

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**RISKA MĒRA NOVĒRTĒŠANAS METODES VĒRTSPAPĪRU
PORTFELIM**

BAKALAURA DARBS

Autors: **Kristīna Kuzmova**

Stud. apl. kk08373

Darba vadītājs: Doc. Jānis Valeinis

RĪGA 2013

Anotācija

Ar finanšu operāciju internacionalizācijas attīstību, valūtu tirgus ir stipri mainījies un kļuvis konkurējošāks un nestabilāks. Darbs izpēta riska prognozēšanas problēmu no Riska mēra (*Value-at-Risk*, VaR) skatupunkta un iepazīstina ar tā novērtēšanas metodēm. VaR metodoloģija tiek pielietota finanšu iestādēs ar mērķi noteikt nepieciešamo naudas summu riska rezervēm.

Praktiskiem aprēķiniem tika pielietota vēsturisko simulāciju, delta-normāla, GARCH un EWMA metodes. Vēsturisko simulāciju metode tika uzlabota ar kodola novērtēšanu un veivletu analīzi. VaR aprēķiniem tika sastādīts 6 dažādu valūtu portfelis. Iegūtie rezultāti rāda, ka populārā delta-normāla metode sevi neattaisno, un ka ekonomiski izdevīgākus rezultātus var iegūt ar veivletu analīzes palīdzību.

Atslēgas vārdi: VaR metodoloģija, riska analīze, veivletu analīze, tirgus risks.

Abstract

With development of financial transactions internationalization, the foreign exchange market has been profoundly transformed and became more competitive and volatile. This thesis represents the measurement of risks from a Value-at-Risk (VaR) perspective and introduces its methods. VaR methodology is being used in financial institutions for evaluating fund amounts to be kept in reserve.

Experimental results have been made with Historical simulation, Delta-normal, EWMA and GARCH methods. Then Historical simulation method was amended with Kernel estimation and Wavelet analysis. For VaR estimation have been created portfolio of 6 different currencies. Results shows that the prevalent Delta-normal approach does not justify itself in this situation and that wavelet-based method forecast gives the most economically beneficial VaR evaluation.

Keywords: Value-at-Risk, risk analysis, Wavelet analysis, market risk.

Saturs

Apzīmejumi	3
Ievads	4
1 Vēsture	6
2 VaR loma tirgus risku pārvaldē	8
3 Variāciju-kovariāciju metodes	12
3.1 Kovariāciju matrica ar vienādiem svariem	12
3.2 Delta-normālā metode	12
3.3 Eksponenciāli svērtās kovariācijas	14
3.4 GARCH modeļi	15
3.5 VaR prognozēšana lielākam laika horizontam	16
4 Neparametriskie modeļi	18
4.1 Vēsturiskā modelēšana	18
4.2 Kodola novērtēšanas metode	19
4.3 Sadalīšana funkcionālajā rindā	19
4.4 Veivleti	20
5 Ekstrēmo notikumu modeļi	24
6 Portfeļa vērtības izmaiņu aproksimācija	27
6.1 Lineārie modeļi	27
6.2 Kvadrātiskie modeļi	28
7 Sadalījumu pārbaude ar hipotēžu metodi	31
7.1 Grafiskās metodes: Kvantiļu-kvantiļu grafiki	31
7.2 Sadalījuma normalitātes pārbaude ar momentu metodi	32
7.3 Valūtu tirgus izpēte	34
8 VaR metožu pielietošana	36

8.1	Novērtējumu precizitāte	37
	Secinājumi	44
	1. Pielikums	46
	2. Pielikums	47
	Izmantotā literatūra un avoti	48

Apzīmejumi

VaR - Value-at-Risk vērtība, riska mērs,

$P(t)$ - vērtspapīru portfeļa vērtība laika momentā t ,

r_i - instrumenta ienākumi,

w_i - svars,

$c(\tau)$ - autokovariācijas funkcija

Ievads

Tirgus cenu risks ir zaudējumu rašanās risks, kas saistīts ar nelabvēlīgo finanšu instrumenta tirgus cenu izmaiņu, kas var samazināt finanšu instrumentu turētājam (ieguldītājam) gaidāmo ienesīgumu, kā arī izraisīt zaudējumus. Ir svarīgi noteikt iespējamos riskus, to realizācijas iespējamību, potenciālo zaudējumu apjomu, ka arī izstrādāt un pielietot riska vadīšanas metodes, jo nenovērtēts risks var novest pie lielākas resursu nepieciešamības riska radīto zaudējumu segšanai.

Šī darba mērķis ir izpētīt riskam pakļautās vērtības VaR (*Value-at-Risk*) metodoloģijas pielietojumu tirgus risku pārvaldē un izmantot to praktiskiem aprēķiniem. Metodoloģija pēdējo 15 gadu laikā ieguva atpazīstamību un tiek pielietota gan finanšu iestādēs, gan tiek adoptēta citu risku pārvaldei. VaR metožu klāsts ir diezgan liels, jo atkarībā no vērtspapīru portfeļa riska faktoru sadalījuma nākas izvēlēties starp ātrumu un precizitāti. Metodoloģija sākotnēji tika izstrādāta normāli sadalītiem portfeļiem, tomēr pieņēmums par sadalījuma normalitāti var būtiski ietekmēt rezultātus.

Bakalaura darba mērķi ir:

1. formulēt un izskaidrot VaR būtību un nepieciešamību;
2. izpētīt VaR metodes un klasificēt tās pēc līdzības īpašībām;
3. gūt ieskatu metožu modifikācijās, ar kurām ir iespējams novērtēt riskam pakļauto vērtību nelineāriem instrumentiem;
4. izpētīt Latvijas Bankas noteikto ārvalstu valūtu kursu dinamiku, to izmaiņu sadalījumus un savstarpējās korelācijas;
5. sastādīt ekonomiski efektīvo valūtu portfeli un prognozēt riskam pakļauto vērtību ar dažādām VaR metodēm;
6. salīdzināt pārbaudāmo VaR metožu precizitāti un atbilstību Bāzeles banku uzraudzības komitejas prasībām;
7. novērtēt metožu ekonomiskos rādītājus un noteikt izdevīgāko modeli;
8. uz risku analīzes un pētījuma pamata izdarīt secinājumus un ieteikumus.

Darbs sastāv no 8 nodaļām. Pirmā nodaļa ir veltīta VaR metodoloģijas vēsturei un tās sakaram ar Latvijas finanšu iestāžu darbību. Otrajā nodaļā ir apskatīta VaR loma tirgus risku pārvaldē un definēta tās būtība. Trešajā un ceturtajā nodaļā ir izklāstītas parametriskās un neparametriskās metodes, ar kurām ir iespējams noteikt riskam pakļautas vērtības apjomu. Piektajā un sestajā nodaļā apskatīti gadījumi, kad būtu jāizmanto nestandarta pieejas un metodes VaR aprēķināšanai. Pēdējās nodaļās tiek izpētīts valūtu portfelis, kuram tiek pielietotas dažādas VaR metodes ar mērķi atrast piemērotāko. Aprēķini tika veikti izmantojot programmu Microsoft Office Excell. Rezultāti rāda, ka standarta pieeja VaR aprēķināšanai var būt ekonomiski neefektīva un ir ieteicams izmantot metodes, kas nav balstītas uz pieņemumiem par ienākumi normālo sadalījumi.

Darbā ir 6 attēli, 9 tabulas un 2 pielikumi.

Riskam pakļautas vērtības (VaR) jēdziens

1 Vēsture

Risku mērīšanas jēdziens ir vecs gan ekonomikā, gan finansēs, gan statistikā. Tomēr riska vērtības aprēķināšanas koncepciju sāka pielietot tikai XX. gadsimta beigās, kad pasauli skāra 1987. gada fondu tirgus krīze. Tiek uzskatīts, ka ideja par riskam pakļautas vērtības (*Value-at-Risk*, VaR) metodoloģiju pieder Dennisam Vezerstounam (*Dennis Weatherstone*), JPMorgan bankas direktoru padomes priekšsēdētājam, kurš katru dienu plkst. 16:15 gribēja saņemt īsu, pārskatāmu atskaiti par rītdienas maksimāli iespējamajiem zaudējumiem bankas tirgus portfelī [1].

VaR metodoloģiju izstrādāja 90.-to gadu sākumā un tā ātri kļuva populāra arī citās ASV bankās. Jau 1994. gadā, kādu no VaR metodēm izmantoja 43% vērtspapīru dīleru kompānijas un 60% pensiju fondu. Pašlaik vairākums no pasaules attīstītajām valstīm ir pieņēmušas starptautisko banku kapitāla aprēķināšanas un noteikumu saskaņošanas sistēmu, kuru izstrādājusi Bāzeles banku uzraudzības komiteja. Tā nosaka kredīta riska kapitāla prasības (CRR) un tirgus riska kapitāla prasības (MRR). Finanšu un kapitāla tirgus komisija norāda, ka arī Latvijā bankām kopš 2008. gada 1. janvāra ir jāievēro Kapitāla prasību direktīva, kas ievieš prasības ES likumos. Galvenais Bāzeles sistēmas mērķis ir uzlabot risku vadību bankās, nosakot skaidrus kritērijus, kāds kapitāla apjoms ir jāliek pretī kreditēšanas darījumiem, kuri nav līdz galam droši jeb zaudējumu rašanās riskam; ka bankām ir jālieto saprātīgi kredītu piešķiršanas kritēriji, jāveic nepārtraukta kredītu kontrole, novērtēšana un pārraudzība; bankām ir jāveido pietiekami liels kapitāls, lai tās būtu minimāli atkarīgām no starptautiskām problēmām. Bāzeles sistēma paredz, ka bankām, balstoties uz riska novērtēšanas modeļiem, ir jāizstrādā reitingu sistēma, ar kuru pārvaldīt riskam pakļauto kapitālu. Tādējādi bankas var labāk novērtēt to, kam aizdot un kur investēt.

Bāzeles banku uzraudzības komiteja tirgus riska kapitāla prasības iesaka novērtēt ar VaR metodoloģijas metožu palīdzību.

2 VaR loma tirgus risku pārvaldē

Jebkuras finanšu iestādes darbība ir atkarīga no tirgus riskiem - riskiem zaudēt vērtspapīra vērtību tirgus krituma rezultātā. Tirgus risku ietekmē virkne citu faktoru: likviditātes risks, procentu likmes risks, cenas risks, valūtas risks u.c. Zaudējumi ir nenovēršami, bet lai tie nebūtu fatāli, ir jābūt spējīgiem turpināt darbību finanšu tirgū ar iepriekš rezervēto kapitālu, kurš segtu šos izdevumus. Pārāk liels rezervēts kapitāls neļaus nopelnīt veiksmīgas darbības laikā, taču pārāk mazs var novest līdz bankrotam. Tāpēc jebkuram aktīvam tirgus dalībniekam ir svarīgs jautājums par nākotnē iespējamiem zaudējumiem.

Vislabāko novērtējumu šāda veida riskiem pašlaik dod vērtība VaR. Šī metodoloģija ļauj apvienot visus riska faktorus zem viena novērtējuma gan konkrētam finanšu instrumentam, gan visam vērtspapīru portfelim. Tiek uzskatīts, ka portfelis nemainās VaR aprēķināšanas gaitā [2].

Pēc būtības, VaR ir riska mēra rādītājs, kurš izsaka maksimālos zaudējumus, kurus var gaidīt pēc uzdota laika intervāla ar pieņemto ticamības līmeni. VaR tiek noteikts pēc 3 faktoriem:

- Laika horizonts (uzdots laika intervāls);
- Ticamības līmenis, pie kura mēra riska vērtību;
- Faktiskais lielums, kas izsakāms naudas vienībās.

Šādi VaR ļauj integrēt laika, varbūtības un izmaksu riska raksturlielumus, kas padara to efektīvāku par tradicionāliem riska mēriem (piemēram, ienesīguma standartnovirzi, variācijas koeficientu u.c.).

VaR pielietojuma pieejas ir atšķirīgas:

- *Intuitīvā riska kontrole* - tekošās VaR vērtības attiecība pret esošo portfeļa vērtību: $VaR/V \leq k$. Pat ja šīs attiecības robeža k nav uzdota, pieredzējis portfeļa pārvaldītājs spēj noteikt pieņemamo riska līmeni un, nepieciešamības gadījumā, piekoriģēt portfeļa struktūru;
- *Pasīvā riska pārvalde* - prasība par kapitāla apjoma attiecību pret VaR, kas sedz tirgus risku. Piemēram, Bāzeles banku uzraudzības komiteja nosaka, ka minimālām kapitāla līmenim k , kuram jāsedz vidējo tirgus risku, jābūt vienādam vismaz ar 3;
- *Aktīvā riska pārvalde* - ierobežojumi uz pozīciju apjomu portfelī vai/un portfeļa diversifikācija ar ierobežojumu uz VaR vērtību [3].

