeficientus  $c_{J-1,k}$  varam pārrakstīt, izmantojot  $c_{J,2k}$  un  $c_{J,2k+1}$ .

$$\begin{aligned} c_{J-1,k} &= \int_{2^{-(J-1)}k}^{2^{-(J-1)(k+1)}} f(x)\phi_{J-1,k}(x)dx \\ &= 2^{-1/2} \int_{2^{-J}2k}^{2^{-J}(2k+2)} f(x)2^{J/2}\phi(2^{J-1}x - k)dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{-1/2} \int_{2^{-J}2k}^{2^{-J}(2k+1)} f(x)2^{J/2}\phi(2^Jx - 2k)dx \\ &+ 2^{-1/2} \int_{2^{-J}(2k+1)}^{2^{-J}(2k+2)} f(x)2^{J/2}\phi(2^Jx - (2k+1))dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{-1/2} \int_{2^{-J}2k}^{2^{-J}(2k+1)} f(x)\phi_{J,2k}(x)dx \\ &+ 2^{-1/2} \int_{2^{-J}(2k+1)}^{2^{-J}(2k+2)} f(x)\phi_{J,2k+1}(x)dx \\ &= 2^{-1/2}(c_{J,2k} + c_{J,2k+1}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Izmantojot Haar veivletu īpašību (3.12), varam pāriet no skalas  $J - 1$  vienādojumā (3.9) uz  $J$  skalu vienādojumā (3.10).

$$\phi(y) = \phi(2y) + \phi(2y - 1) \quad (3.12)$$

Izmantojot saistību starp divām skalām, redzam, kā (3.9) pārvēršas par (3.10), kad  $y = 2^{J-1}x - k$ :

$$\phi(2^{J-1}x - k) = \phi(2^Jx - 2k) + \phi(2^Jx - 2k - 1). \quad (3.13)$$

Galvenais ieguvums ir tāds, ka, lai aprēķinātu  $c_{J-1,k}$  mums nav obligāti nepieciešams zināt funkciju  $f(x)$  un pielietot integrēšanu kā vienādojumā (3.6). Pietiek, ka ir zināmi koeficienti  $c_{J,2k}$  un  $c_{J,2k+1}$  un pielietot formulu (3.11). Vispārīgā gadījumā, ja vēlamies aprēķināt koeficientus rupjākā skalā, tad jāzina tikai koeficienti iepriekšējā smalkākajā skalā.

## Atšķirība starp dažādu skalu tuvinājumiem

Pieņemsim, ka mums ir divi Haar veiveletu tuvinājumi vienai un tai pašai funkcijai, bet divos dažādos līmenos, piemēram,  $f_0(x)$  un  $f_1(x)$  (divi funkcijas  $f$  visrupjākie iespējamie tuvinājumi). Funkcija  $f_0(x)$  ir konstanta funkcija  $c_{0,0}\phi(x)$  (sareizināts tēva veivlets). Tuvinājums  $f_1(x)$  ir formā (3.8), kas izskatās šādi:

$$f_1(x) = c_{1,0}\phi_{1,0}(x) + c_{1,1}\phi_{1,1}(x) = c_{1,0}2^{1/2}\phi(2x) + c_{1,1}2^{1/2}\phi(2x - 1). \quad (3.14)$$

Tagad atradīsim starpību starp  $f_0(x)$  un  $f_1(x)$ .

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_0(x) &= c_{0,0}\phi(x) - 2^{1/2}\{c_{1,0}\phi(2x) + c_{1,1}\phi(2x - 1)\} \\ &= c_{0,0}\{\phi(2x) + \phi(2x - 1)\} \\ &\quad - 2^{1/2}\{c_{1,0}\phi(2x) + c_{1,1}\phi(2x - 1)\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

izmantojot īpašību (3.12). Tad

$$f_1(x) - f_0(x) = (c_{0,0} - 2^{1/2}c_{1,0})\phi(2x) + (c_{0,0} - 2^{1/2}c_{1,1})\phi(2x - 1), \quad (3.16)$$

un tā kā  $c_{0,0} = (c_{1,0} + c_{1,1})/\sqrt{2}$ , tad

$$f_1(x) - f_0(x) = \{(c_{1,1} - c_{1,0})\phi(2x) + (c_{1,0} - c_{1,1})\phi(2x - 1)\}/\sqrt{2}. \quad (3.17)$$

Definējot

$$W_{0,0} = (c_{1,1} - c_{1,0})/\sqrt{2}, \quad (3.18)$$

funkciju starpība kļūst par

$$f_1(x) - f_0(x) = W_{0,0}\{\phi(2x) - \phi(2x - 1)\}. \quad (3.19)$$

Tagad varam definēt *Haar mātes veivetu*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(2x) - \phi(2x - 1) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{ja } x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{citur.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Tad funkciju  $f_1(x)$  un  $f_0(x)$  starpība kļūst par

$$f_1(x) - f_0(x) = W_{0,0}\psi(x). \quad (3.21)$$

Funkciju  $f_1(x)$  varam izteikt

$$f_1(x) = f_0(x) + W_{0,0}\psi(x) = c_{0,0}\phi(x) + W_{0,0}\psi(x). \quad (3.22)$$

Varam vispārināt vienādojumu (3.22) un iegūstam

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= f_j(x) + \sum_{k=0}^{2^J-1} W_{j,k}\psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2^J-1} c_{j,k}\phi_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^J-1} W_{j,k}\psi_{j,k}(x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.3. Diskrēto Haar veiveltu piemērs

Apskatām piemēru, kas attēlo Haar veivletu koeficientus. Izmantosim *Bloku* testa funkcija, kas atrodama paketē *WaveThresh*. Bloku funkciju ieviesa Donoho [13] un tā izskatās formā

$$r(x) = \sum_{j=1}^{11} h(j)B(x - t(j)),$$

kur  $B(x) = \frac{1+sgn(x)}{2}$ ,  $sgn(x) = I_{x>0} - I_{x<0}$ , un

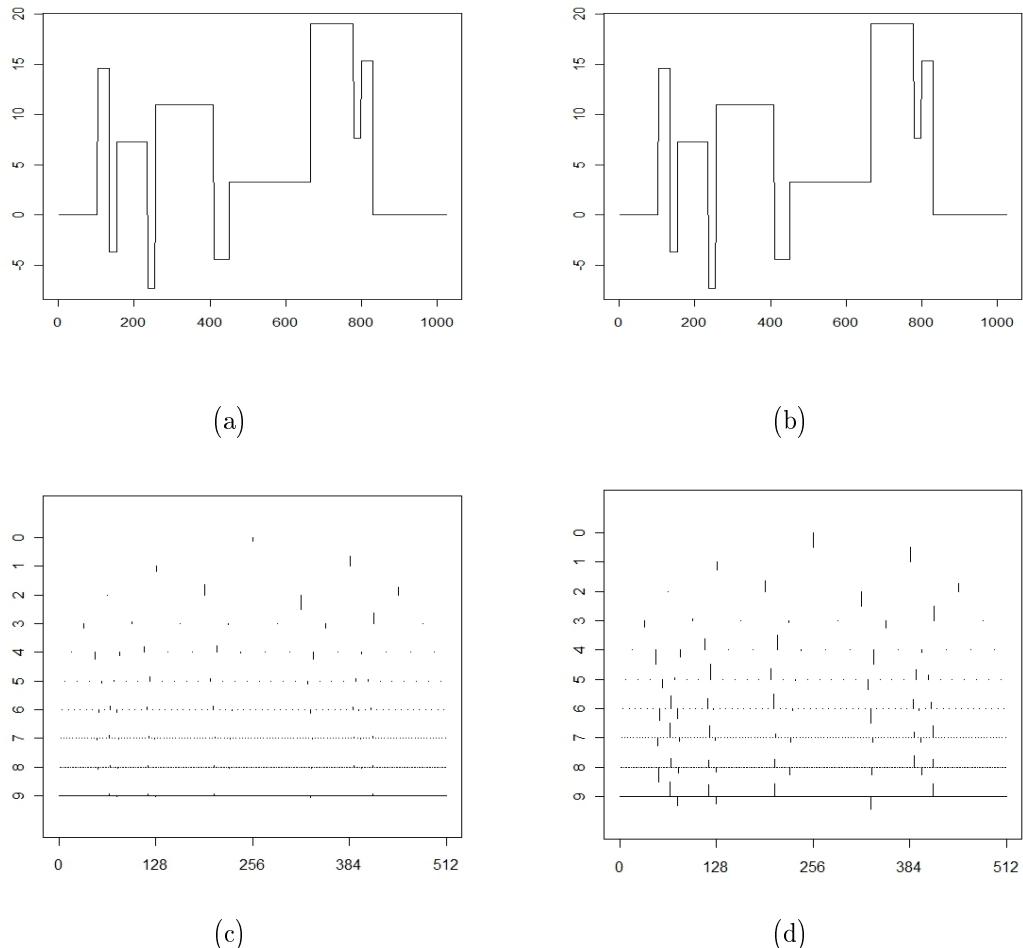
$$t = (0.10, 0.13, 0.15, 0.23, 0.25, 0.40, 0.44, 0.65, 0.76, 0.78, 0.81)$$

$$h = (4, -4, 3, -4, 5, -4.2, 2.1, 4.3, -3.1, 2.1, -4.2)$$

Atšķirība starp diskrēto Haar veivletu koeficientu grafikiem 9. attēlā ir tāda, ka attēlā (c) koeficienti attēloti vienā un tajā pašā skalā, bet (d) - dažādās skalās katram attiecīgajam līmenim (ar skalu mēs saprotam mazo vertikālo līniju relatīvo augstumu, kas reprezentē koeficientu vērtības). Abos grafikos novērojams, ka, līmenim palielinoties (aizvien smalkāki līmeņi), koeficienti kļūst pakāpeniski mazāki (absolūtos skaitļos).

