LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

STATISTISKIE TOLERANCES INTERVĀLI

KURSA DARBS

Autors: **Margarita Fjodorova**

Stud. apl. mf05002

Darba vadītājs: doc. Dr.math. Jānis Valeinis

RĪGA 2009

Anotācija

Darbā tiek aplūkoti vienpusējie un divpusējie tolerances intervāli parametriskajā gadījumā. Šo intervālu pielietojums praksē atšķiras no ticamības intervālu pielietojuma. Ja ir nepieciešams noteikt, kāda procentuālā izlases daļa iekļausies kādās specifiskās robežās, tad tolerances intervāls spēj sniegt atbildi uz šo jautājumu. Ar piemēru palīdzību tiek attēloti dažādo tolerances intervālu pielietojumi, atkarībā no dotās situācijas. Šie intervāli var veiksmīgi tikt pielietoti dažādiem sadalījumiem, bet šajā kursa darbā tiek aplūkots normālā sadalījuma gadījums. Aprēķinu veikšanai tiek izmantota programma R.

Abstract

This thesis deals with one-sided and two-sided tolerance intervals in parametric case. The practical applications of these intervals differ from the confidence intervals. If there is a need to estimate what percental part of the sample will be included in the specificated limits, then tolerance intervals can solve this problem. With examples it is shown how to use different tolerance intervals depending on the given situation. These intervals can be succesfully used for various distributions, but in this thesis normal distribution case will be observed. The calculations are done by use of program R.

Saturs

Ievads **2**

1. Tolerances intervāli un izdzīvošanas varbūtība **4**

1.1. Vienpusējie tolerances intervāli 4

1.2. Divpusējie tolerances intervāli 5

1.3. Izdzīvošanas varbūtības novērtējums 7

2. Pamatformulas **9**

3. Tolerances intervāli normāli sadalītai populācijai **12**

3.1. Vienpusējās tolerances robežas normāli sadalītai populācijai 12

3.1.1. Klasiskā pieeja 12

3.1.2. Izdzīvošanas vai pārsniegšanas varbūtības novērtēšana normāli sadalītai populācijai 13

3.1.3. Lognormālais sadalījums 13

3.2. Divpusējie tolerances intervāli normāli sadalītai populācijai 14

3.3. Vienādo astu tolerances intervāli normālajam sadalījumam 16

4. Praktiskais pielietojums **18**

Secinājumi **21**

Izmantotā literatūra un avoti **22**

A Izveidoto programmu kods **22**

Ievads

Statistikā viens no pamatjautājumiem ir ticamības intervālu konstruēšana, kas parasti sniedz informāciju par kādu nezināmu populācijas parametru. Tomēr ir gadījumi, kad ticamības intervāls nespēj sniegt pietiekoši daudz informācijas par visu populāciju kopumā. Kā izrādās, šādiem uzdevumiem ir paredzēti tolerances intervāli, kas parasti lekciju kursos netiek apskatīti. Tolerances intervāliem ir patiesi daudzveidīgs pielietojums. Tos izmanto klīniskajos un rūpnieciskajos pētījumos, tādos kā kvalitātes kontrole, apkārtējās vides monitorings jeb vides kontrole, divu metožu vai paņēmienu saskaņošanas novērtēšana[**?**]. Tolerances robežas un tolerances intervāli pirmo reizi tika pieminēti jau 1941. un 1942. gados autora S.S. Wilks publikācijās. Autors uzsvēra tolerances intervālu lietderīgumu industriālās ražošanas kvalitātes kontroles pētniecībā, parādīja atšķirību starp vienpusējo un divpusējo tolerances intervālu. Piemēram, ja, ražojot tērauda stieples, jānosaka spēks, kuru piemērojot, šīs stieples lūzīs, tad nozīmīgākā būs tieši apakšējā tolerances robeža. Šajā gadījumā apskata vienpusējo tolerances intervālu[**?**]. Pēc 1941. gada vairāk kā pusgadsimta garumā tolerances intervāli tika pielietoti dažādu problemātiku risināšanai. Sava kursa darba rakstīšanai par teorētisko pamatu izmantoju 2009. gada grāmatu, kas apliecina šī jautājuma aktualitāti.

Tiek gaidīts, ka tolerances intervāls aptvers vismaz noteiktu populācijas daļu, pie dota ticamības līmeņa. Piemēram, augšējā tolerances robeža ir tāda, ka ar dotu ticamības līmeni vismaz kāda specifiski izvēlēta populācijas procentuālā daļa atradīsies zem šīs robežas. Apakšējā tolerances intervāla robeža vai tolerances intervāls ar abām robežām tiek meklēti pēc līdzīgiem nosacījumiem.

Tolerances intervāli var tikt piemēroti dažādiem sadalījumiem, bet praksē visbiežāk pielietotais sadalījums ir normālais sadalījums, tādēļ savā kursa darbā apskatīšu vienpusējos un divpusējos tolerances intervālus tieši normālajam sadalījumam, kā arī aplūkošu normālā un lognormālā sadalījuma sakarības tolerances intervālu konstruēšanai. Tolerances intervāli var būt parametriski un neparametriski. Kursa darba ietvaros apskatīšu tikai parametrisko gadījumu.

Kā galvenais mērķis ir izprast atšķirību starp ticamības un tolerances intervāliem un to pielietojumiem, un kādos gadījumos tolerances intervāli dod labākus rezultātus. Šī mērķa sasniegšanai ir nepieciešama teorijas izpēte, un tās pielietošana praksē.

Šajā kursa darbā ir 4 galvenās nodaļas. 1. nodaļā tiek iepazīstināts ar to, kas ir augšējā un apakšējā tolerances robeža, parādīta sakarība starp šīm robežām un kvantilēm. Sākumā aplūko vienpusējo tolerances intervālu. Līdzīgi arī tiek apskatīta vispārīga teorija par divpusējo tolerances intervālu. Tālākajā apakšnodaļā tiek novērtēta izdzīvošanas un pārsniegšanas varbūtība. Ar nelielu piemēru palīdzību, tiek parādīts, kādos gadījumos šādas varbūtības ir aktuālas. 2. nodaļā iespējams iepazīties ar svarīgiem rezultātiem, kas tiek piemēroti tolerances intervālu rēķināšanai normālajam sadalījumam. 3. nodaļas sākumā var uzzināt, kas ir tolerances robežas kvantilēm normālā sadalījuma gadījumā, kas ir tolerances faktors. Tad seko trīs apakšnodaļas, kurās tiek aplūkota klasiskā pieeja vienpusējo tolerances robežu aprēķināšanai normāli sadalītās populācijas gadījumā, dots teorētisks pamatojums izdzīvošanas un pārsniegšanas varbūtībai normāli sadalītai populācijai un tiek aplūkots lognormālais sadalījums, ko var pielietot metodēm, kas balstās uz normālo sadalījumu. Tālāk tiek apskatīta teorija par divpusējo tolerances intervālu normāli sadalītai populācijai, kā arī izveidota neliela tabula aproksimēto un eksakto tolerances faktoru vērtību salīdzināšanai. Visbeidzot, tiek aplūkots teorētiskais pamats vienādo astu tolerances intervāliem. 4. nodaļā ir divi piemēri, kuros tiek konstruēti vienpusējie un divpusējie tolerances intervāli normāli sadalītiem datiem.

