

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE  
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**BRAUNA KUSTĪBA**

KURSA DARBS

Autors: **Ieva Dasmane**

Stud.apl. id06030

Darba vadītājs: doc. Dr.math. Jānis Valeinis

RĪGA 2010

# Saturs

<b>1. Brauna kustības definīcija un pirmās īpašības</b>	<b>5</b>
1.1. Paul Levy's Brauna kustības konstrukcija . . . . .	5
1.2. Brauna kustības nepārtrauktība . . . . .	6
1.3. Brauna kustības nediferencējamība . . . . .	8
1.4. Brauna kustības kovariācija . . . . .	10
<b>2. Spektrālā blīvuma funkcija</b>	<b>11</b>
<b>3. Periodogramma un Diskrētā Furjē Transformācija</b>	<b>11</b>
<b>4. Frakcionālā Brauna kustība un frakcionālais Gausa troksnis</b>	<b>13</b>
4.1. Definīcijas un īpašības . . . . .	13
4.2. Frakcionālās Brauna kustības spektrs . . . . .	14
<b>5. R/S statistika</b>	<b>15</b>
<b>6. Praktiskais pielietojums</b>	<b>17</b>

## Ievads

Darbā aplūkota standarta Brauna kustība, frakcionālā Brauna kustība un to rakstrojošie lielumi.

1785. gadā Jan Ingenhousz aprakstīja akmeņogļu daļiņu neregulāro kustību uz alkohola virsmas. Tomēr Brauna kustība tradicionāli tiek uzskatīta kā botāniķa Roberta Brauna atklājums 1827. gadā. Brauns ar mikroskopu pētīja puķes *Clarkia pulchella* ziedputekšņu daļiņas uzvedību ūdenī. Kad viņš atkārtoja eksperimentu ar neorganiskām vielām, viņš izslēdza domu, ka kustība ir saistīta ar dabiskiem procesiem, lai gan kustības izcelsme bija vēl jāizskaidro.

Pirmais cilvēks, kurš aprakstīja matemātikā Brauna kustību bija Thorvald N. Thiele 1880. gada rakstā par mazāko kvadrātu metodi. 1900. gadā viņam sekoja Louis Bachelier, kurš savā doktora darbā "Spekulāciju teorija" veica akciju un opciju tirgus stohastisko analīzi. Tomēr tie bija Alberts Einšteins (1905) un Marian Smoluchowski (1906), kas neatkarīgi atrisināja fiziķu problēmu un pierādīja atomu un molekulu eksistenci. Einšteins paredzēja, ka Brauna kustības daļiņa šķīdumā temperatūrā  $T$  ir aprakstīta ar difūzijas koeficientu  $D = k_B T / b$ , kur  $k_B$  ir Bolcmaņa konstante un  $b$  ir daļiņas lineārās berzes koeficients. Sākumā Einšteina formula tika apšaubīta un Svedberg 1906. un 1907. gadā, kā arī Henri 1908. gadā veica vairākus eksperimentus, kas deva rezultātus, ka daļiņas pārvietojumi ir vairākas reizes lielāki, nekā sanāca Einšteinam. Bet tomēr Einšteina formulu apstiprināja Chaidesaigues (1908) un Perrin (1909) veiktie eksperimenti. Einšteina teorijas atzīšana radīja karstuma kinētiskās teorijas progresu. Vēl vairāk - Einšteins parādīja, ka kustība ir paredzama tieši no termālā līdzsvara kinētiskā modeļa.

Brauna kustībai ir ļoti plašs pielietojums vairākās zinātnēs - fizikā, bioloģijā, ekonomikā. Viens no populārākajiem pielietojumiem ir akciju tirgus cenas modelēšana. Frakcionālajai Brauna kustībai ir plaši pielietojumi finansēs, fizikā, inženiertehiskajās komunikācijās un bioinženierijā. Piemēram, bioinženierijā frakcionālo Brauna kustību pielieto, lai modelētu plaušu, nieru un sirds rajona asins plūsmas sadalījumu.

Šī darba mērķis ir iepazīties ar Brauna kustību, tās īpašībām un metodēm, kā pārbaudīt, vai dotais process ir Brauna kustība. Darbā izmantošu Latvijas Universitātes fizikas maģistranta Mārtiņa Kozlovska eksperimentāli iegūtus bakteriofāga PF1 datus, kas iegūti ar ātrās videokameras metodi. Salīdzināšu tos ar simulēto Brauna kustību, un noskaidrošu, vai dotie fiziķa iegūtie dati ir Brauna kustība. Noteikšu arī daļiņas vidējo kvadrātisko pārvietojumu un salīdzināšu iegūtos rezultātus ar rezultātiem, kas tika iegūti fiziķa maģistra darbā.

Pirmajā nodaļā aprakstīts, kas ir Brauna kustība, tās galvenās īpašības. Otrajā nodaļā aprakstīta stacionāru procesu spektrālā blīvuma funkcija. Trešajā nodaļā aprakstīta periodogramma un Diskrētā Furjē transformācija. Ceturtajā nodaļā apskatīta fracionālā Brauna kustība un fracionālais Gausa troksnis, kā arī Hursta parametrs. Piektajā nodaļā aprakstīta R/S statistika. Sestā nodaļa ir praktiskais pielietojums, kurā pārbaudu, vai izpildās Brauna kustības īpašības, aplūkoju periodogrammas, spektrus un pielietoju R/S statistiku Hursta parametra novērtēšanai. Pielikumā ievietots R programmas kods.

# 1. Brauna kustības definīcija un pirmās īpašības

Šajā nodaļā apskatīsim viendimensionālo jeb lineāro Brauna kustību. Sāksim ar Paul Levy's Brauna kustības konstrukciju un apskatīsim divas pamatīpašības- nepārtrauktību un diferencējamību. Kā arī Brauna kustības kovariāciju un korelētas Brauna kustības.

## 1.1. Paul Levy's Brauna kustības konstrukcija

Brauna kustība ir cieši saistīta ar normālo sadalījumu. Atcerēsimies, ka gadījuma lielums  $X$  ir normāli sadalīts ar vidējo vērtību  $\mu$  un variāciju  $\sigma^2$ , ja

$$P\{X > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^\infty e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du,$$

visiem  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definīcija 1.** [1] Stohastisku procesu no reālām vērtībām  $\{B(t) : t \geq 0\}$  sauc par **(lineāru) Brauna kustību** ar sākumu punktā  $x \in \mathbb{R}$ , ja izpildās:

1.  $B(0) = x$ ,
2. procesam eksistē neatkarīgi pieaugumi, t.i., visiem  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  pieaugumi  $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$  ir neatkarīgi gadījuma lielumi,
3. visiem  $t \geq 0$  un  $h > 0$  pieaugumi  $B(t+h) - B(t)$  ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju  $h$ ,
4. funkcija  $t \mapsto B(t)$  nepārtraukta gandrīz droši.

Funkciju  $\{B(t) : t \geq 0\}$  sauc par **standarta Brauna kustību**, ja  $x = 0$ .

Par stohastiska procesa  $\{B(t) : t \geq 0\}$  *kritisko sadalījumu* sauc visu ierobežotas dimensijas gadījuma vektoru sadalījumu

$$(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n)), \text{ visiem } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n.$$

Lai aprakstītu šos kopējos sadalījumus, ir pietiekami aprakstīt  $B(0)$  kopējo sadalījumu un visus pieaugumus

$$(B(t_1) - B(0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})) \text{ visiem} \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n.$$

Tas ir tas, kas ir aprakstīts Brauna kustības definīcijā pirmajos trīs punktos, kuri apraksta Brauna kustības kritiskos sadalījumus. Tomēr pēdējais punkts (gandrīz droša nepārtrauktība) arī ir kritisks, jo tehniski kopa  $\{\omega \in \Omega : t \mapsto B(t, \omega) \text{ nepārtraukta}\}$  neatrodas  $\sigma$ -algebrā, kas ģenerēta no gadījuma vektoriem  $(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Piemērs 1.** Pieņemsim, ka  $B$  ir Brauna kustība un  $U$  ir neatkarīgs gadījuma lielums, kas vienmērīgi sadalīts kopā  $[0, 1]$ . Tad procesam  $\{\tilde{B}(t) : t \geq 0\}$ , kas definēts kā

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(t), & \text{ja } t \neq U, \\ 0, & \text{ja } t = U, \end{cases}$$

ir tādi paši kristiskie sadalījumi kā Brauna kustībai, bet tas ir pārtraukts, ja  $B(U) \neq 0$ , tas ir, ar varbūtību viens, un tādējādi šis process nav Brauna kustība.