Vēl trīs citas pazīmes var novērot no veivletu koeficientu grafikiem.

- Lielas koeficientu vērtības norāda uz Bloku funkcijas pārtrauktību
- Daudzi koeficienti ir tieši nulle (ja funkcijas divas "kaimiņu" vērtības ir identiskas)
- Koeficienti, kas nav nulles, ļoti labi parāda funkcijas pēkšņās (straujās) izmaiņas



9. att.: (a) un (b) - bloku funkcijas, (c) un (d) - Haar diskrēto veivletu koeficienti  $W_{j,k}$  bloku funkcijai. (c) - visi koeficienti vienā skalā un ir salīdzināmi savā starpā, (d) - katrā līmenī koeficientiem sava skala - nav salīdzināmi starp līmeņiem.

### 3.4. Multilīmeņu analīze

Multilīmeņu analīze (*Multiresolution analysis* (MRA)) ir funkciju ”skalu telpa” jeb struktūra, kurā veivleti ir uzdoti.

**Definīcija 12.** Dotai funkcijai  $\phi$  definē kopas

$$V_0 = \left\{ f : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k), \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2 < \infty \right\},$$

$$V_1 = \{f(x) = g(2x) : g \in V_0\}, V_2 = \{f(x) = g(2x) : g \in V_1\}, \dots$$

Tad funkcija  $\phi$  ģenerē multilīmeņu analīzi telpā  $\mathbb{R}$ , ja

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad j \geq 0. \quad (3.24)$$

Ja funkcija  $f(x)$  pieder telpai  $V_j$ , tad  $g(2x)$  (kas ir tā pati funkcija, tikai variē divreiz straujāk nekā  $f(x)$ ) piederēs telpai  $V_{j+1}$ . Bet, ja funkciju  $f(x)$  nobīda (translē) pa līniju  $f(x - k)$ , tad telpas, kurai pieder funkcija, līmenis nemainās.

**Teorēma 6.** Ja Haar tēva veivleta funkcija  $\phi(x)$  ir elements no telpas  $V_0$ , tad  $\{\phi_{j,k}(x)\}$  veido  $V_j$  ortonormālo bāzi.

### 3.5. Projekcija

Daubechies (1998) iepazīstināja ar projekcijas operatoru  $P_j$ , kas projecē funkciju telpā  $V_j$  (skatīt [3]). Tā kā  $\{\phi_{j,k}(x)\}_k$  ir bāze telpā  $V_j$ , projekciju var pieraksīt

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) = P_j f.$$

Intuitīvi  $P_j f$  var tikt uztverts kā  $\phi_{j,k}(x)$  lineāru kombināciju modeli, kurš vislabāk pielāgojas funkcijai  $f(x)$ . Bāzes ortogonalitāte nozīmē to, ka koeficienti tiek aprēķināti

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi_{j,k}(x) dx = \langle f, \phi_{j,k} \rangle.$$

### 3.6. Mērogošana un veivletu konstrukcija

No vienādojuma (3.24) iegūstam, ka telpa  $V_0$  ir apakškopa telpai  $V_1$ . Tā kā  $\{\phi_{1,k}(x)\}$  ir bāze telpā  $V_1$  un  $\phi(x) \in V_0$ , varam uzrakstīt *mērogošanas vienādojumu*

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{1,n}(x), \quad (3.25)$$

kur  $h_n$  ir mērogošanas koeficienti. Vienādojums (3.25) ir vispārinājums vienādojumam (3.12). Mērogošanas vienādojums ir veivletu teorijas bāze, jo tas dod iespēju veidot vispārēju MRA, ne tikai Haar veivletiem. Haar veivletiem  $h_0 = h_1 = 2^{-1/2}$ .

**Teorēma 7.** Daubechies (1992) [3] Ja  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  ar  $\phi$  veido multilīmeņu analīzi telpā  $L^2(\mathbb{R})$ , tad eksistē saistīta ortonormālā veivletu bāze  $\{\psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\}$  telpā  $L^2(\mathbb{R})$  tāda, ka visiem  $j \in \mathbb{Z}$

$$P_{j+1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x). \quad (3.26)$$

Viens veids, kā konstruēt veivletu  $\psi(x)$ , ir

$$\hat{\psi}(\lambda) = e^{i\lambda/2} \overline{m_0(\lambda/2 + \pi)} \hat{\phi}(\lambda/2),$$

kur  $\hat{\psi}$  un  $\hat{\phi}$  ir Furjē transformācijas attiecīgi  $\psi$  un  $\phi$  un

$$m_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n \exp^{-in\lambda},$$

vai ekvivalenti

$$\psi(x) = \sum_n (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \phi_{1,n}(x). \quad (3.27)$$

Koeficientu vienādojumā 3.27 var apzīmēt

$$g_n = (-1)^{n-1} h_{1-n}.$$

Haar veivletiem  $g_0 = -1/\sqrt{2}$  un  $g_1 = 1/\sqrt{2}$ .

Teorēma 7 izskaidro to, ka starpība starp divām projekcijām  $(P_{j+1} - P_j)f$  var tikt izteikta kā lineāra veivletu kombinācija. Izmantojot vienādojumus (3.23) un (3.26), varam vispārināt funkcijas  $f(x)$  attēlojumu:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (3.28)$$

Šis ir svarīgs vispārinājums, jo parāda, ka funkcija  $f(x)$  var tikt izteikta ar "gludo" jeb "kodola-tipa" daļu, kas satur  $\phi_{j_0,k}$ , un kopu ar "sīkiem" attēlojumiem  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} W_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ . Kopumā pirmā vienādojuma 3.28 daļa reprezentē "vidējo" jeb "kopējo" funkcijas attēlojuma līmeni, bet otrā daļa - detaļas jeb sīkumus.

**Definīcija 13.** Funkcijai  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  ir **M zūdošie momenti**, ja tā apmierina vienādojumu

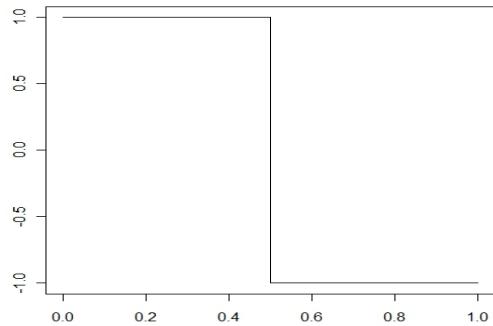
$$\int x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad (3.29)$$

kur  $\ell = 0, \dots, M - 1$ .

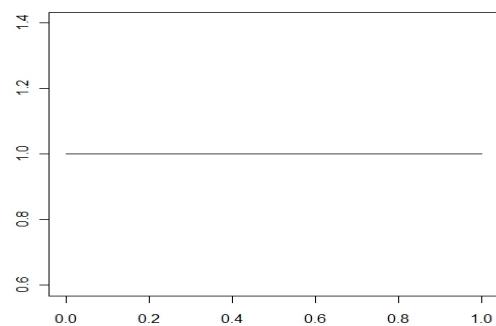
Zūdošie momenti ir svarīgi, jo, ja veivletam ir  $M$  zūdošie momenti, tad visi veivletu koeficienti jebkuram polinomam pakāpē  $M$  (vai mazākam) būs tieši nulle. Tādā veidā, ja, piemēram, funkcija ir diezgan gluda un tikai pārtraukta vienā vietā ar pēkšņu oscilāciju, tad veivletu koficienti gludajās daļās būs ļoti mazi (vai pat nulle).

### 3.7. Piemēri

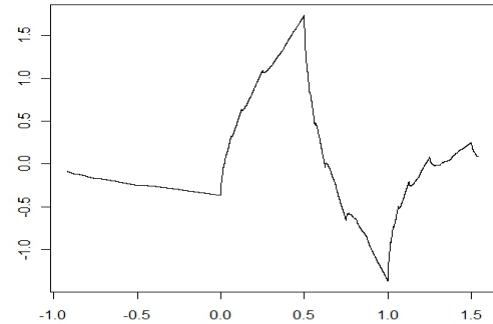
Mērķis ir uzkonstruēt ortogonālus veivletus, kas būtu ierobežoti intervālā un daudz gludāki par Haar veiveltiem. Daubechies (1998) ieviesa ortonormālo veivletu saimi, kurā katrs veivlets indeksēts ar  $M$ , kas atbilst zūdošo momentu skaitam. Programmā *R* paketē *WaveThresh* ir divas Daubechies veivletu saimes - *external - phase* un *least - asymmetric*. *External - phase* saimē ir veivleti ar zūdošajiem momentiem no 1 līdz 10, bet *least - asymmetric* saimē - no 4 līdz 10. *Least - asymmetric* saimes vevileti ir tādi, kuros cenšas samazināt asimetrijas līmeni.