1. Tolerances intervāli un izdzīvošanas varbūtība

1.1. Vienpusējie tolerances intervāli

Pieņem, ka X ir nepārtraukts gadījuma lielums ar kumulatīvo sadalījuma funkciju $F_X(x) = P(X \leq x)$. Pie dota $p\,(0 < p < 1)$, inversā kumulatīvā sadalījumam funkcija ir definēta:

$$F_X^{-1}(p) = inf\{x : F_X(x) \geq p\}. \tag{1.1.1}$$

Lielums $F_X^{-1}(p)$ ir p kvantile jeb $100p$ procentīle sadalījumam F_X. Kvantilei p lieto apzīmējumu q_p. Jāievēro, ka populācijas proporcija p (attiecībā pret sadalījuma funkciju F_X) ir mazāka vai vienāda ar q_p. Ja $F_X(x)$ ir stingri augoša funkcija no x, tad $F_X^{-1}(p)$ ir x vērtība, kurai $F_X(x) = P(X \leq x) = p$[**?**].

Pieņemsim, ka $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ir gadījuma izlase no F_X, lieto pierakstu $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Lai definētu tolerances intervālu, ir jāprecizē tā procentuālo apjomu un ticamības līmeni, ko attiecīgi apzīmē ar p un $1-\alpha$, un tolerances intervāls tiek uzskatīts par procentuālā apjoma p un $(1-\alpha)$ pārklājuma (vai apjoma p un $(1-\alpha)$ ticamību) tolerances intervāls vai vienkārši kā $(p, 1-\alpha)$ tolerances intervāls $(0 < p < 1,\ 0 < \alpha < 1)$. Praktiskos pielietojumos p un $1-\alpha$ parasti pieņem vērtības no kopas $\{0.90, 0.95, 0.99\}$. Intervāls tiek konstruēts, izmantojot gadījuma izlasi $\boldsymbol{X}$, un tiek prasīts, lai tas satur ne mazāk kā proporciju p no izvēlētas populācijas ar ticamības līmeni $1-\alpha$. Formāli, vienpusējam tolerances intervālam $(p, 1-\alpha)$ formā $(-\infty, U(\boldsymbol{X})]$ jāapmierina nosacījumu

$$P_{\boldsymbol{X}}\left\{P_X\left(X \leq U(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{X}\right) \geq p\right\} = 1-\alpha, \tag{1.1.2}$$

kur X un sekojoši F_X ir neatkarīgi no $\boldsymbol{X}$. Tas ir, $U(\boldsymbol{X})$ tiek noteikts tā, ka vismaz proporcija p ir mazāka vai vienāda ar $U(\boldsymbol{X})$ ar ticamību $1-\alpha$. Intervāls $(-\infty, U(\boldsymbol{X})]$

tiek saukts par vienpusējo augšējo tolerances robežu. Var atzīmēt, ka, pamatojoties uz p kvantiles q_p definīciju (1.1.1), (1.1.2) var pierakstīt sekojoši

$$P_{\boldsymbol{X}}\{q_p \leq U(\boldsymbol{X})\} = 1 - \alpha. \tag{1.1.3}$$

No (1.1.3) redzam, ka $U(\boldsymbol{X})$ ir $1-\alpha$ augšējā ticamības robeža p kvantilei q_p.
$(p, 1-\alpha)$ vienpusējā apakšējā tolerances robeža $L(\boldsymbol{X})$ tiek definēta līdzīgi. Precīzāk, $L(\boldsymbol{X})$ nosaka sekojošā veidā

$$P_{\boldsymbol{X}}\left\{P_X\left(X \geq L(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{X}\right) \geq p\right\} = 1 - \alpha,$$

vai ekvivalenti,

$$P_{\boldsymbol{X}}\{L(\boldsymbol{X}) \leq q_{1-p}\} = 1 - \alpha.$$

$L(\boldsymbol{X})$ ir $1-\alpha$ apakšējā ticamības robeža kvantilei q_{1-p}.

1.2. Divpusējie tolerances intervāli

Eksistē divu veidu divpusējie tolerances intervāli. Pirmā veida intervālu konstruē tā, lai tas saturētu vismaz populācijas proporciju p ar ticamību $1-\alpha$, un tiek vienkārši uzskatīts par tolerances intervālu. Otrā veida tolerances intervāls tiek konstruēts tā, ka tam būtu jāsatur vismaz populācijas proporcija p no populācijas centra ar ticamību $1-\alpha$, un tas parasti tiek minēts kā vienādastu tolerances intervāls.
$(p, 1-\alpha)$ divpusējam tolerances intervālam $(L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X}))$ izpildās nosacījums

$$P_{\boldsymbol{X}}\left\{P_X\left(L(\boldsymbol{X}) \leq X \leq U(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{X}\right) \geq p\right\} = 1 - \alpha, \tag{1.2.1}$$

vai ekvivalenti,

$$P_{\boldsymbol{X}}\{F_X(U(\boldsymbol{X})) - F_X(L(\boldsymbol{X})) \geq p\} = 1 - \alpha. \tag{1.2.2}$$

Citiem vārdiem, intervāls $(L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X}))$ tiek konstruēts tā, ka tas satur vismaz proporciju p no populācijas ar ticamību $1-\alpha$. Lielumi $L(\boldsymbol{X})$ un $U(\boldsymbol{X})$ tiek uzskatīti par tolerances robežām. Ir svarīgi atzīmēt, ka $L(\boldsymbol{X})$ un $U(\boldsymbol{X})$ rēķināšana nereducējas uz ticamības robežu aprēķināšanu noteiktām procentīlēm[**?**].