Finanšu iestādēs aprēķins par kapitāla prasībām parasti notiek uz termiņu vienādu ar vienu gadu. Attiecīgi ar tādu pašu biežumu tiek noteikti maksimāli pieļaujami kapitāla zaudējumi.

Izmantosim sekojošus apzīmējumus:

Definīcija 1. $P(t)$ - esošā portfeļa vērtība, kurš sastāv no dažādiem finanšu instrumentiem:

$$P(t) = \sum_i n_i p_i(t), \quad (2.1)$$

kur $p_i(t)$ - esošā i -tā instrumenta tirgus vērtība laika momentā t un n_i ir tā daudzums.

Definīcija 2. Par risku sauc portfeļa vērtības $P(t)$ nenoteikto vērtību nākamajā laika momentā $P(t + \Delta t)$

Definīcija 3. Instrumenta cenas (likmes, kursi, akciju indeksi u.c.), no kurām ir atkarīga portfeļa vērtība, sauc par riska faktoriem.

Tā kā atvasinātu instrumentu cenas var izteikt ar parasto instrumentu cenām, tad arī portfeļa cenu var izteikt ar parasto instrumentu palīdzību: $P(\tilde{x}, t)$, kur $\tilde{x}$ apzīmē parasto instrumentu cenu vektoru. Šī vektora komponentes sauc par stāvokļa mainīgajiem.

Par stāvokļa mainīgajiem cenu vietā izmantosim parasto ienesīgumu:

$$r_{i,t} := \frac{p_{i,t+1} - p_{i,t}}{p_{i,t}}, \quad (2.2)$$

kur p_i - i -tā instrumenta cena laika momentā t [4]. Vektors $r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$ apzīmē visu n instrumentu ienesīgumus laika momentā t .

Tagad var matemātiski definēt riska mēru VaR noteiktām ticamības līmenim $\alpha \in (0; 1)$ un laika intervālam Δt :

$$VaR_\alpha := \inf\{u | P[\Delta P(\Delta x, \Delta t) \leq u] > \alpha\}, \quad (2.3)$$

kur ΔP - portfeļa cenas izmaiņas, Δx - stāvokļa mainīgo izmaiņas laika intervālā Δt . Nepārtrauktā sadalījuma gadījumā tiek sasniegta apakšējā robeža un tad

$$VaR_\alpha := \{u | P[\Delta P(\Delta x, \Delta t) \leq u] = \alpha\}. \quad (2.4)$$

No statistikas viedokļa, VaR formula nozīmē to, ka ja $F_{\Delta P}$ ir gadījuma lieluma $\Delta P(\Delta x, \Delta t)$ sadalījuma funkcija, tad VaR_α ir nekas cits, ka α - kvantile sadalījumam F , tas ir,

$$VaR_\alpha := F_{\Delta P}^{-1}(p), p = 1 - \alpha. \quad (2.5)$$

VaR aprēķināšanas metodes

VaR vērtības aprēķināšanai ir jānotiek regulāri, ņemot vērā aktuālus datus, jo tā tiek izmantota 1, 5 vai 10 dienu prognozēm. Tomēr ir iespējams veikt aprēķinus reizi kvartālā vai pat gadā. Novērtējot VaR ir svarīgi apzināties, ka portfeļa risks dinamiski mainās un nav konstants [5].

VaR aprēķināšanai ir izstrādātas vairākas metodes. Piemērotāku no tām ir jāizvēlas atkarībā no vērtspapīru portfeļa kompozīcijas. Ja tajā ir lineārie instrumenti, kas atkarīgi no parastiem tirgus riska faktoriem, tad ieteicamāka ir delta-normāla metode, savas vienkāršības un precizitātes dēļ. Gadījumos, kad portfelis sastāv no opciju instrumentiem, labāk būtu izvēlēties vēsturisko modelēšanu vai Monte-Karlo simulācijas, jo tās spēj aprakstīt nelineārus instrumentus un ne-normāli sadalītus ienesīgumus, turklāt tās ļauj mainīt portfeļa vērtības diapazonu. Tomēr Monte-Karlo metode nav viegli izpildāma un prasa lielāku laiku aprēķiniem, tāpēc lineāriem instrumentiem to izmantot nav lietderīgi [6].

Apskatīsim izplatītākas no VaR metodēm:

1. Variāciju-kovariāciju modeļi:

- nemainīgo kovariāciju metode;
- Delta-normālā metode;
- eksponenciāli svērto kovariāciju metode;
- GARCH modeļi;
- pusparametriskie modeļi;

2. Neparametriskie modeļi (vēsturiskā modelēšana, tiek izmantota empīriskā sadalījuma funkcija);

3. Modeļi, kas izmanto Ekstrēmo vērtību teoriju (gadījumi, kad sadalījums nav normāls, piemēram, eksistē sadalījuma “smagās astes”).

Lai iegūtu portfeļa sadalījuma funkciju, ir jāizvirza hipotēze par portfeļa vērtības funkcionālo atkarību no riska faktoru izmaiņām. Sadalījuma funkcija var būt iegūta gan analītiskā, gan empīriskā formā.

Klasifikācija atspoguļo izvēles pamatprincipu starp ātrumu un precizitāti. Ātrums ir svarīgs lieliem portfeļiem, kas pakļauti liela skaita riska faktoru un kuri ir saistīti ar lielu korelāciju daudzumu. Šādus portfeļus ir vieglāk apstrādāt ar delta-normālo metodi. Tomēr precizitāte mēdz būt svarīgāka, kad portfelis satur nelineārās komponentes.

3 Variāciju-kovariāciju metodes

Pieņēmums 1. Riska faktoru vektors $\tilde{x}$ laika horizontā Δt ir pakļauts daudzdimensionālam normālam sadalījumam un ienākumi r_t ir neatkarīgi un sadalīti pēc normālā sadalījuma ar vidējo μ un kovariāciju matricu Σ_t . Modeļi atšķirās ar kovariāciju matricas aprēķināšanas metodēm un portfeļa vērtības izmaiņu funkcijām.

3.1 Kovariāciju matrica ar vienādiem svāriem

Šajā vienkāršajā metodē tiek pieņemts, ka ienākumu kovariācija ir nemainīga visā laika periodā ar garumu T un visā prognozes laikā Δt . Kovariāciju matrica tiek aprēķināta sekojoši:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \frac{1}{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} r_{t-s} r_{t-s}^T. \quad (3.1)$$

Ja kovariācijas ir konstantas visā novērtēšanas laikā, tad efektīvas un nenovirzītas matricas Σ iegūšanai tiek izmantoti visi novērojumi no laikrindas ar vienādiem svāriem[4].

Izmantojot kovariāciju metodes, ir jāatceras, ka tajās lielu ietekmi rāda volatilitāte. No vienas puses, daudzu finanšu instrumentu īstermiņa ienesīgumam ir raksturīga nulles autokorelācija. No otras puses, tās nav neatkarīgas, jo eksistē ievērojama autokorelācija starp ienesīguma kvadrātiem. Tas liecina par to, ka volatilitāte mainās līdz ar laiku. Šāda finanšu instrumentu uzvedība tiek saukta par *volatilitātes klasterizāciju*. Tā ietekmē VaR lielumu un tās modelēšanai tiek lietotas GARCH tipa metodes, kas tiks aprakstītas zemāk[1].

3.2 Delta-normālā metode

Delta-normālā metode ir labākā metode VaR aprēķināšanai portfeļiem ar lineāru pozīciju, kuru sadalījumi ir tuvu normālas varbūtības biežuma funkcijai. Izmantojot šo metodi ir samērā viegli aprēķināt VaR un šis rēķināšanas process ir ātrs un precīzs.

Tā kā apskatāmais laika periods ir īss, ir pieņemts, ka $\mu = 0$. Šis pieņēmums palīdz raksturot sadalījumu $\Delta \tilde{x}_t \equiv x_{t+\Delta t} - x_t$ [5].

Pieņēmums 2. $P(t, \tilde{x})$ ir vienreiz atvasināms pēc katra no argumentiem. Tiek izmantots apzīmējums P_t un g , kur $P_t = \frac{\partial P(t, \tilde{x})}{\partial t}$ ir skalārs lielums, bet $g = \left[\frac{\partial P(t, \tilde{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial P(t, \tilde{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial P(t, \tilde{x})}{\partial x_n} \right]$ ir $n \times 1$. Lielāku kārtu atvasinājumi ir vienādi ar 0.

Vadoties pēc Teilora teorēmas, $P(t, \tilde{x})$ apkārtne (t_0, x_0) var būt aproksimēts uz

$$P(t, \tilde{x}) = P(t_0, \tilde{x}_0) + P_t(t - t_0) + g'[\tilde{x} - x_0] + R_2 = P(t_0, \tilde{x}_0) + P_t(\Delta t) + g'\Delta\tilde{x} + R_2,$$

kur $P(t_0, \tilde{x}_0)$ ir portfeļa tirgus vērtības atkārtota novērtēšana, $\Delta\tilde{x} \equiv (\tilde{x} - x_0)$ - mainīgā stāvokļa izmaiņas, $\Delta t \equiv (t - t_0)$ - prognozes horizonts, bet R_2 ir pārējās kļūdas, attiecībā pret otras (vai augstākās) kārtas atvasinājumiem. Ņemot vērā 2. pieņēmumu, $R_2 = 0$. Tādējādi, portfeļa izmaiņas var būt aproksimētas sekojoši:

$$\Delta\bar{P}(\Delta t, \Delta\tilde{x}) \equiv P(t, \tilde{x}) - P(t_0, x_0) = P_t\Delta t + g'\Delta\tilde{x}.$$

Turpmāk, augstākminēto aproksimāciju $\Delta\bar{P}(\Delta t, \Delta\tilde{x})$ apzīmēsim ar $\Delta\bar{P}_1$.

Teorēma 1. $\Delta\bar{P}_1$ ir viendimensionāli normāli sadalīts, t.i. $\Delta\bar{P}_1 \sim N(P_t\Delta t, g'\Sigma g)$.

Pierādījums. Lielumam $\Delta\bar{P}(\Delta t, \Delta\tilde{x}) = P_t\Delta t + g'\Delta\tilde{x}$ ir matemātiskā cerība $E[g'\Delta\tilde{x} + P_t\Delta t] = P_t\Delta t$ un dispersija $D(P_t\Delta t + g'\Delta\tilde{x}) = g'D(\Delta\tilde{x})g = g'\Sigma g$. Dispersija neierobežo Δt , jo laiks nav stohastisks. $\Delta\bar{P}_1$ ir normāli sadalīts. $\square$

Atgriežamies pie VaR aprēķināšanas. VaR ir definēts ar

$$Prob[\Delta P(\Delta t, \Delta\tilde{x}) > VaR] = \alpha.$$

Izmantojot pielietotās aproksimācijas un rezultātus no iepriekšējās teorēmas, iegūstam:

$$Prob\left[\frac{\Delta\bar{P}_1 - P_t\Delta t}{\sqrt{g'\Sigma g}} > \frac{VaR - P_t\Delta t}{\sqrt{g'\Sigma g}}\right] = \alpha,$$

$$Prob\left[\bar{Z} > \frac{VaR - P_t\Delta t}{\sqrt{g'\Sigma g}}\right] = \alpha.$$

Pirmais solis standartizē $\Delta\bar{P}_1$ uz vienības normāles vektoru, atņemot vidējo vērtību un izdalot ar standartnovirzi. Tādējādi iegūstam VaR vērtību:

$$Z(\alpha) = \frac{VaR - P_t\Delta t}{\sqrt{g'\Sigma g}}$$

$$VaR = P_t\Delta t + Z(\alpha)\sqrt{g'\Sigma g},$$

kur $Z(\alpha)$ ir procentīle standarta normālām sadalījumam [7].

3.3 Eksponeenciāli svērtās kovariācijas

Šī metode tiek pielietota JPMorgan *RiskMetricsTM* metodoloģijā. Šajā metodē eksponenciāli svērtā kovariāciju matrica Σ_t tiek aprēķināta sekojoši:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^T} \sum_{s=0}^{T-1} \lambda^s r_{t-s} r_{t-s}^T, \text{ kur } 0 < \lambda < 1. \quad (3.2)$$

Šo izteiksmi var pārveidot:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \lambda \hat{\Sigma}_t + (1 - \lambda) r_t r_t^T, \quad (3.3)$$

kas ir pirmās kārtas slīdošā vidēja autoregresijas vidēji svērtais. Jo mazāka ir λ , jo jūtīgāks paliek modelis pret izmaiņām laukrindā. Tajā pašā laikā, λ vērtības samazināšana samazina efektīvo izlases apjomu, kas ietekmē kovariācijas novērtējuma precizitāti. JP Morgan EWMA modeli iesaka izmantot $\lambda = 0.94$ dienas volatilitātes aprēķiniem un $\lambda = 0.97$ mēneša volatilitātei, jo datiem, kas ir vecāki par 75 dienām, ir parāk mazs svārs.