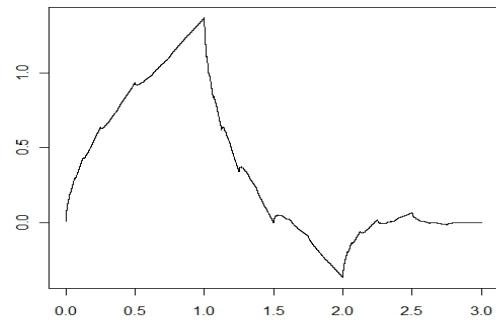
(a)



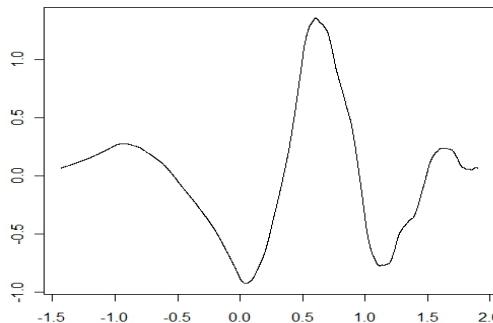
(b)



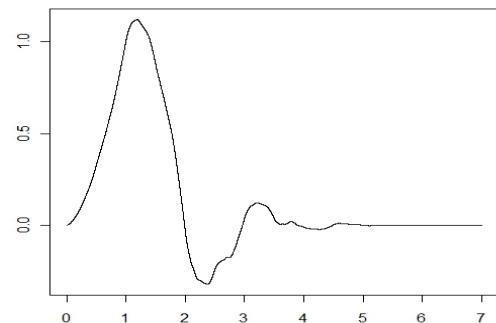
(c)



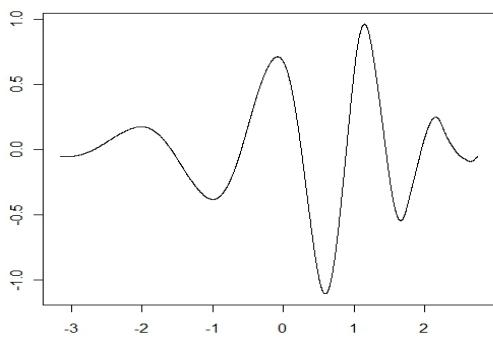
(d)



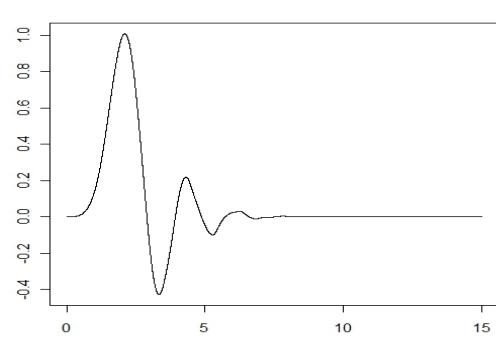
(e)



(f)

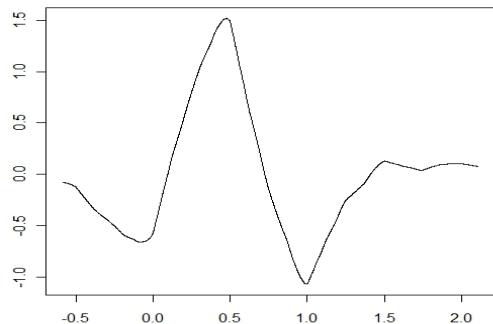


(g)

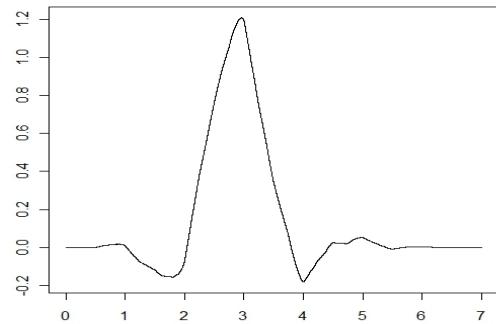


(h)

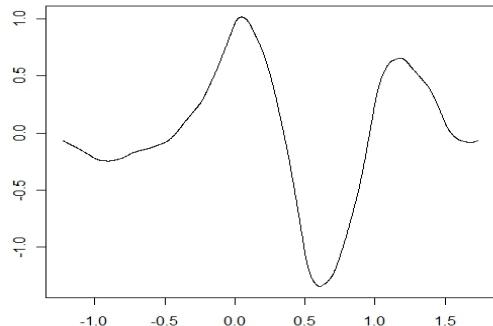
10. att.: *External - phase* saimes veivleti. (a),(c),(e),(g) - mātes veivleti  $\psi$ , (b),(d),(f),(h) - tēva veivelti  $\phi$  ar attiecīgi  $M = 1$  ((a),(b)),  $M = 2$  ((c),(d)),  $M = 4$  ((e),(f)) un  $M = 8$  ((g),(h)) zūdošajiem momentiem



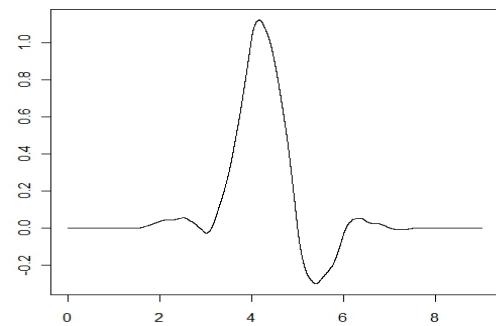
(a)



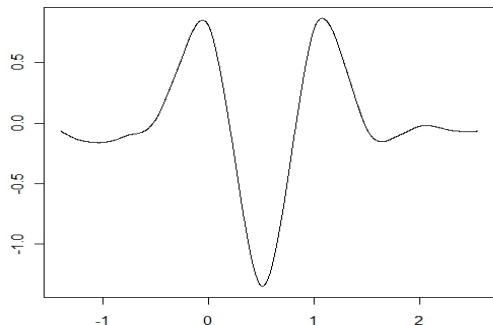
(b)



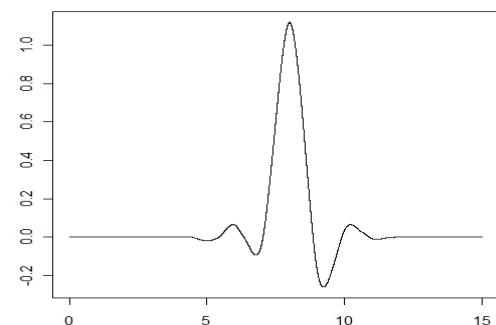
(c)



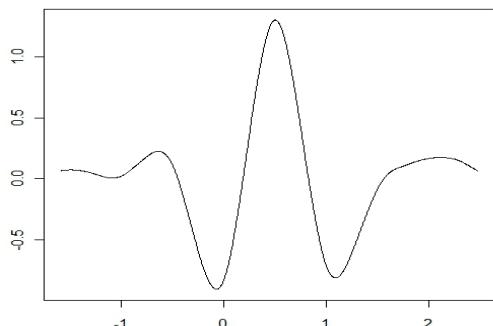
(d)



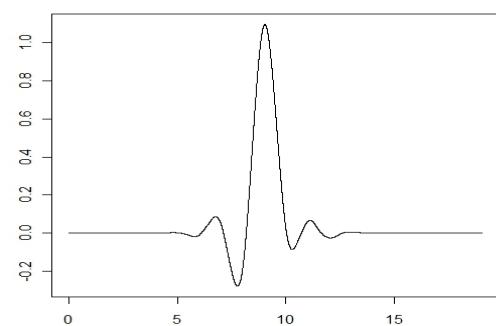
(e)



(f)



(g)



(h)

11. att.: *Least-asymmetric* saimes veivleti. (a),(c),(e),(g) - mātes veivleti  $\psi$ , (b),(d),(f),(h) - tēva veivelti  $\phi$  ar attiecīgi  $M = 4$  ((a),(b)),  $M = 5$  ((c),(d)),  $M = 8$  ((e),(f)) un  $M = 10$  ((g),(h)) zūdošajiem momentiem

## 4. Veivletu novērtējums

### 4.1. Veivletu īpašības

**Definīcija 14.** Diskrētos veivletu koeficientus funkcijai  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  aprēķina

$$W_{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi_{jk}(t)dt, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

kur  $\psi_{jk}(t) \in L^2(\mathbb{R})$  ir veivletu funkcijas. Veivletu  $\psi_{jk}(t)$  kopa ir atvasināta no vienas funkcijas  $\psi_0(t)$ , kas ir mātes veivlets, izmantojot mērogošanu un paplašināšanos:

$$\psi_{jk}(t) = 2^{-j/2}\psi_0(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

Koeficienti  $W_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  ir Diskrētā Veivletu Transformācija (DWT) funkcijai  $x(t)$ .

**Apgalvojums 8.** Veivletu funkcijas  $\psi_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  ir ortogonālā bāze telpā  $L^2(\mathbb{R})$ .

Daubechies mātes veivleti ir nepārtraukti, izņemot gadījumā, kad  $M = 1$ . Tad tas reducējas uz Haar tēva veivletu, kas definēts (3.4)

Tēva un mātes veivletu Furjē transformācijas izskatās formā

$$\hat{\phi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \exp^{-i\lambda t} dt \text{ un } \hat{\psi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp^{-i\lambda t} dt.$$

Otrās kārtas ilgaicīgās atmiņas procesu veivletu koeficienti ir nozīmīgi, jo viņu īpašības izmanto, lai novērtētu ilgaicīgās atmiņas parametru  $\alpha$ . Otrās kārtas stacionāta ilgaicīga procesa ( $X_j; j \geq 1$ ) veivletu koeficientiem ir sekojošas divas īpašības.