## 1.2. Brauna kustības nepārtrauktība

Brauna kustības definīcija jau pieprasa, lai izlases funkcijas būtu nepārtrauktas gandrīz droši. Tas nozīmē, ka izlases funkcijas intervālā  $[0, 1]$  (vai kādā citā kompaktā intervālā) ir vienmērīgi nepārtrauktas, tas ir, eksistē tāda (gadījuma) funkcija  $\varphi$  ar  $\lim_{h \downarrow 0} \varphi(h) = 0$ , kas ir *nepārtrauktības modulis* funkcijai  $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , tāda, ka

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\varphi(h)} \leq 1. \quad (1)$$

Bet vai ir iespējams iegūt šādu robežu ar noteiktu funkciju  $\varphi$ , tas ir, vai Brauna kustībai eksistē tāds nepārtrauktības modulis, kas nav gadījuma lielums? Teroēma parāda, ka atbilde ir jā.

**Teorēma 1.** *Eksistē konstante  $C > 0$  tāda, ka gandrīz droši, visiem pietiekami maziem  $h > 0$  un visiem  $0 \leq t \leq 1 - h$ ,*

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C \sqrt{h \log(1/h)}.$$

**Pierādījums 1.** *Pierādījums seko no Levy konstrukcijas Brauna kustībai. Mēs reprezentējam Brauna kustību kā rindu*

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t),$$

kur katra  $F_n$  ir gabaliem nepārtraukta lineāra funkcija. Funkcijai  $F_n$  gandrīz visur eksistē atvasinājums, un pēc Borel-Cantelli lemmas [1]  $\|F_n\|_{\infty} < c\sqrt{n}2^{-n/2}$ , jebkuram  $c > \sqrt{2\log 2}$  eksistē (gadījuma)  $N \in \mathbb{N}$  tāds, ka visiem  $n > N$ ,

$$\|F'_n\|_{\infty} \leq \frac{2\|F_n\|_{\infty}}{2^{-n}} \leq 2c\sqrt{n}2^{n/2}.$$

Tagad katram  $t, t+h \in [0, 1]$ , izmantojot vidējās vērtības teorēmu,

$$|B(t+h) - B(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |F_n(t+h) - F_n(t)| \leq \sum_{n=0}^{\ell} h\|F'_n\|_{\infty} + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} 2\|F_n\|_{\infty}.$$

Tagad, izmantojot  $\|F_n\|_{\infty} < c\sqrt{n}2^{-n/2}$ , visiem  $\ell > N$  mēs iegūstam, ka tas ir ierobežots ar

$$h \sum_{n=0}^N \|F'_n\|_{\infty} + 2ch \sum_{n=N}^{\ell} \sqrt{n}2^{n/2} + 2c \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \sqrt{n}2^{-n/2}.$$

Mēs pieņemam, ka  $h$  ir gadījuma lielums un tik mazs, lai pirmais saskaitāmais būtu mazāks, nekā  $\sqrt{h \log(1/h)}$  un, ka  $\ell$ , kas definēts kā  $2^{-\ell} < h \leq 2^{-\ell+1}$ , pārsniedz  $N$ . Pie šādas  $\ell$  izvēles arī otrais un trešais saskaitāmais ir ierobežots ar konstantu skaitli  $\sqrt{h \log(1/h)}$ , jo abām summām lielākie saskaitāmie ir dominēti. Tā mēs iegūstam vienādojumu (1) ar noteiktu funkciju  $\varphi(h) = C\sqrt{h \log(1/h)}$ .

Šī augšējā robeža ir ļoti tuvu optimālajam atrisinājumam. Nākošajā teorēmā apskatītā apakšējā robeža apliecina, ka nepieciešams tikai noteikt precīzu konstantes vērtību.

**Teorēma 2.** *Katrai konstantei  $c < \sqrt{2}$ , gandrīz droši, katram  $\varepsilon > 0$  eksistē  $0 < h < \varepsilon$  un  $t \in [0, 1-h]$ , ka izpildās*

$$|B(t+h) - B(t)| \geq c\sqrt{h \log(1/h)}.$$

**Pierādījums 2.**

skatīt [1].

### 1.3. Brauna kustības nediferencējamība

**Apgalvojums 3.** Intervālā  $[a, b]$  Brauna kustība nav monotona gandrīz droši visiem  $0 < a < b < \infty$ .

**Pierādījums 3.** Sākamā fiksē intervālu  $[a, b]$ . Ja  $[a, b]$  ir monotonitātes intervāls, tas ir, ja  $B(s) \leq B(t)$  visiem  $a \leq s \leq t \leq b$ , tad mēs izvēlamies skaitļus  $a = a_1 \leq \dots \leq a_{n+1} = b$  un sadalām  $[a, b]$   $n$  apakšintervālos  $[a_i, a_{i+1}]$ . Visiem pieaugumiem  $B(a_i) - B(a_{i+1})$  ir vienādas zīmes. Tā kā pieaugumi ir neatkarīgi, tad varbūtība intervāla monotonitātei ir  $2 \cdot 2^{-n}$ , un, ņemot  $n \rightarrow \infty$ , varbūtība, ka intervāls  $[a, b]$  ir monotonitātes intervāls, ir 0. Tātad nav tāda monotonitātes intervāla ar racionāliem galapunktiem.

Lai runātu par Brauna kustības diferencējamību, mēs izmantosim *laika - inversijas* triku, lai sasaistītu diferencējaību laikā  $t = 0$  ar ilgtermiņa īpašību. Šī īpašība ir saistīta ar Lielo skaitļu likumu:

Gandrīz droši

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0.$$

Šis likums apgalvo, ka Brauna kustība aug lēnāk, nekā lineāri. Savukārt nākošais apgalvojums parāda, ka *limsup* pieaugums  $B(t)$  ir ātrāks, nekā  $\sqrt{t}$ .

**Apgalvojums 4.** Gandrīz droši

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ un } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty. \quad (2)$$

Pierādījumam izmantosim *Hewitt-Savage 0-1 likumu* apmaināmiem notikumiem.

**Definīcija 2.** Pieņemsim, ka  $X_1, X_2, \dots$  ir gadījuma lielumu virkne varbūtību telpā  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , un kopa  $A$  sastāv no virknēm

$$\{X_1, X_2, \dots \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Notikumu  $\{X_1, X_2, \dots \in A\}$  sauc par **apmaināmu**, ja

$$\{X_1, X_2, \dots \in A\} \subset \{X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}, \dots \in A\}$$

visām galīgām permutācijām  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Šeit ar galīgām permutācijām saprotam, ka  $\sigma$  ir bijekcija ar  $\sigma_n = n$  visiem pietiekami lieliem  $n$ .

**Lemma 1.** (*Hewitt-Savage 0-1 likums*). Ja  $A$  ir apmaināms notikums neatkarīgai, identiski sadalītai virknei, tad  $\mathbb{P}(A)$  ir 0 vai 1.

**Pierādījums 4.** *Pēc Fatou's lemmas,*

$$\mathbb{P}\{B(n) > c\sqrt{n} \text{ bezgalīgi bieži}\} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{B(n) > c\sqrt{n}\}.$$

*Pēc mērojamības īpašības,  $\limsup$  izteiksme ir vienāda ar  $\mathbb{P}\{B(1) > c\}$ , kas ir pozitīvs skaitlis. Pieņemsim, ka  $X_n = B(n) - B(n-1)$ , un atzīmēsim, ka*

$$\{B(n) > c\sqrt{n} \text{ bezgalīgi bieži}\} = \left\{ \sum_{j=1}^n X_j > c\sqrt{n} \text{ bezgalīgi bieži} \right\}$$

*ir apmaināms notikums. Tādējādi Hewitt-Savage 0-1 likums parāda, ka ar varbūtību viens,  $B(n) > c\sqrt{n}$  bezgalīgi bieži. Paņemot šķēlumu visiem pozitīvajiem, veselajiem  $c$  iegūstam pirmo apgalvojuma daļu, un otro daļu pierāda analogi.*

Funkcijai  $f$  mēs definēsim **augšējo un apakšējo labo atvasinājumu**

$$D^*f(t) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

un

$$D_*f(t) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

**Teorēma 5.** (*Laika inversija*). Pieņemsim, ka  $\{B(t) : t \geq 0\}$  ir standarta Brauna kustība. Tad process  $\{X(t) : t \geq 0\}$ , kas definēts kā

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{kad } t = 0, \\ tB(1/t), & \text{kad } t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

*arī ir standarta Brauna kustība.*

**Pierādījums 5.** *Skatīt [1].*

Tagad parādīsim, ka katram fiksētam  $t$  Brauna kustība nav diferencējama laikā momentā  $t$  gandrīz droši. Tam mēs izmantosim (2) un laika inversiju.