Katrai laukrindai var atrast optimālo λ pie kuras laukrindas variācija (volatilitāte) vislabāk aprakstīs autoregresijas procesu. To, piemēram, var izdarīt ar maksimālās ticamības metodi.

Pieņēmums 3. Pieņemsim, ka ir dota izlase $(r_1, \dots, r_T)$, kas atbilst esošo instrumentu ienesīguma rindai n . Tad sadalījuma kopīga blīvuma funkcija būs izskatā

$$f(r_t|\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_t(\lambda)|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r_t^T \Sigma_t(\lambda)^{-1} r_t\right),$$

kur $\Sigma_t(\lambda)$ - kovariāciju matrica laika momentā t , kas aprēķināta vērtībai λ .

Tad ticamības funkcija būs izskatā

$$L = \prod_{t=1}^T f(r_t|\lambda).$$

Optimālo λ aprēķina ar skaitlisko metožu paņēmieniem, optimizējot problēmu:

$$\max_{0 < \lambda < 1} L(\lambda).$$

Ērtākiem optimizācijas problēmas aprēķiniem izmanto nevis ticamības funkciju, bet tās logaritmu

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln(f(r_t|\lambda)) = - \sum_{t=1}^T \{\ln(|\Sigma_t(\lambda)|) + r_t^T \Sigma_t(\lambda)^{-1} r_t\},$$

un tad optimālā parametra aprēķināšanas uzdevums ir

$$\lambda = \arg \min_{0 < \lambda < 1} \sum_{t=1}^T \{\ln(|\Sigma_t(\lambda)|) + r_t^T \Sigma_t(\lambda)^{-1} r_t\}.$$

3.4 GARCH modeļi

Eksponeinciāli-svērtu modeļu vispārinājums ir vispārinātas autoregresīvas nosacītas heteroskedasticitātes (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity - GARCH) modelis. Šādi modeļi, tāpat kā iepriekšējais, apvieno autoregresiju ar slīdošo vidējo, taču lielākajās kārtās. GARCH(p,q) viendimensijas modelim ir šāds:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (3.4)$$

Parametrus α un β var atrast, piemēram, ar maksimālās ticamības metodi. Visvienkāršākais un biežāk pielietotais GARCH(1,1) modelis ir

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2. \quad (3.5)$$

Ja $\omega = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda$, tad iegūsim eksponenciāli-svērtu modeli. Jo vairāk parametru ir uzdevumā, jo grūtāk paliek pielietot GARCH-modeli. Daudzdimensionālajā GARCH(1,1) tiek uzskatīts, ka katrs elements no kovariāciju matricas ir šads:

$$\sigma_{ij,t+1} = f(r_{i,t}, r_{j,t}, \sigma_{ij,t}).$$

Šajā gadījumā parametru skaits paliek pārāk liels. Tā, piemēram, 9 riska faktoru gadījumā kovariāciju matrica ir 9×9 , parametru skaits ir 243. Taču lielajās bankās riska faktoru skaits var pārsniegt tūkstoti, tāpēc ir jāizmanto dažādus ierobežojumus.

GARCH ar konstantām variācijām. Šajā modelī tiek pieņemts, ka kovariāciju matricas ārpus diagonāles elementi ir $\sigma_{ij,t+1} = \rho_{ij} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}$, kur korelācijas koeficients nav atkarīgs no laika. Diagonāles elementus $\sigma_{i,t}$ modelē ar iepriekš apskatītu viendimensionālu GARCH(1,1) modeli.

Ortogonalais GARCH. Modelī izmanto faktoranalīzi, kurā ar nelielu parametru skaitu izsaka visu kovariāciju matricu.

No sākuma ortogonalizē riska faktorus. Ar $T \times k$ izmēra matricu R apzīmē visu vēsturisko ienākumu kopu. Tad W ir matricas $R^T R (k \times k)$ īpašvektoru matrica un galvenās ortogonālās komponentes ir

$$P = (P_1, \dots, P_k) = RW.$$

Risinot vienādojumu attiecība uz R un uzskatot, ka $W^{-1} = W^T$ iegūstam, ka riska faktoru izmaiņas ir galveno komponentu lineārā kombinācija, t.i.

$$R = PW^T.$$

Attiecīgi kovariācijas matricas novērtējums ir

$$\hat{\Sigma}_t = W \text{var}(P) W^T,$$

kur $\text{var}(P)$ ir galveno komponentu variāciju matrica.

3.5 VaR prognozēšana lielākam laika horizontam

VaR mēru ir iespējams aprēķināt ne tikai 1 dienas, bet arī lielākam laika horizontam. Lai to izdarītu, ir nepieciešams vienas dienas VaR novērtējumam palielināt mērogu līdz h dienām. Dispersiju h dienu laika horizontam aprēķina reizinājumā:

$$\sigma_h^2 = \sigma_1^2 * h_{dienas},$$

Izvelkot saknes no abām daļām un ievietojot σ_h VaR vienādojumos, iegūstam:

$$VaR_h = VaR_1 * \sqrt{h} = Z_{1-\alpha} * \sigma * \sqrt{h} * P, \quad (3.6)$$

kur $Z_{1-\alpha}$ ir ticamības līmeņa horizonts un P ir pozīcijas apjoms naudas vienībās.

Tomēr $\sqrt{h}$ likums nav piemērots metodēm, kad volatilitāte nav konstanta, bet mainīga kā, piemēram, GARCH metodē. Iemesls tam ir tāds, ka mēroga likums ir balstīts uz pieņēmuma par 1 dienas ienesīguma neatkarīgu un vienmērīgu sadalījumu (i.i.d.). Tajā pašā laikā GARCH un citi nosacīti modeļi neparedz to, ka ienesīgums pakļauts vienam sadalījumam, t.i., nav vienmērīgi sadalīts.

Šādā gadījumā, atbilstošs mērogs tiek piemeklēts mainot parametrus α , β un ω ar maksimālas ticamības metodi. Izmantosim standarta GARCH(1,1) vienādojumu (3.5):

$$\sigma_{(h)t}^2 = \omega_{(h)} + \beta_{(h)} \sigma_{(h)t-1}^2 + \alpha_{(h)} r_{(h)t-1}^2, \quad (3.7)$$

kur

$$\begin{aligned} \omega_{(h)} &= h\omega \frac{1 - (\beta + \alpha)^h}{1 - (\beta + \alpha)}, \\ \alpha_{(h)} &= (\beta + \alpha)^h - \beta_{(h)}, \end{aligned}$$

bet $|\beta_{(h)}| < 0$ ir izsakāms no kvadrātiskā vienādojuma

$$\frac{\beta(h)}{1 + \beta(h)^2} = \frac{a(\beta + \alpha)^h - b}{a(1 + (\beta + \alpha)^{2h}) - 2b},$$

kur

$$\begin{aligned} a &= h(1 - \beta)^2 + 2h(h - 1) \frac{(1 - \beta - \alpha)^2(1 - \beta^2 - 2\beta\alpha)}{(k - 1)(1 - (\beta + \alpha)^2)} + \\ &+ 4 \frac{(h - 1 - h(\beta + \alpha) + (\beta + \alpha)^h)(\alpha - \beta\alpha(\beta + \alpha))}{1 - (\beta + \alpha)^2}, \\ b &= (a - \beta\alpha(\beta + \alpha)) \frac{1 - (\beta + \alpha)^{2h}}{1 - (\beta + \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Šeit k ir ekscesa koeficients, kas tiks apskatīts tālāk. Tā kā EWMA modelis ir GARCH paveids, tam var pielietot šos pašus aprēķinus [5].

4 Neparametriskie modeļi

Neparametriskie modeļi ir tādi, kuros novērtējamās funkcijas (piemēram, sadalījuma funkcija) nav definētas ar galīgu parametru skaitu. Tā kā variāciju-kovariāciju metodē tiek pieņemts, ka sadalījums ir normāls, tad metodi uzskata par parametrisku (parametri ir kovariāciju matricas elementi).

4.1 Vēsturiskā modelēšana

Vēsturisko simulāciju metode ietver sevī tirgus likmju un cenu vēsturiskās izmaiņas, lai konstruētu potenciālā nākotnes portfeļa ienākumu un zaudējumu sadalījumu un tad novērtētu sadalījuma VaR. Tā paredz, ka iepriekšējo cenu izmaiņu trends būs novērojams arī nākotnē [6].

Sākmā identificē pamatā esošos riska faktorus un nosaka šo riska faktoru uzvedību, izpausmi, lai varētu iegūt to procentuālās izmaiņas vēsturiskā laika periodā. Piemēram, katru dienu no i -dienu ilga intervāla fiksē portfeļa dienas ienākumus/zaudējumus: $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m$. Ieteicams, lai m būtu vienāds vismaz ar 250. Šīs vērtības ir gadījuma lielumi ar empīrisko sadalījuma funkciju $F(x)$:

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \theta(x - X_i),$$

kur θ pieņem vērtību 0, ja $x < 0$, un vērtību 1 pretējā gadījumā.

Pēc tam šīs pašreizējās likmju un cenu procentuālās izmaiņas izmanto, lai iegūtu likmju vai cenu potenciālās nākotnes vērtības. Tad portfelis tiek novērtēts, pamatojoties uz šīm vērtībām. Šādas modelēšanas rezultātus sauc par *stress testing*. Visbeidzot, ienākumi un zaudējumi tiek izmantoti, lai novērtētu VaR pie dotā drošības līmeņa. Piemēram, 95% VaR ir 95-tā sadalījuma $f_T(x)$ percentīle. Tās negatīva vērtība nosaka maksimālus VaR zaudējumus.

Būtiskais vēsturiskās modelēšanas trūkums ir grūtības, kas saistītas ar ekstremālo (maz iespējamo) notikumu varbūtību aprēķināšanu, jo šādos gadījumos ir nepieciešamās lielākas izlases. Turklāt, ja novērošanas periods ir īss, VaR noteikšanā var būt kļūdas, taču ja novērošanas periods ir pārāk garš, novecojušie dati ietekmēs VaR vērtējumu.

4.2 Kodola novērtēšanas metode

Lai iegūtu volatilitātes neparametrisko novērtējumu, parasti tiek izmantotas divu klašu metodes: kodola novērtēšanas metode (*kernel estimation*) un metodes, kas balstītas uz sadalīšanu funkciju rindā [4].

Kodola novērtēšanas metode izmanto svērto summu

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sum_{i=1}^T w_i r_{t-i}^2, \text{ kur } \sum w_i = 1. \quad (4.1)$$

Pastāv virkne ar dažādām shēmām svāra koeficientu izvēlei, bet populārākā no tām ir normāla, jeb Gausa kodola izmantošana.

Definīcija 4. Par kodolu sauc jebkuru gludu funkciju K tādu, ka $K(x) \geq 0$, $\int K(x)dx = 1$, $\int xK(x)dx = 0$ un $\int x^2K(x)dx > 0$.

Gausa kodols:

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Izmantosim apzīmējumu $z_j := (r_{j-1}, r_{j-2}, \dots, r_{j-m})$. Tad svārs w_i ir

$$w_i = \frac{K(z_t - z_{t-i})}{\sum_{j=1}^T K(z_t - z_{t-j})}, \quad (4.2)$$

kur

$$K(z_t - z_{t-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|H|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(z_t - z_{t-i})^T H (z_t - z_{t-i}) \right\},$$
$$H = \text{diag}(h_1, \dots, h_m).$$

4.3 Sadalīšana funkcionālajā rindā

Otrā neparametriskās novērtēšanas metode ir rindas $\{r_{i,t}\}_t^T = 1$ sadalīšana funkcionālajā rindā, piemēram, Furjē rindā. Šajā gadījumā volatilitāte būs izteikta ar sadalījuma koeficientu vērtībām. Furjē rindā volatilitātes novērtējums ir izskatā

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{T} \sum_k^{T-1} |A(2\pi k/T)|^2,$$

kur $A(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} r_t e^{-\omega t}$ - Furjē rindas $\{r_{i,t}\}_t^T = 1$ pārveidošanas koeficients.

Pamatosim šo metodi. Ir zināms, ka kopa $|A(\omega)|^2$, kas tiek saukta par spektru, ir autokovariācijas funkcijas Furjē-pārveidojums. Parādīsim to uz nepārtraukta gadījuma, kur diskrētās rindas $\{r_{i,t}\}_t^T = 1$ vietā apskatīsim funkciju

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \text{ kur } \tilde{r}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Autokovariācijas funkcija ir izskatā

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) r(t - \tau) dt,$$

un attiecīgi funkcijas pārveidojums Furjē rindā būs

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) r(t - \tau) e^{i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega t} dt d(t - \tau) = \\ &= \tilde{r}(\omega) \overline{\tilde{r}(\omega)} = |\tilde{r}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Tā kā variācija ir autokovariācijas funkcijas vērtība pie $\tau = 0$, tad pēdējais apgalvojums ir pamatojums šīs metodes izmantošanai volatilitātes novērtēšanā.