**Īpašība 1.** [2] Ja  $M \geq (\alpha - 1)/2$ , tad veivletu koeficienti ( $W_{jk} : k = 0, \pm 1, \dots$ ) fiksētā skalā  $j$  veido stacionāru procesu ar  $E[W_{jk}] = 0$  un

$$E[W_{jk}^2] \sim 2^{j\alpha} c_f C(\alpha, \psi_0), \quad \text{kad } j \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Lielums  $C(\alpha, \psi_0)$  ir definēts kā

$$C(\alpha, \psi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-\alpha} |\hat{\psi}_0(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (4.4)$$

kur  $\hat{\psi}_0(\lambda)$  ir Furjē transformācija mātes veivletam  $\psi_0(t)$ .

**Īpašība 2.** [2] Ja  $M \geq \alpha/2$ , tad  $E[W_{jk} W_{j,k'}] \rightarrow 0$ , kad  $|k - k'| \rightarrow \infty$  un  $\sum_{k=0}^{\infty} |E W_{jk} W_{j,0}| < \infty$ . Tas parāda, ka ( $W_{jk} : k = 0, \pm 1, \dots$ ) ir īslaicīgā atkarība.

## 4.2. Veivletu metode programmā *R*

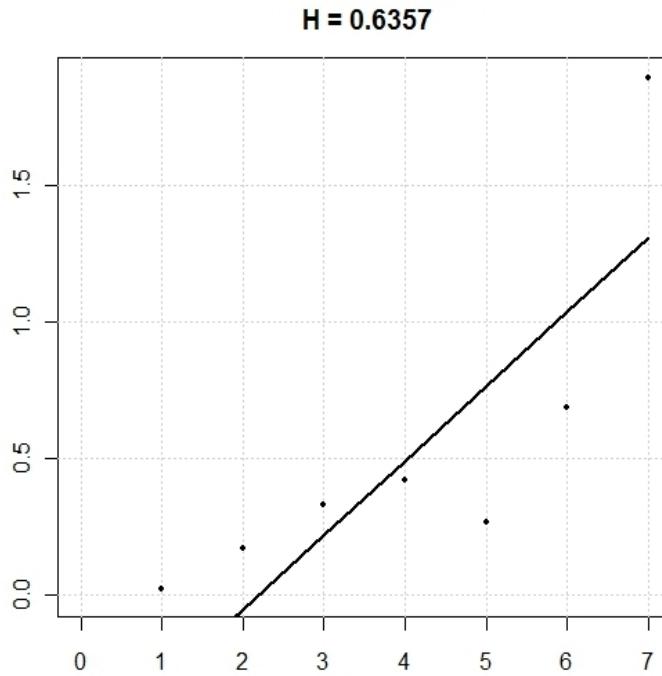
Veivletu novērtējums ir cieši saistīts ar periodogrammas novērtējumu. Dati tiek transformēti un iegūts novērtējums no transformētajiem datiem (periodogrammas metodē novērtējums ir veikts frekvenču domēnā). Tieki aprēķināti veivletu koeficienti.

Pielietojot veivletu transformāciju izlasei, varam iegūt veivletu koeficientu dispersiju, ko aprēķina

$$v_j = 2^j \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} (W_x(j, k))^2. \quad (4.5)$$

Veivletu novērtējums parametram  $H$  ir asimptotiski nenovirzīts, kad veivletu zūdošo momentu skaits ir lielāks par  $H - 1$ , un praksē ir ļoti zemas novirzes pat mazām datu izlasēm. [1] Vēl viens šīs metodes pluss ir tāds, ka potenciālie trendi netiek mēnovērtējumu, ja veivletu zūdošo momentu skaits ir pietiekami liels, lai tiktu valā no trenda.

**Apgalvojums 9.** *Veivletu novērtējums Hursta parametram tiek atrasts, attēlojot veivletu koeficientu dispersijas logaritmu  $\log(v_j)$  pret skolas līmeni  $j$ . Iegūst  $j$  punktus, kuriem tiek piemērota taisne pēc mazākās kvadrātu metodes. Taisnes slīpums ir  $2H - 1$ .*



12. att.: Simulēts frakcionālais Gausa troksnis ar  $H = 0.6$  apjomā  $N = 1024$ . Līnijas slīpums  $2H - 1$

## 5. Ticamības intervāli parametram $H$ ar apakšizla-sēm

Izmantosim publikācijā [2] piedāvāto apakšizlašu metodi. Hursta parametra novērtējumu  $\hat{H}_n$  centrēto versiju, kas balstīta uz ilglaicīga Gausa stacionāra procesa ( $X_j; j \geq 1$ )  $n$  novērojumiem, apzīmēsim ar

$$T_n = \sqrt{\nu_{j_1(n)}(n)}(\hat{H}_n - H), \quad (5.1)$$

kur  $\nu_{j_1(n)}(n)$  apzīmē veivletu koeficientu skaitu līmenī  $j_1 = j_1(n)$ . Ar

$$Q_n(x) = P(T_n \leq x) \quad (5.2)$$

apzīmēsim sadalījuma funkciju. Pieņemam, ka

$$T_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(H)), \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

$T_n$  sadalījums  $Q_n(x)$  galīgiem  $n$  nav zināms. Tāpēc novērtēsim to ar sadalījumu  $\hat{Q}_n$ .

Pieņemsim, ka  $B_i = (X_i, \dots, X_{i+l-1})$ ,  $i = 1, \dots, N$  ir  $N = n - l - 1$  pārklājoši bloki garumā  $l$ , kur  $l = l_n$  ( $1 \leq l \leq n$ ). Pieņemsim, ka  $\hat{H}_{l,i}$  ir parametra  $H$  novērtējums, izmantojot datus blokā  $B_i$ . Novērojam, ka bloki  $B_i$  pārklājas un tiem ir blakus stāvoši sākuma punkti.

Apakšizlases kopija  $T_n$ , kas bāzeta uz  $B_i$ , ir uzdota kā

$$\hat{T}_{l,i} = \sqrt{\nu_{j_1(l)}(l)}(\hat{H}_{l,i} - \hat{H}_n). \quad (5.3)$$

Tad sadalījuma funkcija (5.2), kas bāzeta uz apakšizlasēm  $B_i$ , ir vienkārši *empīriskā sadalījuma funkcija* (EDF)

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{(\hat{T}_{l,i} \leq x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

**Pieņēmums 1.** Pieņem, ka

(a) procesam ( $X_j : j \geq 1$ ) ir tāda spektrālā blīvuma funkcija  $f$ , ka  $\tilde{\log f}$  ir spektrālā blīvuma logaritma saistītā funkcija, kas nepārtraukta intervālā  $[-\pi, \pi]$ ;

(b)  $\psi_0$  ir  $m \geq 2$  zūdošie momenti ar

$$(1 + |t|)^r \{|\hat{\psi}_0(t)| + |\hat{\psi}'_0(t)| + |\hat{\psi}''_0(t)|\} \leq C_\psi \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kur  $r \geq 2$ ,  $C_\psi$  ir pozitīva konstante un  $\hat{\psi}_0(x) = \int \exp(-2i\pi tx)\psi_0(t)dt$  ir funkcijas  $\psi_0$  Furjē transformācija;

- (c)  $l^{-1} + n^{-1}l$  tiecas uz nulli,  $j_1(n)$  tiecas uz bezgalību un  $\nu_{j_1(n)}(n)/\nu_{j_1(l)}(l)$  tiecas uz nulli, ja  $n$  tiecas uz bezgalību.

**Apgalvojums 10.** Ja Pieņēmums 1 ir spēkā, tad

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{Q}_n(x) - Q_n(x)| \rightarrow^p 0 \quad \text{kad } n \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Pierādījumu skatīt [2].

**Apgalvojums 11.** Pieņemam, ka Pieņēmums 1 ir spēkā un kopas  $\hat{Q}_n^{-1}(u) = \inf\{x : \hat{Q}_n(x) \geq u\}$  un  $Q_n^{-1}(u) = \inf\{x : Q_n(x) \geq u\}$ . Tad

$$\hat{Q}_n^{-1}(u) - Q_n^{-1}(u) \rightarrow 0, \quad \text{kad } n \rightarrow \infty, \quad \forall u \in (0, 1). \quad (5.6)$$

Pieņēmums 1 un Apgalvojums 11 pasaka, ka sadalījuma funkcija  $Q_n$  var tikt tuvināta ar empīrisko sadalījuma funkciju  $\hat{Q}_n$ , kas iegūta ar apakšizlašu metodi. Kvantile  $Q_n^{-1}$  var tikt tuvināta ar izlases kvantili  $\hat{Q}_n^{-1}$ . Tad katram  $0 < \gamma < 1$  intervāls

$$\left( \hat{H}_n + \frac{1}{\sqrt{\nu_{j_1}(n)}} \hat{Q}_n^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \hat{H}_n + \frac{1}{\sqrt{\nu_{j_1}(n)}} \hat{Q}_n^{-1}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right) \quad (5.7)$$

ir Hursta parametra ticamības intervāls ar apakšizlašu metodi, kur  $1 - \gamma$  ir asimptotiskā pārklājuma precizitāte.