Lai noteiktu vienādo astu tolerances intervālu, pieņem, ka $p > 0.5$. $A(p, 1-\alpha)$ vienādo astu tolerances intervāls $(L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X}))$ ir tāds, ka ar ticamību $1-\alpha$ ne vairāk kā proporcija $\frac{1-p}{2}$ no populācijas ir mazāka par $L(\boldsymbol{X})$ un ne vairāk kā proporcija $\frac{1-p}{2}$ no populācijas ir lielāka par $U(\boldsymbol{X})$. Šo nosacījumu var uzrakstīt arī ar procentīļu palīdzību. Ievēro, ka nosacījums $L(\boldsymbol{X}) \leq q_{\frac{1-p}{2}}$ ir ekvivalents ar nosacījumu, ka ne vairāk kā proporcija $\frac{1-p}{2}$ no populācijas mazāka par $L(\boldsymbol{X})$, un nosacījums $q_{\frac{1+p}{2}} \leq U(\boldsymbol{X})$ ir ekvivalents ar nosacījumu, ka proporcija $1-\frac{1+p}{2}=\frac{1-p}{2}$ no populācijas ir lielāka par $U(\boldsymbol{X})$. Konsekventi, intervālam $(L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X}))$ ir jābūt par $(p, 1-\alpha)$ vienādo astu tolerances intervālu un jāizpildās nosacījumam

$$P_{\boldsymbol{X}}\Big(L(\boldsymbol{X}) \leq q_{\frac{1-p}{2}} \text{ un } q_{\frac{1+p}{2}} \leq U(\boldsymbol{X})\Big) = 1-\alpha. \tag{1.2.3}$$

1.3. Izdzīvošanas varbūtības novērtējums

Dažos praktiskos pielietojumos tiek prasīts novērtēt varbūtību, ka gadījuma lielums pārsniegs kādu konkrētu vērtību. Piemēram, mūža garuma datu analīzē, ir svarīgi novērtēt varbūtību, ka objekta dzīves ilgums pārsniegs noteiktu vērtību. Tāda varbūtība parasti tiek uzskatīta par izdzīvošanas varbūtību. Gadījumā, kad tiek veikta darba drošības kontrole kādā rūpnīcā, ir svarīgi novērtēt, vai kaitīgo vielu iedarbība uz strādnieku nepārsniedz noteiktu robežu (parasti to nosaka darba drošības un veselības administrācija). Šo uzskata par *pārsniegšanas varbūtību*. Šādā gadījumā mēs esam ieinteresēti noteikt tieši apakšējo tolerances robežu.

Pieņem, ka X ir nepārtraukts gadījuma lielums ar sadalījuma funkciju $F_X(x)$. Dotam t definē izdzīvošanas varbūtību $S_t = P(X > t) = 1 - F_X(t)$. Pieņem, ka $\boldsymbol{X}$ ir izlase no F_X, un $L(\boldsymbol{X}) = L(\boldsymbol{X}; p)$ ir $(p, 1-\alpha)$ apakšējā tolerances robeža X sadalījumam. Ja ir dota apakšējā tolerances robeža, tad

$$P_{\boldsymbol{X}}\{P_X(X \geq L(\boldsymbol{X}; p)|\boldsymbol{X}) \geq p\} = 1 - \alpha.$$

Tas ir,

$$P_{\boldsymbol{X}}\Big\{S_{L(\boldsymbol{X};p)} \geq p\Big\} = 1 - \alpha.$$

Ja $L(\boldsymbol{X}; p) \geq t$, tad acīmredzami iegūst $S_t \geq S_{L(\boldsymbol{X};p)}$. Turklāt, ja $S_{L(\boldsymbol{X};p)} \geq p$, varam secināt, ka $S_t \geq p$, ja $L(\boldsymbol{X}; p) \geq t$. Tātad tā ir maksimālā p vērtība, kurai $L(\boldsymbol{X}; p) \geq t$ dod S_t apakšējo robežu $1 - \alpha$,un apzīmējam ar p_l. Tas ir,

$$p_l = \max\{p : L(\boldsymbol{L}; p) \geq t\}. \tag{1.3.1}$$

Vispārīgi runājot, $L(\boldsymbol{X}; p)$ ir dilstoša funkcija no p, un tātad maksimums (1.3.1) tiek sasniegts, kad $L(\boldsymbol{X}; p) = t$. Tas ir, p_l ir atrisinājums vienādībai $L(\boldsymbol{X}; p) = t$. Apakšējā tolerances robeža var tikt izmantota arī vienpusējos hipotēžu testos attiecībā uz S_t. Tas ir, ja veicam testu

$$H_0 : S_t \leq p_0 \quad \text{un} \quad H_a : S_t > p_0$$

pie līmeņa α, tad H_0 tiks noraidīta, ja $(p_0, 1-\alpha)$ apakšējā tolerances robeža ir lielāka par t[?].

Augšējā ticamības robeža pārsniegšanas varbūtībai tiek bieži pielietota, lai novērtētu kaitīgo vielu ietekmi darba vietā. Piemēram, ja t apzīmē kaitīgo vielu iedarbības kritisko līmeni un X apzīmē vielu ietekmes mērvienību uz strādnieku, tad pārsniegšanas varbūtība tiktu definēta kā $P(X > t)$. Ja $U(\boldsymbol{X}; p)$ ir $(p, 1-\alpha)$ augšējā tolerances robeža, un tā ir mazāka vai vienāda ar t, tad mēs varam secināt, ka $P(X > t)$ ir mazāka par $1-p$. Līdzīgi kā (1.3.1), secinām, ka, ja $p_u = \max\{p : U(\boldsymbol{X}; p) \leq t\}$, tad $1-p_u$ ir $1-\alpha$ augšējā ticamības robeža pārsniegšanas varbūtībai. Vispārīgi runājot, $U(\boldsymbol{X}; p)$ ir nedilstoša funkcija no p, un p_u ir atrisinājums vienādībai $U(\boldsymbol{X}; p) = t$.

2. Pamatformulas

Šajā nodaļā tiks apskatīts un pierādīts rezultāts, kuram ir svarīga loma tolerances intervālu iegūšanā normālajam sadalījumam un citiem normāli bāzētiem modeļiem.

Pieņemsim, ka $X \sim N(0, c)$ neatkarīgi no $Q \sim \frac{\chi^2_m}{m}$, kur χ^2_ν apzīmē hī-kvadrāta gadījuma mainīgo ar brīvības pakāpēm m. $0 < p < 1$, $0 < \gamma < 1$ un ar Φ apzīmēsim standarta normālo sadalījuma funkciju.