Var vispārināt šo metodi nestacionāro laikrindu gadījumam. Nepārtrauktam gadījumam tas nozīmē, ka autokovariācija ir atkarīga no laika, no kā seko spektra atkarība no laika,

$$f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau.$$

Galvenais trūkums Furjē pārveidošanā ir tas, ka koeficientu aprēķināšanai tiek izmantota visa laikrinda, tātad attālie notikumi ir tikpat nozīmīgi, ka nesenie notikumi.

4.4 Veivleti

Par labāku alternatīvu Furjē-analīzei tiek uzskatīta veivletu analīze - metode, kas tiek izmantota nestacionāro laikrindu analīzē. Veivleti ir salīdzinoši jaunā metodoloģija, kuras būtība ir laikrindas sadalīšana bāzes funkciju saimē. Metodi izmanto, lai izteiktu un aproksimētu citas funkcijas. Veivletu koeficienti spēj noteikt dažādas funkcijas izmaiņas, ko citas metodes varētu izlaist, piemēram, pārtrauktību un pēkšņus pīķus. Veivletu izmantošana ļauj analizēt arī nestacionārus datus [4].

Analoģiski Furjē-analīzei, veivletu analīzē notiek sākuma signāla dekompozīcija uz elementārām sastāvdaļām, komponentēm ar zemu un ar augstu frekvenci. Dekompozīcijas laikā notiek

vienas (vai vairāku) bāzes funkciju $\psi(t)$ izstiepšana un nobīde. Šī funkcija tiek saukta par “mātes” veivletu (*mother wavlet*):

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right), t \in R, a, b \in R, a > 0.$$

Definīcija 5. Par viendimensijas veivletu ar kārtu m tiek saukta funkcija $\psi(t)$ tāda, ka 1. ψ ir ierobežoti atvasināms līdz m ieskaitot, gandrīz visur intervālā (a,b) ;

2. Ārpus intervāla (a,b) $\psi = 0$;

3. ψ eksistē nulles momenti līdz m -tajām ieskaitot,

$$\int_a^b t^\alpha \psi(t) dt = 0, \alpha = \overline{0, m}.$$

4. Saime $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $j, k \in Z$ ir ortonormēta bāze telpā $L_2(R)$.

Var apskatīt veivletus, kas definēti uz visas ass, pie tām $a = -\infty$, $b = +\infty$ un papildus jāierobežo L_2 normu: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$.

Tagad definēsim integrālo (nepārtraukto) signāla $f(t)$ veivlet-pārveidojumu:

$$[W_\psi f](a,b) = \int f(t) \psi_{a,b}(t) dt. \quad (4.3)$$

Veivletu pārveidojuma īpašības:

1. Linearitāte: $W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2]$;

2. Invariance attiecībā uz nobīdi: $W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0)$;

3. Invariance attiecībā uz mēroga izmaiņām: $W[f(\frac{t}{a_0})] = \frac{1}{a_0} W(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0})$.

Diskrēts veivletu pārveidojums. Pieņemsim, ka ir dota laikrinda $x_{i=1}^N$, $N = 2^J$. Diskrēts veivlet-pārveidojums tiek definēts ar filtru H un G palīdzību, ka arī ar ”izretinošu” operatoru D_0 .

Definīcija 6. Filtrs H tiek uzdots ar virkni h_k , bet tā darbība uz rindu x_n ir

$$(Hx)_k = \sum_n h_{n-k} x_n,$$

pie tam filtram ir jāatbilst ortogonalitātes nosacījumiem:

$$\sum_n h_n h_{n+2j} = 0, j \neq 0 \text{ un } \sum_n h_n^2 = 1.$$

Definīcija 7. Filtrs G ir "spoguļfiltrs" (*mirror filter*), kas definēts ar virkni $g_n = (-1)^n h_{1-n}$.

Definīcija 8. Operators D_0 ir tāds operators, kas atlasa tikai pāra kārtas virknes locekļus

$$(D_0 x)_j = x_{2j}.$$

Definēsim $c_n^J \equiv x_n, n = 0, 1, 2, \dots, 2^J - 1$. Priekš $J = J - 1, \dots, 0$ rekursīvi definēsim

$c^j = D_0 H_c^{j+1}$ - nogludinošs koeficients līmenī j ;

$d^j = D_0 G_c^{j+1}$ - detalizējošs koeficients līmenī j .

Atzīmēsim, ka c^j un d^j ir virknes ar garumu 2^j .

Tā kā gan $D_0 H$, gan $D_0 G$ ir ortogonālie pārveidojumi, tad inverso pārveidojumu ir viegli atrast, ja pierakstīt pārveidojumu matricas formā un inversā pārveidojuma vietā ņemt inverso matricu.

Stacionārs veivletu pārveidojums ļauj plašāk izpētīt izejas datu statistiskās īpašības, nesamazinot sadalījuma koeficientu skaitu katrā nākamajā līmenī.

Definēsim operatoru Z , kas dotajā virknēm ievieto nulles:

$$Z : (Zx)_{2j} = x_j, (Zx)_{2j+1} = 0.$$

Definēsim stacionāro veivlet-pārveidojumu, kas ir analogisks diskrētajām, bet tiek īstenots ar operatoru $H^{[r]}$ un $G^{[r]}$ palīdzību:

$$H^{[r]} = Z^r h, G^{[r]} = Z^R g,$$

$$a^J = c^J,$$

$$a^{j-1} = H^{[J-j]} a^j, b^{j-1} = G^{[J-j]} a^j.$$

Ja vektoram a^J ir garums 2^J , tad pārveidojumam ir nepieciešamas $O(J2^J)$ operācijas, atšķirībā no $O(2^J)$ operācijām diskrētā veivlet-pārveidojuma gadījumā. Stacionārs pārveidojums ir saistīts ar nepārtraukto, jo tā koeficientus var atrast kā

$$d_k^j = \int \psi_j(t - 2^{-j}k) f(t) dt.$$

Ar stacionāra veivleta pārveidojuma palīdzību tiek izteiktas lokālās autokovariācijas funkcijas, tātad veivleta spektrs ir izskatā

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{-1} (d_k^j)^2.$$

Sadalījums pēc veivletiem diskrētajā gadījumā ir

$$r_t = \sum_{j=-J}^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} w_{jk} \psi_{jk}(t),$$

kur ψ_{jk} ir veivletiem izveidotā bāze, j - mēroga indekss, k - lokalizācijas indekss.

Stacionārajā gadījumā no laika atkarīgs veivleta-spektrs ir izskatā

$$S_j(t) = S_j(k) = w_{jk}^2.$$

Šī izteiksme ir ieguldījumu vispārējā variācija, veivletam ar lokalizāciju $t = k/T$ un mērogu j .

Tādējādi, no laika atkarīga nestacionārā procesa variācija ir summa pēc visiem mērogiem:

$$\text{var}(r_t) \equiv \sigma_t^2 = \sum_{j=-\infty}^{-1} S_j(t) = \sum_{j=-\infty}^{-1} w_{jk}^2. \quad (4.4)$$

Izmantojot ienesīguma datus veivletu analīze var noteikt, kāda riska summa ir būtiska VaR aprēķinam noteiktajā laika horizontā, un kāda var palikt neizmantota.

5 Ekstrēmo notikumu modeļi

Kā zināms no centrālās robežteorēmas, normālais sadalījums ir labs neatkarīgu un vienādi sadalītu gadījuma lielumu summu sadalījuma "centrālās" daļas aprakstīšanai. Lielu kvantīļu aprēķināšanai (t.i. VaR vērtībām pie ticamības pakāpes lielākām, piemēram, par 99%) tiek izmantota statistikas Ekstrēmo vērtību teorija (*Extreme Value Theory* - EVT).

Pieņemsim, ka $(X_1, \dots, X_n)$ ir neatkarīgu vienādi sadalīto (*iid*) gadījuma lielumu izlase. Tad, pamatojoties uz centrālo robežteorēmu,

$$\sqrt{n} \left(\frac{((X_1 + \dots + X_n)/n - \mu)}{\sigma} \right) \rightarrow N(0, 1).$$

EVT uzdevums ir nevis summas, bet minimuma (vai maksimuma) sadalījuma atrašana, t.i. tādas funkcijas $G(x)$ atrašana, ka pie $n \rightarrow \infty$

$$P\left(\frac{\min\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G(x),$$

kur $\{a_n\}, \{b_n\}$ ir skaitļu virknes.

Pamatojoties uz EVT, $G(x)$ var būt pieskaitāms pie dažādu sadalījumu saimēm, no kurām visbiežāk tiek izmantotas sekojošās:

Nosaukums	Sadalījuma funkcija, $F(x)$
Vispārināts ekstrēmo vērtību sadalījums	$\exp\left[-\frac{1}{(1 + \gamma x)^{1/\gamma}}\right], 1 + \gamma x > 0$
Pareto sadalījums	$1 - x^{-\alpha}, x > 1, \alpha > 0$
Veibulla sadalījums (<i>Weibull</i>)	$1 - \exp[-\lambda x^\tau], x > 0, \lambda > 0, \tau > 0$

No šiem sadalījumiem tikai Pareto sadalījumam piemīt stabilitātes īpašība (*stable distribution*), t.i. divu gadījuma lielumu summa būs sadalīta pēc Pareto sadalījuma, ja abi šie gadījuma lielumi ir pakļauti Pareto sadalījumam. Šī īpašība, kas piemīt arī normālajam sadalījumam, ir sevišķi svarīga portfeļa summārā VaR aprēķināšanā. Aprēķināt analītisko VaR novērtējumu pārējiem sadalījumiem ir ļoti grūti, tāpēc tie, pārsvarā, tiek pielietoti Monte-Karlo metodē.

Novērst šīs problēmas ir iespējams izmantojot variāciju-kovariāciju metodi, saglabājot sadalījumu "astes". Pieņemsim, ka ienākumiem $r_i(t)$ ir kumulatīvā sadalījuma funkcija $F(r_i)$.

Tad pārveidojums $r_i \rightarrow y_i$ pārveidos sadalījumu $F(r)$ un standarta normālo sadalījumu. No statistikas ir zināms, ka šādu transformāciju var atrast no sekojošā vienādojuma:

$$F(r_i) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y_i}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (5.1)$$

kur erf ir kļūdu funkcija $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.

Atklātā formā šī transformācija ir formā

$$y_i = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2F(r_i) - 1). \quad (5.2)$$

Šādi, nezaudējot svarīgu informāciju par sadalījuma $F(r_i)$ "astēm", ir iegūts normāli sadalīts lielums y_i .

Transformācija (5.1) ir pielietojama jebkuram $F(r_i)$ sadalījumam. Apskatīsim gadījumu, kad $F(r_i)$ ir modificētā Veibula sadalījuma izskatā:

$$P(r) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} |r|^{c/2-1} \exp \left(- \left| \frac{r^c}{r_0} \right| \right)$$

Šajā gadījumā, normējot izteiksmi (5.2), iegūstam

$$y_i = \operatorname{sign}(r_i) |r_i|^{c_i/2},$$

pie tam variācija y_i ir vienāda ar $V_{ii} = (r_{0,i})^{c_i}$.

Daudzdimensionālā sadalījuma $Y = (y_1, \dots, y_n)$ kovariāciju matricai ir novērtējums

$$V = E[YY^T] - E[Y]E[Y^T],$$

un attiecīgi sadalījums ir

$$P(Y) = (2\pi)^{-N/2} |V|^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y^T - E[Y^T]) V^{-1} (Y - E[Y]) \right\},$$

kur $|V|$ ir matricas V determinants.

Lai iegūtu sākuma sadalījumu $P(r)$, izmantosim īpašību

$$P(R) = P(Y) \frac{dY}{dR},$$

kur dY/dR transformācijas $R \rightarrow Y$ jakobiāns.

Tādejādi iegūstam sadalījuma gala formulu:

$$P(R) = |V|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Y^T - E[Y^T])(V^{-1} - I)(Y - E[Y])\right\} \times \prod_{j=1}^n \frac{dF_j}{dr_j}(r_j).$$

Atzīmēsim, ka izmantojot (5.2) transformāciju pēdējā formulā, vienības matricas vietā ir jāizmanto diagonāles matricu $V_{ii} = (r_{0,i})^{c_i}$.

Tagad aprēķināsim N -instrumentu portfeļa ienākumu sadalījumu. Portfeļa ienākumus var izteikt ar izteiksmi

$$R(t) = \sum_{i=1}^N w_i r_i, \sum_{i=1}^N w_i = 1,$$

un pārveidojot,

$$R(t) = \sum_{i=1}^N w_i \text{sign}(r_i) |r_i|^{q_i}, q_i = 2/c_i$$

Nepieciešamo portfeļa ienākumu sadalījumu var izteikt ar kumulantu palīdzību.