## 6. Atmiņas parametra veivletu pus-parametriskie novērtejumi

Aplūkosim divas metodes ilglaicīgas atmiņas parametra novērtējumam, ar ko iepazīstināja G.Fay, E.Moulines, F.Roueff un M.S. Taqqu (2009) [4] Pirmā metode ir *lokālās regresijas veivletu* metode jeb *LRW* un otra - *lokālais Whittle veivletu novērtējums* jeb *LWW*. Abas šīs metodes novērtē ilglaicīgās atmiņas parametru  $d$ . Ja mēs aplūkojam stacionāru procesu (*FGN*), tad  $d = H - 1/2$ , bet nestacionāriem procesiem (*FBM*)  $d = H + 1/2$ .

*LRW* un *LWW* novērtējumu iegūšanai, nepieciešami četri svarīgi nosacījumi:

- (1)  $\phi$  un  $\psi$  ir ierobežotas intervālā, integrējamas un

$$\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \text{ un } \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1.$$

- (2) Eksistē tāds  $\alpha > 1$ , ka  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|(1 + |\xi|)^{\alpha} < \infty$ .
- (3) Funkcijai  $\psi$  ir  $M$  zūdošie momenti, tas ir,  $\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$  visiem  $m = 0, \dots, M-1$ .
- (4) Funkcija  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \phi(* - k)$  ir polinoms ar kārtu  $m$  visiem  $m = 0, \dots, M-1$ .

Nosacījums (2) nodrošina to, ka Furjē transformācija  $\hat{\psi}$  dilst strauji uz nulli. Daudzbevries veivletiem  $\alpha > 1$ , izņemot Haar veivletu, kurš ir pārtraukts un kuram  $\alpha = 1$ .

Nosacījums (3) nodrošina, ka  $\psi$  oscilē un tā skalārais reizinājums ar nepārtraukta laika polinomiem līdz kārtai  $M - 1$  pazūd. Tas ir ekvivalents apgalvojumam, ka pirmie  $M - 1$  atvasinājumi funkcijai  $\hat{\psi}$  pazūd un tādēļ

$$|\hat{\psi}(\lambda)| = O(|\lambda|^M), \text{ kad } \lambda \rightarrow 0. \quad (6.1)$$

Tātad nosacījumi (3) un (4) nodrošina, ka veivletu transformācija diskretera laika polinomiem ar kārtu  $M - 1$  pazūd.

## 6.1. Lokālais regresijas veivletu (LRW) novērtējums parametram $d$

Jebkuriem veseliem  $n, j_0$  un  $j_1$  ( $j_0 \leq j_1$ ) veivletu koeficientu kopai  $n$  mērījumiem  $X_1, \dots, X_n$  skalu indeksi, kas atrodas starp  $j_0$  un  $j_1$ , ir

$$\ell_n(j_0, j_1) = \{(j, k) : j_0 \leq j \leq j_1, 0 \leq k < n_j\}, \quad (6.2)$$

kur  $n_j = \lfloor 2^{-j}(n - T + 1) - T + 1 \rfloor$  un  $T \geq 1$ .

Aplūkosim divus veselus  $L < U$ , kas apmierina vienādojumu:

$$0 \leq L < U \leq J_n = \max\{j : n_j \geq 1\}. \quad (6.3)$$

Indekss  $J_n$  ir maksimālā pieejamā skala izlasei apjomā  $n$ , un  $L$  un  $U$  apzīmē *apakšējo un augšējo skalu indeksus*, ko izmantojam novērtējumā.  $f^*$  ir īslaicīgās atmiņas blīvuma funkcija. Ilglaicīgās atmiņas procesiem

$$\sigma_j^2(d, f^*) = \text{Var}[W_{j,0}^X] \asymp \sigma^2 2^{2dj}, \text{ kad } j \rightarrow \infty,$$

un dispersijas novērtējums izskatās šādi:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} (W_{j,k}^X)^2. \quad (6.4)$$

Tad atmiņas parametra  $d$  lokālais regresijas veivletu (LWW) novērtējums ir definēts kā mazāko kvadrātu novērtējums "lineārajā regresijas modelī"

$$\log[\hat{\sigma}_j^2] = \log \sigma^2 + dj\{2 \log(2)\} + u_j, \quad (6.5)$$

kur  $u_j = \log[\hat{\sigma}_j^2 / \sigma^2 2^{2dj}]$ . Tad regresijas problēmu var atrisināt formā:

$$\hat{d}_n^{LRW}(L, U, w) = \sum_{j=L}^U w_{j-L} \log(\hat{\sigma}_j^2), \quad (6.6)$$

kur vektors  $w = [w_0, \dots, w_{U-L}]^T$  ir *svaru vektors*, kuram izpildās vienādojumi:

$$\sum_{j=0}^{U-L} w_j = 0 \quad \text{un} \quad 2 \log(2) \sum_{j=0}^{U-L} j w_j = 1. \quad (6.7)$$

Tādiem  $U - L = \ell \geq 1$  varam izvēlēties, piemēram,  $w$ , kurš atbilst svērtajam mazāko kvadrātu regresijas vektoram, kas definēts kā

$$w = DB(B^T DB)^{-1} b, \quad (6.8)$$

kur

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ (2 \log(2))^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \ell \end{bmatrix}^T \quad (6.9)$$

ir *dizaina matricas* un  $D$  ir patvaļīga pozitīvi definēta matrica.

## 6.2. Lokālais Whittle veivletu (LWW) novērtējums parametram

$d$

Pieņemsim, ka doti veivletu koeficienti  $W_{j,k}^X$ , kas aprēķināti no izlases  $X_1, \dots, X_n$ , un  $\ell = \ell_n(L, U)$ , kā definēts 6.2. No mērogošanas īpašības  $\sigma_j^2(d, f^*) \asymp \sigma^2 2^{2dj}$  un veivletu koeficientu vājās atkarības nosacījuma izriet *log-ticamības funkcija*

$$\hat{L}_\ell(\sigma^2, d) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(j,k) \in \ell} 2^{-2dj} (W_{j,k}^X)^2 + \frac{|\ell|}{2} \log(\sigma^2 2^{2\langle \ell \rangle d}), \quad (6.10)$$

kur  $|\ell|$  apzīmē galveno  $\ell$  skalu un  $\langle \ell \rangle$  ir vidējā skala,  $\langle \ell \rangle = |\ell|^{-1} \sum_{(j,k) \in \ell} j$ . Definējam

$$\hat{\sigma}_\ell^2(d) = \arg \min_{\sigma^2 > 0} \hat{L}_\ell(\sigma^2, d) = |\ell|^{-1} \sum_{(j,k) \in \ell} 2^{-2dj} (W_{j,k}^X)^2. \quad (6.11)$$

Tad *maksimālās ticamības novērtējums* atmiņas parametram ir vienāds ar log-ticamības minimum:

$$\hat{d}^{LWW}(L, U) = \arg \min_{d \in [\Delta_1, \Delta_2]} \hat{L}_{\ell_n(L, U)}(\hat{\sigma}_\ell^2(d), d) \quad (6.12)$$

$$= \arg \min_{d \in [\Delta_1, \Delta_2]} \tilde{L}_{\ell_n(L, U)}(d), \quad (6.13)$$

kur  $[\Delta_1, \Delta_2]$  pieļaujamo  $d$  vērtību intervāls un

$$\tilde{L}_\ell(d) = \log \left( \sum_{(j,k) \in \ell} 2^{2d(\langle \ell \rangle - 1)} (W_{j,k}^X)^2 \right). \quad (6.14)$$

Atšķirībā no LRW metodes, LWW metodei nav nepieciešams īpaši izvēlēties svarus. Taču svarīga abiem novērtējumiem ir skalu indeksu  $L$  un  $U$  izvēle.

## 7. Praktiskā daļa

### 7.1. Parametra $H$ novērtējumi programmā R

Mērķis ir salīdzināt četras Hursta parametra novērtēšanas metodes datorprogrammā R un noskaidrot, kura parametru  $H$  novērtē visprecīzāk. 1000 reizes simulēsim frakcionālā Gausa trokšņa procesu ar  $H = 0.6$  un  $H = 0.8$ , kā arī dažādos apjomos  $n = 2^7$  un  $n = 2^9$ . Izlases apjomī ir divnieka pakāpes veivletu metodes dēļ, kura to pieprasa.