**Teorēma 6.** *Fiksējam  $t \geq 0$ . Tad gandrīz droši Brauna kustība nav diferencējama laikā  $t$ . Vēl vairāk,  $D^*B(t) = +\infty$  un  $D_*B(t) = -\infty$ .*

**Pierādījums 6.** Uzdotajai standarta Brauna kustībai  $B$  mēs konstruējam Brauna kustību  $X$ , izmantojot laika inversiju (3). Tad

$$D^*X(0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(\frac{1}{n}) - X(0)}{\frac{1}{n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}X(\frac{1}{n}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}},$$

ir bezgalīgs pēc (2). Līdzīgi  $D_*X(0) = -\infty$  parādot, ka  $X$  nav diferencējama punktā 0. Tagad pieņemsim, ka  $t > 0$  ir patvaļīgs un  $\{B(t) : t \geq 0\}$  ir Brauna kustība. Tad  $X(s) = B(t+s) - B(t)$  definē standarta Brauna kustību un  $X$  diferencējamība punktā 0 ir vienāda ar  $B$  diferencējamību laikā  $t$ .

## 1.4. Brauna kustības kovariācija

Aplūkosim kovariāciju Brauna kustībai laika momentos  $s$  un  $t$ , kur  $s < t$ .

$$\begin{aligned} Cov[B(s), B(t)] &= E[\{B(s) - E[B(s)]\}\{B(t) - E[B(t)]\}] = \\ &E[B(s)B(t) - B(s)E\{B(t)\} - E\{B(s)\}B(t) + E\{B(s)\}E\{B(t)\}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Pēc standarta Brauna kustības īpašībām,  $E\{B(s)\} = 0$  un  $E\{B(t)\} = 0$ . Tad vienādojumu (4) var pārrakstīt kā

$$Cov[B(s), B(t)] = E\{B(s)B(t)\}$$

Ievērojam, ka laika intervāli  $[0, s]$  un  $[0, t]$  pārklājas. Izsakam  $B(t)$  kā summu no neatkarīgiem gadījuma lielumiem  $B(s)$  un pieauguma  $\{B(t) - B(s)\}$ ,  $B(t) = B(s) + \{B(t) - B(s)\}$ . Tad

$$E[B(s)B(t)] = E[B(s)^2 + B(s)\{B(t) - B(s)\}] = E[B(s)^2] + E[B(s)\{B(t) - B(s)\}].$$

Neatkarības dēļ otro saskaitāmo var uzrakstīt kā matemātisko cerību reizinājumu

$$E[B(s)B(t)] = E[B(s)^2] + E[B(s)]E[B(t) - B(s)] = s + 0 \cdot 0 = s.$$

Tā kā  $s < t$ , tad  $\min\{s, t\} = s$ . Tātad jebkuriem  $s$  un  $t$

$$Cov[B(s), B(t)] = \min\{s, t\}.$$

Ja laika intervāli  $[t_1, t_2]$  un  $[t_3, t_4]$  nepārklājas, tad pieaugumi  $\Delta B(t_1) = B(t_2) - B(t_1)$  un  $\Delta B(t_3) = B(t_4) - B(t_3)$  ir neatkarīgi. Tāpēc

$$E[\{B(t_2) - B(t_1)\}\{B(t_4) - B(t_3)\}] = E[B(t_2) - B(t_1)]E[B(t_4) - B(t_3)] = 0 \cdot 0 = 0$$

Turpretim

$$E[B(t_1)B(t_3)] = t_1 \neq E[B(t_1)]E[B(t_3)].$$

## 2. Spektrālā blīvuma funkcija

[4] Ja  $\gamma(h)$  ir stacionāra procesa  $\{x_t\}$  *autokovariāciju funkcija* un tā apmierina nevienādību

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty, \quad (5)$$

tad

$$\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} f(\omega) d\omega, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

un procesa  $\{x_t\}$  *spektrālā blīvuma funkcija* ir

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \omega h}, \quad -1/2 \leq \omega \leq 1/2. \quad (7)$$

Spektrālā blīvuma funkcija ir analoga sadalījuma blīvuma funkcijai. Tas, ka  $\gamma(h) \geq 0$  garantē, ka

(1)  $f(\omega) \geq 0$ , visiem  $\omega$ ,

(2)  $f(\omega) = f(-\omega)$ ,

(3)  $f(\omega + 1) = f(\omega)$ .

Pēdējā īpašība norāda, ka spektrālā blīvuma funkcija ir pāra funkcija ar periodu 1. Kad izpildās (5), autokovariāciju funkcija  $\gamma(h)$  un spektrālā blīvuma funkcija  $f(\omega)$  satur vienu un to pašu informāciju, taču tā ir izteikta dažādos veidos. Autokovariāciju funkcija informāciju par procesu  $\{x_t\}$  izsaka, izmantojot lagus, bet spektrālā blīvuma funkcija - izmantojot ciklus. Pārsvārā izmantojam frekvences  $\omega$ , kas apraksta ciklus laika vienībā, taču dažkārt frekvenci izsaka kā  $\lambda = 2\pi\omega$ , kas izsaka radiānus laika vienībā.

Autokovariāciju funkcija (6) un spektrālā blīvuma funkcija (7) ir *Furjē transformāciju pāris*.

## 3. Periodogramma un Diskrētā Furjē Transformācija

**Definīcija 3.** [4] Ja doti dati  $x_1, \dots, x_n$ , tad par **diskrēto Furjē transformāciju (DFT)** sauc

$$d(\omega_j) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n x_t e^{-2\pi i \omega_j t}, \quad (8)$$

kad  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , kur frekvences  $\omega_j = j/n$  sauc par **Furjē** jeb **fundamentālajām frekvencēm**.

Dažkārt ir noderīgi izmantot inverso DFT:

$$x_t = n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} d(\omega_j) e^{2\pi i \omega_j t},$$

kur  $t = 1, \dots, n$ .

Tagad definēsim periodogrammu, izmantotjot DFT.

**Definīcija 4.** Ja doti dati  $x_1, \dots, x_n$ , tad par **periodogrammu** sauc

$$I(\omega_j) = |d(\omega_j)|^2, \quad (9)$$

kad  $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Jāpiezīmē, ka  $I(0) = n\bar{x}$ , kur  $\bar{x}$  ir izlases vidējā vērtība. Ja  $\sum_{t=1}^n \exp(-2\pi i \omega_j t) = 0$ , kad  $j \neq 0$ , varam uzrakstīt DFT kā

$$d(\omega_j) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x}) e^{-2\pi i \omega_j t},$$

kad  $j \neq 0$ . Tad, kad  $j \neq 0$

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= |d(\omega_j)|^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (x_t - \bar{x})(x_s - \bar{x}) e^{-2\pi i \omega_j (t-s)} = \\ &= n^{-1} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) e^{-2\pi i \omega_j h} = \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \gamma(\hat{h}) e^{-2\pi i \omega_j h}, \quad (10) \end{aligned}$$

kur  $\gamma(\hat{h})$  ir izlases autokovariāciju funkcija:

$$\gamma(\hat{h}) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-h} (x_{t+h} - \bar{x})(x_t - \bar{x}).$$

## 4. Frakcionālā Brauna kustība un frakcionālais Gausa troksnis

### 4.1. Definīcijas un īpašības

**Definīcija 5.** [5] Tādu Gausa procesu  $B_H = \{B_H(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$  ar  $0 < H < 1$  sauc par **frakcionālo Brauna kustību (fBm)**, ja izpildās šādas īpašības:

- $B_H(t)$  ir stacionāri pieaugumi;
- $B_H(0) = 0$  un  $E(B_H(t)) = 0$  visiem  $t \geq 0$ ;
- $E(B_H)^2(t) = t^{2H}$  visiem  $t \geq 0$ ;
- $B_H(t)$  ir Gausa sadalījums visiem  $t > 0$ .

**H** ir fBm **Hursta parametrs**. Vienmēr pieņemsim, ka apskatām nepārtrauktas trajektorijas  $B_H(t)$ . No pirmajām trīs fBm īpašībām seko, ka kovariāciju funkcija ir

$$\gamma(s, t) = E(B_H(s)B_H(t)) = \frac{1}{2}\{t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H}\} \quad (11)$$

visiem  $0 < s < t$ . Tā kā Gausa procesiem vidējā vērtība un kovariāciju struktūra nosaka galīgdimensionālo sadalījumu, tāpēc, no (11) mēs secinām, ka procesam  $\{B_H(at) : 0 < t < \infty\}$  un  $\{a^H B_H(t) : 0 < t < \infty\}$  ir vienādi galīgdimensionālie sadalījumi. Tātad frakcionālā Brauna kustība ar Hursta parametru  $H$  ir *sev līdzīga* ar Hursta parametru  $H$ . Frakcionālā Brauna kustība ir vienīgais Gausa process ar stacionāriem pieaugumiem, kurš ir sev līdzīgs.