Definīcija 9. Par kumulantu k_s sauc sadalījuma $\ln(M_X(t)) : \ln(M_X(t)) = \sum_{s=1}^{\infty} k_s \frac{t^s}{s!}$ koeficientus.

Aprēķināsim dažus pirmos kumulantus:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sum_{i=1}^N w_i M_i(1), \\ k_2 &= \sum_{i=1}^N w_i^2 (M_i(2) - M_i(1)^2), \\ k_3 &= \sum_{i=1}^N w_i^3 (M_i(3) - 3M_i(1)M_i(2) + 2M_i(1)^3), \\ k_4 &= \sum_{i=1}^N w_i^4 (M_i(4) - 3M_i(2)^2 - 4M_i(1)M_i(3) + 12M_i(1)^2 - 6M_i(1)^4), \end{aligned} \quad (5.3)$$

kur

$$M_i(m) = \begin{cases} 2^{mq_i/2} \sigma_i^{mq_i} \Gamma(\frac{mq_i}{2} + \frac{1}{2}), & \text{jā } m = 2k, k \in N; \\ 0, & m = 2k + 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Kumulants k_2 ir portfeļa ienesīguma variācija, tātad to var izmantot VaR aprēķināšanai.

6 Portfeļa vērtības izmaiņu aproksimācija

Variāciju-kovariāciju metodes ietvaros var iegūt VaR analītisko novērtējumu, bet tikai tajos gadījumos, kad portfeļa vērtības izmaiņu funkcija ir lineārā vai kvadrātiska, attiecībā uz riska faktoriem.

6.1 Lineārie modeļi

Šajā klasē tiek pieņemts, ka $P(t, x)$ ir atvasināms pēc katra no argumentiem un augstāko pakāpju atvasinājumi ir vienādi ar nullēm.

Definīcija 10. Par gradientu $g = (\frac{\partial P(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial P(t, x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial P(t, x)}{\partial x_n})$ sauc portfeļa P vērtības jutīgumu attiecībā pret riska faktoru izmaiņām.

Sadalīsim $P(t, x)$ Teilora rindā punkta (t_0, x_0) apkārtne un atstāsim tikai lineārus rindas locekļus:

$$P(t, x) = P(t_0, x_0) + P_t(t - t_0) + g^T(x - x_0),$$

no kā seko, ka

$$\Delta P(\Delta t, \Delta x) = P_t \Delta t + g^T \Delta x.$$

Portfeļa vērtības izmaiņām būs sekojošs sadalījums:

$$\Delta P \sim N(P_t \Delta t, g^T \Sigma g).$$

Izmantosim iepriekš minētas delta-normālas metodes formulas, kur $Z(\alpha) = \frac{VaR - P_t \Delta t}{\sqrt{g^T \Sigma g}}$ ir normālā sadalījuma α -kvantīle ($Z(\alpha) = 1.65$, kad $\alpha = 0.95$), no kuras var izteikt VaR vērtības formulu:

$$VaR = P_t \Delta T + Z(\alpha) \sqrt{g^T \Sigma g}.$$

Gadījumā, kas portfelis sastāv tikai no lineāriem instrumentiem, var izteikt sākojošo rezultātu. Pieņemsim, ka α_i ir instrumenta i daļa portfelī. Tad iepriekšējā izteiksme izskatīsies šādi:

$$VaR = \sum_i \mu_i \alpha_i + Z(\alpha) \sqrt{\alpha^T \Sigma \alpha},$$

kur $\mu_i = E[r_i(\Delta t)]$ ir i -tā instrumenta ienesīguma matemātiskā cerība (bieži tiek pieņemts, ka tā ir vienāda ar nulli).

6.2 Kvadrātiskie modeļi

Opciju tipa nelineāriem instrumentiem funkcija $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ ir nelineāri atkarīga no saviem mainīgajiem. Sadalījums $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ vairs nav normāls, tāpēc VaR aprēķināšanai ir jāizmanto citas metodes.

Gamma-normālajos modeļos funkcija $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ tiek aproksimēta līdz otrajai kārtai.

Pieņēmums 4. $P(t, x)$ ir divreiz atvasināms pēc t un x , un šie atvasinājumi tiek apzīmēti ar P_t , P_{tt} , g , $P_{t,x}$ un H , kur
 $P_t \equiv \frac{\partial P}{\partial t}$ un $P_{tt} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ - skalārie lielumi,
 $g \equiv \frac{\partial P}{\partial x}$, $P_{tt} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}$ ir $n \times 1$ vektori, H ir $n \times n$ matrica: $H_{i,j} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}$. Pārējie atvasinājumi ir vienādi ar nulli.

Tagad apskatīsim kvantiļu aprēķināšanas metodes.

Analītiskā metode

Šīs metodes mērķis ir aproksimēt sadalījumu $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ uz sadalījumu no noteiktas parametriskās saimes (kas nav normāla) un pēc tam atrast sadalījuma kvantīli. Sadalīsim $P(t, x)$ otras kārtas Teilora rindā:

$$P(t, x) = P(t_0, x_0) + P_t \Delta t + g^T \Delta x + \frac{1}{2} \{ \Delta x^T H \Delta x + 2 P_{tx} \Delta x \Delta t + P P_{tt} \Delta t^2 \}.$$

Tādejādi,

$$\Delta P(\Delta t, \Delta x) \equiv P(t, x) - P(t_0, x_0) = P_t \Delta t + g^T \Delta x + \frac{1}{2} \{ \Delta x^T H \Delta x + 2 P_{tx} \Delta x \Delta t + P P_{tt} \Delta t^2 \}$$

ir vektora Δx kvadrātiskā funkcija, kurai ir daudzdimensionāls normāls sadalījums. Statistikā šī funkcija ir zināma kā blīvuma funkcija.

Izmantosim sēkojošās statistikas īpašības. Pieņemsim, ka $y \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $A^T = A$,
 $Q(y) = y^T A y + a^T y + d$.

Tad sadalījuma $Q(y)$ r -tais moments ir vienāds ar

$$E(Q(y)^r) = \left[\sum_{r_1=0}^{r-1} \binom{r-1}{r_1} g^{r-1-r_1} \sum_{r_2=0}^{r-1} \binom{r-1}{r_2} g^{r-1-r_2} \dots \right],$$

kur

$$g^k = \begin{cases} \frac{1}{2}k! \sum_{j=1}^p (2\lambda_j)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{2} \sum_{j=1}^p b_j^2 (2\lambda_j)^{k-1}, & k \geq 1; \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (2\lambda_j) + (d + a^T \mu + \mu^T A \mu), & k = 0, \end{cases}$$

un

$$P^T \Sigma^{1/2} A \Sigma^{1/2} P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \Lambda, P P^T = I,$$

$$P^T (\Sigma^{1/2} a + 2 \Sigma^{1/2} A \mu) = b = (b_1, \dots, b_p) T.$$

Saprotamākajā formā, pirmajiem četriem momentiem šī formula dod sekojošās izteiksmes:

$$E(Q(y)) = \mu_1 = g^{(0)},$$

$$E(Q(y))^2 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} g^{(1)} \mu_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} g^{(0)} \mu_1,$$

$$E(Q(y))^3 = \mu_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} g^{(2)} \mu_0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} g^{(1)} \mu_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} g^{(0)} \mu_2,$$

$$E(Q(y))^4 = \mu_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} g^{(3)} \mu_0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} g^{(2)} \mu_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} g^{(1)} \mu_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} g^{(0)} \mu_3,$$

kur pieņemts, ka moments μ_0 ir vienāds ar 1. Mūsu apzīmējumos

$$y \sim N(0, \Sigma), A = \frac{1}{2} H, a = (g + P_{tx} \Delta t), d = P_t \Delta t + P_{tt} (\Delta t)^2.$$

Sadalījuma funkcijai $F_{\Delta P}$ neeksistē analītiskas izteiksmes, jo tajā ir liels skaits parametru, tāpēc tiek pieņemtas dažādas aproksimācijas, kuras izmanto sadalījumus pēc vienkāršākām viena mainīgā sadalījuma funkcijām (hī-kvadrāts u.c.) Piemēram, Korniša-Fišera (*Cornish-Fisher*) sadalījumam ir sekojoša izteiksme:

$$F_{\Delta P}(\alpha) = \Phi(\alpha) + \frac{1}{6}(\Phi(\alpha)^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(\Phi(\alpha)^3 - 3\Phi(\alpha))k_4 - \frac{1}{36}(2\Phi(\alpha)^3 - 5\Phi(\alpha))k_3^2,$$

kur $\Phi(\alpha)$ ir normālā sadalījuma funkcija; k_3, k_4 - sadalījuma $F_{\Delta P}$ kumulanti.

Optimizāciju metode

Izmantojot VaR definīciju (2.3), tā vērtību var atrast no optimizācijas uzdevuma. Izsakot pieņēmumu par portfeļa vērtības kvadrātisko funkciju un par stāvokļa mainīgo normālo sadalījumu, optimizācijas uzdevums būs formā

$$\max_{\Delta x: \Delta x^T \Sigma^{-1} \Delta x \leq k} -[P_t \Delta t + g^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x]. \quad (6.1)$$

Problēmas risinājums dod ne tikai VaR vērtības, bet arī iespējamo scenāriju (stāvokļa mainīgo vērtības), kurā šī VaR vērtība tiks sasniegta. Tomēr šī metode nav izdevīga gadījumos, kad pastāv liels stāvokļa mainīgo skaits.

Datu pārbaude

7 Sadalījumu pārbaude ar hipotēžu metodi

Pirms VaR aprēķināšanas ir svarīgi no sākuma izpētīt laukrindu. Izvēloties riska faktoru modeli ir nepieciešams zināt sadalījuma veidu un tā īpašības. Analizējot lielas kvantīles ir nepieciešams zināt arī ekstrēmo vērtību sadalījumus.

Izvēloties modeli un nosakot tās parametrus, ir jāsalīdzina to ar reāliem datiem. Ieviesīsim dažus apzīmējumus. Ar $(X_1, \dots, X_n)$ apzīmēsim neatkarīgo vienādi sadalīto gadījuma lielumu izlasi. Sakārtotu statistiku apzīmēsim ar $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) : X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Gadījuma lielums X sadalīts pēc sadalījuma funkcijas $F(x)$.

Definīcija 11. Kvantīles funkcija ir sadalījuma $F(x)$ inversā funkcija: $Q(p) := F^{-1}(p)$.

Attiecīgi empīriskā kvantiļu-funkcija ir

$$Q_n(p) = X_i^*, p \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right].$$

Reālo datu izlases īpašību analīzei ir ērti izmantot salīdzinoši vieglās grafiskās metodes, kas attiecās pie neparametriskiem statistikas testiem. Šī ir universālā metode datu sākotnējai analīzei.

7.1 Grafiskās metodes: Kvantiļu-kvantiļu grafiki

Ar $F(x, \theta)$ apzīmēsim sadalījuma funkcijas parametrisko modeli, bet ar $\hat{F} = F(x, \theta)$ - modeli ar novērtēto parametru. Tad par kvantiļu-kvantiļu (*Quantile-Quantile plot*) izlasei $(X_1, \dots, X_n)$ sauksim grafiku

$$\{(\hat{Q}(p_k), Q_n(p_k)), k = 1, \dots, n\}, \quad (7.1)$$

kur $p_k = k/(n+1)$, $\hat{Q}$ - sadalījuma funkcijas $\hat{F}$ teorētiskā kvantile.

Metodes ideja ir sekojoša: ja diviem gadījuma lielumiem X un Y pastāv sakarība g : $Y = g(X)$, tad kvantiļu-funkcijām arī pastāv šī sakarība: $Q_Y(p) = g(Q_X(p))$. Piemēram, ja pārveidojums g ir lineārs, tad arī kvantiļu grafiks būs taisne.

Tādejādi, kvantiļu grafiks palīdz noteikt, kurš sadalījuma veids vislabāk atbilst dotas gadījuma lielumu izlases aprakstam. Svarīgi, ka šajā metodē nav jāaprēķina sadalījuma parametri. Turklāt, ar grafikiem ir ērti salīdzināt viena gadījuma lieluma dažādu izlašu sadalījumus. Ar kvantiļu grafiku var iegūt arī sadalījumu atbilstības kvantitātes charakteristiku, proti, ranga korelāciju:

$$\rho_Q = \frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(\hat{q}_k - \bar{\hat{q}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\hat{q}_k - \bar{\hat{q}})^2}},$$

kur $q_k \equiv \hat{Q}(p_k)$, $\hat{q}_k \equiv Q_n(p_k)$. Koeficienta vērtība, kas ir vienāda vai lielāka par 0.999 ar ticamības pakāpi 95% apstiprina hipotēzi par sadalījuma atbilstību [4].