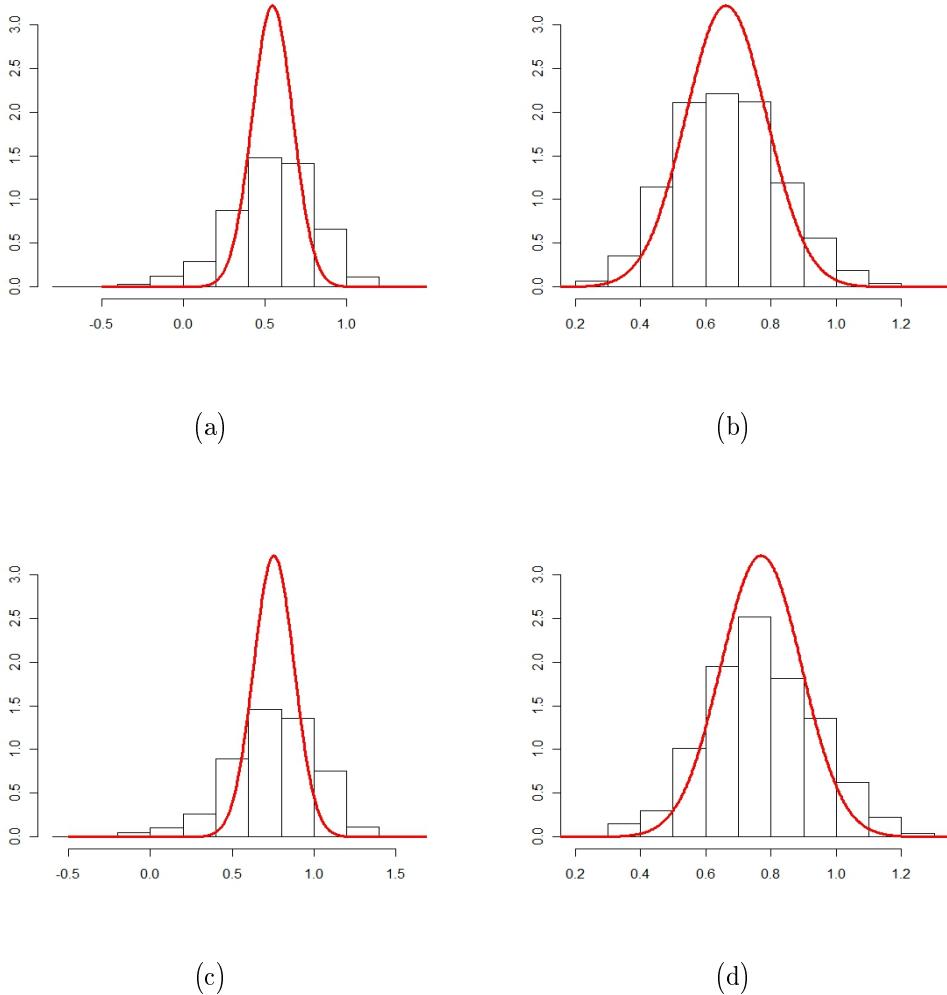
1. tabula: Vidējā vērtība un standartnovirze parametra  $H$  novērtējumam dažādām metodēm.  $n = 2^7$ .

Metode	$H = 0.6$		$H = 0.8$	
	Vid.vērt.	Stds	Vid.vērt.	Stds
Veivletu	0.546	0.260	0.755	0.263
R/S	0.663	0.164	0.770	0.165
Period.	0.643	0.360	0.915	0.363
Kop.Var.	0.452	0.236	0.588	0.229

Ticamības intervāliem  $L_j, j = 1, \dots, n$  aprēķinām vidējo vērtību  $\bar{L} = \sum_{j=1}^n L_j/n$  un rangu:  $\max_{1 \leq j \leq n} L_j - \min_{1 \leq j \leq n} L_j$ . [2]

2. tabula: Ticamības intervālu pārklājuma precizitātes ( $PP$ ), vidējā vērtība un rangs ticamības intervālu garumam.  $n = 2^7$ , bloka lielums  $l = 2^6$ ,  $\alpha = 0.95$ .

Metode	$H = 0.6$			$H = 0.8$		
	$PP$	vid.vērt.	rangs	$PP$	vid.vērt	rangs
Veivletu	0.996	1.483	1.911	0.995	1.495	1.931
R/S	0.988	0.587	0.724	0.988	0.598	0.726
Period.	0.819	1.396	3.204	0.786	1.370	3.444
Kop.Var.	0.815	0.806	1.285	0.611	0.769	1.571

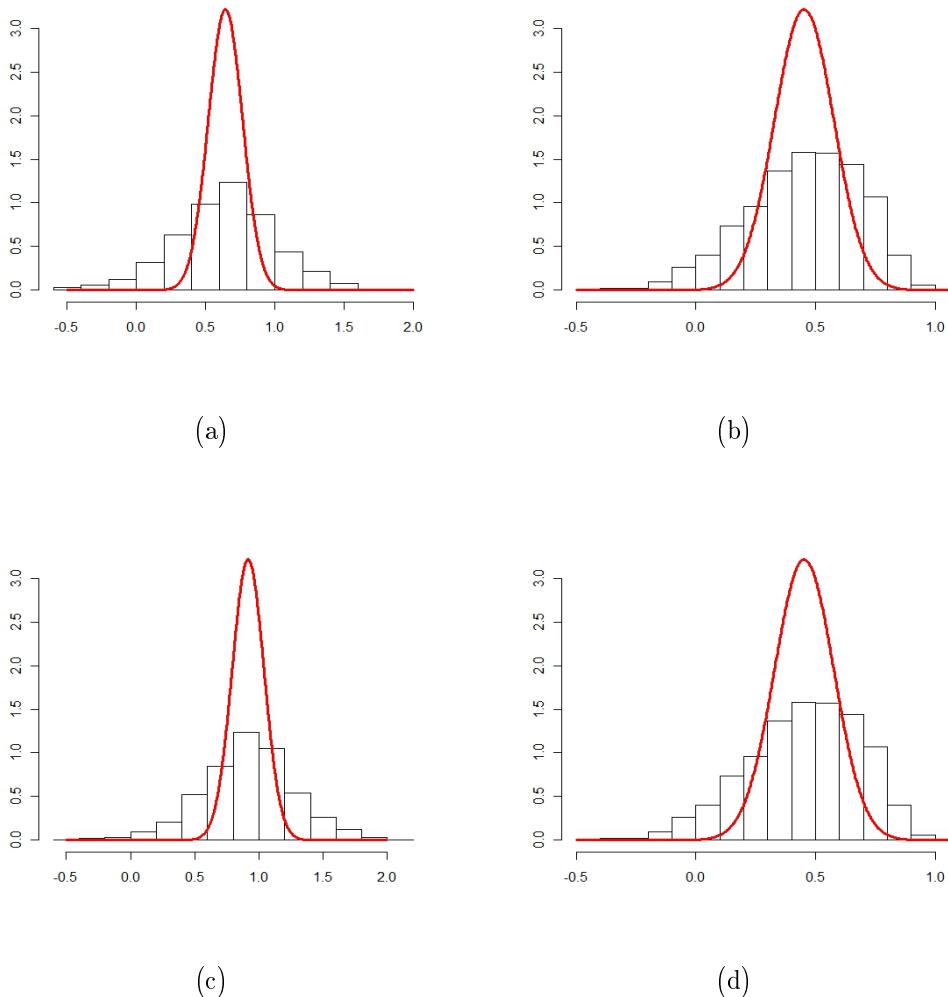


13. att.: Veivletu metodes novērtējumi: (a) parametram  $H = 0.6$ , (c)  $H = 0.8$  un  $R/S$  metodes novērtējumi: (b) parametram  $H = 0.6$ , (d)  $H = 0.8$  ar normālā sadalījuma līkni

13. attēlā ir histogrammas divām metodēm ar vislielākajām  $H$  novērtējuma ticamības intervālu pārklājuma precizitātem (veivletu un  $R/S$ ). No 1.tabulas secinām, ka parametram  $H = 0.6$  veivletu metode dod mazāku novērtējumu ( $H = 0.546$ ), bet  $R/S$  metode lielāku ( $H = 0.663$ ). Šī tendence vērojama arī histogrammās. Savukārt parametram  $H = 0.8$  abas metodes dod mazāku novērtējumu, nekā īstais, kas arī parādās histogrammās.

Salīdzinot ticamības intervālu vidējās vērtības un rangus, var novērot, ka  $R/S$  metodei ir ievērojami šaurāks ticamības intervāls un rangs, nekā veivletu metodei, kas varētu nozīmēt, ka tā ir precīzāka.

Gan 1., gan 2. tabulā var novērot, ka kopējās variācijas un periodogrammas metodes dod sliktus novērtējumus. Periodogrammas metode  $H$  novērtē virs īstās vērtības. Pārklājuma precizitātes ir ievērojami sliktākas, kā arī ticamības intervāla rangs ir pārāk plašs, salīdzinot ar tā vidējo vērtību. Kopējās variācijas metode dos viisslikātkos novērtējumus, kas ir krietni zem teorētiskās  $H$  vērtības. Par to var pārliecināties arī 14. attēlā.



14. att.: Periodogrammas metodes novērtējumi: (a) parametram  $H = 0.6$ , (c)  $H = 0.8$  un kopējās variācijas metodes novērtējumi: (b) parametram  $H = 0.6$ , (d)  $H = 0.8$  ar normālā sadalījuma līkni

Simulēsim frakcionālo Gausa troksni ar lielāku izlases apjomu ( $n = 2^9$ ) un tādām pašām  $H$  vērtībām 1000 reizes. Sagaidām, ka šim procesam būs labāki parametra  $H$  novērtējumi lielāka izlases apjoma dēļ. Kā arī aplūkosim, kā aplūkosim, kā mainīs ticamības intervāli ar apakšizlases metodi, mainot bloku izmēru. Nemsim 3 dažādus gadījumus:

$l = 2^6$ ,  $l = 2^7$  un  $l = 2^8$ . Sagaidām, ka palielinot bloka izmēru, uzlabosies ticamības intervāla pārklājuma precizitāte. Tas ir, veivletu un  $R/S$  metodei, kurai pārklājuma precizitāti bija virs 0.95, tā palēnām tuvosies šim skaitlim no augšas, bet periodogrammu un kopējās variācijas metodei tā tuvosies no apakšas.