**Definīcija 6.** Pieaugumu procesu  $X = \{X_k : k = 0, 1, \dots\}$  sauc par **frakcionālo Gausa troksni**, ja

$$X_k = B_H(k + 1) - B_H(k).$$

Frakcionālais Gausa troksnis ir frakcionālās Brauna kustības pieaugumi. Procesam  $X_k$  ir standartnormālais sadalījums visiem  $k$ , bet kopumā nepastāv neatkarība, jo procesa autokovariāciju funkcija  $\gamma(k)$  ir

$$\gamma(k) = \frac{1}{2}[|k - 1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k + 1|^{2H}] \quad (12)$$

visiem  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Ja  $H = 1/2$ , tad kovariācijas ir 0 (izņemot gadījumu, kad  $k = 0$ ). Tā ir standarta Brauna kustība, kuras pieaugumu ir neatkarīgi;
- Ja  $H < 1/2$ , tad kovariācijas ir negatīvas;
- Ja  $H > 1/2$ , tad kovariācijas ir pozitīvas.

## 4.2. Frakcionālās Brauna kustības spektrs

[3] Tā kā fBm ar  $0 < H < 1$  nav stacionāra, strikti runājot, procesam  $B_H(t)$  nav spektrālā blīvuma. Tomēr, ja mēs definējam *spektrālo blīvumu* kā periodogrammas sagaidāmas vērtības robežu (novērojumu intervāls tiecas uz bezgalību), mēs iegūstam *spektrālo blīvumu*

$$f_H(\omega) \propto |\omega|^{-2(H+1/2)} \text{ kad } \omega \rightarrow 0. \quad (13)$$

Tāpat, ja mēs definējam *kovariāciju funkciju*  $C(\tau)$  kā izlases kovariācijas sagaidāmās vērtības robežu, iegūstam

$$C(\tau) \propto \tau^{2H} \text{ kad } \tau \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Frakcionālais Gausa trokšņa process (kas ir stacionārs) ir iegūts, ņemot atvasinājumu no fBm, un tāpēc var tikt uztverts kā vēl viena fBm ar parametru  $H$ , kas samazināts par 1. Mēs varam intergēt un diferencēt, cik daudz reizes vēlamies. Šādā veidā mēs varam definēt fBm  $B_H(t)$  jebkuram reālam  $H$ . Frakcionālais Gausa troksnis ir fBm process ar  $H \leq 0$ . Ja mēs diferencējam  $B_{1/2}(t)$ , kas ir standarta Brauna kustība, tad iegūstam Baltā trokšņa procesu  $B_{-1/2}(t)$ . Tātad Baltajam troksim atbilst  $H = -1/2$ .

Katram  $d \in (-1/2, 1/2)$ , ja mēs definējam fBm ar  $H = d - 1/2$ , tad diskrēts process  $\{B_H(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  ir *ilglaicīgās atmiņas process* ar atmiņas parametru  $d$ . Tad formulas (13) un (14) reducējas uz  $f(\omega) \propto |\omega|^{-2d}$ , kad  $\omega \rightarrow 0$  un  $c^r \propto r^{2d-1}$ , kad  $r \rightarrow \infty$ .

Trīs svarīgi specgadījumi:

Process	$H$	$d$	Spektrālais blīvums
Standarta Brauna kustība	1/2	1	$\propto  \omega ^{-2}$
Baltais troksnis	-1/2	0	konstants
"1/f troksnis"	0	1/2	$\propto 1/ \omega $

1.tabula

## 5. R/S statistika

[6] Hidrologs Hursts (1951)  $R/S$  statistiku apraksta, vadoties pēc *Nīlas upes* problēmas. Viņš vēlējās normalizēt Nīlas upes plūsmu. Tiek pieņemts, ka apskatāmais laika intervāls ir diskrēts un nav nekādu ūdenstīlpnes krātuves zudumu (iztavikošana, nolpūde utt.). Mēs vēlamies sasniegt ideālo upes tilpumu. Citiem vārdiem sakot, sasniegt, ka ūdens izplūde ir vienmērīga un ka laikā  $t + k$  ūdens krātuve ir tik pat pilna kā laikā  $t$ , un ka ūdenstīlpne nekad nepārplūst.

Ar  $X_i$  apzīmēsim ūdens ieplūdi laikā  $i$ , un  $Y_j = \sum_{i=1}^j X_i$  ir kopējā ūdens ieplūde līdz laika brīdim  $j$ . Tad ideālais ūdens tilpums tiek aprakstīts kā

$$R(t, k) = \max_{0 \leq i \leq k} [Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+k} - Y_t)] - \min_{0 \leq i \leq k} [Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+k} - Y_t)] \quad (15)$$

Standartizēts  $R(t, k)$  ir  $S(t, k)$ , kas izskatās šādi:

$$S(t, k) = \sqrt{k^{-1} \sum_{i=t+1}^{t+k} (X_i - \bar{X}_{t,k})^2}, \quad (16)$$

kur  $\bar{X}_{t,k} = k^{-1} \sum_{i=t+1}^{t+k} X_i$ . Attiecību

$$R/S = \frac{R(t, k)}{S(t, k)} \quad (17)$$

sauc par  $R/S$  statistiku. Hursts grafiski attēloja  $\log(R/S)$  pret dažādām  $k$  vērtībām un novēroja, ka lieliem  $k$ ,  $\log(R/S)$  atrodas apkārtņē taisnai līnijai ar slīpumu  $\frac{1}{2}$ . Hursts novēroja, ka Nīlas upes datiem un citiem hidroloģiskiem, ģeofizikāliem un klimataloģiskiem datiem,  $R/S$  uzvedas kā konstante reiz  $k^H$  visiem  $H > 1/2$ . To sauc par *Hursta efektu*. Tātad lieliem  $k$ ,

$$\log E[R/S] \approx a + H \log k, \text{ kur } H > \frac{1}{2}.$$

**Teorēma 7.** Pieņem, ka  $X_t$  ir tāds, ka  $X_t^2$  ir ergodisks un  $t^{-H} \sum_{s=1}^t X_s$  konverģē vājā nozīmē uz frakcionālo Brauna kustību, kad  $t \rightarrow \infty$ . Tad, visiem  $k \rightarrow \infty$ ,

$$k^{-H} R/S \rightarrow_d \xi,$$

kur  $\xi$  ir nedeģenerēts gadījuma lielums.

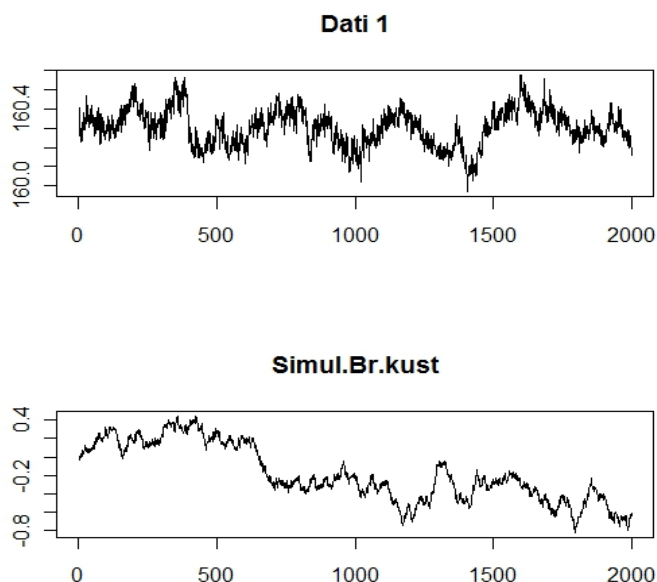
Tas nozīmē, ka grafika  $\log R/S$  pret  $\log k$  punkti būs vienmērīgi izkaisīti ap taisni ar slīpumu  $H$ . Ilglaicīgās atmiņas gadījumā ap  $H > 1/2$ , pretējā gadījumā ap  $H = 1/2$ . Šī metode ir plaši izmantota, taču tai ir savi trūkumi. Piemēram, ļoti liela nozīme ir  $k$  izvēlei. Lietojot dažādas  $k$  vērtības vienai datu kopai, iespējams iegūt krasi atšķirīgus  $H$  novērtējumus, pat ārpus intervāla  $0 < H < 1$ .