7.2 Sadalījuma normalitātes pārbaude ar momentu metodi

Vairākums VaR modeļu izmanto pieņēmumu par sadalījuma normalitāti, tāpēc ir nepieciešams pārbaudīt ienesīguma sadalījumus. Iegūstot to statistiku, tiek pārbaudīta tā novirze no normālā sadalījuma, proti, asimetrija (*skewness*) un ekscess (*kurtosis*). Pozitīvs asimetrijas koeficients nozīmē to, ka sadalījumam ir gara labā aste, bet negatīvā gadījumā ir gara kreisā aste.

Apskatīsim izlasi ar T novērojumiem, kuras sagaidāmā vērtība (pirmais moments) $\mu = E(X)$ var būt novērtēta ar izlases vidējo:

$$m = \hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i,$$

bet izlases dispersija ir

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(T-1)} \sum_{i=1}^T (x_i - \hat{\mu})^2.$$

Asimetrijas koeficientu izlasei var aprēķināt pēc formulas

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{(T-1)} \sum_{i=1}^T (x_i - \hat{\mu})^3 / \hat{\sigma}^3.$$

Ekscesa koeficients mēra sadalījuma vājumumu vai ciešumu, parāda cik smagas ir astes. Normālā sadalījuma gadījumā ekscesa koeficientam ir jābūt vienādam ar 3. Ja ekscesa koeficients

ir lielāks par 3, tad sadalījums ir izstiepts attiecībā pret y asi, bet, ja mazāks par 3, tad sadalījums ir izstiepts attiecībā pret x asi [8]. Koeficientu aprēķina pēc formulas,

$$\hat{k} = \frac{1}{(T-1)} \sum_{i=1}^T \left(\frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^4.$$

7.3 Valūtu tirgus izpēte

Esošajā vērtspapīru tirgu visizplatītākie ir tradicionālie parametriskie modeļi, kuru aprēķini tiek balstīti uz pieņēmuma par riska faktoru normālo sadalījumu. Izpētot Latvijas Bankas valūtu kursus viena gada laikā (260 dienas), tika pārbaudīta to atbilstība normālajam sadalījumam. Pārbaudei tika sastādīts valūtu portfelis ar 12 nosacīti stabilākām un vietējā tirgū populārākām valūtām: Austrālijas dolārs (AUD), Kanādas dolārs (CAD), Šveices franks (CHF), Ķīnas juaņs (CNY), Dāņu krona (DKK), Lielbritānijas mārciņa (GBP), Japānas jēna, Norvēģu krona (NOK), Jaunzēlandes dolārs (NZD), Krievijas rublis (RUB), Zviedrijas krona (SEK) un ASV dolārs (USD) [9].

1 tabulā katrai valūtai ir norādīts asimetrijas koeficients, ekscesa koeficients, ka arī valūtu sadalījums tika pārbaudīts ar Kolmogorova-Smirnova (KS) testu un tabulā ar “x” ir atzīmēts rezultāts, kad sadalījums pēc hipotēžu pārbaudes nebija noraidīts. Ir atzīmētas arī tās valūtas, kuras pieder pie “izejvielu valūtām” (*commodity currency*) - tādu valstu valūtām, kuru eksports ir pārsvarā orientēts uz vienu preču grupu, visbiežāk izejvielām. Tās ir viegli prognozējamas, jo ir atkarīgas no zelta (AUD), naftas (NOK) un citu izejvielu cenu svārstībām, tām piemīt stabils trends un augsta volatilitāte, ar kuras iespējams nopelnīt [10], [11].

Tabula 1: Valūtu kursu statistika

	Asimetrija	Ekscess	KS tests	Izejvielu valūta
AUD	0,0592	0,057	x	x
CAD	-0,209	-0,185	x	
CHF	-1,647	1,779		
CNY	-0,088	-0,522	x	
JPY	-0,0243	-0,775	x	
NOK	-0,044	-0,808	x	x
NZD	-0,173	0,0684		x
RUB	-0,173	-1,081		
SEK	0,632	-0,306		
USD	0,270	-0,680		

No 1 tabulas var redzēt, ka tikai 6 no 12 valūtām piemīt normālais sadalījums, turklāt ļoti vāji izteikts, ja ņem vērā ekscesa koeficientu. Arī salīdzinot valūtu kursu svārstību sadalījumus ar normālo sadalījumu kvantīļu grafikos, ir redzams, ka datu sadalījumiem ir izteikti smagās astes. Ar kvantīļu grafikiem var iepazīties 1. pielikumā. Pirmajā stabiņā ir grafiki datiem, kurām H_0 hipotēze pēc KS testa netika noraidīta.

Sastādot portfeli testēšanai ar VaR metodēm, tika izvēlētas 6 valūtas, atkarībā no iepriekšējās tabulas rezultātiem un korelācijas koeficienta. 2. tabulā redzami izvēlēto valūtu korelācijas koeficienti, 2. pielikumā var iepazīties arī ar pārējo valūtu radītājiem.

Tabula 2: Valūtu korelācijas

	AUD	DKK	JPY	NOK	RUB	USD
AUD	1	-0,13	0,43	0,51	0,27	0,46
DKK		1	0,03	-0,35	0,04	0,02
JPY			1	0,24	-0,14	0,7
NOK				1	0,25	0,40
RUB					1	-0,01
USD						1

Pārējām valūtām ir raksturīgas stiprās korelācijas. Portfelī ir ieteicams iekļaut DKK un RUB, jo tām ir negatīvas vai vāji pozitīvas korelācijas, tātad situācijā, kad citām valūtām kurss krīt uz leju, DKK un RUB kursi pieaugs un samazinās zaudējumus. JPY ir samērā eksotiska valūta Latvijas tirgum un tai ir pieņemamas korelācijas, bet USD tika paņemta portfelī savas popularitātes dēļ. AUD un NOK tika iekļauti, jo abas ir “izejvielu valūtas”, turklāt ar normālo sadalījumu. Pieņemot, ka ilgāk apskatītajā laika periodā visu valūtu svārstību sadalījumi varētu būt tuvāki normālajām, šo divu valūtu svars ir 25% katrai, pārējām valūtām ir 12,5%.

Tā kā portfeļa zaudējumi nav normāli sadalīti, var pieņemt, ka objektīvajam VaR novērtējumam būtu jāizmanto neparametriskās metodes.

Tabula 3: Valūtu portfelis VaR novērtēšanai

	Kurss 13.06.2012.	Pozīcija (LVL)
AUD	0,557	15000
DKK	0,095	7500
JPY	0,707	7500
NOK	0,093	15000
RUB	0,017	7500
USD	0,562	7500

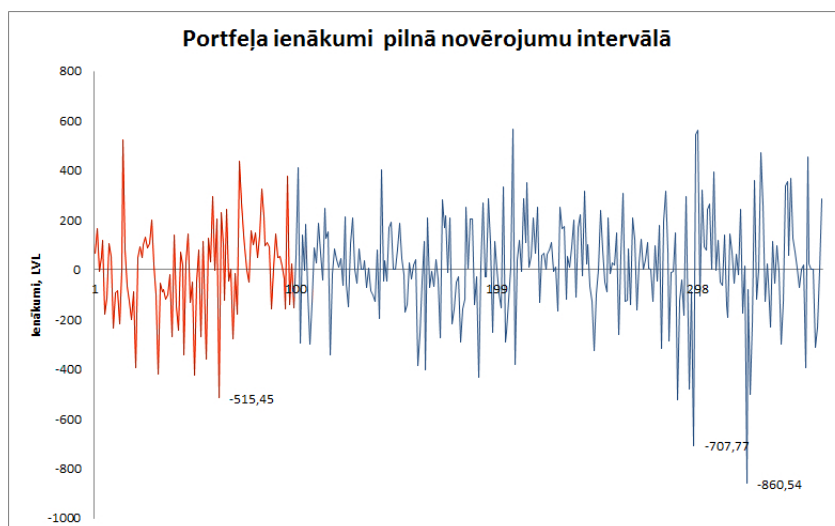
8 VaR metožu pielietošana

Lai izpētītu VaR metožu precizitāti, tika izmantoti Latvijas Bankas noteiktie valūtu kursi no 16.06.2011. līdz 13.06.2012. (260 tirgus dienas). Izmantojot šos datus, 100 darba dienu laikā tika taisītas 1 dienas prognozes (laika intervālā no 14.06.2012.-31.10.2012.) sešu valūtu portfeļim (3 tabula).

1 attēlā var redzēt, kā ir mainījušies portfeļa ienākumi visā 360 dienu novērojumu laikā. Ar sarkano ir iezīmēts novērtējumu periods, ar zilu - visi pārējie dati. Pēc x ass ir norādīti iepriekšējo dienu dati, jo lielāks x , jo vecāks ir novērojums. Novecojuši novērojumi, kas ir attēloti no labās puses, attēlo lielākus zaudējumus, kas ietekmēja dažas metodes, piemēram, vēsturisko modelēšanu.

Pārbaudei tika izmantotas sekojošās metodes:

1. Vēsturiskās modelēšanas (VM) metode;
2. Delta-normālā (DN) metode;
3. Eksponenciāli svērtās kovariācijas (EWMA);
4. GARCH(1,1) metode ar konstantām korelācijām (GARCH);
5. Kodola novērtēšanas metode (KN);
6. Veivletu metode ar Hāra veivletu pārveidojumu (W).

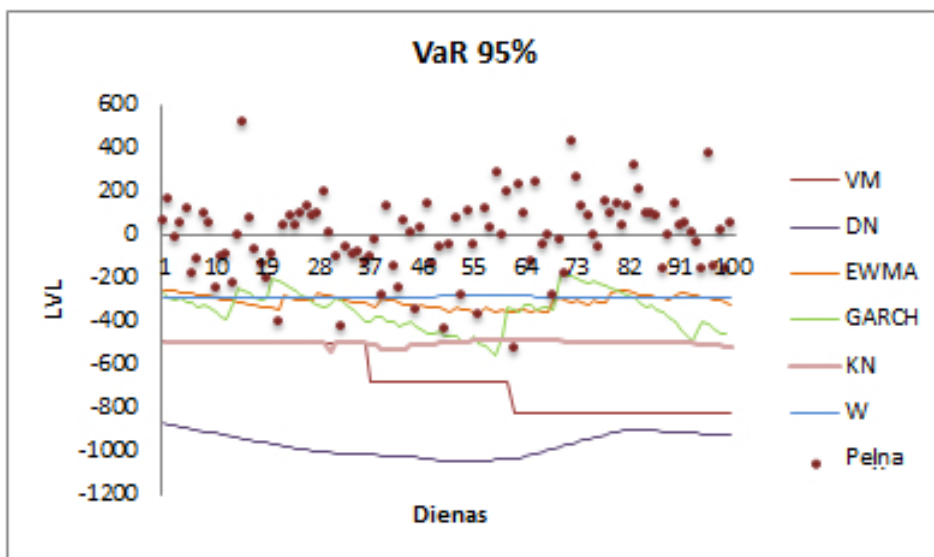


Att. 1: Ienākumu svārstības laika periodā 16.06.2011.-31.10.2012.

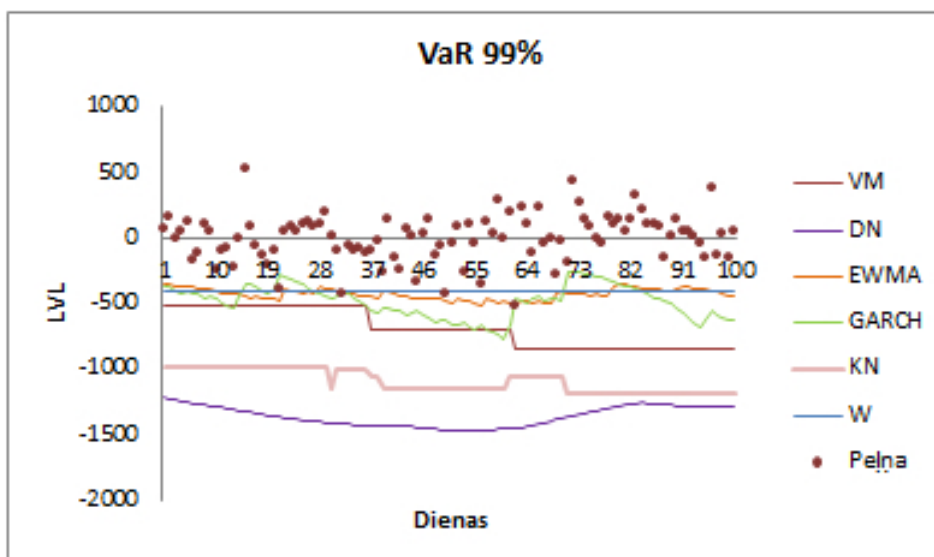
2 un 3 attēlos ir redzami 100 prognožu dienu rezultāti ar ticamības līmeni 95% un 99%. Ar punktiem ir attēlota faktiskā ienākumu funkcija, ar līnijām - prognozes par maksimālajiem zaudējumiem. Ir redzams, ka delta-normālas metodes un vēsturiskās modelēšanas prognozes ir pārāk konservatīvas. To varētu izskaidrot ar to, ka sadalījumi nav normāli, kas ir Delta-normālas metodes galvenais pieņēmums. Vēsturiskajā modelēšanā ar trepveida funkciju uzskatāmi redzams, kā iepriekšējo dienu ekstrēmie zaudējumi ietekmē nākamo dienu prognozes. Bez šiem notikumiem rezultāti varētu būt ļoti līdzīgi kodola novērtēšanas metodei, jo laika posmā, kad prognozes vairs netiek ietekmētas ar ekstrēmiem notikumiem, VM un KN robežas 95% prognozei paliek praktiski identiskas.