3. tabula: Vidējā vērtība un standartnovirze parametra  $H$  novērtējumam dažādām metodēm.  $n = 2^9$ .

Metode	$H = 0.6$		$H = 0.8$	
	Vid.vērt.	Stds	Vid.vērt.	Stds
Veivletu	0.586	0.096	0.771	0.110
R/S	0.644	0.099	0.769	0.101
Period.	0.618	0.116	0.846	0.115
Kop.Var.	0.512	0.132	0.659	0.132

Kā var redzēt 3. tabulā, izlases apjoma palielināšanās visām četrām metodēm deva uzlabojumus. Var novērot, ka ir saglabājušās tendences - periodogrammu metode joprojām novērtē  $H$  virs īstās vērtības. Veivletu un kopējās variācijas metodes novērtē  $H$  zem īstās vērtības, bet  $R/S$  metode  $H = 0.6$  novērtē no augšas, bet  $H = 0.8$  no apakšas.

Tagad aplūkosim ticamības intervālu pārklājuma precizitātes ar apakšilašu metodi un dažādiem bloku izmēriem.

4. tabula: Ticamības intervālu pārklājuma precizitātes ( $PP$ ), vidējā vērtība un rangs ticamības intervālu garumam.  $n = 2^9$ , bloka lielums  $l = 2^6$ ,  $\alpha = 0.95$ .

Metode	$H = 0.6$			$H = 0.8$		
	$PP$	vid.vērt.	rangs	$PP$	vid.vērt	rangs
Veivletu	1	0.795	0.562	1	0.797	0.505
R/S	0.932	0.316	0.135	0.963	0.319	0.172
Period.	0.999	0.977	0.968	0.996	0.978	1.058
Kop.Var.	0.728	0.471	0.315	0.402	0.458	0.357

5. tabula: Ticamības intervālu pārklājuma precizitātes ( $PP$ ), vidējā vērtība un rangs ticamības intervālu garumam.  $n = 2^9$ , bloka lielums  $l = 2^7$ ,  $\alpha = 0.95$ .

Metode	$H = 0.6$			$H = 0.8$		
	$PP$	vid.vērt.	rangs	$PP$	vid.vērt	rangs
Veivletu	0.988	0.497	0.469	0.988	0.498	0.443
R/S	0.947	0.305	0.221	0.984	0.311	0.204
Period.	0.953	0.594	0.915	0.926	0.596	0.851
Kop.Var.	0.724	0.401	0.406	0.415	0.394	0.425

6. tabula: Ticamības intervālu pārklājuma precizitātes ( $PP$ ), vidējā vērtība un rangs ticamības intervālu garumam.  $n = 2^9$ , bloka lielums  $l = 2^8$ ,  $\alpha = 0.95$ .

Metode	$H = 0.6$			$H = 0.8$		
	$PP$	vid.vērt.	rangs	$PP$	vid.vērt	rangs
Veivletu	0.936	0.365	0.454	0.934	0.364	0.477
R/S	0.968	0.307	0.347	0.985	0.314	0.354
Period.	0.79	0.346	0.661	0.748	0.344	0.701
Kop.Var.	0.649	0.331	0.478	0.423	0.319	0.590

Redzam, ka veivletu metodei bloku izmēru palielināšanās no  $l = 2^6$  uz  $l = 2^8$  veic uzlabojumus un ticamības intervālu pārklājuma precizitātes ir tuvākas 0.95.  $R/S$  un periodogrammas metodes savukārt vislabākos rezultātus dod pie bloka izmēra  $l = 2^7$ . Savukārt kopejās variācijas metode joprojām dod sliktus rezultātus un tās dinamika ir tieši pretēja - palielinoties bloku izmēram, samazinās pārklājuma precizitātes. Tas nozīmē, ka bloka izmēra izvēle stipri ietekmē rezultātus. Nepieciešams kritērijs, pēc kāda izvēlēties  $l$ .

## 7.2. Parametra $d$ novērtējumi programmā MATLAB

Izmantosim iegūto datorprogrammas *MATLAB* kodu, kas iegūts no publikācijas [4] viena no autoriem M.S.Taqqu, lai novērtētu ilglaicīgās atmiņas parametru  $d$ . Izmantosim jau iepriekš programmā *R* simulēto *FGN* procesu apjomā  $n = 2^7$ , kā arī apskatīsim, kā tiek novērtēts parametrs  $d$  nestacionāram procesam *FBM* apjomā  $n = 2^7$ . Izmantosim divas parametra novērtēšanas metodes *LRW* un *LWW*, kā arī izvēlēsimies trīs veivletus ar dažādiem zūdošajiem momentiem - *Haar* ( $M = 1$ ), *Daubechies2* ( $M = 2$ ) un *Daubechies4* ( $M = 4$ ). G.Fay, E.Moulines, F.Roueff un M.S. Taqqu (2009) [4] secināja, ka abām metodēm vislabāk ilglaicīgās atmiņas parametru novērtē *Daubechies2* veivlets.

Konstruēsim arī ticamības intervālus parametra  $d$  novērtējumiem, kas balstās uz  $d$  novērtējumu asimptotiski normālo sadalījumu, un kuri aprakstīti publikācijā [4].

7. tabula: *FGN* ar  $H = 0.6$  ( $d = 0.1$ ) apjomā  $n = 2^7$  novērtējuma vidējā vērtība un ticamības intervāla pārklājuma precizitāte.

Veivlets	$d = 0.1$			
	<i>LRW</i>		<i>LWW</i>	
	Vid.vērt.	<i>PP</i>	Vid.vērt.	<i>PP</i>
Haar	0.016	0.840	0.084	0.925
Daubechies 2	0.023	0.828	0.063	0.849
Daubechies 4	-0.051	0.702	-0.250	0.678

8. tabula: *FGN* ar  $H = 0.8$  ( $d = 0.3$ ) apjomā  $n = 2^7$  novērtējuma vidējā vērtība un ticamības intervāla pārklājuma precizitāte.

Veivlets	$d = 0.3$			
	<i>LRW</i>		<i>LWW</i>	
	Vid.vērt.	<i>PP</i>	Vid.vērt.	<i>PP</i>
Haar	0.216	0.840	0.281	0.938
Daubechies 2	0.230	0.818	0.266	0.845
Daubechies 4	0.167	0.703	0.167	0.703

Aplūkojot 7. un 8. tabulu, var secināt, ka *FGN* procesam kopumā labākus  $d$  novērtējumus dod *LWW* metode. Izņemot gadījumu, kad  $H = 0.6$  un tiek pielietots *Daubechies4* veivlets. Šis veivlets dod visslikākos rezultātus, kas vērojams arī viszemākajās pārklājuma precizitātēs. Tas varētu nozīmet to, ka nav nepieciešams izvēlēties veivletu ar tik lielu zūdošo momentu skaitu ( $M = 4$ ), jo *FGN* procesu iespējams labāk aproksimēt ar polinomu, kura kārta ir mazāka par  $M - 1$ . Gadījumā, kad  $H = 0.6$ , vislabākos rezultātus dod *Haar* veivlets, bet, kad  $H = 0.8$ , tad *LWW* gadījumā *Haar*, bet *LRW - Daubechies2*.

9. tabula: *FBM* ar  $H = 0.6$  ( $d = 1.1$ ) apjomā  $n = 2^7$  novērtējuma vidējā vērtība un tīcamības intervāla pārklājuma precizitāte.

Veivlets	$d = 1.1$			
	<i>LRW</i>		<i>LWW</i>	
	Vid.vērt	<i>PP</i>	Vid.vērt.	<i>PP</i>
Haar	0.9751	0.802	1.037	0.955
Daubechies 2	0.961	0.792	1.0161	0.8360
Daubechies 4	0.8513	0.665	0.7079	0.672

10. tabula: *FBM* ar  $H = 0.8$  ( $d = 1.3$ ) apjomā  $n = 2^7$  novērtējuma vidējā vērtība un tīcamības intervāla pārklājuma precizitāte.

Veivlets	$d = 1.3$			
	<i>LRW</i>		<i>LWW</i>	
	Vid.vērt	<i>PP</i>	Vid.vērt.	<i>PP</i>
Haar	1.1663	0.801	1.2149	0.957
Daubechies 2	1.1438	0.777	1.2078	0.862
Daubechies 4	1.021	0.650	0.9003	0.662

9. un 10. tabulā iegūtie rezultāti ir ļoti līdzīgi. Vislabākos rezulātus dod *Haar* veivlets un *LWW* metode.

Publikācijā [4] *Daubechies2* veivlets deva vislabākos rezultātus, taču tur tika simulēts ilglaicīgās atmiņas process no *ARFIMA* klases. Manā gadījumā, kad simulēju frakcio-

nālo Brauna kustību un frakcionālo Gausa troksni, vislabākie rezultāti kopumā ir *Haar* veivletam, taču arī *Daubechies2* ir diezgan tuvi rezultāti.