## 6. Praktiskais pielietojums

Darbā tiks apskatīti bakteriofāga PF1 dati, kas iegūti ar ātrās videokameras metodi. Pētīsim paraugu, kurš tika izgatavots, atjaucot bakteriofāgu PF1 ar TE bufferšķīdumu koncentrācijā 1 : 5. Tika veikti 55 dažādi mērījumi un noteiktas daļiņas kustības izmaiņas  $x$  un  $y$  koordinātēs vienas sekundes laikā ar laika atstarpi  $1/2000$ . Pārsvārā aplūkosim koordinātu  $x$ . Mērķis ir noskaidrot, vai dotā daļiņa ir Brauna kustība. Aprēķiniem izmantosim datorprogrammu  $R$ .

Lai pārlicinātos, vai daļiņa ir Brauna kustība, nepieciešams pārbaudīt, vai izpildās Brauna kustības īpašības. Papildus tam, mēs simulēsim Brauna kustību apjomā  $N = 2000$ , lai varētu salīdzināt iegūtos rezultātus ar simulētās Brauna kustības rezultātiem.

Izvēlēsimies 1. no 55 mērījumiem (turpāk- Dati 1) un pētīsim daļiņas pārvietojumus pa koordinātu  $x$ . Kā arī simulēsim Brauna kustību apjomā  $N = 2000$ , lai salīdzinātu rezultātus. Abi procesi redzami 1.attēlā.



1.attēls: Dati 1 (apjomā  $N=2000$ ) un Simulētā Brauna kustība ( $N=2000$ )

Pārbaudīsim procesu pieaugumu neatkarību ar  $\chi^2$ -testu, kura kods  $R$  programmā atrodams pielikumā. Veicot  $\chi^2$ -testu, ieguvu rezultātus, kas redzami 2.tabulā. Tātad secinu, ka abiem procesiem izpildās neatkarības īpašība.

Process	Statistikas vērtība	$p$ -vērtība
Dati 1	148.1	0.874
Simul.Br.kust.	129.9	0.988

2.tabula

Pārbaudīsim abu procesu pieaugumi stacionaritāti ar ADF un KPSS testu, kas iebūvēti programmā  $R$  automātiski. Rezultāti redzami 3.tabulā. Secinu, ka abiem procesiem pieaugumi ir stacionāri.

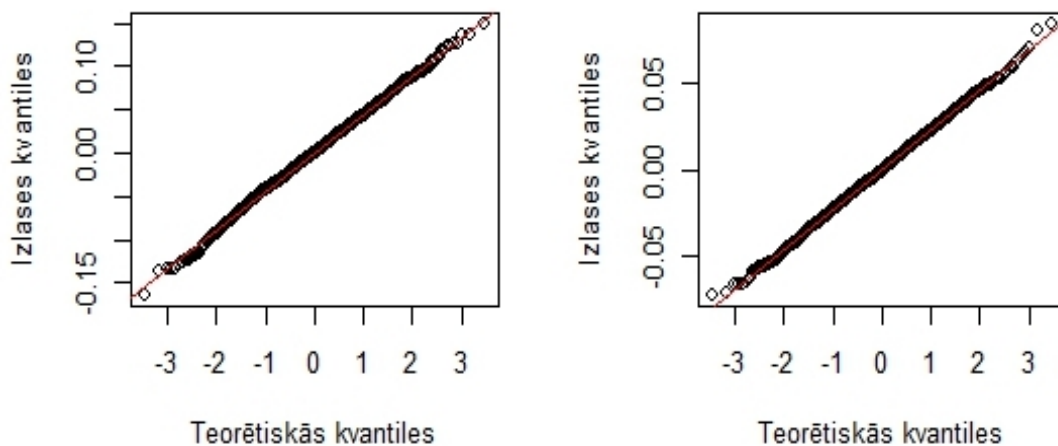
Process	ADF vērtība	$p$ -vērtība	KPSS vērtība	$p$ - vērtība
Dati 1	-13.9	0.01	0.013	0.1
Simul.Br.kust.	-11.7	0.01	0.046	0.1

3.tabula

Tālāk pārbaudīsim procesu pieaugumu normalitāti. Tam izmantosim Shapiro-Wilk un Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) testus, kā arī kvantiļu-kvantiļu grafikus grafiskai salīdzināšanai.

Process	Lillie tests	$p$ -vērtība	Shapiro tests	$p$ - vērtība
Dati 1	0.0146	0.3795	0.9989	0.2843
Simul.Br.kust.	0.0145	0.3905	0.9994	0.8257

4.tabula



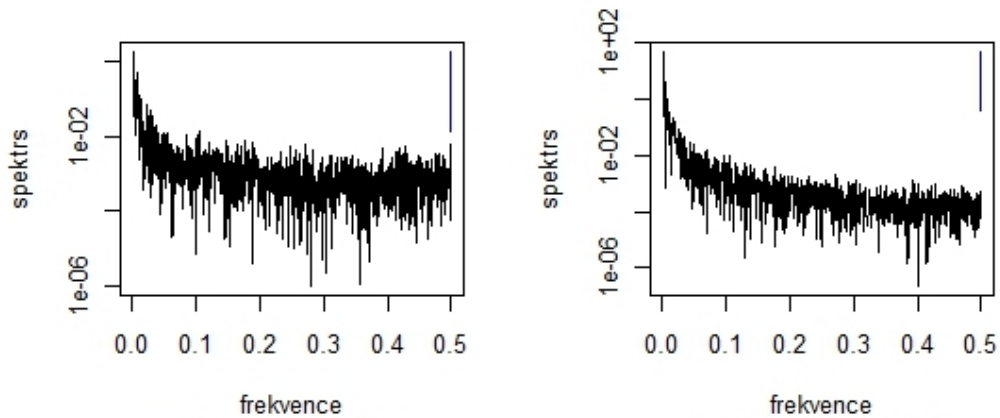
2.attēls: Kvantīļu - kvantīļu grafiks Datiem 1 (N=2000) un Simulētai Brauna kustībai N=2000

No kvantīļu - kvantīļu grafikiem secinu, ka normālā sadalījuma kvantile labi aproksimē gan procesa Dati 1, gan Simulētās Brauna kustības pieaugumus. Arī pēc Shapiro -Wilk un Lilliefors testu rezultātiem nevienam no procesiem nevaram noraidīt hipotēzi par pieaugumu normālo sadalījumu.

Tā kā procesam Dati 1 izpildās pieaugumu neatkarība, stacionaritāte un normalitāte, šie dati varētu būt Brauna kustība. Aplūkosim vēl pāris veidus, kā pārlicināties, vai process ir Brauna kustība.

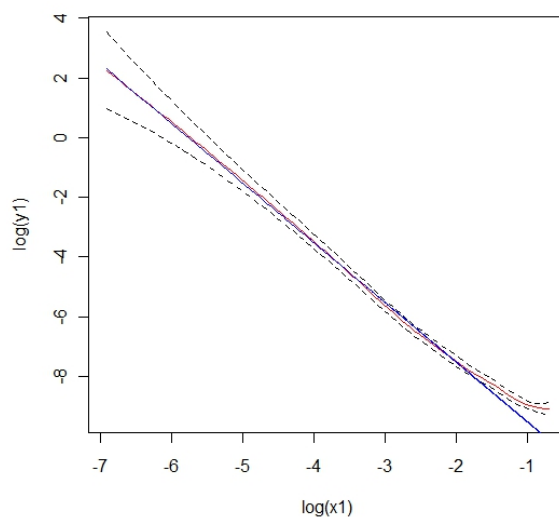
Konstruēsim periodogrammas lokālās regresijas novērtējumu un tad uzīmēsim vienlaicīgās ticamības joslas teorētiskajam spektram. No teorijas zinām, ka nestacionāriem procesiem (kā Brauna kustība) neeksistē spektrālā blīvuma funkcijas. Taču, ja mēs to definējam kā periodogrammas sagaidāmās vērtības robežu, tad standarta Brauna kustībai spektrālā blīvuma funkcija proporcionāla  $|\omega|^{-2}$ , kad  $\omega \rightarrow 0$ .

3.attēlā redzamas procesu Dati 1 un Simulētās Brauna kustības periodogrammas.