8.1 Novērtējumu precizitāte

Izvēloties labāku VaR metodi, ir jāizvirza mērķi tās aprēķināšanai. Ja ir svarīga metodes būtība, maksimālā riska robeža, tad būtu jāpievērš uzmanību kļūdu skaitam, t.i., gadījumiem, kad rezervēta naudas summa nebija pietiekami liela, lai segtu zaudējumus. Tāda vērtēšana ir svarīga finanšu iestādēs, kas tiek kontrolētas ar Bāzeles komitejas pieņemto testu, ar kuru nosaka, vai dotā metode ir pietiekami precīza. Gadījumā, ja portfeļa izmērs naudas ekvivalentā nav tik liels un metode tiek izmantota citām, piemēram, privātām vajadzībām, būtu svarīgi, lai metode pēc iespējas precīzāk apraksta ienākumu svārstības. Var būt situācijas, kad VaR pārsniegumos zaudētas summas rada mazākus zaudējumus, nekā pārāk konservatīvi rezervēti un beigās - neizmantoti naudas līdzekļi.



Att. 2: VaR prognozes 100 dienu intervālā ar ticamības līmeni 95%



Att. 3: VaR prognozes 100 dienu intervālā ar ticamības līmeni 99%

Binārā zaudējumu funkcija

Bināra zaudējumu funkcija tiek izmantota, lai analizētu notikumu skaitu, kad zaudējumi pārsniedza noteikto VaR robežu. Matemātiski to var pierakstīt šādi:

$$L_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{ja } \Delta P_{t+1} > VaR_t, \\ 0, & \text{ja } \Delta P \leq VaR_{t+1}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Funkcija bez zaudējumu apjoma noteikšanas saskaista pārkapumu skaitu. Bāzeles komiteja pārbauda VaR metodes 99% ticamības līmeņa prognozes pēc kļūdu skaita un pieskaita pie vienas no zonām:

- Zaļā zona, ja 250 dienu laikā tika konstatēti ne vairāk kā 4 pārsniegumi. Metodi var izmantot riska novērtēšanai;
- Dzeltenā zona, ja kļūdu skaits ir no 5 līdz 9. Būtu jāveic papildus pārbaudes, iespējams ir jānomaina vērtēšanas metodi;
- Sarkanā (nepieņemama) zona, ja pārsniegumu skaits vienāds vai lielāks par 10. Metode nav efektīva un ir jāizmanto citas.

Izmantota modeļa korekcija notiek reizi kvartālā, izmantojot VaR rādītāja mēroga palielināšanu, t.i. prasību paaugstināšanu līdz tādām līmenim, kad VaR 99% ticamības līmeņa prognozes kļūst pietiekami drošas. Tā kā mēroga koeficients tiek noteikts reizi kvartālā, tam ir jābūt pietiekami liels, lai segtu lielus zaudējumus. Tas, savukārt, nozīmē to, ka metode kļūst pārāk konservatīva un lielas naudas summas paliek neizmantotas [3].

Korekcijai tiek pakļautas metodes no dzeltenās zonas. Atkarībā no pārsnieguma punktu skaita, VaR vērtība ir jāreizina ar koeficientu no 4 tabulas [12].

Tabula 4: VaR reizināšanas koeficients 5-9 pārsnieguma punktu gadījumā

Pārsniegumu skaits	5	6	7	8	9
Reizināšanas koeficients	3.4	3.5	3.65	3.75	3.85

Pēc iegūtiem pārbaudes rezultātiem (5 tabula), Bāzeles banku uzraudzības komitejas noteikumiem atbilst vēsturiskā modelēšana, delta-normāla metode un kodola novērtēšanas metode.

Jāatzīmē, ka EWMA un veivletu metodes ir vistuvākās noteiktiem ticamības līmeņiem (1 kļūda 100 dienās, ja ticamības līmenis ir 99% un 5 kļūdas, ja ticamības līmenis ir 95%), kas nozīmē, ka modeļi ir diezgan precīzi.

Tabula 5: Pārsnieguma punktu skaits 100 testēšanas dienu laikā

	95%	99%
VM	0	0
DN	0	0
EWMA	5	2
GARCH	3	3
KN	1	0
W	6	3

Sadalījumu atbilstība

Ar šo testu var noteikt VaR sadalījuma atbilstību reālajam peļņas sadalījumam. Izmantosim sekojošo attiecību:

$$K(\alpha) = \frac{\overline{BL}(\alpha)}{1 - \alpha}, \quad (8.2)$$

kur $\overline{BL}(\alpha)$ ir bināras funkcijas vidējā vērtība pie ticamības līmeņa $1 - \alpha$.

Gadījumā ja sadalījumi sakrīt, tiek iegūta funkcija, kas vienāda ar 1. Tātad, jo tuvāka vērtība vieniniekam, jo precīzāks ir modelis. Kā redzams 6 tabulā, vistuvāk VaR sadalījumam atbilst EWMA modelis.

Ja koeficients ir lielāks par 1, var secināt, ka sadalījums ir “smagāks” un notiek riska nepilna novērtēšana.

Modeļa efektivitāte

Pasīvajā risku pārvaldē VaR tiek pielietots, lai novērtētu riska kapitāla apjomu. Ja VaR robeža nebija pietiekami liela, nepietiks rezervēta kapitāla, lai segtu zaudējumus, un tas var nest papildus zaudējumus. No otras puses, pārāk konservatīvas metodes, kas pārāk strikti ierobežo kapitālu, ir ekonomiski neefektīvas.

Tabula 6: VaR metodes atbilstība peļņas sadalījumam

	95%	99%
VN	0	0
DN	0	0
EWMA	1	2
GARCH	0,6	3
KN	0,2	0
W	1,2	3

Nosacītā zaudējumu funkcija Šī funkcija nosaka riska robežu pārsniegšanu naudas līdzekļu ekvivalentā:

$$L_{t+1} = \begin{cases} \frac{|\Delta P_{t+1}| - VaR_t}{VaR_t}, ja |\Delta P_{t+1}| > VaR_t, \\ 0, ja |\Delta P_{t+1}| \leq VaR_t. \end{cases}$$

Šī funkcija neņem vērā pārsniegumu skaitu, bet tikai to apjomu. 7 tabulā ir redzami summārie un vidēji pārsniegumi.

Tabula 7: Vidējie rādītāji nosacītai zaudējumu funkcijai

	Pārsniegtā summa		L (vidējais pārsniegums)	
	95%	99%	95%	99%
VM	0	0	0	0
DN	0	0	0	0
EWMA	451,55	17,08	90,31	8,54
GARCH	708,50	187,91	236,17	62,64
KN	38,23	0	38,23	0
W	918,60	147,63	153,10	49,21

Tabula 8: Vidējie rādītāji neizmantotā riska funkcijai

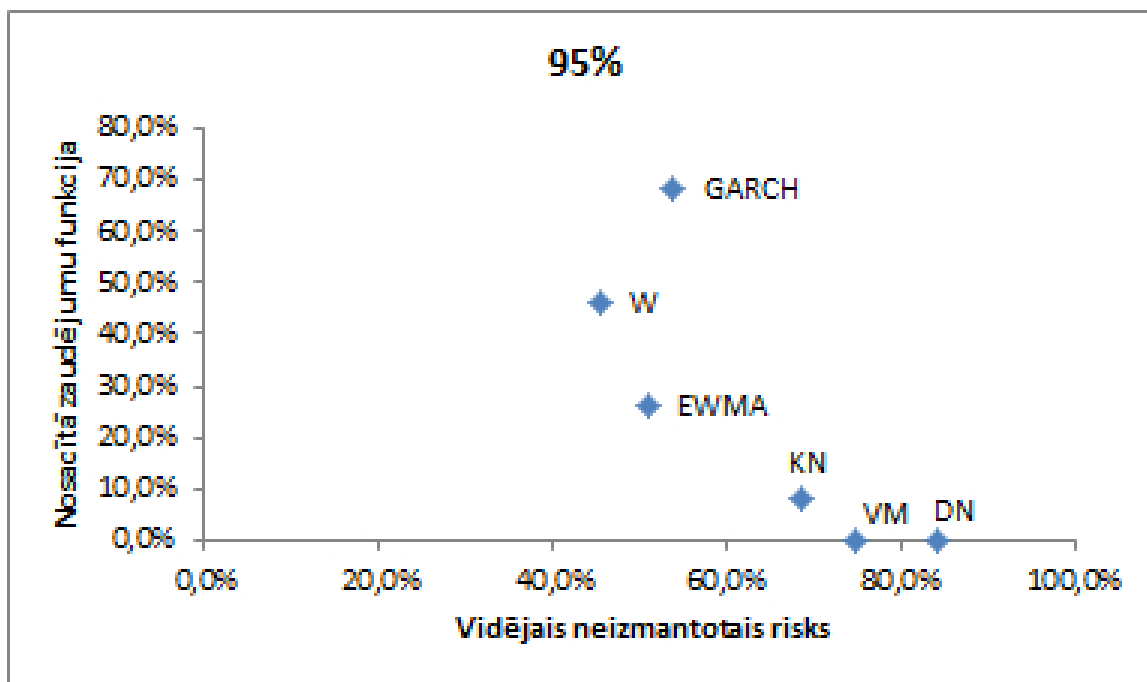
	95%	99%
VM	74,9%	75,9%
DN	84,3%	88,9%
EWMA	50,9%	65,2%
GARCH	53,9%	67,4%
KN	68,6%	85,6%
W	45,5%	62,1%

Vidējais neizmantotais risks Ar šo testu parāda, par cik VaR novērtējums vidēji pārsniedz faktiskus zaudējumus, t.i., cik liela summa paliek neizmantota. Zaudējumu funkcija ir

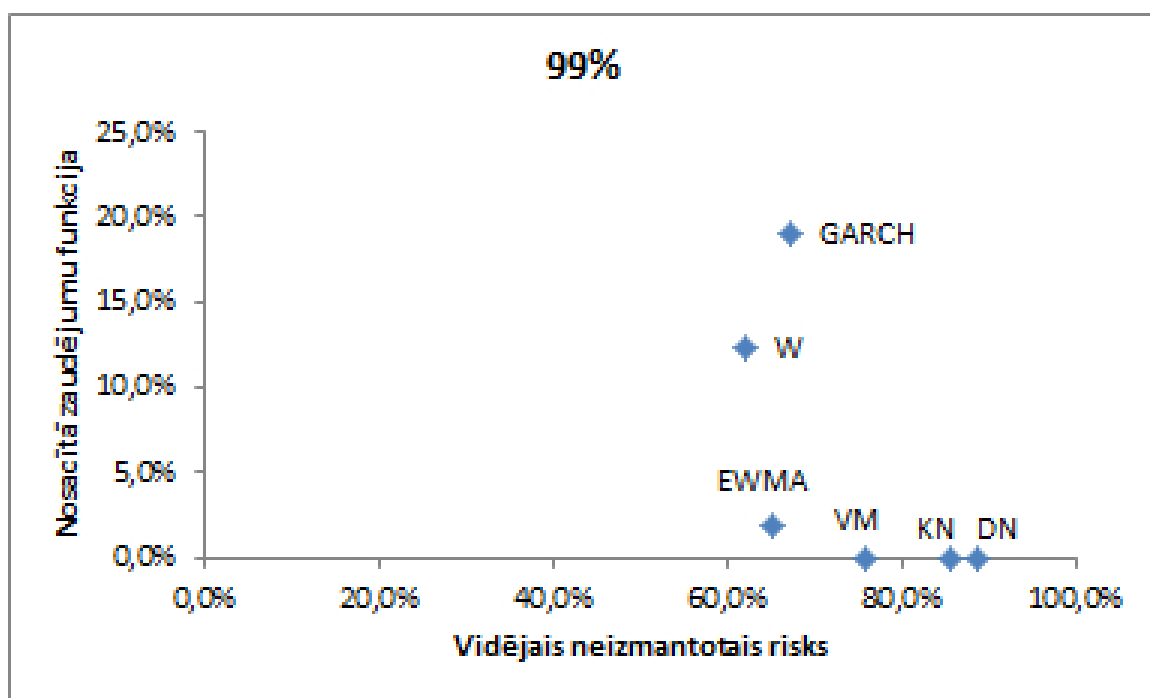
$$L_{t+1} = \begin{cases} \frac{VaR_t - |\Delta P_{t+1}|}{VaR_t}, & ja |\Delta P_{t+1}| > VaR_t, \\ 0, & ja |\Delta P_{t+1}| \leq VaR_t. \end{cases} \quad (8.3)$$

Tā kā neizmantotā summa nenēs ienākumus, būtu vēlams, lai tā ir minimāla. It īpaši šis nosacījums ir svarīgs finanšu iestādēm, kurām pēc Bāzeles komitejas noteikumiem VaR kapitālu ir jārezervē trīskāršā apjomā. 8 tabulā ir redzams, ka vislabāk šajā testā sevi parāda veivletu metode.