(i) Faktoram k_1 atbilst nosacījums

$$P_{X,\,Q}\Big(\Phi\Big(X + k_1\sqrt{Q}\Big) \geq p\Big) = \gamma \tag{2.0.1}$$

ir dots sekojošā veidā

$$k_1 = \sqrt{c} \times t_{m;\,\gamma}\left(\frac{z_p}{\sqrt{c}}\right), \tag{2.0.2}$$

kur z_p apzīmē p kvantili standarta nomālajam sadalījumam, un $t_{\nu;\,\eta}(\delta)$ apzīmē η kvantili necentrētam t sadalījumam ar brīvības pakāpēm ν un necentralitātes parametru δ.

(ii) Faktors k_2, kas apmierina

$$P_{X,\,Q}\Big(\Phi(X + k_2\sqrt{Q} - \Phi(X - k_2\sqrt{Q}) \geq p\Big) = \gamma \tag{2.0.3}$$

ir atrisinājums integrālajam vienādojumam

$$\sqrt{\frac{2}{\pi c}} \int_0^\infty P_Q\left(Q \geq \frac{\chi^2_{1;\,p}(x^2)}{k_2^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2c}} dx = \gamma, \tag{2.0.4}$$

kur $\chi^2_{\nu;\,\eta}(\delta)$ apzīmē η kvantili necentrālajam hī-kvadrāta sadalījumam ar brīvības pakāpēm ν un necentralitātes parametru δ.

(iii) k_2 aproksimācija, kurai atbilst nosacījums (2.0.4) ir dota sekojošā veidā

$$k_2 \simeq \left(\frac{m\chi^2_{1;\,p}(c)}{\chi^2_{m;\,1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.0.5}$$

kur $\chi^2_{\nu;\,\eta}$ apzīmē η kvantili hī- kvadrāta sadalījumam ar brīvības pakāpēm ν (un $\simeq$ nozīmē ekvivalents, atbilstošs).

Pierādījums. (i) Jāievēro, ka (2.0.1) satur iekšējo varbūtības nevienādību tad un tikai tad, ja $X + k_1\sqrt{Q} \geq z_p$. Tātad var (2.0.1) pierakstīt kā

$$\begin{aligned} P_{X,\,Q}\big(X + k_1\sqrt{Q} \geq z_p\big) &= P_{X,\,Q}\left(\frac{X - z_p}{\sqrt{Q}} \geq -k_1\right) \\ &= P_{X,\,Q}\left(\sqrt{c}\,\frac{X/\sqrt{c} + z_p/\sqrt{c}}{\sqrt{Q}} \leq k_1\right) \\ &= \gamma. \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

Lai iegūtu otro soli formulā (2.0.6), jāizmanto fakts, ka X un $-X$ ir identiski sadalīti. Tādēļ, ka $X/\sqrt{c} \sim N(0, c)$ neatkarīgi no $Q \sim \frac{\chi^2_m}{m}$, iegūstam

$$\frac{X/\sqrt{c} + z_p/\sqrt{c}}{\sqrt{Q}} \sim t_m\left(\frac{z_p}{\sqrt{c}}\right),$$

kur $t_\nu(\delta)$ apzīmē necentrālu t gadījuma mainīgo ar brīvības pakāpēm ν un necentralitātes parametru δ. Tādēļ, k_1, kas apmierina (2.0.6) ir dots ar (2.0.2).

(ii) Ievērosim, ka fiksētam X, $\Phi(X + r) - \Phi(X - r)$ ir augoša funkcija no r. Tādēļ, fiksētam X, $\Phi(X + k_2\sqrt{Q}) - \Phi(X - k_2\sqrt{Q}) \leq p$ tad un tikai tad, ja $k_2\sqrt{Q} > r$ vai $Q > \frac{r^2}{k_2^2}$. kur r ir atrisinājums vienādojumam

$$\Phi(X + r) - \Phi(X - r) = p,$$

vai ekvivalenti,

$$P_Z\big((Z - X)^2 \leq r^2 | X\big) = p, \tag{2.0.7}$$

Z ir standarta normālais gadījuma lielums. Fiksētam X, $(Z - X)^2 \sim \chi^2_1(X^2)$, kur $\chi^2_m(\delta)$ apzīmē necentrālu hī-kvadrāta gadījuma mainīgo ar necentralitātes parametru δ. Tādēļ, nosacīti dotais X^2, r^2, kuram atbilst nosacījums (2.0.7) ir p

kvantile no $\chi^2_1(X^2)$, kuru apzīmēsim ar $\chi^2_{1;\,p}(X^2)$. Lietojot šos rezultātus, un, ievērojot, ka r funkcija no X^2 un p, iegūsim

$$\begin{aligned} P_Q\Bigg(\Phi(X + k_2\sqrt{Q}) - \Phi(X - k_2\sqrt{Q}) > p \;\Bigg|\; X\Bigg) &= P_Q\Bigg(Q > \frac{r^2}{k_2^2}\Bigg| X\Bigg) \\ &= P_Q\Bigg(Q > \frac{\chi^2_{1;\,p}(X^2)}{k_2^2}\Bigg| X\Bigg). \end{aligned}$$

Ņemot matemātisko cerību attiecībā uz sadalījumu no X, varam redzēt, ka faktoram k_2 izpildās

$$E_X\Bigg[P\Bigg(Q > \frac{\chi^2_{1;\,p}(X^2)}{k_2^2}\Bigg)\Bigg] = \gamma. \tag{2.0.8}$$

Zinot, ka $X \sim N(0, c)$, var pārrakstīt (2.0.8) kā

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} P\Bigg(Q > \frac{\chi^2_{1;\,p}(x^2)}{k_2^2}\Bigg) e^{-\frac{x^2}{2c}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \int_{0}^{\infty} P\Bigg(Q > \frac{\chi^2_{1;\,p}(x^2)}{k_2^2}\Bigg) e^{-\frac{x^2}{2c}} dx \\ &= \gamma. \end{aligned} \tag{2.0.9}$$

(iii) k_2 aproksimācija var tikt iegūta no (2.0.8) sekojoši. Pieņemsim, ka $V = X^2$ un $g(V) = P_Q\Big(Q > \frac{\chi^2_{1;\,p}(V)}{k_2^2}\Big)$. Lietojot izvedumu Teilora rindā pie $V = E(V) = c$, iegūst

$$g(V) = g(c) + (V - c)\frac{\partial g(V)}{\partial V}\bigg|_{V=c} + \frac{(V-c)^2}{2!}\frac{\partial^2 g(V)}{\partial V^2}\bigg|_{V=c} + \ldots$$

Ievērojot, ka $\frac{V}{c} \sim \chi^2_1$, un, ņemot matemātisko cerību abām pusēm, iegūstam

$$\begin{aligned} E(g(V)) &= g(c) + c^2\frac{\partial^2 g(V)}{\partial V^2}\bigg|_{V=c} + \ldots \\ &= g(c) + O(c^2). \end{aligned}$$

Visbeidzot, $E(g(V)) \simeq g(c)$, un lietojot aproksimāciju (2.0.8), iegūstam

$$P_Q\Bigg(Q > \frac{\chi^2_{1;\,p}(c)}{k_2^2}\Bigg) \simeq \gamma. \tag{2.0.10}$$

Tā kā $Q \sim \frac{\chi^2_m}{m}$, tad no izteiksmes (2.0.10) seko, ka $\frac{\chi^2_{1;\,p}(c)}{k_2^2} \simeq \frac{\chi^2_{m;\,1-\gamma}}{m}$, un kā atrisinājumu k_2 mēs iegūstam (iii).