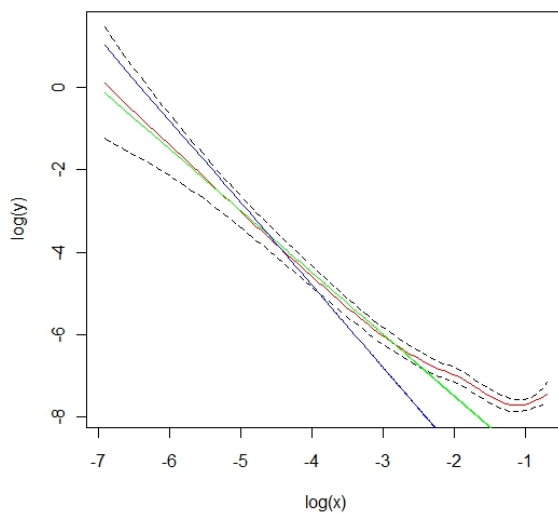
3.attēls: Dati 1 ( $N=2000$ ) un Simulētās Brauna kustības ( $N=2000$ ) periodogrammas

4.attēlā redzam simulētās Brauna kustības teorētiskā spektra novērtējumu ar ticamības joslām. Sarkanā līnija arī ir teorētiskais spektrs. Raustītās līnijas ir vienlaicīgās ticamības intervāls. Taisne zilā krāsā aproksimē teorētisko spektru ar standarta Brauna kustības virziena koeficientu  $-2$  un  $|\omega| = 0.00001$ . 3.attēlā varam pārlicināties, ka periodogrammas sagaidāmās vērtības robeža varētu būt apmēram  $0.00001$ .



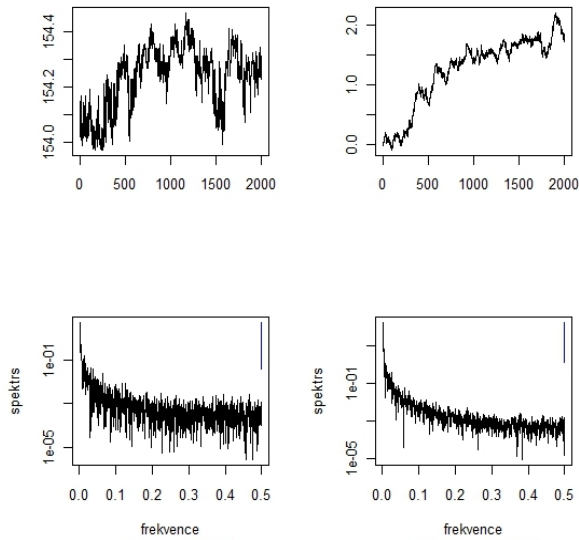
4.attēls: Simulētās Brauna kustības ( $N=2000$ ) nogludinātā periodogramma ar ticamības joslām

5.attēlā redzam Dati 1 teorētiskā spektra novērtējumu, kas ir sarkanā līnija. To salīdzinoši labi aproksimē zaļā taisne, taču tās slīpuma koeficients ir  $-1.5$  un  $|\omega| = 0.000028$ . Taisne zilā krāsā ir ar slīpuma koeficientu  $-2$  un  $|\omega| = 0.0000028$ . No kā mēs secinām, ka Dati 1 nav standarta Brauna kustība.

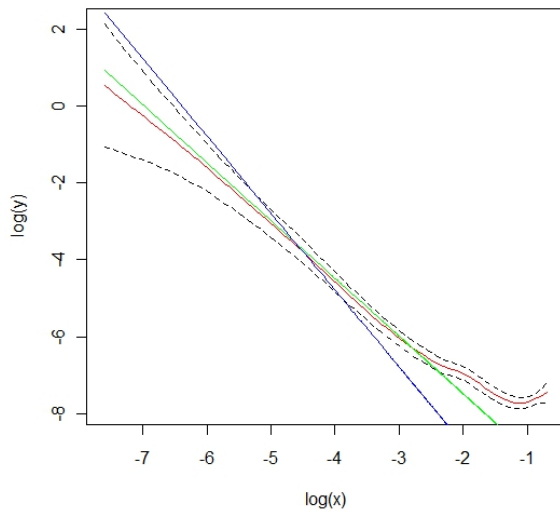


5.attēls: Dati 1 ( $N=2000$ ) nogludinātā periodogramma ar ticamības joslām

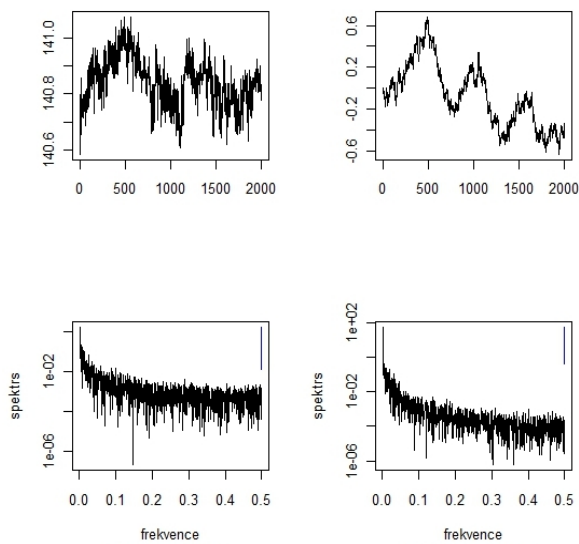
Uzzīmēsim periodogrammas un teorētisko spektru novērtējumus ar ticamības joslām vēl 4 dažādiem datiem no fiziķa darba. Izvēlēšos 2., 3., 4. un 5.mērījumu.



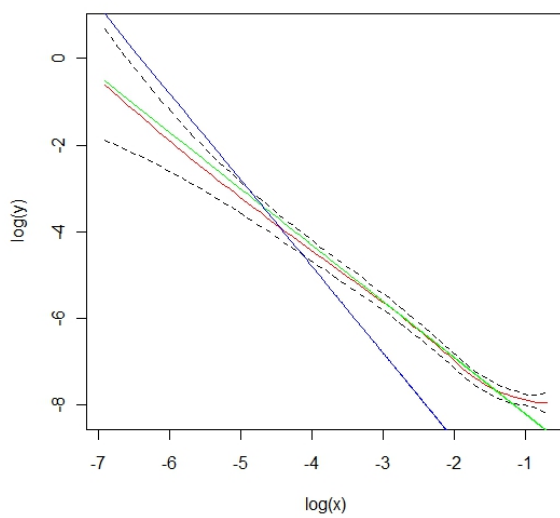
6.attēls: 2.mērījums ( $N=2000$ ), tā periodogramma un Simulēta Brauna kustība ( $N=2000$ ) un tās periodogramma



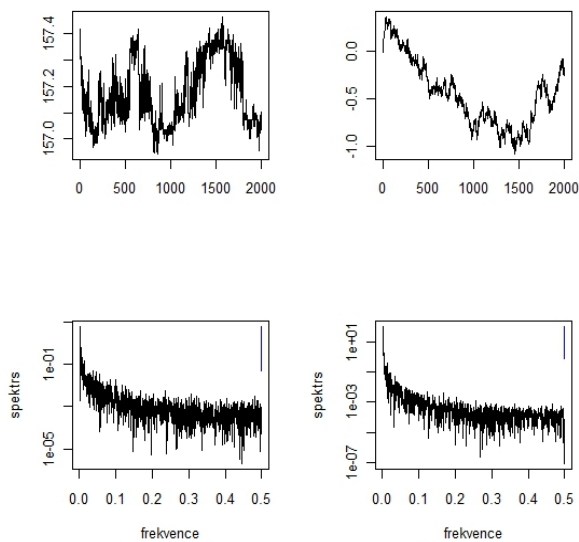
7.attēls: 2.mērījuma ( $N=2000$ ) teorētiskā spektra novērojums un ticamības joslas. Zilās līnijas virziena koeficients  $-2$ , zaļās  $-1.5$



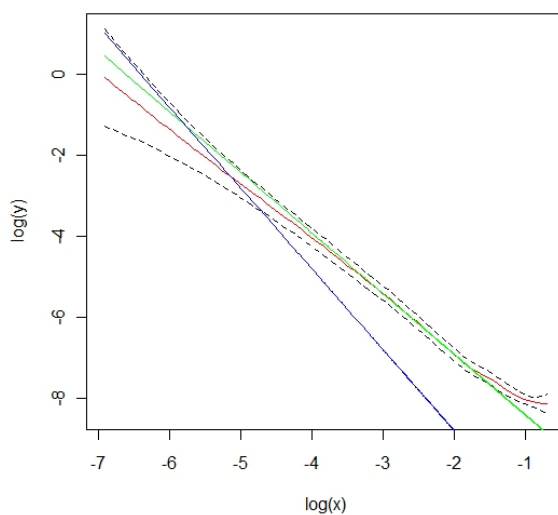
8.attēls: 3.mērījums ( $N=2000$ ), tā periodogramma un Simulēta Brauna kustība ( $N=2000$ ) un tās periodogramma