# Nobeigums

Darbā aplūkots ilglaicīgās atmiņas process: frakcionālā Brauna kustība (*FBM*) un tā pieaugumu process: frakcionālais Gausa troksnis (*FGN*) ar dažādām ilglaicīgās atmiņas parametra vērtībām ( $H = 0.6$ ,  $H = 0.8$ ). Pārsvarā aplūkots stacionārs process *FGN*. Viens no mērķiem bija noskaidrot, kura metode datorprogrammā *R* novērtē ilglaicīgās atmiņas parametru labāk - kopējās variācijas, periodogrammas, *R/S* vai veivletu metode. Secinājums ir tāds, ka labāk parametru  $H$  novērtē *R/S* un veivletu metodes.

Tika konstruēti Hursta parametra  $H$  ticamības intervāli ar apakšizlases metodi, kas balstās uz izlases sašķelšanu blokos. Tika aplūkoti *FGN* procesi dažādos apjomos ar dažādiem bloku lielumiem. Secinu, ka veivletu metodei ir vislabākā pārklājuma precizitāte, bet kopējās variācijas metodei - vissliktākā. Palielinot bloku izmēru no  $l = 2^6$  līdz  $l = 2^8$ , uzlabojas arī pārklājuma precizitātes, tas ir, veivletu gadījumā tās konverģē uz 0.95 no augšas. Taču tām metodēm, kas salīdzinoši slikti novērtē parametru  $H$  (periodogrammas un kopējās variācijas metode), bloku izmēra palielināšanās deva pretējus rezultātus.

Tika aplūkotas divas ilglaicīgās atmiņas parametra  $d$  veivletu novērtēšanas metodes datorprogrammā *MATLAB* - lokālā regresijas (*LRW*) un lokālā Whittle veivletu (*LWW*) metode. Tika dažādotas arī izvēlētās veivletu funkcijas - *Haar*, *Daubechies2* un *Daubechies4*. Secināts, ka *LWW* metode ilglaicīgās atmiņas parametru novērtē vislabāk. Vislabākā veivletu funkcija, kas aproksmē gan frakcionālā Gausa troksņa, gan frakcionālās Brauna kustības procesus, bija *Haar* veivlets, taču arī *Daubechies2* veivlets deva labus rezultātus.

Darbā aplūkotās ilglaicīgās atmiņas parametra novērtēšanas metodes ir tikai neliela daļa no mūsdienās pielietotajām metodēm. ļoti populāras ir Furjē bāzētās metodes. Tādēļ šo darbu turpmāk varētu attīstīt, aplūkojot Furjē metodes un salīdzinot ar veivletu metodēm. Tā kā pagaidām nav metodikas, kā pareizi izvēlēties parametra  $H$  novērtējuma ticamības intervāla bloka lielumu  $l$ , arī šo problemātiku varētu aplūkot darba turpinājumā.

# Pielikums 1

**Definīcija 15.** [3] Dotām divām funkcijām  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  **iekšējo reizinājumu** definē

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x) dx,$$

kur  $\bar{g}(x)$  ir  $g(x)$  kompleksi saistītā forma. Iekšējo reizinājumu var izmantot arī, lai izmērītu funkcijas "lielumu", definējot *normu*  $\|\bullet\|_2$  telpā  $L^2$ :

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle,$$

ar kuras palīdzību var arī noteikt distanci starp divām funkijām  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  kā  $\|f - g\|_2$ .

**Definīcija 16.** [3] Veivletu **ortonormālā bāze**:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x), \psi_{j',k'}(x) dx = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'},$$

kur  $\delta_{m,n} = 1$ , ja  $m = n$ , un  $\delta_{m,n} = 0$ , ja  $m \neq n$ .

# R programmas kods

```
library(wavelets)
library(wavethresh)
library(fArma)

##### simulē frakcionālo Brauna kustību
set.seed(1)
BM<-fbmSim(n = 1024, H = 0.5, method = c("wave"),
waveJ = 7,doplot = FALSE,fgn = FALSE)
#WN<-fgnSim(n = 1024, H = 0.5, method = c("beran"))
fBM<-fbmSim(n = 1024, H = 0.6, method = c(),doplot = FALSE,fgn = FALSE)
#fGN<-fgnSim(n = 1024, H = 0.8, method = c("beran"))

##### Lebūvētās H novērtēšanas metodes

### Aggregated variance method
aggvarFit(fBM, levels = 50, minnpts = 3, cut.off = 10^c(0.7, 2.5),doplot=TRUE)

### R/S tests
rsFit(fBM, levels = 50, minnpts = 3, cut.off = 10^c(0.7, 2.5),
description = NULL,title=NULL,doplot=TRUE)

## Periodogrammu metode ##laba JĀ
perFit(fGN, cut.off = 0.1, method = c("per"),doplot = TRUE)

## Waveletu metode
waveletFit(fBM, length = 1024, order = 2, octave = c(2, 8),doplot = TRUE)

##### SUBSAMPLING

set.seed(1)
```

```

pak<-11
n<-2^pak #izlases apjoms
pak_blok<-9
l<- 2^pak_blok # bloka izmērs
N<-n-l+1 #bloku skaits
H<- 0.6 #Hursta parametrs (vai arī 0.8)
j<-pak-1 # skalas līmenis izlasei
j_blok<-pak_blok-1 #skalas līmenis blokam
cover<-c()
int<-c()

for (k in 1:1000){
  fBM<-fgnSim(n,H, method = c("beran")) #simulē frakc.Gausa troksni
  y<-c(fBM)
  ### Aprēķina H_n novērtējumu no visas izlases
  H_nn<-waveletFit(fBM, length = n, order = 2, octave = c(2, 5),doplot = FALSE)
  H_n<-H_nn@hurst$H
  H_lii<-c()
  H_li<-c()
  vek<-c()

  for (i in 1:N)
  {
    H_lii<-waveletFit(y[i:(i+l-1)], length = l, order = 2, octave = c(2, 5),doplot = FALSE)
    H_li[i]<-H_lii@hurst$H
  }
  ywd<-wd(y,filter.number=1, family="DaubExPhase")
  accessD(ywd,level=j) #izdod veivletu koefic. j-tajā skalā
  koef_skaits<-length(accessD(ywd,level=j)) #koeficientu skaits j-tajā sk
  ywd<-wd(y[1:l],filter.number=1, family="DaubExPhase")
  accessD(ywd,level=j_blok) #izdod veivletu koefic. j-tajā skalā
  koef_skaits_blok<-length(accessD(ywd,level=j_blok))
}

```

```

T_li<-sqrt(koef_skaits_blok)*(H_li-H_n)
gamma<-0.05  ###ticamības līmenis

Q_n_1<-quantile(T_li, gamma/2, type=1)[[1]]
Q_n_2<-quantile(T_li, (1-gamma/2), type=1)[[1]]

### subsampling ticamības intervāls
kreisais<-H_n+(1/(sqrt(koef_skaits)))*Q_n_1
labais<-H_n+(1/(sqrt(koef_skaits)))*Q_n_2
cover[k]<-(kreisais-H)*(labais-H)
int[k]<-labais-kreisais
}
cover
length(cover[cover<0])
prob<-length(cover[cover<0])/1000
prob ###coverage probabilities
mean(int)
max(int)-min(int)

```

# Izmantotā literatūra un avoti

- [1] T. Dieker. *Simulation of fractional Brownian motion.* University of Twente Department of Mathematical Sciences, 2004.
- [2] S. A. Stoev P.L. Conti, L. Giovanni and M. S. Taqqu. *Confidence intervals for the long memory parameter based on wavelets and resampling.* Statistica Sinica 18, 2008.
- [3] G.P.Nason. *Wavelet Methods in Statistics with R.* Springer, Science +Buisiness Media,LLC, 2008.
- [4] F. Roueff M. S. Taqqu G. Fay, E. Moulines. *Estimators of long-memory: Fourier versus wavelets.* Journal of Econometrics 151, 2009.
- [5] G. Oppenheim P. Doukhanand and M. S. Taqqu. *Theory and applications of long-range dependence.* Birkhauser, Boston, 2003.
- [6] H. E. Hurst. *Long-term storage capacity of reservoirs.* Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951.
- [7] A.Haar. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* Mathematische Annalen 69 no. 3, Germany, 1910.
- [8] D.R. Cox. *Long-range dependence: a review.* in Statistics: an appraisal, H.A. David and H.T. David, eds., Iowa State University Press, 1984.
- [9] J.Beran. *Statistics for Long - Memory Processes.* Chapman and Hall, New York, 1994.
- [10] <http://www.standardandpoors.com>.
- [11] R.H. Shumway D.S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications 2nd Edition.* 2006.

- [12] <http://pages.stern.nyu.edu/~churvich/TimeSeries/Handouts/fBm.pdf>.
- [13] D.L. Donoho I.M Johnstone. *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*. Journal of the American Statistical Association, 90:12001224, 1995.

Diplomdarbs "Ilglaicīgās atmiņas parametra novērtēšana ar veivletiem" izstrādāts LU Fizikas un Matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Ieva Dasmane

---

(paraksts)

(datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Jānis Valeinis

---

(paraksts)

(datums)

Recenzents:

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā

---

(datums)

---

(darbu pieņēma)

Diplomdarbs aizstāvēts valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

\_\_\_\_\_ prot. Nr. \_\_\_\_\_, vērtējums\_\_\_\_\_

(datums)

Komisijas sekretāre: asoc. prof. Dr.math. Inese Bula

\_\_\_\_\_

(paraksts)