$\square$

3. Tolerances intervāli normāli sadalītai populācijai

3.1. Vienpusējās tolerances robežas normāli sadalītai populācijai

Pieņem, ka $X_1, \ldots, X_n$ ir izlase no $N(\mu, \sigma^2)$ populācijas ar nezināmu vidējo vērtību μ un nezināmu dispersiju σ^2. Izlases vidējā vērtība $\bar{X}$ un izlases dispersija S^2 ir definētas sekojoši

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{un} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Ar z_p apzīmē p kvantili standarta normālajam sadalījumam. Tad p-tā kvantile no $N(\mu, \sigma^2)$ ir formā

$$q_p = \mu + z_p\sigma.$$

$1-\alpha$ augšējā ticamības robeža kvantilei q_p ir $(p, 1-\alpha)$ vienpusējā augšējā tolerances robeža normāli sadalītai populācijai. Parasti praksē tiek prasīta augšējā robeža kvantilei q_p, ja $p > 0.5$, bet apakšējā robeža, ja $p < 0.5$[?].

3.1.1. Klasiskā pieeja

Pieņem, ka $(p, 1-\alpha)$ augšējā tolerances robeža ir formā $\bar{X} + k_1 S$. Faktors k_1 tiek saukts par *tolerances faktoru*, to nosaka tā, ka vismaz proporcija p no populācijas mērījumiem ir mazāka par $\bar{X} + k_1 S$ ar ticamību $1-\alpha$. Tas ir,

$$P_{\bar{X},S}\{P(X < \bar{X} + k_1 S | \bar{X}, S) > p\} = 1 - \alpha, \tag{3.1.1}$$

kur $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pieņemsim, ka $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, $Z_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0, \frac{1}{n})$, $U^2 = \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$, kur χ^2_m apzīmē hī-kvadrāta gadījuma mainīgo ar m brīvības pakāpēm, (3.1.1) var pierakstīt sekojoši

$$P_{Z_n,U}\{P(Z < Z_n + k_1U|Z_n,U) > p\} = P_{Z_n,U}\{\Phi(Z_n + k_1U) > p\} \\ = 1 - \alpha. \tag{3.1.2}$$

Tā kā $Z_n \sim N(0, \frac{1}{n})$ neatkarīgi no $U^2 \sim \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$, var pielietot rezultātu (2.0.2), kur $c = \frac{1}{n}$, $\gamma = 1 - \alpha$ un $m = n - 1$, lai iegūtu

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha}(z_p\sqrt{n}), \tag{3.1.3}$$

kur $t_{m,1-\alpha}(\delta)$ apzīmē $1-\alpha$ kvantili necentrālajam t sadalījumam ar brīvības pakāpēm m, un ar necentralitātes parametru δ. Visbeidzot, $(p, 1-\alpha)$ augšējā tolerances robeža ir dota ar

$$\bar{X} + k_1S = \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha}(z_p\sqrt{n})\frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{3.1.4}$$

tas pats faktors k_1 var tikt izmantots, lai iegūtu $(p, 1-\alpha)$ apakšējo tolerances robežu, kas dota ar $\bar{X} - k_1S$.

3.1.2. Izdzīvošanas vai pārsniegšanas varbūtības novērtēšana normāli sadalītai populācijai

$1-\alpha$ apakšējā ticamības robeža izdzīvošanas varbūtībai $S_t = P(X > t)$, kur X ir normāli sadalīts gadījuma lielums un t ir dots skaitlis, kuru var viegli iegūt no 2. nodaļas. Vērsīsim īpašu uzmanību uz to, ka $1-\alpha$ apakšējā ticamības robeža varbūtībai S_t ir atrisinājums (attiecībā uz p) vienādojumam

$$t_{n-1;1-\alpha}(z_p\sqrt{n}) = \frac{\bar{X} - t}{S/\sqrt{n}}. \tag{3.1.5}$$

Pie dota izlases lieluma, p, $1-\alpha$, $\bar{X}$, S un t, vērtība p, kurai atbilst nosacījums (3.1.5) var tikt iegūta, pirmkārt, risinot $z_p\sqrt{n}$ un tad, risinot rezultējošo p vienādojumu. Lielums S_t tiek uzskatīts par pārsniegšanas varbūtību, tā kā tā ir vienkārši varbūtība, ka X pārsniegs noteikto vērtību t[**?**].

3.1.3. Lognormālais sadalījums

Dati no lognormālā sadalījuma var tikt veiksmīgi pielietoti metodēm, kas balstītas uz normālo sadalījumu, tiem tikai jāveic logaritmiskas transformācijas.

Gadījuma lielums Y ir lognormāli sadalīts, tas ir, $Y \sim \text{lognormal}(\mu, \sigma^2)$, ja $X = \ln(Y) \sim N(\mu, \sigma^2)$. Varbūtību blīvuma funkcija no Y ir dota veidā

$$f(y|\,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y\sigma} \exp\left[-\frac{(ln\, y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\ y > 0,\ \sigma > 0,\ -\infty < \mu < \infty. \tag{3.1.6}$$

$Y_1, \ldots, Y_n-$ izlase no lognormal(μ, σ^2) sadalījuma. $X_1 = \ln(Y_1), \ldots, X_n = \ln(Y_n)$ ir izlase no normālā sadalījuma ar vidējo vērtību μ un dispersiju σ^2. Tādejādi, pieejas, kas balstās uz normālo sadalījumu, var tik viegli pielietotas, konstruējot vienpusējās tolerances robežas, tolerances intervālus vai vienādo astu tolerances intervālus, kas balstīti uz izlasi $X_1, \ldots, X_n$. Lai to ilustrētu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{un} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

$\bar{X} + k_1\frac{S}{\sqrt{n}}$ ir vienpusējā augšējā tolerances robeža normālajam sadalījumam vai sadalījumiem, kas balstīti uz logtransformētām izlasēm. Tātad, $\exp\left(\bar{X} + k_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ ir vienpusējā augšejā tolerances robeža izvēlētajai lognormālai populācijai. Līdzīgi var iegūt tolerances vai venādastu tolerances intervālus. Turklāt, lai noteiktu izdzīvošanas laika brīdī t, jāatzīmē, ka $P(Y > t) = P(\ln(Y) > \ln(t)) = P(X > \ln(t))$, un rezultāti ar t aizvietotu ar $\ln(t)$ var tikt izmantoti. Īpaši, ja ir jāiegūst apakšējo ticamības robežu varbūtībai $P(Y > t)$.