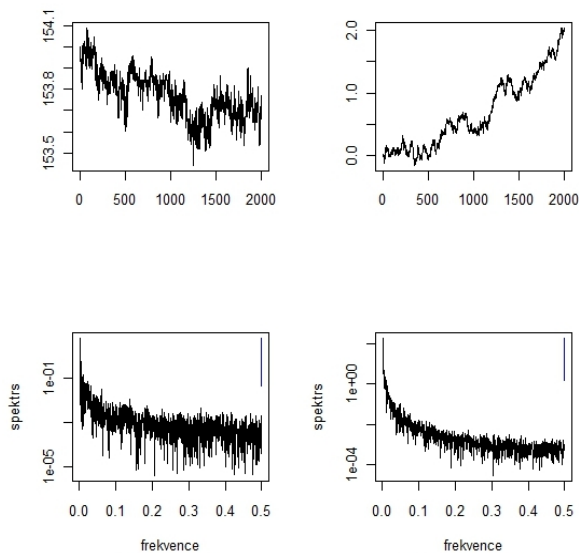
9.attēls: 3.mērījuma ( $N=2000$ ) teorētiskā spektra novērojums un ticamības joslas. Zilās līnijas virziena koeficients  $-2$ , zaļās  $-1.3$



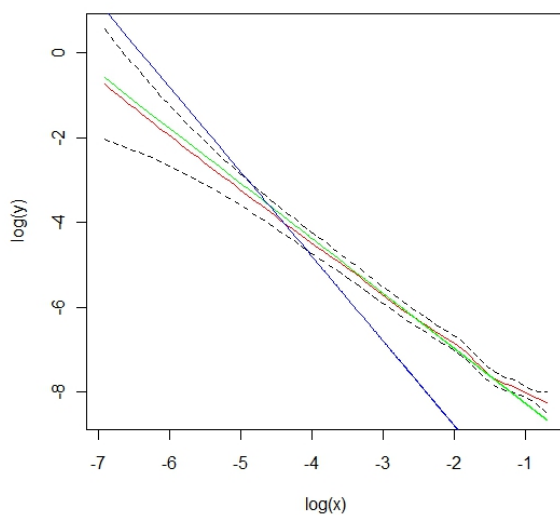
10.attēls: 4.mērījums ( $N=2000$ ), tā periodogramma un Simulēta Brauna kustība ( $N=2000$ ) un tās periodogramma



11.attēls: 4.mērījuma ( $N=2000$ ) teorētiskā spektra novērojums un ticamības joslas. Zilās līnijas virziena koeficients  $-2$ , zaļās  $-1.5$



12.attēls: 5.mērījums (N=2000), tā periodogramma un Simulēta Brauna kustība (N=2000) un tās periodogramma



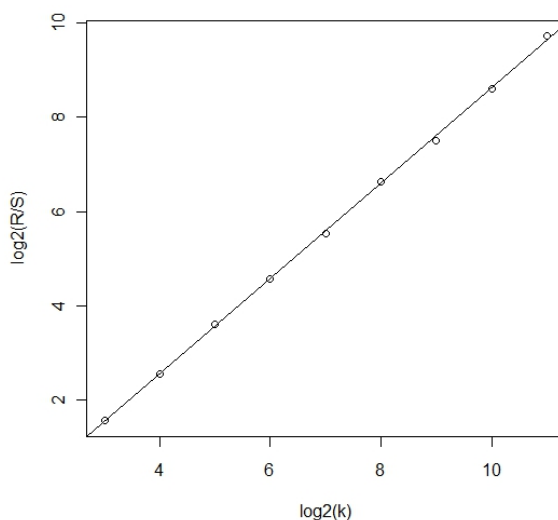
13.attēls: 5.mērījuma (N=2000) teorētiskā spektra novērojums un ticamības joslas. Zilās līnijas virziena koeficients -2, zaļās -1.3

Kā redzams attēlos 5.-13., tad bakteriofāgs PF1 nav standarta Brauna kustība, jo zilā taisne (kas visos iepriekšējos grafikos ir ar virziena koeficientu

-2, kas atbilst standarta Brauna kustībai) nesakrīt ar teorētiskā spektra novērtējumiem pirmajiem 5 mērījumiem un pat neiekļaujas ticamības joslās.

Vēl viens veids, kā pārbaudīt, vai process ir Brauna kustība, ir  $R/S$  statistika. Tur lielu nozīmi spēlē Hursta parametrs. Un, kā zināms no teorijas, standarta Brauna kustībai tas ir  $1/2$ . To arī pārbaudīsim. Šīs metodes programmas kods atrodams pielikumā.

No sākuma simulēsim Brauna kustību apjomā  $N = 2048$ . Šādu apjomu izvēlos tādēļ, ka  $R/S$  statistikas aprēķināšanas metodē tiek izmantotas divnieka pakāpes (algoritmu skatīt [7]). Šajā gadījumā  $2^{11}$ . Tiek aprēķināta lineārā regresija caur punktiem  $\log_2 k$  un  $\log_2 R/S$ , uzzīmēts grafiks, un līnija, kas iet caur šiem punktiem, ir ar slīpumu, kas arī ir Hursta parametrs.



14.attēls  $R/S$  metode simulētajai Brauna kustībai.  $N=2048$ ,  $H=1.010658$

Līdzīgu grafiku kā 14.attēlā iegūstam arī mērījumiem 1.-5. (Lai gan viņi ir apjomā  $N = 2000$ , kas nav divnieka pakāpe). Šo pašu metodi pielietoju arī simulētās Brauna kustības pieaugumiem un pirmo piecu mērījumu pieaugumiem. Rezultāti ar novērtētajiem Hursta parametriem redzami 5.tabulā.

Process	Hursta parametrs procesam	Hursta parametrs procesa pieaugumiem
Simul.Br.kust.	1.010658	0.5253318
1.mērījums	0.965931	0.3495352
2.mērījums	0.9515632	0.2672857
3.mērījums	0.9843428	0.3325164
4.mērījums	1.014313	0.378321
5.mērījums	1.015534	0.324811

5.tabula

Redzam, ka simulētās Brauna Kustības pieaugumiem  $H \approx 1/2$ . Taču nevienam no 1.-5.mērījuma pieaugumiem Hursta parametrs nav tuvu 0.5, kas varētu liecināt, ka bakteriofāga PF1 dati tiešām nav standarta Brauna kustība. Taču, iespējams, tie ir frakcionālā Brauna kustība. Tāpēc pārbaudīsim 1.-5.mērījuma pieaugumu neatkarību ar  $\chi^2$ -testu.

Process	Statistikas vērtība	$p$ -vērtība
1.mērījums	148.1	0.874
2.mērījums	189.9628	0.1287883
3.mērījums	397.1658	0
4.mērījums	337.5063	0
5.mērījums	144.6254	0.9128919

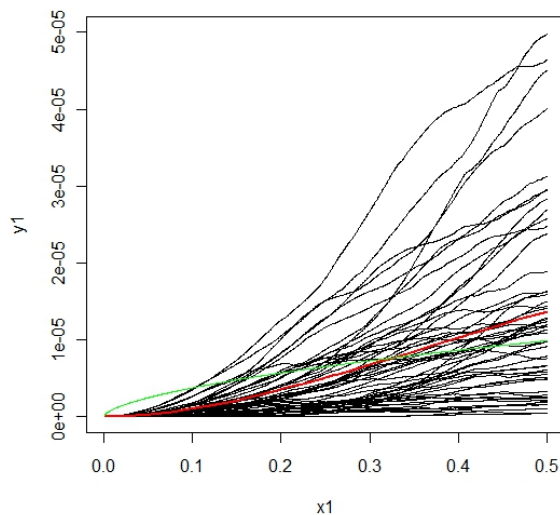
6.tabula

Ja mēs vienmēr varētu noraidīt hipotēzi par pieaugumu neatkarību, tad bakteriofāga PF1 dati varētu būt frakcionālā Brauna kustība (jo tās pieaugumi ir neatkarīgi tikai gadījumā, kad process ir standarta Brauna kustība). Taču, kā redzam 6.tabulā, neko viennozīmīgi nevar pateikt par datu neatkarību - dažreiz hipotēze jānoraida, dažreiz nē. Tātad nevar pieņemt arī to, ka bakteriofāga PF1 dati ir frakcionālā Brauna kustība.