Pareto efektivitāte Divus iepriekšējos kritērijus var apvienot vienā, izmantojot Pareto efektivitātes modeli. Ar to iespējams noteikt līdzsvaru starp minimāli neizmantotiem resursiem un minimālajiem zaudējumiem VaR pārkāpšanas gadījumos. Efektīvākie rezultāti atrodas uz taisnes $y = x$ tālāk no centra. Pēc 4 un 5 grafikiem var redzēt, ka 95% VaR vislabāk apraksta un ekonomiski efektīvāka ir veivletu metode, bet 99% nedaudz labāka ir GARCH(1,1) metode.



Att. 4: Vidējā pārsnieguma/vidēji neizmantotā riska funkciju grafiks valūtu portfelim 100 pārbaudes dienu laikā ar ticamības līmeni 95%



Att. 5: Vidējā pārsnieguma/vidēji neizmantotā riska funkciju grafiks valūtu portfelim 100 pārbaudes dienu laikā ar ticamības līmeni 99%

Secinājumi

Tirgus riskus var aprēķināt ar VaR metodoloģiju, kas ir portfeļa maksimālo zaudējumu novērtējums ar noteiktu varbūtības pakāpi pie noteikta tirgus faktoru sadalījuma dotā laika periodā. VaR rēķina ar dažādām metodēm, taču dažas prasa lielus naudas līdzekļus, citas neparedz tirgus attīstības izmaiņas.

Izmantojot tradicionālās parametriskās metodes ir svarīgi pārbaudīt izlases sadalījumu. Praktiskajos aprēķinos tika konstatēts, ka lineāro instrumentu ienesīguma sadalījumi reti atbilst normālajam un šis faktors ietekmē prognozes precizitāti metodēm, kas ir balstītas uz šī pieņēmuma.

No parametriskajām metodēm sliktākus rezultātus parādīja delta-normālā metode. Kaut arī tā ir Bāzeles banku uzraudzības komitejas ieteicama metode un atbilst komitejas prasībām par precizitāti, tā rāda cita veida zaudējumus, liedzot riskā neizmantotu naudu laist apgrozījumā. Salīdzinot, piemēram, ar EWMA metodi, rezervētā naudas summa bija par 66% lielāka un par 85% lielāka, nekā veivletu analīzes metodē.

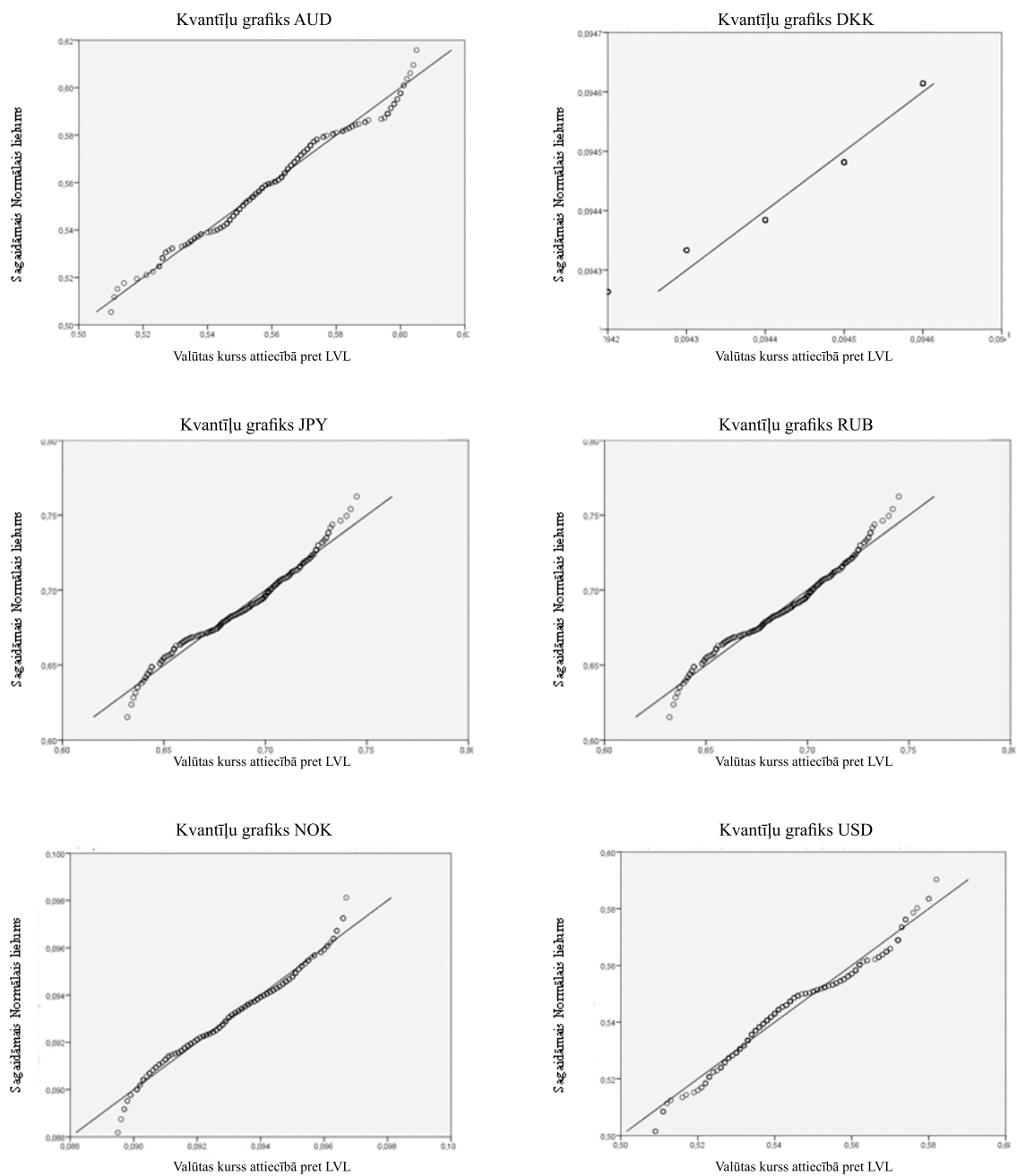
No klasiskām metodēm sevi attaisnoja EWMA metode, kura parādīja labus rezultātus visos parametros. Tās sadalījums atrodas vistuvāk reālajiem datiem un tā ir ekonomiski efektīva.

Visvienkāršākā ir vēsturiskās modelēšanas metode, kuru var izmantot plašajās masās. Tai nav nepieciešama sadalījuma izpēte un rezultāti atbilst prasībām par precizitāti. Galvenais trūkums ir prasība pēc datu apjoma priekš riska novērtēšanas. Ir grūti atrast bilanci starp divām problēmām: īsajā laika intervālā ir iespējams pieļaut daudz kļūdu, bet garajā intervālā nākas izmantot novecojošus datus. Praktiskie aprēķini parādīja, ka daži kritiskie punkti var ievērojami sabojāt tālākās prognozes ilgajam laika intervālam. Kā risinājumu šai problēmai var izmantot kodola novērtēšanas metodi. Novērtējot riskus “mierīgajā” laikā, tā parādīja līdzīgus rezultātus vēsturiskai metodei un intervālos pēc ekstrēmiem notikumiem tā turpināja rādīt precīzākus rezultātus.

Veivletu metode, kurai pēdējos gados tiek piemeklēti jauni pielietojumi, parādīja sevi no labas puses un var būt izmantota riska pārvaldē. No ekonomiskā skatu punkta, veivletu analīze ir labāka. Šo metodi var izmantot arī citiem, nelineāriem instrumentiem, tāpēc būtu lietderīgi to

izpētīt padziļināti, lai sasniegtu precīzākus rezultātus.

1. Pielikums



Att. 4: Kvantīļu grafiki Normālajam sadalījumam. Valūtu kursi attiecībā pret Latvijas latu

2. Pielikums

Tabula 9: Valūtu kursu korelācijas koeficienti

	AUD	CAD	CHF	CNY	DKK	GBP	JPY	NOK	NZD	RUB	SEK	USD
AUD	1	0,549	0,341	0,472	-0,130	0,463	0,434	0,514	0,768	0,268	0,658	0,459
CAD	0,549	1	0,476	0,709	-0,210	0,839	0,497	0,668	0,641	0,188	0,627	0,687
CHF	0,341	0,476	1	0,468	0,179	0,527	0,261	0,378	0,330	0,396	0,254	0,456
CNY	0,472	0,709	0,468	1	-0,160	0,725	0,667	0,432	0,481	0,018	0,437	0,994
DKK	-0,130	-0,210	0,179	-0,160	1	-0,153	0,030	-0,354	-0,273	0,036	-0,375	0,018
GBP	0,463	0,839	0,527	0,725	-0,153	1	0,514	0,592	0,559	0,180	0,543	0,705
JPY	0,434	0,497	0,261	0,667	0,030	0,514	1	0,242	0,381	-0,141	0,342	0,701
NOK	0,514	0,668	0,378	0,432	-0,354	0,592	0,242	1	0,642	0,254	0,678	0,404
NZD	0,768	0,641	0,330	0,481	-0,273	0,559	0,381	0,642	1	0,264	0,770	0,459
RUB	0,268	0,188	0,396	0,018	0,036	0,180	-0,141	0,254	0,264	1	0,186	-0,010
SEK	0,658	0,627	0,254	0,437	-0,375	0,543	0,342	0,678	0,770	0,186	1	0,408
USD	0,459	0,687	0,456	0,944	0,018	0,705	0,701	0,404	0,459	-0,010	0,408	1

Izmantotā literatūra un avoti

- [1] А.В. Лукашов. Риск менеджмент и количественное измерение финансовых рисков в нефинансовых корпорациях. *Управление корпоративными рисками*, 2005.
- [2] А. Бовин. Ofsa. Основные принципы. Часть 3. Вычисление value-at-risk. <http://citforum.ru/consulting/articles/ofsa/ofsa3.shtml>, 2006.
- [3] Е.И. Кайнова А.А. Лобанов. Сравнительный анализ методов расчета var-лимитов с учетом модельного риска на примере Российского рынка. *Управление финансовыми рисками*, 2005.
- [4] *Рыночные риски: модели и методы*. Вычислительный центр РАН, 2000.
- [5] Yuri Hamburger. Wavelet-based value at risk estimation. Master's thesis, Erasmus University, 2003.
- [6] I.N. Khindanova, S.T. Rachev, E.S. Schwartz, and Santa Barbara. Dept. of Economics University of California. *Stable Modeling of Value at Risk*. Working paper in economics. University of California, Santa Barbara, Department of Economics, 2000.
- [7] W. Fallon, Wharton School, and Wharton Financial Institutions Center. *Calculating Value-at-risk*. Working paper series (Wharton Financial Institutions Center). Wharton School, University of Pennsylvania, 1996.
- [8] P. Jorion. *Value At Risk 3E*. McGraw-Hill Education (India) Pvt Limited, 2009.
- [9] Сырьевые валюты. <http://noswap.ru/publ/49-1-0-253>.
- [10] Ratna Sahay P. Cashin, L.F. Cespedes. Commodity currencies and the real exchange rate. Technical report, Central Bank of Chile Working Papers, 2003.

- [11] Waranya Pim Chanthapun. Portfolio rebalancing: A factor model of commodity currencies.
- [12] D. Murphy. *Understanding Risk: The Theory and Practice of Financial Risk Management*. Chapman & Hall/Crc Financial Mathematics Series. Taylor & Francis Group, 2008.

Bakalaura darbs “Riska mēra novērtēšanas metodes vērtspapīru portfelim” izstrādāts LU Fizikas un Matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Kristīna Kuzmova

(paraksts)

(datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Doc. Jānis Valeinis

(paraksts)

(datums)

Recenzents: Mat.mag. Māra Vēliņa

(paraksts)

(datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā _____

(datums)

(darbu pieņēma)

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____ prot. Nr. _____, vērtējums _____

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: _____

(Vārds, Uzvārds)

(paraksts)