3.2. Divpusējie tolerances intervāli normāli sadalītai populācijai

Tiek uzskatīts, ka kāds objekts ir piemērots paredzētajam mērķim, ja ar to saistītie mērījumi iekrītīntervālā (L_l, L_u), kur L_l un L_u ir kāda specifiski noteikta apakšējā un augšējā robeža. Vispārīgi runājot, tehniskiem ražojumiem tiek prasīts, lai tie atbilstu kādiem specifiskiem nosacījumiem. Ja vairākums no objektiem (teiksim, proporcija p) lielā mērā atbilst noteiktajai prasībai, tad šie objekti tiek akceptēti. Šī vairākuma atbilstība var tikt noteikta, izmantojot atbilstošu divpusējo tolerances intervālu. Piemēram, ja $(0.95, 0.99)$ divpusējais tolerances intervāls ir ietverts (L_l, L_u), tad liela daļa tiks akceptēta. Tas ir tādēļ, ka vismaz 95% no šiem objektiem jeb produktiem iekrīt tolerances intervālā ar ticamību ne mazāku kā 99% , un tolerances intervāls ietilpst (L_l, L_u). Šajā sadaļā tiks aprakstītas metodes tolerances intervālu konstruēšanai, ka tie saturētu ne mazāk kā proporciju p no normāli sadalītas populācijas ar ticamību $1-\alpha$.

Divpusējais tolerances faktors k_2 tiek noteikts tā, lai intervāls $\bar{X} \pm k_2 S$ saturētu vismaz proporciju p no normāli sadalītas populācijas ar ticamību $1-\alpha$. Tas ir, k_2 nosaka sekojoši

$$P_{\bar{X},S}\{P_X(\bar{X} - k_2 S \le X \le \bar{X} + k_2 S | \bar{X}, S) \ge p\} = 1 - \alpha, \tag{3.2.1}$$

kur $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ neatkarīgi no $\bar{X}$ un S. Iekšējā varbūtības nevienādība var tikt izteikta kā

$$P_X\Big(\frac{\bar{X} - \mu - k_2 S}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\bar{X} - \mu + k_2 S}{\sigma}\Big) \ge p$$
$$\Leftrightarrow \Phi(Z_n + k_2 U) - \Phi(Z_n - k_2 U) \ge p, \tag{3.2.2}$$

kur Φ apzīmē standartu normālo kumulatīvo sadalījuma funkciju , $Z_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0, \frac{1}{n})$ neatkarīgi no $U^2 = \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \frac{\chi^2_m}{m}$ ar $m = n-1$. Izmantojot (3.2.2), mēs varam uzrakstīt (3.2.1) kā

$$P_{Z_n,U}(\Phi(Z_n + k_2 U) - \Phi(Z_n - k_2 U) > p) = 1 - \alpha. \tag{3.2.3}$$

tagad, pielietojot rezultātu (2.0.4), kur $c = \frac{1}{n}$, varam redzēt, ka k_2 ir atrisinājums integrālajam vienādojumam

$$\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_0^{\infty} P\left(\chi^2_m > \frac{m\chi^2_{1;p}(z^2)}{k_2^2}\right) e^{-\frac{1}{2}nz^2} dz = 1 - \alpha. \tag{3.2.4}$$

Izmantojot rezultātu (2.0.5) (ar $c = \frac{1}{n}$ un $\gamma = 1 - \alpha$), var atrast vienkāršu, bet nosacījumiem atbilstošu aproksimāciju

$$k_2 \simeq \left(\frac{m\chi^2_{1;p}(1/n)^2}{\chi_{m;\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2.5}$$

kur $\chi^2_{m;\alpha}$ apzīmē α kvantili hī-kvadrāta sadalījumam ar m brīvības pakāpēm, un $\chi^2_{m;\alpha}(\delta)$ apzīmē α kvantili hī-kvadrāta sadalījumam ar brīvības pakāpēm m un necentralitātes parametru δ[**?**].

Iegūtā aproksimācija ir apmierinoša pat mazām izlasēm (apjomā 3), p un $1-\alpha$ pieņem vērtības no kopas $\{0.9, 0.95, 0.99\}$. Lai parādītu šīs aproksimācijas precizitāti, var aprēķināt tolerances faktorus, kas apmierina (3.2.4) (skatīt pielikumā programmas kodu)un aproksimācijas, kas dotas (3.2.5), un n pieņem vērtības no 3 līdz 10, $p = 0.90, 0.95, 0.99$ un $1 - \alpha = 0.90, 0.95$.

3.1. tabula Divpusējā tolerances faktora aproksimācija (a) un tiešais faktors (b).

	$1-\alpha = 0.90$					
	p					
	0.90		0.95		0.99	
n	a	b	a	b	a	b
3	5.85	5.79	6.92	6.82	8.97	8.82
4	4.17	4.16	4.94	4.91	6.44	6.37
5	3.49	3.50	4.15	4.14	5.42	5.39
6	3.13	3.14	3.72	3.72	4.87	4.85
7	2.90	2.91	3.45	3.46	4.52	4.50
8	2.74	2.75	3.26	3.27	4.27	4.27
9	2.63	2.64	3.13	3.13	4.10	4.09
10	2.55	2.55	3.02	3.03	3.96	3.96

Šajā tabulā var redzēt, ka aproksimācija ir efektīva pat mazām izlasēm. Ja $n \geq 10$, tad atšķirības starp eksaktajiem un aproksimētajiem faktoriem retos gadījumos pārsniedz 0.01.