Maģistranta Mārtiņa Kozlovskā darbā tika aplūkoti bakteriofāga PF1 vidējie kvadrātiskie pārvietojumi. Lai to izdarītu, nepieciešams aplūkot visus 55 mērījumus pa koordinātām  $x$  un  $y$  apjomā  $N = 2000$ . Vidējo kvadrātisko pārvietojumu aprēķina pēc formulas

$$\Delta R^2(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} [(x_{t+\tau} - x_t)^2 + (y_{t+\tau} - y_t)^2],$$

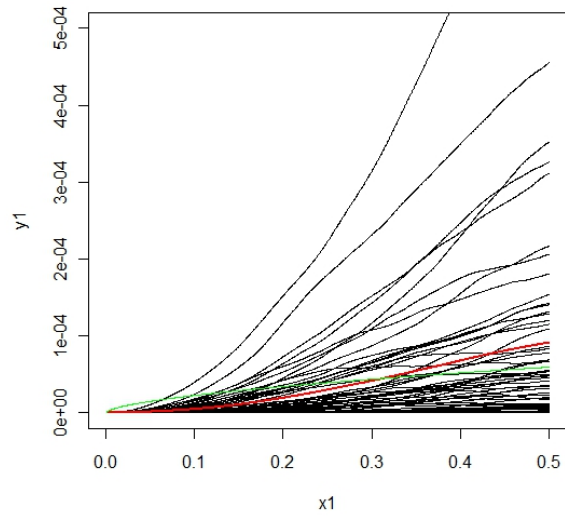
kur  $\tau$  ir solis.



15.attēls: Bakteriofāga PF1 vidējie kvadrātiskie pārvietojumi.  $N=2000$

15.attēlā redzam visu 55 mērījumu kvadrātiskos pārvietojumus (melnās līnijas). Sarkanā līnija ir vidējā vērtība kvadrātiskajiem pārvietojumiem. Grafikā ir pārveidots mērogs. Tas tika darīts ar nolūku, lai iegūtu tādu pašu soli  $\tau$  kā fiziķa darbā. Viņam izdevās vidējo kvadrātisko pārvietojumu aprakstīt ar pakāpes funkciju  $\Delta R^2(\tau) = a \cdot \tau^b$ . Viņš ieguva rezultātus, ka koncentrācijai 1 : 5  $a \approx 0.003$  un  $b \approx 0.6$ . Koefficients  $b$  man sanāca tāds pats, bet  $a \approx 0.000015$ . Pakāpes funkcija ar parametriem  $a$  un  $b$  redzama 15.attēlā zaļā krāsā. No grafika redzams, ka tā slikti aproksimē vidējo kvadrātisko pārvietojumu. Iespējams, ka šāda pakāpes funkcija tomēr nav labākā, kas apraksta vidējo kvadrātisko pārvietojumu bakteriofāgam PF1.

Lai salīdzinātu rezultātus, simulēju Brauna kustību 55 reizes apjomā  $N = 2000$  un aprēķināju vidējo kvadrātisko pārvietojumu. Kā redzams 16. attēlā, Brauna kustības kvadrātiskie pārvietojumi izskatās līdzīgi, taču arī viņus slikti apraksta pakāpes funkcija zaļā krāsā.



16.attēls: Brauna kustības vidējie kvadrātiskie pārvietojumi.  $N=2000$

## Secinājumi

Kursa darbā aprakstīta Brauna kustība un frakcionālā Brauna kustība, šo procesu raksturojošie lielumi - Hursta parametrs, periodogramma, spektrs, R/S statistika. Tika apskatīti bakteriofāga PF1 dati un simulēta standarta Brauna kustība. Tika pārbaudīts, vai datiem izpildās Brauna kustības īpašības un rezultāti salīdzināti ar simulēto Brauna kustību. Īpašība par pieaugumu neatkarību, stacionaritāti un normalitāti izpildījās. Taču uzzīmējot periodogrammu un spektru, secināju, ka dati tomēr nav standarta Brauna kustība. Aprēķinot Hursta parametru ar R/S metodi arī pārlicinājos, ka ne datiem, ne to atlikumiem  $H \neq 1/2$ . Tāpat bakteriofāga PF1 dati nav arī frakcionālā Brauna kustība, jo tās pieaugumi nebija atkarīgi.

Aprēķināju arī bakteriofāga PF1 vidējo kvadrātisko pārvietojumu visiem 55 mērījumiem pa abām koordinātām  $x$  un  $y$  un, uzzīmējot to, secinu, ka pakāpes funkcija  $a\tau^b$  to neapraksta īpaši precīzi. Kā arī 55 reizes simulētai Brauna kustībai tādā pašā apjomā  $N = 2000$  vidējos kvadrātiskos pārvietojumus šī pakāpes funkcija neapraksta.

## Literatūra

- [1] Peres Y. Morters P. *Brownian Motion*. 2006.
- [2] Ubbo F Wiersema *Brownian Motion Calculus*. 2008.
- [3] <http://pages.stern.nyu.edu/~churvich/TimeSeries/Handouts/fBm.pdf>
- [4] R.H. Shumway D.S. Stoffer *Time Series Analysis and Its Applications 2nd Edition*. 2006.
- [5] <http://www2.isye.gatech.edu/~adieker3/fbm/thesisold.pdf>
- [6] J.Beran *Statistics for Long - Memory Processes*. 1994
- [7] [http://www.bearcave.com/misl/misl\\_tech/wavelets/hurst/index.html](http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/index.html)

# R programmas kods

```
##### HĪ-kvadrāta tests neatkarībai

d <- scan(file='D:/documents/KursaDarbs/Tiridati/video2k_2/1-005_01/5.txt') #nolasa
d
dif<-diff(d) #starpības
dif

dati1<-c()
dati2<-c()
datt<-c(dif)
datt

N<-length(dif)
N

for (i in 1:N/2){
dati1[i]<-datt[i]
}
dati1
for (i in 1:N/2){
dati2[i]<-datt[N/2+i]
}
dati2

chisq.test.ind<-function(x,y)
{
n<-length(x)
r<-floor(sqrt(n/5))
apj<-floor(n/r)
xs<-sort(x)
x0<-(xs[apj*(1:(r-1))] + xs[apj*(1:(r-1))+1])/2

ys<-sort(y)
y0<-(ys[apj*(1:(r-1))] + ys[apj*(1:(r-1))+1])/2
sel<-function(z,z0,i)
{
if (i==1)
return(z<=z0[1])
if (i==r)
return(z>z0[r-1])
return(z>z0[i-1]&z<=z0[i])
}
nu<-matrix(nrow=r,ncol=r)
for (i in 1:r)
for (j in 1:r)
nu[i,j]<-length(x[sel(x,x0,i)]&sel(y,y0,j]) )
xi<-rowSums(nu)
eta<-colSums(nu)
q1<-xi/n
g1<-eta/n
p1<-matrix(nrow=r,ncol=r)
for (i in 1:r)
for (j in 1:r)
p1[i,j]<-q1[i]*g1[j]
p1
X2<-sum((nu-n*p1)^2/(n*p1))
p.value<-1-pchisq(X2,(r-1)^2)
list(X2=X2,p.value=p.value,(r-1)^2)
}

chisq.test.ind(dati1,dati2)

#####stacionaritāte

adf.test(dif1)
kpss.test(dif1)

##### normalitāte

lillie.test(dif)
shapiro.test(dif)
```

```

##### R/S metode

set.seed(1)
Simul.Br.kust <- BM(N=2048)[1:2048] #Simuleta Brauna kustiba
dati<-Simul.Br.kust
n<-length(dati)
#dati<-diff(d1)
#n<-length(dati)

f.range<-function(n,tau,dati)
{
sum(dati[1:n]-mean(dati[1:tau]))
}
f.range2<-Vectorize(f.range,vectorize.args="n")
RS.range<-function(dati)
{
n<-length(dati)
rez<-max(f.range2(1:length(dati),length(dati),dati))-min(f.range2(1:length(dati),length(dati),dati))
rez/sd(dati)
}
n<-length(dati)
RS.ave<-function(dati,m)
{
nn<-length(dati)/m
rez<-c()
for (i in 1:m)
{
rez[i]<-RS.range(dati[((i-1)*nn+1):(i*nn)])
}
mean(rez)
}
mean(c(RS.range(dati[1:(n/2)]),RS.range(dati[(n/2+1):n])))
RS.ave<-Vectorize(RS.ave,vectorize.args="m")
x.data<-3:11
y.data<-sort(log(RS.ave(dati,c(1,2,4,8,16,32,64,128,256))),base=2)
plot(x.data,y.data,xlab="log2(N)",ylab="log2(R/S)")
fit<-lm(y.data~x.data)
fit$coef
abline(fit$coef[[1]],fit$coef[[2]])
h.nov<-lm(y.data~x.data)$coef[[2]]
h.nov

```