3.3. Vienādo astu tolerances intervāli normālajam sadalījumam

Šajā apakšnodaļā tiks aprakstīta metode tolerances intervāla (I_l, I_u) konstruēšanai, kas iekļautu vismaz $100p\%$ no normāli sadalītās populācijas čentra datiemār ticamību $1-\alpha$. Tas ir, intervāls (I_l, I_u) tiek konstruēts, izmantojot izlasi, tā, ka lielākā proporcija no normāli sadalītiem datiem, kas atrodas zem I_l ir $\frac{1-p}{2}$ un ka lielākā proporcija, kas atrodas virs I_u ir $\frac{1-p}{2}$, ar ticamību $1-\alpha$. Intervāls tiek meklēts tā, ka tas iekļautu intervālu $\left(\mu - z_{\frac{1+p}{2}}\sigma, \mu + z_{\frac{1+p}{2}}\sigma\right)$ ar ticamību $1-\alpha$ (balstoties uz teoriju apakšnodaļā 1.2.). "Dabiski"par (I_l, I_u) izvēlēties $(\bar{X} - k_e S, \bar{X} + k_e S)$, kur k_e tiek noteikts sekojoši

$$P_{\bar{X},S}\Big(\bar{X} - k_e S < \mu - z_{\frac{1+p}{2}}\sigma \text{ un } \mu + z_{\frac{1+p}{2}}\sigma < \bar{X} + k_e S\Big) = 1-\alpha. \tag{3.3.1}$$

Pēc $\bar{X}$ standartizēšanas un nosacījumu pārkārtošanas, varam redzēt, ka (3.3.1) ir ekvivalents ar

$$P_{Z,S}\left(\frac{Z/\sqrt{n}+z_{\frac{1+p}{2}}}{S/\sigma}<k_e \text{ un } \frac{Z/\sqrt{n}-z_{\frac{1+p}{2}}}{S/\sigma}\geq -k_e\right)=1-\alpha, \tag{3.3.2}$$

kur $Z=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$. Pieņemsim, ka $\delta=\sqrt{n}\times z_{\frac{1+p}{2}}$, un $U^2=\frac{S^2}{\sigma^2}$. Izmantojot šos nosacījumus, varam (3.3.2) pierakstīt sekojoši

$$P_{Z,S}(Z<-\delta+k_e\sqrt{n}U \text{ un } Z>-\delta-k_e\sqrt{n}U)=1-\alpha. \tag{3.3.3}$$

Ievērosim, ka šīs nevienādības ir spēkā tad, ja $\delta-k_e\sqrt{n}U<-\delta+k_e\sqrt{n}U$ vai līdzvērtīgi $U^2>\frac{\delta^2}{k_e^2 n}$. Tātad (3.3.3) var izteikt sekojoši

$$E_U\left[P_Z\left(\delta-k_e\sqrt{n}U<Z<-\delta+k_e\sqrt{n}U\middle|U^2>\frac{\delta^2}{k_e^2 n}\right)\right]=1-\alpha, \tag{3.3.4}$$

kur E_U apzīmē matemātisko cerību attiecībā pret U. Zinot, ka $U^2\sim\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$, no (3.3.4) seko, ka k_e ir atrisinājums integrālvienādojumam

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{\frac{(n-1)\delta^2}{k_e^2 n}}^{\infty}\left(2\Phi\left(-\delta+\frac{k_e\sqrt{nx}}{\sqrt{n-1}}\right)-1\right)e^{-x/2}x^{\frac{n-1}{2}-1}dx=1-\alpha, \tag{3.3.5}$$

kur $\Phi(x)$ apzīmē standarta normālo sadalījuma funkciju. Lai iegūtu (3.3.5) no (3.3.4), izmantojām sakarību $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$[?].

4. Praktiskais pielietojums

Piemērs 1. *Piesārņojuma līmeņa novērtēšana.*

Vienpusējās tolerances robežas parasti tiek lietotas, lai novērtētu piesārņojuma līmeni darba vietā vai kādā reģionā. Šajā piemērā novērtēsim svina līmeni gaisā kādā laboratorijā. Tabulā attēloti svina līmeņi gaisā, kas apkopoti Nacionālajā darba drošības un veselības institūta laboratorijā, veselības riska novērtēšanai. Šie līmeņi tika noteikti 15 pēc iespējas dažādākās vietās.

4.1. tabula : Svina līmenis gaisā(μ/m^3)

200	120	15	7	8	6	48	61
380	80	29	1000	350	1400	110	

Normālais sadalījums labi atbilst logtransformētiem svina līmeņiem(skatīt apakšnodaļu 3.1.3), tapēc sākumā sākumā aprēķinājām augšējo tolerances robežu balstītu uz logtransformētiem datiem, lai novērtētu maksimālo svina līmeni laboratorijā.
Veicu aprēķinus, izmantojot programmu R (programmas kods pielikumā). Izlases vidējā vērtība un standartnovirze logtransformētiem datiem ir sekojoša: $\bar{x} = 4.333$ un $s = 1.739$. $(0.95, 0.90)$ augšējā tolerances robeža svina līmenim gaisā (skatīt (3.1.4))ir $\bar{x} + k_1 s = 4.333 + 2.329(1.739) = 8.383$. Tolerances faktoru $k_1 = 2.329$ iegūstam no tabulas $(n = 15, 1 - \alpha = 0.90, p = 0.95)$, vai aprēķinam pēc formulas (3.1.3). Tātad, $\exp(8.383) = 4372$ ir $(0.95, 0.90)$ augšējā tolerances robeža svina līmeņiem gaisā. Darba drošības un veselības administrācijas noteiktā robeža svina līmenim gaisā ir 50 $\mu g/m^3$. Darba vieta tiek uzskatīta par drošu, ja augšējā tolerances robeža nepārsniedz šo noteikto robežu. Acīmredzami, ka augšējā robeža 4372 to stipri pārsniedz, tātad nevar uzskatīt, ka darba vieta ir droša. Šajā piemērā var mēģināt arī aprēķināt ticamības

intervālu vidējai vērtībai sākotnējiem datiem (ja $n = 15, 1-\alpha = 0.90$) pēc formulas $\bar{X} \pm t_{n-1;0.975}\frac{S}{\sqrt{n}}$, kur $t_{m;1-\alpha}$ apzīmē $1-\alpha$ kvantili t sadalījumam ar brīvības pakāpēm m. Iegūst, ka vidējā vērtība atrodas no 252.4307 līdz 256.1026. Ja pat apakšējā ticamības robeža stipri pārsniedz noteiktos 50 $\mu g/m^3$, tad varam secināt, ka šī darba vieta nevar tikt uzskatīta par drošu. Tomēr ticamības intervāls neatspoguļo, ka 95% no apskatāmajiem datiem atradīsies virs šis noteiktās robežas, bet dod informāciju par vidējo vērtību.

Lai novērtētu varbūtību, ka svina līmenis nejauši izvēlētā vietā pārsniedz noteikto robežu, aprēķināsim 95% apakšējo ticamības robežu pārsniegšanas varbūtībai $P(X > R) = P(X > 50)$. Izmantojot (1.1.3), meklējam $(p, 0.95)$ apakšējo tolerances robežu vienādu ar $\ln(50)$, un p atrisinājumu. Tas ir, 95% apakšējā tolerances robeža varbūtībai $P(X > 50)$ ir atrisinājums vienādojumam

$$\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{n}}\, t_{n-1;0.95}(z_p\sqrt{n})s = 4.333 - \frac{1}{\sqrt{15}}\, t_{14;0.95}(z_p\sqrt{15}) \times 1.739 = \ln(50).$$

Lai atrisinātu šo vienādojumu, pirmkārt, atzīmējam, ka $t_{14;0.95}(z_p\sqrt{15}) = 0.9376$. Tālāk aprēķinām $z_p\sqrt{15} = -0.7486$ jeb $p = 0.423$. Tātad, $P(X > 50)$ ir vismaz 0.423 ar ticamību 0.95.

Piemērs 2. *Uzpildes mašīnu monitorings.*

Mašīnai ir uzlikts iepildīt plastmasas pudelē litru piena. Maiņas beigās tika atlasīta izlase no 20 pudelēm, un tika smalki izmērīts katras pudeles piena daudzums. Šie mērījumi doti sekojošā tabulā

4.2. tabula :Piena daudzums pudelēs (litros)

0.968	0.982	1.030	1.003	1.046	1.020	0.997	1.010	1.027	1.010
0.973	1.000	1.044	0.995	1.020	0.993	0.984	0.981	0.997	0.992

Lai novērtētu uzpildes mašīnas precizitāti, aprēķināsim divpusējo tolerances intervālu, izmantojot dotās tabulas datus. Izlases vidējā vērtība $\bar{x} = 1.0036$ un dispersija $s = 0.0221$. Izmantojot šos lielumus, aprēķināsim $(0.99, 0.95)$ divpusējo tolerances intervālu. Tādēļ ar programmas R palīdzību aprēķinu tolerances faktora k_2 aproksimāciju, kas apmierina nosacījumu (3.2.5).

Iegūstam, ka $k_2 = 3.615$, pie nosacījumiem $(n = 20, p = 0.99, 1 - \alpha = 0.95)$. Tolerances intervāls $\bar{x} \pm k_2 s = 1.0036 \pm 3.615(0.0221) = 1.0036 \pm 0.07989$. Tātad, vismaz 99% pudeļu ir piepildītas ar piena apjomu, kas ir robežās no 0.9237 līdz 1.0835 litriem ar ticamību 0.95.

Secinājumi

Šajā darbā izdevies pierādīt, ka ticamības intervāls nesniedz līdzvērtīgus rezultātus salīdzinot ar tolerances intervālu. 1. piemērā ticamības intervāls atainoja, ka vidējā vērtība no datiem ar lielu ticamību pārsniegs noteikto robežu, taču nesniedza informāciju, kāds datu apjoms pārsniegs šo robežu. Varam secināt, ka tolerances intervāls deva prasībām atbilstošu rezultātu. Aprēķinātās aproksimācijas patiešām ir nosacījumiem atbilstošas. Teorētiski tika apskatīti pamatjautājumi saistībā ar parametriskajiem tolerances intervāliem, bet būtu ļoti interesanti izpētīt neparametriskos tolerances intervālus, atrast uzskatāmus piemērus, ko varētu paturpināt diplomdarbā.

A Izveidoto programmu kods

```
#tolerances faktora aproksimacija
n<-3
m<-n-1
p<-0.95
alpha<-0.1
sqrt(m*qchisq(p, 1, 1/n)/qchisq(alpha, m))
[1] 6.91856

n<-10
> m<-n-1
> p<-0.95
> alpha<-0.1
> sqrt(m*qchisq(p, 1, 1/n)/qchisq(alpha, m))
[1] 3.018395

#1.piemers
n<-15
d<-c(200,120,15,7,8,6,48,61,380,80,29,1000,350,1400,110)
d
[1]  200  120   15    7    8    6   48   61  380   80   29 1000  350 1400  110
l<-log(d)
l
[1] 5.298317 4.787492 2.708050 1.945910 2.079442 1.791759 3.871201 4.110874
[9] 5.940171 4.382027 3.367296 6.907755 5.857933 7.244228 4.700480
m<-mean(l)
```

```
m
[1] 4.332862
s<-sd(l)
s
[1] 1.739441
p<-0.95
alpha<-0.1
b<-1/sqrt(n)
qt(1-alpha,n-1,qnorm(p)*sqrt(n))*b
[1] 2.328977
sqrt(n)*(4.333-log(50))/1.739
[1] 0.9375715
#rekina ticamibas intervalu
mean(d)+qt(1-alpha,n-1,s/sqrt(n))
[1] 256.1026
mean(d)-qt(1-alpha,n-1,s/sqrt(n))
[1] 252.4307

#2.piemers
n<-20
l<-c(0.968,0.982,1.030,1.003,1.046,1.020,0.997,1.010,1.027,1.010,0.973,
1.000,1.044,0.995,1.020,0.993,0.984,0.981,0.997,0.992)
v<-mean(l)
v
[1] 1.0036
s<-sd(l)
s
[1] 0.02210120
m<-n-1
p<-0.99
alpha<-0.05
sqrt(m*qchisq(p, 1, 1/n)/qchisq(alpha, m))
```

```
[1] 3.614572
sqrt(m*qchisq(p, 1, 1/n)/qchisq(alpha, m))*s
[1] 0.07988639
l1<-v-sqrt(m*qchisq(p, 1, 1/n)/qchisq(alpha, m))*s
l1
[1] 0.9237136
l2<-v+sqrt(m*qchisq(p, 1, 1/n)/qchisq(alpha, m))*s
l2
[1] 1.083486
```

Kursa darbs “Statistiskie tolerances intervāli” izstrādāts LU Fizikas un Matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Margarita Fjodorova

____________________ ________________

(paraksts) (datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.
Vadītājs: doc. Dr.math. Jānis Valeinis

____________________ ________________

(paraksts) (datums)

Recenzents:

____________________ ________________

(paraksts) (datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā ________________

(datums)

____

(darbu pieņēma)

Darbs aizstāvēts kursa darbs gala pārbaudījuma komisijas sēdē

________________ prot. Nr. ________, vērtējums________

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: ________________ ________________

(Vārds, Uzvārds) (paraksts)